Cálculo - grupo C (2024) **resumen de cálculo diferencial**

$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\phi$, $\|\mathbf{a}\|=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$, $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\overset{(n=3)}{=}\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$.

$\mathbf{x}=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ recta que pasa por los puntos. $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}=0$ plano por $\mathbf{a}$ con normal $\mathbf{n}$.

Entorno: $B_r(\mathbf{a})\equiv\{\mathbf{x}:\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$. $\mathbf{a}$ es **interior** a $A\subset\mathbf{R}^n$ si existe $B_r(\mathbf{a})\subset A$. A **abierto** si $A=int\,A$.

$\partial A\equiv\{\mathbf{x}:\forall r,\ B_r(\mathbf{x})$ tiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n-A\}$. $\bar{A}=int\,A\cup\partial A$. A **cerrado** si $\mathbf{R}^n-A$ es abierto.

A **acotado** si existe $M\in\mathbf{R}$ tal que $\|\mathbf{a}\|<M\ \ \forall\mathbf{a}\in A$. A **compacto** si es cerrado y acotado.

Campo escalar: $f: D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. $\mathbf{a}\in intD$. Gradiente $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ [perpendicular a $f(\mathbf{x})=C$].

f es **continua** en $\mathbf{a}$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta$ entonces $|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|<\varepsilon$.

f continua en $\mathbf{a}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continua en $f(\mathbf{a})\Rightarrow g\circ f$ continua en $\mathbf{a}$.

$|f(r,\theta)-L|\le g(r)$ y $g(r)\to 0$ si $r\to 0\Rightarrow f(x,y)\to L$ cuando $(x,y)\to(0,0)$.

f continua en un compacto $A\Rightarrow f$ alcanza sus valores máximo y mínimo en A.

$f\in C^n$ en D abierto si sus derivadas parciales hasta orden n son continuas en todo $\mathbf{x}\in D$.

Derivada de f en $\mathbf{a}$ según el vector $\mathbf{v}$: $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})\equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h}\underset{\text{si } f\in C^1}{=}\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}$ [direccional, si $\|\mathbf{v}\|=1$].

f diferenciable en $\mathbf{a}$ si $\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{a}]{}0$. C^1 en un entorno $\Rightarrow$ diferenciable $\Rightarrow$ continua; existe $D_{\mathbf{v}}\ \forall\mathbf{v}$

Plano tangente
- a la gráfica de $z=f(x,y)$ en (a,b): $z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$.
- a S dada por $F(x,y,z)=K$ en $(a,b,c)\in S$: $\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0$.

$f\in C^2$ en un entorno de $\mathbf{a}\Rightarrow D_{kj}f(\mathbf{a})=D_{jk}f(\mathbf{a})$. Para $n=2$ su desarrollo de Taylor de orden 2 es:

$$f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\tfrac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2+f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+\tfrac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$

Función vectorial: $\mathbf{c}:[a,b]\to\mathbf{R}^m$, $\mathbf{c}(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ curva en $\mathbf{R}^n$.

$\mathbf{c}'(t)=(x_1'(t),\dots,x_n'(t))$ vector velocidad. Recta tangente a $\mathbf{c}$ en $\mathbf{c}(t_o)$: $\mathbf{x}=\mathbf{c}(t_o)+t\,\mathbf{c}'(t_o)$.

Campo vectorial: $\mathbf{f}=(f_1,\dots,f_m):D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ con f_k continuas en un entorno de $\mathbf{a}\in int\,D$.

Entonces es diferenciable en $\mathbf{a}$: $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v})=\mathbf{f}(\mathbf{a})+\mathbf{Df}(\mathbf{a})\mathbf{v}+o(\|\mathbf{v}\|)$, $\mathbf{Df}\equiv\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1&\cdots&\partial f_1/\partial x_n\\\cdots&\cdots&\cdots\\\partial f_m/\partial x_1&\cdots&\partial f_m/\partial x_n\end{pmatrix}$ matriz diferencial o jacobiana de $\mathbf{f}$.

Si $\begin{cases}y_1=f_1(x_1,..,x_n)\\\cdots\cdots\cdots\\y_n=f_n(x_1,..,x_n)\end{cases}$, $\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\equiv J\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\partial f_1/\partial x_1&\cdots&\partial f_1/\partial x_n\\\vdots&&\vdots\\\partial f_n/\partial x_1&\cdots&\partial f_n/\partial x_n\end{vmatrix}$ determinante jacobiano. $\left.\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\y=r\,\mathrm{sen}\,\theta\end{array}\right\}\to\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$.

Regla de la cadena: $\mathbf{R}^n\xrightarrow{\mathbf{g}}\mathbf{R}^m\xrightarrow{\mathbf{f}}\mathbf{R}^p$, $\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$ diferenciable en $\mathbf{g}(\mathbf{a})\Rightarrow\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{a})=\mathbf{Df}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$.

[En particular: $f(x(r,s),y(r,s))\to\begin{array}{l}f_r=f_xx_r+f_yy_r\\f_s=f_xx_s+f_yy_s\end{array}$; $f(x_1(t),...,x_n(t))\to\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$].

$\mathrm{div}\,\mathbf{f}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$, $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\f&g&h\end{vmatrix}=(h_y-g_z\,,\ f_z-h_x\,,\ g_x-f_y)$.

$\mathrm{rot}\,(\nabla f)=\mathbf{0}$, $\mathrm{div}(\nabla\times\mathbf{f})=0$.

Si $n=2$: $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$. $\nabla f=f_r\,\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}f_\theta\,\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_r=(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta)$, $\mathbf{e}_\theta=(-\mathrm{sen}\,\theta,\cos\theta)$.

Un teorema de la función implícita: Sea $F:\underset{(\mathbf{x},z)\to F(\mathbf{x},z)}{\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}}$ de C^1, $F(\mathbf{a},c)=0$ y $F_z(\mathbf{a},c)\ne 0$. Entonces existe una única $z=g(\mathbf{x})$ que cumple $F(\mathbf{x},g(\mathbf{x}))=0$ para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{a}$, z cerca de c, y son $\frac{\partial g}{\partial x_j}=-\frac{\partial F/\partial x_j}{\partial F/\partial z}$, $j=1,\dots,n$.

Teorema de la función inversa: Sea $\mathbf{f}:\underset{(u_1,..,u_n)\to(x_1,..,x_n)}{D\subset\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n}$ de C^1, $\mathbf{a}\in intD$, $\mathbf{f}(\mathbf{a})=\mathbf{b}$ y $J\mathbf{f}\ne 0$. Entonces $\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{u})$ es resoluble en forma única como $\mathbf{u}=\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{f}^{-1}$ también C^1, para $\mathbf{u}$ cerca de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{b}$.

Extremos: f diferenciable en un extremo local $\mathbf{a}\in intA\Rightarrow\nabla f(\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

$f(x,y)\in C^2$ y $Hf=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=\begin{vmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{xy}&f_{yy}\end{vmatrix}$. Si en $\mathbf{a}$ es $\nabla f=0$ y además
- $Hf>0$, $f_{xx}>0\Rightarrow$ mínimo.
- $Hf>0$, $f_{xx}<0\Rightarrow$ máximo.
- $Hf<0\Rightarrow$ punto silla.

Sean $f,g:D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ de C^1, S conjunto de nivel $g(\mathbf{x})=K$, $\mathbf{a}\in S$ e interior a D y $\nabla g(\mathbf{a})\ne\mathbf{0}$.

Si $f|_S$ tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{a}$ entonces existe un real λ tal que $\nabla f(\mathbf{a})=\lambda\nabla g(\mathbf{a})$.

Cálculo - grupo C (2024) **resumen de cálculo integral**

Integrales dobles: f continua en $R=[a,b]\times[c,d] \Rightarrow \iint_R f=\int_a^b\!\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\!\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$.

c,d continuas en $[a,b]$, f continua en $D=\{(x,y): a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x)\} \Rightarrow \iint_D f=\int_a^b\!\int_{c(x)}^{d(x)} f\,dy\,dx$.

a,b continuas en $[c,d]$, f continua en $D=\{(x,y): c\le y\le d,\ a(y)\le x\le b(y)\} \Rightarrow \iint_D f=\int_c^d\!\int_{a(y)}^{b(y)} f\,dx\,dy$.

Área de D: $A=\iint_D dx\,dy$. Volumen bajo $f\ge 0$ en D: $V=\iint_D f\,dx\,dy$. Promedio de f en D: $\bar{f}=\frac{1}{A}\iint_D f$.
Masa de placa D de densidad $\sigma(x,y)$: $M=\iint_D \sigma\,dx\,dy$. Centro de masa: $\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\,\sigma$, $\bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\,\sigma$.

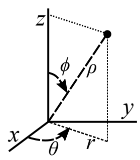
Cambios de variable: $\mathbf{g}:(u,v)\to\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ de C^1, inyectiva en D^*, $\mathbf{g}(D^*)=D$ y f integrable. Entonces:
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$, con $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}$ [determinante jacobiano].
En particular: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} r\,f\big(r\cos\theta,r\,\mathrm{sen}\,\theta\big)\,dr\,d\theta$.

Integrales triples: f continua en $P=[a,b]\times[c,d]\times[p,q] \Rightarrow \iiint_P f=\int_p^q\!\int_c^d\!\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy\,dz$ (o las otras 5).

$V=\{(x,y,z):\ a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x),\ p(x,y)\le z\le q(x,y)\} \Rightarrow \iiint_V f=\int_a^b\!\int_{c(x)}^{d(x)}\!\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$.

Volumen de $V=\iiint_V dx\,dy\,dz$. Masa de V: $M=\iiint_V \sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, si $\sigma(x,y,z)$ densidad.

Cambios: $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$.



Cilíndricas: $r\ge 0,\ 0\le\theta<2\pi$ $\quad x=r\cos\theta,\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z=z$, $\quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$.

Esféricas: $\rho\ge 0,\ 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta<2\pi$ $\quad x=\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z=\rho\cos\phi$, $\quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right|=\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$.

Integrales de línea: $\mathbf{c}(t): [a,b]\to\mathbf{R}^n$, C^1 a trozos, describiendo curva C.

Segmento que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$: $\mathbf{c}(t)=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $t\in[0,1]$. $\mathbf{c}(t)=(a\cos t,b\,\mathrm{sen}\,t)$ describe elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

f campo **escalar**: $\int_C f\,ds\equiv\int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_a^b f\big(\mathbf{c}(t)\big)\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$ [no depende de la parametrización]. $L=\int_a^b\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$ longitud de C.

Valor medio de f sobre C: $\bar{f}=\frac{1}{L}\int_C f\,ds$. Masa de alambre de densidad variable $\sigma(\mathbf{x})$: $M=\int_C\sigma\,ds$.

$\mathbf{f}$ campo **vectorial**: $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b \mathbf{f}\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$ [salvo el signo, independiente de la parametrización].

Si $\mathbf{f}=\nabla U$ [U potencial, $\mathbf{f}$ conservativo], $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(\mathbf{c}(b))-U(\mathbf{c}(a))$ [independiente del camino].

$\mathbf{f}=\big(f(x,y),g(x,y)\big)$ conservativo $\Rightarrow f_y\equiv g_x$.
$\mathbf{f}=\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)$ conservativo $\Rightarrow \mathrm{rot}\,\mathbf{f}\equiv\mathbf{0}$.
$\left[\Leftarrow \text{ ciertas si } \mathbf{f} \text{ es } C^1 \text{ en todo } \begin{matrix}\mathbf{R}^2\\ \mathbf{R}^3\end{matrix}\right]$.

Green: $D\subset\mathbf{R}^2$, ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f}=(f,g)\in C^1(D) \Rightarrow \iint_D[\,g_x-f_y\,]\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

Divergencia en el plano: $\mathbf{f}\in C^1(D)$, $\mathbf{n}$ normal unitaria exterior $\Rightarrow \iint_D \mathrm{div}\,\mathbf{f}\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,ds$.

Integrales de superficie: $\mathbf{r}: D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, $\mathbf{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$ describiendo la superficie $S\in C^1$.

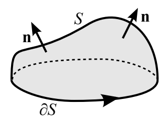
$\mathbf{r}_u\overset{\text{pvf}}{\times}\mathbf{r}_v=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}$. Si $\mathbf{r}(x,y)=\big(x,y,f(x,y)\big)$, con $(x,y)\in D$ es $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\big(-f_x,-f_y,1\big)$.

Si $f(x,y,z)$ escalar: $\iint_S f\,dS=\iint_D f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\,\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,du\,dv$. [Si $f\equiv 1$, es el área de S].

Si $\mathbf{f}(x,y,z)$ vectorial: $\iint_S\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_D\mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,du\,dv$ [independiente de la $\mathbf{r}(u,v)$ escogida salvo el signo].

Gauss: $\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz=\iint_{\partial V}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS$, ∂V superficie cerrada, $\mathbf{n}$ normal unitaria exterior, $\mathbf{f}\in C^1(V)$.

Stokes: $\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS=\oint_{\partial S}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$, S superficie en el espacio limitada por la curva ∂S.



Cosas de matemáticas: $\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\mathrm{sen}^2 a=\frac{1}{2}[1-\cos 2a]$, $\cos^2 a=\frac{1}{2}[1+\cos 2a]$. $\int R\big(x,\sqrt{a^2-x^2}\big)dx$ se hace trigonométrica con $x=a\,\mathrm{sen}\,u$.

Elipse: $A=\pi ab$. Cilindro: $V=\pi r^2 h$, $S=2\pi rh$. Esfera: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, $S=4\pi r^2$. Cono: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, $S=\pi rg$.