1. Calcular los valores de las siguientes integrales sobre el rectángulo $R=[0,1]\times[0,1]$:

a) $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$, b) $\iint_R y\,e^{xy}dx\,dy$, c) $\iint_R (xy)^2\cos x^3\,dx\,dy$, d) $\iint_R \log[(x+1)(y+1)]\,dx\,dy$.

2. Calcular la integral $\iint_D xy\,dx\,dy$ donde $D\subset\mathbb{R}^2$ es la región compacta delimitada por las curvas $y=x$, $y=x^2$.

3. Evaluar la integral $\int_0^1\int_y^1 \operatorname{sen} x^2\,dx\,dy$ cambiando el orden de integración.

4. Calcular la integral de la función $f(x,y)=x^2+2xy^2+2$ sobre la región del plano acotada por la gráfica de $y=x-x^2$, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=2$.

5. Calcular la integral doble $\iint_D x\,dx\,dy$, donde D es la región definida por $x^2+y^2\le 2$, $x\ge 1$, $y\ge 0$, trabajando en coordenadas i) cartesianas, ii) polares.

6. Calcular las integrales dobles de las f que se dan en los recintos D que se indican:

a) $f(x,y)=x^3$, círculo unidad; b) $f(x,y)=e^{x-y}$, cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$, $(-1,0)$;
c) $f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, semicírculo $x^2+(y-1)^2\le 1$, $y\ge 1$; d) $f(x,y)=x$, triángulo de vértices $(0,0),(2,5),(-3,7)$.

7. Hallar el área de la región D limitada en $x\ge 0$ por $y=x$, $y=x-6$, $y=-x^2$, $y=2-(x-2)^2$, i) integrando directamente en cartesianas, ii) haciendo un cambio de variable.

8. Hallar $\iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy$ con B la región del primer cuadrante acotada por las curvas $\begin{matrix} xy=1,\ x^2-y^2=1 \\ xy=2,\ x^2-y^2=4 \end{matrix}$.

9. Calcular mediante integración doble el área de una elipse de semiejes a y b.

10. Determinar el centroide de las regiones siguientes: $\{0\le y\le \operatorname{sen}^2 x,\ 0\le x\le\pi\}$, $\{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

11. Sea R una lámina que ocupa la región $r\le\cos\theta$. Si $\rho(r,\theta)=\cos\theta$ es su densidad, hallar su centro de masas.

12. Hallar la distancia media de los puntos del círculo al centro del círculo.
Hacer el mismo cálculo para la distancia: $d\big((x,y),(x',y')\big)=|x-x'|+|y-y'|$.

13. Calcular $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ hallando la integral doble $\iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en un dominio adecuado.

14. Calcular la integral impropia $\iint_M \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, siendo $M=[-1,1]\times[-1,1]$.

15. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z=x^2+y$ sobre el rectángulo $[0,1]\times[1,2]$.

16. Hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2+y^2=1$ y los planos $z=0$ y $z=y+2$.

17. Encontrar el volumen encerrado entre las superficies $z=x^2+y^2$ y $x^2+y^2+z^2=2$.

18. Calcular el volumen de la región acotada por el cilindro $x^2+y^2=1$, el plano $z=0$ y la superficie $z+x^2=1$.

19. Calcular $\iiint_B (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, donde $B=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

20. Calcular $\iiint_V x^2\cos z\,dx\,dy\,dz$, con V región acotada por los planos $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $x=0$, $x+y=1$.

21. Calcular $\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$ siendo V el sólido limitado en $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ por la superficie $z=xy$ y los planos $y=x$ y $x=1$.

22. Calcular la integral de la función $f(x,y,z)=z\,e^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2+y^2\le 4$, $2\le z\le 3$.

23. Calcular la integral de $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ sobre el sólido acotado por las superficies esféricas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, con $0<b<a$.

24. Calcular la posición del centro de masa de una semiesfera sólida homogénea.

25. Calcular el momento de inercia de una esfera de densidad constante respecto de su diámetro.

1. Deducir fórmulas para la longitud de una curva dada por: i) $y=f(x)$, $x\in[a,b]$; ii) $r=f(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$.

2. Hallar la longitud de las curvas:
a) $x=|t|, y=\left|t-\frac{1}{2}\right|$, $t\in[-1,1]$; b) $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\,\mathrm{sen}\,t-\mathrm{sen}\,2t$, $t\in[0,2\pi]$ (cardioide);
c) $y=\log x$, $x\in[1,\mathrm{e}]$; d) $y=x^{2/3}$, $x\in[1,8]$; e) $r=a\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$, $a>0$ (espiral de Arquímedes).

3. Sea R la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la curva $r=2(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)$.
a) Calcular el área de R. b) Hallar la longitud del perímetro de R.

4. Hallar $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ a lo largo de las trayectorias que se indican: a) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{\sqrt{z}}$, $\mathbf{c}(t)=(1,2,t^2)$, $t\in[0,1]$; b) $f(x,y,z)=yz$, $\mathbf{c}(t)=(t,3t,2t)$, $t\in[1,3]$.

5. Un alambre está sobre un tramo de espiral $r=\mathrm{e}^{\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. En cada punto (r,θ) la temperatura es r. Calcular la temperatura media del alambre.

6. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=0$, si la densidad en (x,y,z) es x^2 por unidad de longitud.

7. Hallar el área de la superficie generada por el giro de a) $x=y^2$, $y\in[1,2]$, b) $r=1+\cos\theta$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, alrededor del eje x.

8. Hallar $\int_C (x^2+y^2)dx+dy$ siendo C: a) $y=x^2$, $0\le x\le 1$, b) $y=\frac{1}{2}$, $1\le x\le 2$, c) $x=2$, $0\le y\le\frac{1}{2}$.

9. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{f}(x,y)=(3y^2+2,16x)$ al mover una partícula de $(-1,0)$ a $(1,0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2+y^2=b^2$. ¿Para qué valor de b es mínimo el trabajo?

10. Hallar la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y)=(xy,0)$ entre $(-1,0)$ y $(1,0)$ a lo largo de: a) el eje x, b) la parábola $y=1-x^2$, c) la línea quebrada $y=|x|-1$, d) la parte inferior de la circunferencia $x^2+y^2=1$. ¿Es $\mathbf{f}$ gradiente de algún campo escalar?

11. Hallar $\oint_C (6xy^2-y^3)\,dx+(6x^2y-3xy^2)\,dy$ para alguna curva orientada que una los puntos $(1,2)$ y $(3,4)$.

12. Sea D el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,-1)$, $(2,-1)$. a) Hallar $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$. b) Hallar la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(1,\cos y)$ a lo largo de la frontera de D, en el sentido de las agujas del reloj.

13. Hallar la integral de $\mathbf{f}(x,y)=\left(-\frac{y}{(y+x)^2},\frac{x}{(y+x)^2}\right)$ entre $(0,1)$ y $(1,0)$ a lo largo de la parábola $x=1-y^2$.

14. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$. Calcular la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias:
a) $\mathbf{c}(t)=(t,t,t)$, $t\in[0,1]$; b) $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\mathrm{sen}\,t,0)$, $t\in[0,2\pi]$.

15. ¿Qué trabajo realiza la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ al mover una partícula a lo largo de la parábola $y=x^2$, $z=0$, desde $x=-1$ hasta $x=2$?

16. Hallar la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{i}+2yz\,\mathbf{j}+y^2\,\mathbf{k}$ entre $(1,0,2)$ y $(0,3,0)$ a lo largo del segmento que une esos puntos. ¿Existe alguna curva que una los dos puntos para la que la integral sea 0?

17. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(2x,z\mathrm{e}^{az},y(1+az)\mathrm{e}^{az})$, $a\in\mathbf{R}$ y C la curva $\mathbf{c}(t)=\left(1,\frac{8t^3}{\pi^3},2+\cos t\right)$ que une $(1,0,3)$ y $(1,1,2)$.
i) Hallar, si existe, una función escalar f tal que $\mathbf{F}=\nabla f$. ii) Hallar el valor de a para el que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\frac{2}{\mathrm{e}}$.

18. Sea R la región del plano encerrada entre la parábola $x=4-y^2$ y la recta $y=x-2$. Calcular la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,2x)$ a lo largo de la frontera de R, recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

19. Hallar el área encerrada por el eje x y un arco de la cicloide $x=\theta-\mathrm{sen}\,\theta$, $y=1-\cos\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$.

20. Verificar el teorema de la divergencia para: i) $\mathbf{f}(x,y)=(x,y)$ y D el disco unidad $x^2+y^2\le 1$, ii) $\mathbf{f}(x,y)=(2xy,-y^2)$ y D el cuadrado unidad.