Más problemas de integrales múltiples **Cálculo (grupo D) - 10/11**

1. Sean las funciones f continua en $[a,b]$ y g continua en $[c,d]$ y sea $R=[a,b]\times[c,d]$. Probar que
$$\iint_R [f(x)g(y)]\,dx\,dy = \Big[\int_a^b f(x)\,dx\Big]\Big[\int_c^d g(y)\,dy\Big]$$

2. Calcular $\iint_D x^2y\,dx\,dy$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. $\big[$sol: $\frac{1}{60}\big]$

3. Calcular $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ donde R es la región del plano XY limitada por $y=x^2$, $x=2$, $y=1$. $\big[$sol: $\frac{1006}{105}\big]$

4. Sea D la región del plano acotada por el eje y y la parábola $x=3-4y^2$. a) Calcular el área de D mediante una integral doble. b) Calcular $\iint_D x^3y\,dx\,dy$. $\big[$sol: $2\sqrt{3}$ y $0\big]$

5. Calcular las siguientes integrales dobles en los recintos que se indican:

a) $\iint_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy$ en $D=\{x^2+y^2\le 4\}$; b) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$ en $D=\{x^2+y^2-ax\le 0\}$;

c) $\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$ en $D=[1,2]\times[0,1]$; d) $\iint_D \sqrt{1+e^{2y}}\,dx\,dy$ en $D=\{0\le y\le \ln x, 1\le x\le 2\}$.

$\big[$sol: a) $\frac{64\pi}{5}$, b) $\frac{1}{3}\pi a^3\big]$

6. Calcular $\iint_R (x+y)^2e^{x-y}\,dx\,dy$ con R región del plano acotada por $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=1$. $\big[$sol: $21\,\mathrm{sh}\,1\big]$

7. Hallar el centro de masas del cuadrado $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\big\}$ de densidad $\rho(x,y)=e^{x+y}$. $\big[$sol: $(\frac{1}{e-1},\frac{1}{e-1})\big]$

8. Sea $Q=[1,2]\times[3,4]$ y sea S su imagen bajo la aplicación $(u,v)\to(x,y)$ dada por $x=u^{1/3}v^{2/3}$, $y=u^{2/3}v^{1/3}$. Calcular el área de S. $\big[$sol: $\frac{1}{3}\big]$

9. Calcular los momentos de inercia respecto de los dos ejes de una lámina situada en $0\le y\le\sqrt{2x}$, $0\le x\le 2$, de densidad $\rho(x,y)=|x-y|$. $\big[$sol: $I_x=\frac{24}{35}$, $I_y=\frac{148}{45}\big]$

10. Calcular el momento de inercia respecto del eje y de una placa circular de densidad constante cuyo borde es la circunferencia $(x-3)^2+y^2\le 9$. $\big[$sol: $\frac{405\pi}{4}\big]$

11. Hallar el volumen de la parte del sólido de revolución $z^2\ge x^2+y^2$ encerrada por la superficie $x^2+y^2+z^2=1$. $\big[$sol: $\frac{2\pi}{3}(2-\sqrt{2})\big]$

12. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$, el cilindro $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ y el plano xy ($a,b,p,q>0$).

13. Calcular la integral de la función $f(x,y,z)=z$ sobre la región del primer octante acotada por los planos $y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $2y+x=6$ y el cilindro $y^2+z^2=4$. $\big[$sol: $\frac{26}{3}\big]$

14. Calcular $\iiint_W (z^2x^2+z^2y^2)\,dxdydz$ donde W es la región cilíndrica $x^2+y^2\le 1$, $-1\le z\le 1$. $\big[$sol: $\frac{\pi}{3}\big]$

15. Hallar la masa del cubo $R=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 1\le x,y,z\le 2\big\}$ de densidad $\rho(x,y,z)=(1+x)e^zy$. $\big[$sol: $\frac{15e(e-1)}{4}\big]$

16. Se extrae una porción de amplitud $\pi/3$ de un queso cilíndrico de altura h, radio R y densidad uniforme ρ. Dar la posición del centro de masas del trozo de queso restante.

17. Calcular el centro de masa de un octante de elipsoide sólido.

18. Calcular los momentos de inercia de un cilindro macizo homogéneo respecto al: a) eje del cilindro, b) eje que corta perpendicularmente al anterior y pasa por el punto medio de aquel, c) diámetro de la base.

Más problemas de integrales de línea **Cálculo (grupo D) - 10/11**

1. Hallar la longitud del arco recorrido por la trayectoria $\mathbf{c}(t)=\left(\cos t^{3/2}, \operatorname{sen} t^{3/2}, (t+1)^{3/2}\right)$, $t\in[1,2]$. [sol: 9]

2. Hallar $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ para $f(x,y,z)=\frac{x+y}{y+z}$ y $\mathbf{c}(t)=\left(t,\frac{2}{3}t^{3/2},t\right)$, $t\in[1,2]$. [sol: $\frac{2}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$]

3. Una partícula sometida a la fuerza $\mathbf{F}=(3x-4y)\,\mathbf{i}+(4x+2y)\,\mathbf{j}$ describe la trayectoria $\mathbf{c}(t)=4\cos t\,\mathbf{i}+3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$. Hallar el trabajo realizado si la partícula recorre una vuelta desde $t_0=0$ hasta $t_1=2\pi$. [sol: 96π]

4. Hallar la integral del campo $\mathbf{F}(x,y)=(3x^2+2y)\,\mathbf{i}-(x+3\cos y)\,\mathbf{j}$ a lo largo de la trayectoria cerrada compuesta por los segmentos que unen los puntos $(0,0)\to(2,0)\to(3,1)\to(1,1)\to(0,0)$. [sol: -6]

5. Hallar la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,1)$ a lo largo de la circunferencia $(x-3)^2+y^2=9$ recorrida en el sentido de las agujas del reloj. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial? [sol: 0, pero no]

6. Calcular la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=\left(\frac{2y}{x^2+4y^2},\frac{-2x}{x^2+4y^2}\right)$ a lo largo de la elipse $x^2+4y^2=4$ recorrida en el sentido de las agujas del reloj. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$? [sol: 2π, no deriva]

7. Sea $\mathbf{f}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{i}+\left(1+\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathbf{j}$ definido en $D=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. ¿Existe un potencial para $\mathbf{f}$ en dicho conjunto? Si la respuesta es afirmativa, hallarlo. [sol: $U=y+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$]

8. Hallar el valor de la integral del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i}+\left(1-\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\mathbf{j}$ entre los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ a lo largo de la curva dada por $y=1-|x|$. [sol: -2π, conservativo]

9. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$. Calcular la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias:
a) $\mathbf{c}(t)=(\operatorname{sen} t,0,\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$; b) $\mathbf{c}(t)=(t^2,3t,2t^3)$, $t\in[-1,2]$. [sol: a) 0, b) 147]

10. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=(y^2,2xy,1)$. Hallar la integral del ínea de $\mathbf{f}$ entre $(0,2,0)$ y $(1,0,1)$ a lo largo de:
a) el segmento que une dichos puntos, b) el camino $\mathbf{c}(t)=(\operatorname{sen} t,2\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
¿Existe algún camino que una los dos puntos para el que la integral valga 0? [sol: 1, para todo camino]

11. Calcular $\int_C 2xyz\,dx+x^2z\,dy+x^2y\,dz$ donde C viene definido por $\mathbf{c}(t)=\left(\cos 2\pi t,2^t,(t+1)^2\right)$, $t\in[0,1]$. [sol: 7, $\forall C$, $U=x^2yz$]

12. Sea C el perímetro del triángulo que une $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ y $(0,0,6)$ en ese orden. Calcular:
a) $\oint_C (x+y)\,dx+(2x-z)\,dy+(y+z)\,dz$ y b) $\oint_C (x^3-3xy^2)\,dx+(y^3-3x^2y)\,dy+z\,dz$. [sol: a) 21, b) 0]

13. Sea $\nabla f(x,y,z)=(2xyze^{x^2},ze^{x^2},ye^{x^2})$ con $f(0,0,0)=1$. Hallar a para que $f(1,1,a)=3$, utilizando integrales de línea. [sol: $a=\frac{2}{e}$]

14. Sea R la superficie limitada por la curva C definida por: $\mathbf{c}(t)=\begin{cases}(t,-2-t) & \text{si } t\in[-2,0]\\ (2\operatorname{sen} t,-2\cos t) & \text{si } t\in[0,3\pi/2]\end{cases}$, y sea $P(x,y)=x+y^3$, $Q(x,y)=x-x^3$. Comprobar que se cumple el teorema de Green. [sol: $-\frac{4}{3}-15\pi$]

15. Sea D la mayor región comprendida entre la recta $x=1$ y la circunferencia $x^2+y^2=4$. a) Calcular el área de D. b) Calcular integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(1,x)$ a lo largo de la frontera de D, recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. [sol: a) y b) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$]

16. Comprobar el teorema de Green para $\oint_C (2xy-x^2)\,dx+(x+y^2)\,dy$ donde $C=C_1\cup C_2$ con $\begin{matrix}C_1: y=x^2\\ C_2: y^2=x\end{matrix}$. [sol: $\frac{1}{30}$]

17. Comprobar el Teorema de Green para el disco D de radio R centrado en el origen y las funciones:
a) $\mathbf{F}(x,y)=(xy^2,-yx^2)$ b) $\mathbf{F}(x,y)=(x+y,y)$ c) $\mathbf{F}(x,y)=(xy,xy)$ d) $\mathbf{F}(x,y)=(2y,x)$ [sol: $0,-\pi R^2,0,-\pi R^2$]

18. Calcular $\int_{C^+}(x^3-y^2)dx+x^4dy$ donde C^+ es el perímetro del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ orientado positivamente. [sol: 2]

19. Probar la identidad: $\iint_D u\,\Delta u\,dx\,dy=\oint_{\partial D} u\,\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\,ds-\iint_D \|\nabla u\|^2\,dx\,dy$, con $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de C^2 en D y $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$ derivada direccional en la dirección de la normal exterior.