

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \phi$, $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$, $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ ($n=3$)
 $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ recta que pasa por los puntos. $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$ plano por \mathbf{a} con normal \mathbf{n} .

Entorno: $B_r(\mathbf{a}) \equiv \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$. \mathbf{a} es interior a $A \subset \mathbf{R}^n$ si existe $B_r(\mathbf{a}) \subset A$. A abierto si $A = \text{int } A$.
 $\partial A \equiv \{\mathbf{x} : \forall r, B_r(\mathbf{x}) \text{ tiene puntos de } A \text{ y de } \mathbf{R}^n - A\}$. $\bar{A} = \text{int } A \cup \partial A$. A cerrado si $\mathbf{R}^n - A$ es abierto.
 A acotado si existe $M \in \mathbf{R}$ tal que $\|\mathbf{a}\| < M \quad \forall \mathbf{a} \in A$. A compacto si es cerrado y acotado.

Campo escalar: $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. $\mathbf{a} \in \text{int } D$. Gradiente $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ [perpendicular a $f(\mathbf{x}) = C$].

f es continua en \mathbf{a} si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

f continua en \mathbf{a} , $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua en $f(\mathbf{a}) \Rightarrow g \circ f$ continua en \mathbf{a} .

$|f(r, \theta) - L| \leq g(r)$ y $g(r) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 0 \Rightarrow f(x, y) \rightarrow L$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

f continua en un compacto $A \Rightarrow f$ alcanza sus valores máximo y mínimo en A .

$f \in C^n$ en D abierto si sus derivadas parciales hasta orden n son continuas en todo $\mathbf{x} \in D$.

Derivada de f en \mathbf{a} según el vector \mathbf{v} : $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ [direccional, si $\|\mathbf{v}\| = 1$].

f diferenciable en \mathbf{a} si $\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \rightarrow 0$. C^1 en un entorno \Rightarrow diferenciable \Leftrightarrow continua existe $D_{\mathbf{v}} \forall \mathbf{v}$

Plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en (a, b) : $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$.

a S dada por $F(x, y, z) = K$ en $(a, b, c) \in S$: $\nabla F(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$.

$f \in C^2$ en un entorno de $\mathbf{a} \Rightarrow D_{kj} f(\mathbf{a}) = D_{jk} f(\mathbf{a})$. Para $n=2$ su desarrollo de Taylor de orden 2 es:

$$f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

Función vectorial: $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ curva en \mathbf{R}^n .

$\mathbf{c}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ vector velocidad. Recta tangente a \mathbf{c} en $\mathbf{c}(t_0)$: $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t_0) + t \mathbf{c}'(t_0)$.

Campo vectorial: $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ con f_k continuas en un entorno de $\mathbf{a} \in \text{int } D$.

Entonces es diferenciable en \mathbf{a} : $\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{Df}(\mathbf{a})\mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$, $\mathbf{Df} \equiv \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_m / \partial x_1 & \dots & \partial f_m / \partial x_n \end{pmatrix}$ matriz diferencial o jacobiana de \mathbf{f} .

Si $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$, $\frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \equiv \mathbf{Jf} = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{vmatrix}$ determinante jacobiano. $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = r$.

Regla de la cadena: $\mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{R}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{R}^p$, \mathbf{g} diferenciable en \mathbf{a} , \mathbf{f} diferenciable en $\mathbf{g}(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathbf{Df}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$.

[En particular: $f(x(r, s), y(r, s)) \rightarrow \begin{cases} f_r = f_x x_r + f_y y_r \\ f_s = f_x x_s + f_y y_s \end{cases}$; $f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$].

$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$, $\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ f & g & h \end{vmatrix} = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$.
 $\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$, $\text{div}(\nabla \times \mathbf{f}) = 0$.

Si $n=2$: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$. $\nabla f = f_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} f_{\theta} \mathbf{e}_{\theta}$, $\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\mathbf{e}_{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

Un teorema de la función implícita: Sea $F : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ de C^1 , $F(\mathbf{a}, c) = 0$ y $F_z(\mathbf{a}, c) \neq 0$. Entonces existe una única $z = g(\mathbf{x})$ que cumple $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ para \mathbf{x} cerca de \mathbf{a} , z cerca de c , y son $\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\partial F / \partial x_j}{\partial F / \partial z}$, $j = 1, \dots, n$.

Teorema de la función inversa: Sea $\mathbf{f} : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ de C^1 , $\mathbf{a} \in \text{int } D$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ y $\mathbf{Jf} \neq \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ es resoluble en forma única como $\mathbf{u} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$, con \mathbf{f}^{-1} también C^1 , para \mathbf{u} cerca de \mathbf{a} y \mathbf{x} cerca de \mathbf{b} .

Extremos: f diferenciable en un extremo local $\mathbf{a} \in \text{int } A \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

$f(x, y) \in C^2$ y $Hf = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$. Si en \mathbf{a} es $\nabla f = \mathbf{0}$ y además $Hf > 0, f_{xx} > 0 \Rightarrow$ mínimo.
 $Hf > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow$ máximo.
 $Hf < 0 \Rightarrow$ punto silla.

Sean $f, g : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de C^1 , S conjunto de nivel $g(\mathbf{x}) = K$, $\mathbf{a} \in S$ e interior a D y $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.

Si $f|_S$ tiene un máximo o un mínimo en \mathbf{a} entonces existe un real λ tal que $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$.

Integrales dobles: f continua en $R = [a, b] \times [c, d] \Rightarrow \iint_R f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$.

c, d continuas en $[a, b]$, f continua en $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\} \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f dy dx$.

a, b continuas en $[c, d]$, f continua en $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\} \Rightarrow \iint_D f = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f dx dy$.

Área de D : $A = \iint_D dx dy$. Volumen bajo $f \geq 0$ en D : $V = \iint_D f dx dy$. Promedio de f en D : $\bar{f} = \frac{1}{A} \iint_D f$.

Masa de placa D de densidad $\sigma(x, y)$: $M = \iint_D \sigma dx dy$. Centro de masa: $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \sigma$, $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \sigma$.

Cambios de variable: $\mathbf{g} : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$ de C^1 , inyectiva en D^* , $\mathbf{g}(D^*) = D$ y f integrable. Entonces:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \text{ con } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \text{ [determinante jacobiano].}$$

En particular: $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$.

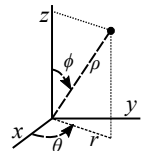
Integrales triples: f continua en $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \Rightarrow \iiint_P f = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy dz$ (o las otras 5).

$V = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\} \Rightarrow \iiint_V f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{p(x, y)}^{q(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$.

Volumen de $V = \iiint_V dx dy dz$. Masa de V : $M = \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz$, si $\sigma(x, y, z)$ densidad.

Cambios: $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$.

Cilíndricas: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$. **Esféricas:** $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$, $z = \rho \cos \phi$, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi$.



Integrales de línea: $\mathbf{c}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, C^1 a trozos, describiendo curva C .

Segmento que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} : $\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $t \in [0, 1]$. $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ describe elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

f campo escalar: $\int_C f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ [no depende de la parametrización]. $L = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ longitud de C .

Valor medio de f sobre C : $\bar{f} = \frac{1}{L} \int_C f ds$. Masa de alambre de densidad variable $\sigma(\mathbf{x})$: $M = \int_C \sigma ds$.

\mathbf{f} campo vectorial: $\int_C \mathbf{f} \cdot ds = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt$ [salvo el signo, independiente de la parametrización].

Si $\mathbf{f} = \nabla U$ [U potencial, \mathbf{f} conservativo], $\int_C \mathbf{f} \cdot ds = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ [independiente del camino].

$\mathbf{f} = (f(x, y), g(x, y))$ conservativo $\Rightarrow f_y \equiv g_x$.

$\mathbf{f} = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ conservativo $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$. [\Leftarrow ciertas si \mathbf{f} es C^1 en todo \mathbf{R}^2 / \mathbf{R}^3].

Green: $D \subset \mathbf{R}^2$, ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f} = (f, g) \in C^1(D) \Rightarrow \iint_D [g_x - f_y] dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot ds$.

Divergencia en el plano: $\mathbf{f} \in C^1(D)$, \mathbf{n} normal unitaria exterior $\Rightarrow \iint_D \text{div } \mathbf{f} dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds$.

Integrales de superficie: $\mathbf{r} : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ describiendo la superficie $S \in C^1$.

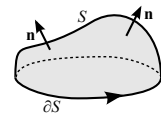
$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}. \text{ Si } \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \text{ con } (x, y) \in D \text{ es } \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1).$$

Si $f(x, y, z)$ escalar: $\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv$. [Si $f \equiv 1$, es el área de S].

Si $\mathbf{f}(x, y, z)$ vectorial: $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv$ [independiente de la $\mathbf{r}(u, v)$ escogida salvo el signo].

Gauss: $\iiint_V \text{div } \mathbf{f} dx dy dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$, ∂V superficie cerrada, \mathbf{n} normal unitaria exterior, $\mathbf{f} \in C^1(V)$.

Stokes: $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot ds$, S superficie en el espacio limitada por la curva ∂S .



Cosas de matemáticas: $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin^2 a = \frac{1}{2} [1 - \cos 2a]$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} [1 + \cos 2a]$. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ se hace trigonométrica con $x = a \sin u$.

Elipse: $A = \pi ab$. Cilindro: $V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r h$. Esfera: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, $S = 4\pi r^2$. Cono: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $S = \pi r g$.