Soluciones del control t12 de Cálculo C (26 de febrero de 2024)

1. Sean $\bar{g}(x,y,z)=\left(x^2+z,x,y+z^2\right)$, $\bar{a}=(1,0,-1)$ y la curva $\bar{c}(t)=\left(e^t,t^2,-e^{-t}\right)$. [1.2 ptos] (.9+.3)

a] Hallar $\operatorname{div}\bar{g}$, $\operatorname{rot}\bar{g}$, el determinante jacobiano $\left|\mathbf{D}\bar{g}\right|$, el vector $\bar{a}\times\bar{g}(\bar{a})$ y el ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{g}(\bar{a})$.

b] Probar que la curva $\bar{c}(t)$ corta perpendicularmente en el punto $\bar{a}$ a la superficie $\operatorname{div}\bar{g}=0$.

a] $\operatorname{div}\bar{g}=2x+2z$. $\operatorname{rot}\bar{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ x^2+z&x&y+z^2\end{vmatrix}=(1,1,1)$. $J=\left|\mathbf{D}\bar{g}\right|=\begin{vmatrix}2x&0&1\\1&0&0\\0&1&2z\end{vmatrix}=1$. $\bar{a}\times\bar{g}(\bar{a})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=(1,-1,1)$.

$\frac{\bar{a}\cdot\bar{g}(\bar{a})}{\|\bar{a}\|\|\bar{g}(\bar{a})\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ forman un ángulo $\frac{2\pi}{3}$.

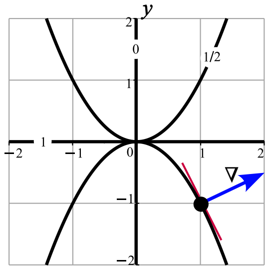
b] $x+z=0$ es un plano (al que pertenece $\bar{a}$), con vector perpendicular $(1,0,1)$. La curva pasa por $\bar{a}$ si $t=0$.
Su vector tangente en ese punto será $\bar{c}\,'(0)=\left(e^t,2t,e^{-t}\right)\big|_{t=0}=(1,0,1)$, el perpendicular al plano citado.

2. Sea $f(x,y)=\frac{x^4}{y^2+x^4}$, $f(0,0)=0$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0,\frac{1}{2},1$ y el $\nabla f(1,-1)$. [1.8 ptos]

b] En $(0,0)$, precisar si existen f_x y f_y, si f es continua y si es diferenciable. (.6+.5+.4+.3)

c] Hallar el vector $\bar{u}$ unitario para el que $D_{\bar{u}}f(1,-1)$ es máxima y el valor de esa derivada máxima.

d] Si $\bar{c}(t)=\left(t+1,t^2-1\right)$, calcular, mediante la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, la derivada de $h(t)=f(\bar{c}(t))$ en $t=0$.



a] $f=0\to x=0$. $\frac{x^4}{y^2+x^4}=C\to y^2=\left(\frac{1}{C}-1\right)x^4$. $C=\frac{1}{2}\to y=\pm x^2$, $C=1\to y=0$.

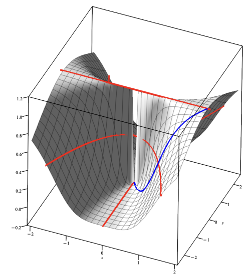
$\nabla f=\left(\frac{4x^3y^2}{(y^2+x^4)^2},-\frac{2x^4y}{(y^2+x^4)^2}\right)\xrightarrow{(1,-1)}\left(1,\frac{1}{2}\right)$ (perpendicular a la curva de nivel como debía).

b] $f(x,0)=\begin{cases}1,\ x\neq0\\0,\ x=0\end{cases}\Rightarrow f_x(0,0)$ **no existe**. $f(0,y)=0\ \forall y\Rightarrow\boxed{f_y(0,0)=0}$.

Con sólo ver $f(x,0)$ es claro que f es **discontinua** en el origen.

[Más largo: $f(x,mx^2)=\frac{1}{m^2+1}$, valor distinto en cada parábola $\Rightarrow$ discontinua.
De acercarnos por rectas no obtenemos nada: $f(x,mx)=\frac{x^2}{m^2+x^2}\xrightarrow{x\to0}0$].

Por no existir una parcial o no ser continua, f **no es diferenciable** en $(0,0)$.



c] La derivada es máxima en la dirección y sentido del gradiente y su valor es el $\|\nabla\|$.

$\left\|\left(1,\frac{1}{2}\right)\right\|=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{5}}\to\boxed{\bar{u}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$. Comprobamos que $D_{\bar{u}}f(1,-1)=\left(1,\frac{1}{2}\right)\cdot\bar{u}=\frac{5}{2\sqrt{5}}$.

[Bastaba mirar las curvas de nivel para saber que ∇f era múltiplo de $(2,1)$ y tener el $\bar{u}$].

d] $\bar{c}(0)=(1,-1)$, $\bar{c}\,'(t)=(1,2t)$, $\bar{c}\,'(0)=(1,0)$, $h'(0)=\nabla f\left(\bar{c}(0)\right)\cdot\bar{c}\,'(0)=\boxed{1}$.

3. Sean $F(x,y,z)=z^3+x^2+y^2$, la superficie S definida por $F=10$ y el punto $\bar{p}=(-1,1,2)\in S$. [1.8 ptos] (1.1+.7)

a] Hallar en $\bar{p}$ el plano tangente a la superficie S, la recta normal a S y el punto en que esta recta corta $z=0$.
Escribir un $\bar{u}$ unitario para el que sea $D_{\bar{u}}F(\bar{p})=0$.

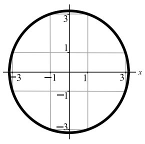
Elegir entre **b]** y **c]**: **b]** Dibujar sus cortes con $z=0$ y $x=0$ y una gráfica aproximada de S $\left[\sqrt{10}\approx3.16,\ \sqrt[3]{10}\approx2.15\right]$.

c] Comprobar que el teorema de la función implícita asegura que $F=10$ define una $z(x,y)$ de C^1 cerca de $\bar{p}$ y calcular z_x y z_y en $(-1,1)$ derivando implícitamente. ¿Hay $z(x,y)$ implícita C^1 cerca de $(1,3,0)$?

a] $\nabla F=\left(2x,2y,3x^2\right)\xrightarrow{(-1,1,2)}2(-1,1,6)$. Plano tangente: $(-1,1,6)\cdot(x+1,y-1,z-2)=0\to\boxed{z=\frac{1}{6}(14+x-y)}$.

Recta normal: $\bar{x}=(-1,1,2)+t(-1,1,6)=\boxed{(-1-t,1+t,2+6t)}$, que corta $z=0$ en $\boxed{\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},0\right)}$.

Cualquier $\bar{u}\perp\nabla$ nos vale, por ejemplo $\boxed{\bar{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}$.

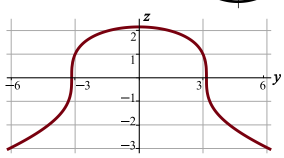


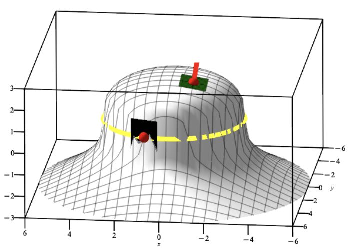
b] El corte con $z=0$ es una circunferencia: $x^2+y^2=10$, $R=\sqrt{10}\approx3.16$.
[Y lo es todo corte con $z=C<\sqrt[3]{10}$. Es de revolución.]

Corte con $x=0$: $z=\sqrt[3]{10-y^2}$, $z'=\frac{-2y}{(10-y^2)^{2/3}}$.

[Par, pendiente vertical en $\left(\sqrt{10},0\right)$. $z\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}-\infty$, $z'\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Puntos: $(0,\sqrt[3]{10})\approx(0,2.15)$, $(\sqrt{3},2)$, $(3,1)$, $(3\sqrt{2},-2)$].





c] $3z_xz^2+2x=0$, $z_x=-\frac{2x}{3z^2}\xrightarrow{\bar{p}}\frac{1}{6}$. $3z_yz^2+2y=0$, $z_y=-\frac{2y}{3z^2}\xrightarrow{\bar{p}}-\frac{1}{6}$. $\left[z=2+\frac{1}{6}(x-1)-\frac{1}{6}(y+1)\right.$ es el plano de arriba$\left.\right]$.
El TFI asegura que $F=10$ define $z(x,y)$ en todo punto de S con $z\neq0$. En $(1,3,0)$, $F_z=0$ y no es aplicable.
Despejando se tiene la única $z(x,y)=\left(10-x^2-y^2\right)^{1/3}$, pero no es de C^1 si $z=0$ (el plano tangente es vertical).