Soluciones de problemas de Cálculo entregados el 18 de febrero de 2025

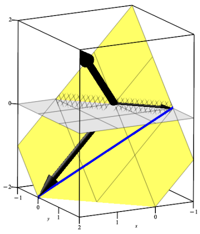
1. Sean $\bar{p}=(2,0,-2)$, $\bar{q}=(-1,1,0)$. **a]** Hallar $\bar{p}\cdot\bar{q}$, $\bar{p}\times\bar{q}$ y $\bar{p}\cdot(\bar{p}\times\bar{q})$. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz para $\bar{p}$ y $\bar{q}$. Calcular la distancia de $\bar{p}$ a $\bar{q}$ y el ángulo que forman ambos vectores.
b] Escribir una expresión paramétrica y la expresión cartesiana del plano que contiene los vectores $\bar{p}$ y $\bar{q}$.
c] Dar dos expresiones paramétricas del segmento que une $\bar{p}$ y $\bar{q}$ que lo describan en sentidos opuestos y hallar el punto en que ese segmento corta el plano $x=0$.
d] Si $F(x,y,z)=\operatorname{sen}(y-x)-z^2$, i) hallar un $\bar{u}$ unitario que sea perpendicular a $\bar{p}$ y tal que $D_{\bar{u}}F(0,0,0)=0$, ii) escribir la ecuación del plano tangente a $F=0$ en el punto $(0,0,0)$.

a] $\bar{p}\cdot\bar{q}=-2$, $\bar{p}\times\bar{q}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&0&-2\\-1&1&0\end{vmatrix}=(2,2,2)$, $\underset{\text{perpendiculares}}{\bar{p}\cdot(\bar{p}\times\bar{q})=0}$. $\|\bar{p}+\bar{q}\|=\|(1,1,-2)\|=\sqrt{6}\le 3\sqrt{2}=\|\bar{p}\|+\|\bar{q}\|$ $(\sqrt{3}<3)$.

$|\bar{p}\cdot\bar{q}|=2\le 4=\|\bar{p}\|\|\bar{q}\|$. $d(\bar{p},\bar{q})=\|\bar{q}-\bar{p}\|=\|(-3,1,2)\|=\sqrt{14}$, $\frac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{\|\bar{p}\|\|\bar{q}\|}=-\frac{1}{2}=\cos\phi\to$ forman un ángulo $\frac{2\pi}{3}$.

b] Plano que contiene a $\bar{p}$ y $\bar{q}$: $\bar{x}=t(2,0,-2)+s(-1,1,0)$, $\begin{cases}x=2t-s\\y=s\\z=-2t\end{cases}\to\boxed{z=-x-y}$.

O como $\bar{p}\times\bar{q}$ es perpendicular a este plano: $(1,1,1)\cdot(x,y,z)=0\nearrow$



c] Podemos escoger $\bar{c}(t)=\bar{p}+t(\bar{q}-\bar{p})$ o $\bar{c}_*(t)=\bar{q}+t(\bar{p}-\bar{q})$, ambos con $t\in[0,1]$.

Es decir: $\bar{c}(t)=\boxed{(2-3t,t,2t-2)}$, $\bar{c}_*(t)=(-1,1,0)+t(3,-1,-2)=\boxed{(3t-1,1-t,-2t)}$.

A partir de cuaquiera de los dos se obtiene el punto $\boxed{\left(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)}$.

d] $\nabla F(0,0,0)=\big(-\cos(y-x),\cos(y-x),-2z\big)_{(0,0,0)}=(-1,1,0)=\bar{q}$. $\bar{u}$ será $\perp$ a $\bar{p}$ y $\bar{q}$. Lo es el hallado $\bar{p}\times\bar{q}$.

Un unitario válido es $\boxed{\bar{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ [o también $-\bar{u}$]. O directamente $\begin{matrix}\bar{p}\cdot(a,b,c)=2a-2c=0\\\bar{q}\cdot(a,b,c)=b-c=0\end{matrix}\to\left(\frac{\pm1}{\sqrt{3}},\frac{\pm1}{\sqrt{3}},\frac{\pm1}{\sqrt{3}}\right)$.

El punto cumple $F=0$ y usando el ∇F: $(-1,1,0)\cdot(x,y,z)=0\to\boxed{y=x}$ plano tangente (vertical).

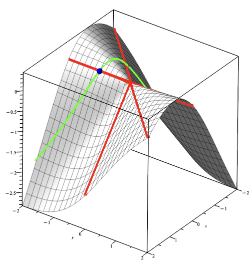
2. Sea $f(x,y)=\frac{xy-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0)=0$. **a]** Calcular ∇f en $(0,-1)$ trabajando en cartesianas y en polares.
b] Precisar si es continua, si existen f_x y f_y y si es diferenciable en $(0,0)$.
c] Dibujar $f=0$. Encontrar, si existe, un $\bar{u}$ unitario tal que la derivada direccional $D_{\bar{u}}f(0,-1)$ sea: i) 0, ii) 2.
d] Si $\bar{c}(t)=\left(2t,-e^t\right)$ y $h(t)=f\left(\bar{c}(t)\right)$ hallar $h'(0)$ con la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$. **e]** Calcular $\Delta f(1,1)$ (mejor en polares).

a] $f_x=\frac{y-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y-x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y^3-2xy^2-x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_y=\cdots=\frac{x^2(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. $\boxed{\nabla f(0,-1)=(-1,0)}$.

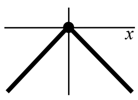
En polares: $f(r,\theta)=r\cos\theta(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)$, $f_r=cs-c^2$, $\frac{1}{r}f_\theta=c^2-s^2+2cs$ $(=c2\theta+s2\theta)$.

$$\nabla f=f_r(c,s)+\tfrac{1}{r}f_\theta(-s,c)=\left(s^3-2cs^2-c^3,(c+s)c^2\right)\xrightarrow{\theta=-\pi/2}(-1,0).$$

[O $\theta=3\pi/2$, basta mirar el punto. Es falso, en general, $\theta=\arctan\frac{y}{x}$].

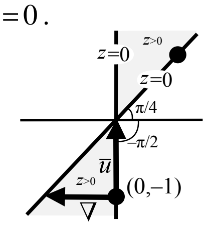


b] $\left|f(r,\theta)-0\right|\le 2r\xrightarrow[r\to0]{}0\Rightarrow f$ **continua** en $(0,0)$.



$f(x,0)=-\frac{x^2}{|x|}=-|x|\Rightarrow f_x(0,0)$ **no existe**. $f(0,y)=0\ \forall y\Rightarrow f_y(0,0)=0$.

Por no existir f_x, f **no es diferenciable** en $(0,0)$.



c] Con el dibujo es obvio que $D_{\bar{u}}f=0$ si $\boxed{\bar{u}=(0,\pm1)}$ (en esa dirección f es constante).

O es claro que esos $\bar{u}$ son perpendiculares al ∇f calculado en el punto y son unitarios.

$D_{\bar{u}}f=2$ es **imposible** por ser el valor máximo de las derivadas direccionales $\|\nabla f\|=1$.

d] $h=f\circ\bar{c}$, $\bar{c}(0)=(0,-1)$, $\bar{c}\,'(t)=\left(2,-e^t\right)\xrightarrow{t=0}(2,-1)$, $h'(1)=\nabla f(0,-1)\cdot\bar{c}\,'(1)=(-1,0)\cdot(2,-1)=\boxed{-2}$.

[o $h'=f_x\,x'+f_y\,y'$, evaluadas donde deben] [derivando $h(t)=-\frac{2te^t+4t^2}{\sqrt{4t^2+e^{2t}}}$ se llegaría a ese valor]

e] $\Delta f=\underset{=0}{f_{rr}}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\Big[cs-c^2+\underbrace{2c^2-2s^2-4sc}_{2c2\theta-2s2\theta}\Big]=\frac{1}{r}\left[c^2-3sc-2s^2\right]\Big|_{(\sqrt{2},\pi/4)}=-\frac{4/2}{\sqrt{2}}=\boxed{-\sqrt{2}}$.

Con cálculos más largos se llega en cartesianas a: $f_{xx}+f_{yy}=\cdots=\frac{x^2-3xy-2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big|_{(1,1)}=-\frac{4}{2^{3/2}}=\boxed{-\sqrt{2}}$.

3. Sean $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=(xz\,,x^2,y+z)$ y $\bar{c}(t)=\big(t,4-t^2,t^2-4\big)$, $t\in[-2,2]$.

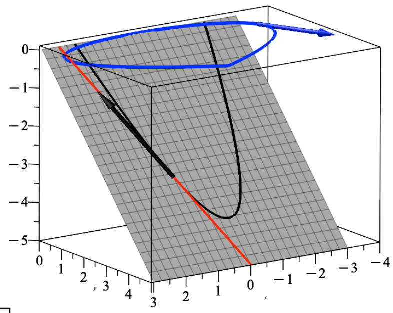
a] Calcular $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}$, $\mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{f}}$, $\mathrm{div}\big(\mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{f}}\big)$, $\nabla\big(\bar{\mathrm{f}}\cdot\bar{\mathrm{f}}\big)$, $\Delta\big(\bar{\mathrm{f}}\cdot\bar{\mathrm{f}}\big)$, la matriz $\mathrm{D}\bar{\mathrm{f}}$ y el determinante jacobiano $J=\big|\mathrm{D}\bar{\mathrm{f}}\big|$.

b] Encontrar la recta tangente a la curva descrita por $\bar{c}(t)$ en el punto $\bar{c}(1)$ (e intentar dibujar aproximadamente ambas en el espacio, a mano o con el Maple) y hallar el punto de corte de esa recta con el plano $x=0$.

c] Si $\bar{r}(t)=\big(\bar{\mathrm{f}}\circ\bar{c}\big)(t)$, calcular $\bar{r}\,'(1)$: i) componiendo y derivando, ii) con la regla de la cadena de $\mathbf{R}^n$.

a] $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}=z+0+1=\boxed{z+1}$. $\mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{f}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial x&\partial y&\partial z\\ xz&x^2&y+z\end{vmatrix}=\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}+2x\,\mathbf{k}=\boxed{(1\,,x\,,2x)}$. $\mathrm{div}\big(\mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{f}}\big)=\boxed{0}$ (siempre y obvio).

$$\underbrace{\nabla\big(\bar{\mathrm{f}}\cdot\bar{\mathrm{f}}\big)}_{\|\;x^2z^2+x^4+(y+z)^2}=\boxed{\big(2xz^2+4x^3,2y+2z,2x^2z+2y+2z\big)}.\quad \Delta\big(\bar{\mathrm{f}}\cdot\bar{\mathrm{f}}\big)=\boxed{4+14x^2+2z^2}.\quad \mathrm{D}\bar{\mathrm{f}}=\begin{pmatrix}z&0&x\\2x&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}.\quad J=\boxed{2x^2}.$$



b] $\bar{c}(1)=(1,3,-3)$, $\bar{c}\,'(t)=(1,-2t,2t)$, $\bar{c}\,'(1)=(1,-2,2)$.

Recta tangente: $\bar{x}=(1,3,-3)+t\,(1,-2,2)=\boxed{(1+t,3-2t,2t-3)}$.

$\big[$O intersección de los planos $y=5-2x$ y $z=-y$ $\big]$.

Esta recta corta $x=0$ en el punto $\boxed{(0,5,-5)}$ [para $t=-1$].

La curva es una parábola sobre el plano $z=-y$ que parte de $(-2,0,0)$, pasa por $(0,4,-4)$ y llega hasta $(2,0,0)$. La recta tangente une $(0,5,-5)$ y $(5/2,0,0)$.

c] i) $\bar{r}(t)=\big(\bar{\mathrm{f}}\circ\bar{c}\big)(t)=\big(t^3-4t,t^2,0\big)\;\Rightarrow\;\bar{r}\,'(1)=\big(3t^2-4,2t,0\big)_{t=1}=\boxed{(-1,2,0)}$.

[en azul $\bar{r}(t)$ y su $\bar{r}\,'(1)$]

ii) Con la forma matricial de la regla de la cadena:

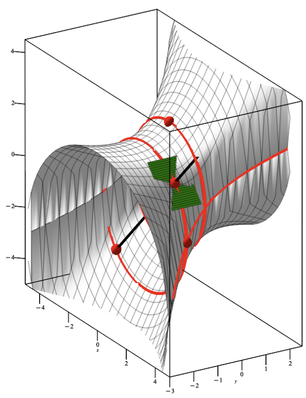
$$\bar{r}\,'(1)=\mathrm{D}\bar{\mathrm{f}}\,\big(\bar{c}(1)\big)\,\bar{c}\,'(1)=\begin{pmatrix}-3&0&1\\2&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}^{\uparrow}$$

4. Sean $F(x,y,z)=z^2-2yz-y^2+x^2$, la superficie S definida por la expresión $F=6$ y el punto $\bar{p}=(2,-1,1)$.

a] Calcular, a partir del ∇F, la ecuación del plano tangente y de la recta normal a S en el punto $\bar{p}$ y hallar el punto en el que la recta vuelve a cortar la superficie. **b]** Dibujar los cortes de S con $y=0$, $y=-1$ y $z=0$.

c] Ver que el teorema de la función implícita asegura que $F=6$ define una función $z(x,y)$ de C^1 cerca de $\bar{p}$ y obtener z_x y z_y derivando implícitamente.

d] Volver a calcular en $\bar{p}$ el plano tangente: i) utilizando **c]**, ii) despejando z de $F=6$ y derivando.



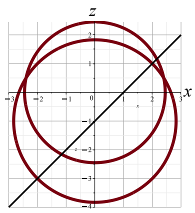
a] $\nabla F=2(x,y-z,z-y)\overset{(2,-1,1)}{\longrightarrow}4(1,0,1)$. Plano: $(x-2)+(z-1)=0$, $\boxed{z=3-2x}$.

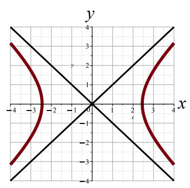
Recta normal: $\bar{x}=(2,-1,1)+t\,(1,0,1)=\boxed{(2+t\,,-1,1+t)}$, que corta S si

$t^2+2t+1+2t+2-1+t^2+4t+4=6$, $2t(t+4)=0\;\to\;\boxed{(-2,-1,-3)}$ (si $t=-4$).

b] $x^2+z^2=6$, $x^2+z^2+2z=7$ son circunferencias de respectivos centros $(0,0)$ y $(0,-1)$ y radios $\sqrt{6}$ y $2\sqrt{2}$. Y $x^2-y^2=6$ es una hipérbola que pasa por $(\pm\sqrt{6},0)$ y tiene asíntotas $y=\pm x$.

[Todos los cortes con $y=C$ son circunferencias y S es el hiperboloide inclinado de la derecha].





c] Como $F_z=0\;\Leftrightarrow\;z=y$, define $F=6$ una $z(x,y)\in C^1$ cerca de todo (x,y,z) con $y\neq z$ ($\bar{q}$ lo cumple).

En esos puntos será: $2zz_x-2yz_x+2x=0\;\to\;\boxed{z_x=\frac{x}{y-z}}$. $2zz_y-2yz_y-2z-2y=0\;\to\;\boxed{z_y=\frac{z+y}{z-y}}$.

d] i) En $(2,-1,1)$ las parciales pasan a ser $z_x=\frac{2}{-2}$, $z_y=\frac{0}{2}$, y el plano: $z=1-1(x-2)+0(y+1)=3-2x$.

ii) $z=y+\sqrt{6-x^2+2y^2}\;\to\;z_x=\frac{-x}{\sqrt{6-x^2+2y^2}}$, $z_y=1+\frac{2y}{\sqrt{6-x^2+2y^2}}$, que en $(2,-1)$ valen los -1 y 0 de arriba.

$1=-1+2$, el $-$ da otro punto

$\big[$Sobre $z=y$ el TFI indica que habrá problemas para definir una única $z(x,y)$ de C^1. De hecho en ese plano es donde se juntan las dos expresiones de z: $z=y\pm\sqrt{\cdot\cdot}$. Y en esos puntos los planos tangentes son verticales y las z no son $C^1\big]$.

problemas de extremos para un fin de semana:

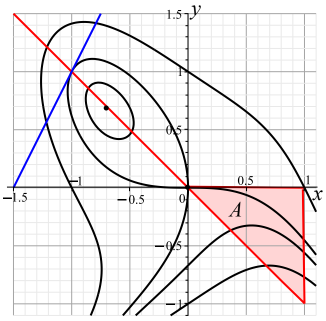
1. Sea $F(x,y)=y^3+2xy+x^4$ (la del problema 2 del control).
a) Hallar y clasificar los puntos críticos de F. (Dar con calculadora su valor aproximado de un extremo).
b) ¿Hay extremos absolutos en $\mathbf{R}^2$? Hallar sus valores extremos en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,-1)$.
c) Encontrar los extremos locales sobre $y=2x+3$ sin utilizar y utilizando multiplicadores de Lagrange.

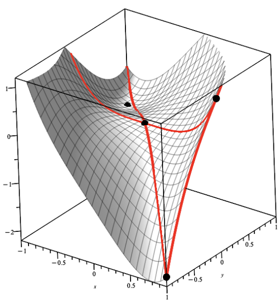
2. Sea $f(x,y,z)=x^2+yz$. **a)** Hallar su punto crítico y escribir su matriz hessiana. Aunque sea $H_2=0$, probar, dando valores en un par de rectas, que ese punto es una silla.
b) Hallar los valores extremos de f en la región D dada por $x^2+y^2+4z^2\leq 8$ (con multiplicadores de Lagrange).

1. a) $\begin{array}{l} F_x=2y+4x^3=0\,,\ y=-2x^3 \downarrow \\ F_y=3y^2+2x \quad 2x\left(6x^5+1\right)=0 \end{array} \to (0,0)\,,\ \left(-\frac{6^{2/5}}{6},\frac{6^{4/5}}{3}\right)$. $\quad \bar{a}\approx(-0.70,0.68)$

$H=\begin{vmatrix} 12x^2 & 2 \\ 2 & 6y \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 6x^2 & 1 \\ 1 & 3y \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} <0\text{, silla en } (0,0)\,. \\ 6x^2,\ 18x^2y-1>0\text{, mínimo en } \bar{a}\,. \end{array}$

El valor en ese mínimo (local) es ≈ -0.40.

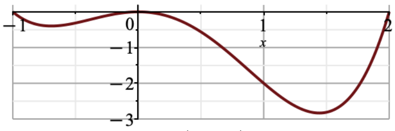




b) $f(0,y)=y^3 \underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \Rightarrow$ no hay extremos absolutos.

En el compacto A si debe la continua F tenerlos y se darán en el borde, pues el mínimo está fuera.

En los lados: $F(x,0)=x^4$, $F(1,y)=y^3+2y+1$, $F(x,-x)=x^4-x^3-2x^2$.



$F(x,-x)$

El primero tiene claro valor mínimo 0 y máximo 1 (en sus extremos).
Como la derivada $3y^2+2>0$, los extremos del segundo también están en los extremos del intervalo: $F(-1,1)=-2$ y $F(1,0)=1$ de antes.
El único un poco largo es el 3°: $F'(x)=x(4x^2-3x-4)=0 \to x=0\,,\ \frac{3\pm\sqrt{73}}{8}$. 0 es máximo local y los otros valores están claramente fuera del intervalo $[0,1]$, así que de nuevo sus máximo y mínimo (0 y -2) se dan en el borde.
Resumiendo, el valor máximo en el triángulo será 1 y el mínimo -2.

c) $h(x)\equiv F(x,2x+3)=x^4+8x^3+40x^2+60x+27$, $h'(x)=4(x^3+6x^2+20x+15)=4(x+1)\big(\overbrace{x^2+5x+15}^{>0}\big)$.
Por tanto, esta función tiene un claro mínimo en $x=-1$ (el valor es $F(-1,1)=0$) y no tiene máximo ($F\to\infty$).

Con Lagrange, $g(x,y)=y-2x-3$: $\begin{array}{l} 2y+4x^3=-2\lambda \quad 4x^3+4x+6y^2+2y=0 \searrow \\ 3y^2+2x=\lambda \nearrow \qquad\qquad\qquad\qquad 4x^3+24x^2+80x+60=0\text{, la de antes.} \\ y=2x+3 \qquad\qquad\qquad\qquad \nearrow \end{array}$

[Esa era la recta del control tangente en $(-1,1)$ a la curva de nivel, y debía aparecer al buscar extremos con Lagrange].

2. a) $\begin{array}{l} f_x=2x=0 \searrow \\ f_y=z=0 \to \\ f_z=y=0 \nearrow \end{array}$ $(0,0,0)$ punto de matriz hessiana $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $H_2=0$ que no decide nuestro teorema.

Pero es obvio que $f(0,0,0)=0$ y que toma valores positivos y negativos cerca del punto. Por ejemplo:

$f(x,0,0)=x^2$ positivos $\left[\text{o } f(0,z,z)=z^2\right]$ y $f(0,z,-z)=-z^2$ negativos.

b) La silla del interior no puede dar extremos. Estarán en el borde $x^2+y^2+4z^2=8$. Mediante multiplicadores:

$\begin{cases} 2x=2\lambda x\,,\ x(\lambda-1)=0 \to x=0 \text{ o } \lambda=1\,. \\ z=2\lambda y \to z\left(1-16\lambda^2\right)=0 \to z=0 \text{ o } \lambda=\pm 1/4\,. \\ y=8\lambda z \nearrow \\ x^2+y^2+4z^2=8 \end{cases}$

Si es $\lambda=1$ será $z=y=0$ y hay dos posibles $x=\pm 2\sqrt{2}$.
Si $\lambda=\pm 1/4$ se obtiene $y=\pm 2z$ y de arriba sale $x=0$.
Yendo al elipsoide: $8z^2=8$, $z=\pm 1 \to y=\pm 2$.

Comparamos los valores de f en los 6 puntos obtenidos:

$f\left(\pm 2\sqrt{2},0,0\right)=\boxed{8}$ valor máximo. $f(0,\pm 2,\pm 1)=\boxed{2}$. $f(0,\pm 2,\mp 1)=\boxed{-2}$ valor mínimo.