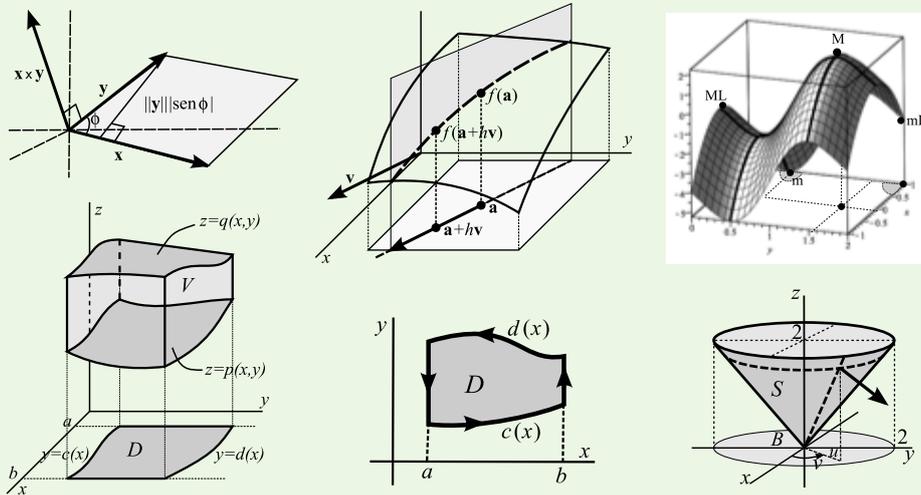


APUNTES DE CÁLCULO (en varias variables)



Pepe Aranda

pparanda@ucm.es

<https://teorica.fis.ucm.es/pparanda>

**Departamento de Física Teórica
Facultad de Físicas. UCM**

<https://www.ucm.es/ft2mm>

Índice	ii
Bibliografía	iii
Sobre el contenido de estos apuntes	iii
Sobre las versiones de los apuntes	iv
1. Conceptos básicos	
1.1 El espacio \mathbf{R}^n . Rectas y planos. Abiertos y cerrados.	5
1.2 Gráficas de funciones escalares	9
1.3 Límites y continuidad en \mathbf{R}^n	12
2. Cálculo diferencial en \mathbf{R}^n	
2.1 Derivadas de campos escalares	15
2.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena	21
3. Funciones implícitas. Máximos y mínimos.	
3.1 Funciones implícitas e inversas	27
3.2 Extremos de funciones escalares	29
4. Integrales múltiples	
4.1 Integrales dobles	35
4.2 Integrales triples	42
5. Integrales de línea	
5.1 Integrales de campos escalares sobre curvas	47
5.2 Integrales de línea de campos vectoriales	50
5.3 Integrales de gradientes y teorema de Green	52
6. Integrales de superficie	
6.1 Definiciones y cálculo	57
6.2 Teoremas de la divergencia y Stokes	61
Problemas	I-XII

Bibliografía

[MT] J. E. Marsden y A. J. Tromba. Cálculo Vectorial. Ed. Addison-Wesley

[R] J. Rogawski. Cálculo Varias Variables. Ed. Reverte

[St] S. Stein. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill

[LHE] Larson-Hostetler-Edwards. Cálculo II (7a ed). Ed. Pirámide, 2003.

[A] T. Apostol. Calculus. Ed. Reverté

En todas las asignaturas que imparto suelo elaborar apuntes. Esto tiene la ventaja de precisar qué se va a explicar durante el curso. Además permite a quien está en clase no estar todo el rato pendiente de copiar lo que se escribe en la pizarra y permite al profesor remitirse a ellos cuando no hay tiempo (ni se cree adecuado) entrar en detalles de demostraciones. Pero tiene sus desventajas. La existencia de apuntes incita a no utilizar casi otros libros, que tratan los diferentes temas con más extensión y rigor, o con más ejemplos, o más aplicaciones. Tampoco se ven otras notaciones distintas que pueden sorprender en otros cursos.

Recomiendo, pues, consultar varios libros. Esta asignatura (a diferencia de otras para las que he escrito apuntes) sí tiene un gran texto al que remitirse y del que he extraído buena parte de varios temas: el Marsden-Tromba. Un libro serio, pero también con muchos ejemplos y aplicaciones. Algunos quizás prefieran libros algo más elementales, como los tres siguientes [R], [St] o [LHE]. Me gustan en ese orden, pero el [R] no está en la biblioteca de Físicas de la UCM (aunque es fácil de encontrar en librerías). Del [St] hay un par de ejemplares (pero ya está descatalogado). Del [LHE] hay bastantes en la biblioteca (aunque las ediciones posteriores a la venta cada vez tienen más colores y lo que me parece más ‘paja’). Y no puede faltar en una bibliografía de esta asignatura un clásico como el [A].

Sobre el contenido de estos apuntes

Los apuntes tienen dos grandes bloques de tamaño similar: el cálculo diferencial en \mathbf{R}^n , formado por los capítulos 1, 2 y 3 (los preguntados en el parcial), y el cálculo integral en \mathbf{R}^n de los 4, 5 y 6.

En concreto, en el 1 se introducen los conceptos básicos (vectores y sus operaciones), se repasan las rectas y planos, se presentan las gráficas de funciones de dos variables y se estudia la continuidad.

En la sección 2.1 se presentan las derivadas de los campos escalares, la diferencial y Taylor de orden 2. En la 2.2 se introducen ya las funciones y campos vectoriales (y sus operadores) y la regla de la cadena.

Se tratan en 3.1 los más sutiles teoremas de la función inversa e implícita. Y se acaba el cálculo diferencial en 3.2 con el estudio de los extremos (y de los multiplicadores de Lagrange).

La sección 4.1 está dedicada a las integrales dobles y sus cambios de variable. En la 4.2 se ven las triples y se introducen las coordenadas cilíndricas y esféricas.

5.1 trata las integrales de línea de campos escalares y 5.2 las de campos vectoriales. En 5.3 se estudian ya los campos conservativos y el teorema de Green (que en otros textos se ven junto con Stokes).

En el último capítulo (el 6) se presentan las integrales de superficie (de campos escalares y vectoriales) y se terminan los apuntes con los teoremas de Gauss y de Stokes de 6.2.

Las aproximadamente 60 horas reales de clase de un curso las distribuyo más o menos así entre los 6 capítulos: 9 para el 1, 12 para el 2, 9 para el 3, 10 para el 4, 12 para el 5 y 8 para el 6.

La base necesaria para seguir estos apuntes es simplemente dominar un buen Cálculo en una variable: tener claro los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, manejar bien los máximos y mínimos, conocer los desarrollos de Taylor, saber calcular primitivas no muy complicadas (las trigonométricas en particular), dominar las coordenadas polares... No se suponen conocimientos algebraicos, que se estudian en el grado en Física de la UCM al tiempo que esta asignatura (segundo cuatrimestre de 1º), aunque se citen en letra pequeña términos como base o aplicación lineal que luego se irán controlando en Álgebra.

Casi todos los ejemplos son en \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 , principalmente en \mathbf{R}^2 . El salto conceptual se da al pasar de 1 a 2, más variables plantean sobre todo complicaciones técnicas. Más de una vez aparecen gráficas hechas con el programa Maple (con licencia universal en la UCM) para incitar a los estudiantes a su uso. Los dibujos los hago con el programa libre Inkscape. Las fuentes del texto (más sólidas que las habituales de \LaTeX) aparecen utilizando el paquete `{newtxtext,newtxmath}`.

Sobre las versiones de los apuntes

versión 2024: Aprovechando el cuatrimestre sabático se retocan bastante, incluyendo, sobre todo, ejemplos nuevos en casi todos los temas. Se modifica la portada y el índice tiene enlaces que llevan a cada sección. El capítulo 1 gana dos páginas con más gráficas y ejemplos de continuidad. El 2 tiene bastantes ligeros cambios. En el 3, nuevo ejemplo de extremos de función definida implícitamente. 4.1 y 4.2 crece cada uno en una página. 5.1 y 5.3 con una página más a base de problemas del curso pasado o examen. Y el 6 crece en otra.

Ahora hay 64 páginas de teoría (con estas iv iniciales) y 12 de problemas, con los 80 de cálculo diferencial y otros tantos de integral, pero cambiados por viajes a páginas teóricas y entrada de problemas de examen.

versión 2023: El anterior largo capítulo 2 se dividió en los 2 y 3. Con nuevos ejemplos crecieron una página las secciones 2.2 y (ahora) 3.2, temas no impartidos por mí ese curso. También ganó una página cada sección del capítulo 4 de las integrales múltiples. Y otra más la 6.1. Otras secciones también incluyeron más ejemplos y todas tuvieron aclaraciones de teoría y cambios estéticos. En total eran 53 páginas de teoría. En los problemas (160 en la versión) incluí casi todos mis exámenes del 2016 y algunos del 21 o 22 de otros profesores.

versión 2016: Por problemas con impresoras, cambiada la letra a otra tipo ‘times’ más moderna (paquete `{newtxtext,newtxmath}` de LaTeX en vez de `{mathptmx}`), lo que implicó múltiples retoques estéticos. Algún ejemplo nuevo y leves modificaciones en 1.2 y 1.3. Más cambios en 2.1, sobre todo en la diferenciabilidad. Un ejemplo más en 2.2. La sección de inversas e implícitas adelantó a la de máximos y mínimos. Un ejemplo más en 3.1 y casi igual 3.2. Sólo un ejemplo nuevo en el capítulo 4 (de Green) y tres nuevos en el 5 (que vienen de exámenes). Y en todos, modificaciones estéticas. Como cada curso, metí en los problemas los de exámenes del anterior. Por eso, los del tema 2 pasaron de 45 a 50 y los del 3 y 4 de 25 a 30. Total, 140 problemas.

versión 2015: Primera vez que impartí completa la asignatura ‘Cálculo’ del grado en Física, y, por lo tanto, fue la primera versión de estos ‘**APUNTES DE CÁLCULO (en varias variables)**’.

Tenía apuntes manuscritos de gran parte del temario (del Análisis I de los años 80 cuyo segundo parcial era cálculo en varias variables, pero, al existir Análisis II, los extremos, las inversas e implícitas y las integrales de superficie se daban en esa asignatura). En 2011 di dos meses de Cálculo en un curso compartido y publiqué sus primeros apuntes. Una versión corta de gran parte del curso la escribí en 2012 para los Métodos de la Ingeniería de Materiales. A lo largo del 2015 tuve que extender bastante los apuntes de 1, 2.1 y 2.2 de ingenieros, escribir a ordenador las implícitas y los extremos, retocar los capítulos 3 y 4 y expandir el 5. Y transcribir problemas de los hechos con máquina de escribir e inventar bastantes nuevos.

2012. Nacen las ‘**Notas de Métodos Matemáticos (ingeniería de materiales)**’, asignatura (de ecuaciones diferenciales sobre todo) que comienza con 2 capítulos (5 semanas) de Cálculo en varias variables. Su capítulo 2 (cálculo integral) incluyó resumidos los apuntes elaborados para Cálculo en 2011. Escribí por primera vez en ordenador su capítulo 1 de cálculo diferencial y su sección 2.3 de integrales de superficie.

2011. Primera versión a LaTeX de los temas 3 y 4 (que actualmente son los 4 y 5), ‘**Integrales múltiples**’ e ‘**Integrales de línea**’, transcribiendo los apuntes a mano.

años 80 (del siglo XX). Comencé a dar clases en el curso 1978-79 (de Análisis I). Unos tres años después empezaría a pasar a mis estudiantes mis apuntes hechos a mano. Los que tengo en papel y escaneados deben ser del 85-86. Pasé la parte de cálculo en una variable hace ya muchos años a ordenador (primero a Word y luego a LaTeX). Pero la de varias variables estuvo mucho tiempo en el archivador.

[Estos apuntes pueden ser utilizados y citados por cualquiera sin ningún problema, siempre que no haga negocio con ellos].