1. Sean $\mathbf{x} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$, $\mathbf{y} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Hallar y dibujar $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$, y hallar el módulo de estos 3 vectores. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. ¿Forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ un ángulo agudo u obtuso entre ellos? Hallar la distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ y el ángulo formado por $\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$.

2. Sean $\mathbf{x} = (2,0,-3)$, $\mathbf{y} = (0,1,3)$. Hallar $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}\times\mathbf{x}$. Encontrar dos vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que no sean múltiplo uno del otro y que ambos sean ortogonales a $\mathbf{x}$.

3. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, calcular $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

4. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2,7)$ y es perpendicular al vector $4\mathbf{i}+\mathbf{j}$.
b) Dar tres expresiones paramétricas distintas del segmento que une los puntos $(-1,0)$ y $(1,1)$.

5. Hallar la ecuación de los planos que cumplen las siguientes propiedades:
a) Pasa por los puntos $(1,3,2)$, $(4,-1,1)$ y $(3,0,2)$.
b) Es perpendicular a la recta $(3,0,2)\,t + (3,-1,1)$ y pasa por $(5,-1,0)$.
c) Contiene a la recta $(-1,1,2)\,t + (3,2,4)$ y es perpendicular al plano $2x+y-3z+4=0$.

6. Sean $\mathbf{p} = (1,0,-1)$, $\mathbf{q} = (-2,2,1)$. a) Hallar $\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$, $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ y $(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{q})$. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz. Hallar la distancia de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ y el ángulo que forman.
b) Escribir una expresión paramétrica y la expresión cartesiana del plano que contiene a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.
c) Dar dos expresiones paramétricas del segmento que une $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ que lo describan en sentidos opuestos.

7. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^2$, identificar su interior, su frontera y su cierre y precisar si son o no abiertos, cerrados, acotados y compactos:
$A=\{(x,y) : |x|<1, |y|\le x^2\}$ $\quad B=\{\mathbf{x} : 1<\|\mathbf{x}\|<2,\ \mathbf{x}\cdot(1,1)<0\}$ $\quad C=\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|=q,\ q\in\mathbf{Q}, q\le 1\}$

8. Probar que si A y B son conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^n$ entonces $A\cup B$ y $A\cap B$ son también abiertos. ¿Es abierto el conjunto unión de una sucesión infinita de conjuntos abiertos?, ¿lo es su intersección?

9. Con las curvas de nivel y algunas secciones dibujar las gráficas de los siguientes campos escalares:
a) $f(x,y)=4-2x-y$ $\quad$ b) $f(x,y)=|y|$ $\quad$ c) $f(x,y)=4x^2+y^2$ $\quad$ d) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$

10. Dibujar en el espacio las siguientes superficies:
a) $z^2=4-x^2-4y^2$ $\quad$ b) $z^2=x^2$ $\quad$ c) $z^2=1+x^2+y^2$ $\quad$ d) $z^2=x^2+y^2-1$

11. Probar que $f(x,y)\to L$ si $(x,y)\to(a,b)$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\big(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\big)=\lim\limits_{y\to b}\big(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\big)=L$ (límites iterados).
Sea $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$. Probar que f no tiene límite en $(0,0)$ hallando los límites iterados.
Sea $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Probar que los límites iterados coinciden, pero que no tiene límite en $(0,0)$.

12. Obtener información sobre la gráfica de f y estudiar en qué puntos tiene límite, si $f(x,y)$ es:
a) $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ $\quad$ b) $\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad$ c) $\frac{x^2}{y}$ $\quad$ d) $\log(x^2+y^2)$ $\quad$ e) $\arctan\frac{1}{x^2+y^2}$ $\quad$ f) $\operatorname{th}\frac{x^6}{y^2}$

13. Determinar los puntos en que son continuos los campos escalares:
a) $f(x,y)=\sqrt{16-y^4}$ $\quad$ b) $\begin{cases} g(x,y)=\frac{x^2y\,e^{-y}}{x^4+4y^2} \\ g(0,0)=0 \end{cases}$ $\quad$ c) $\begin{cases} h(x,y)=xy\cos\frac{1}{y} \\ h(x,0)=0 \end{cases}$ $\quad$ d) $\begin{cases} k(x,y)=e^{-1/xy} \\ k(x,0)=k(0,y)=0 \end{cases}$

14. Estudiar en qué puntos del plano son continuas y tienen límite: a) $f(x,y)=\frac{\operatorname{sen} xy}{x^2+y^2}$, b) $h(x,y)=\frac{\operatorname{sen} xy}{xy}$.

15. Hallar, si existen, los límites de a) $f(x,y,z)=\frac{1-e^{xyz}}{x}$, b) $g(x,y,z)=\frac{x^2-1}{y+z-1}$, cuando (x,y,z) tiende a:
i) $(0,0,0)$, ii) $(0,1,0)$, iii) $(1,1,1)$, iv) $(1,1,0)$.

1. Hallar f_x y f_y en todos los puntos en que estén definidas para:

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{3x+x^4y^2} \qquad g(x,y)=\log\left|y-x^2\right| \qquad \begin{cases} h(x,y)=\frac{1}{xy}\,\mathrm{sen}(xy) \\ h(x,0)=h(0,y)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ k(0,0)=0 \end{cases}$$

2. Sea $f(x,y)=\frac{x^3}{y^2}$, $f(x,0)=0$. Dibujar sus curvas de nivel $f=0,\pm1,\pm8$. Precisar los puntos en que f es continua. Calcular, si existen, el ∇f y la derivada según el vector $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ en i) $(0,0)$ y en ii) $(1,1)$.

3. Hallar los puntos de $x^2+y^2=1$ y las direcciones en las que $f(x,y)=3x^2+y^2$ varía más rápidamente.

4. Sean: a) $f(x,y)=xy$; b) $g(x,y)=y^2$; c) $h(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}$. Dibujar algunas curvas de nivel y el vector gradiente ∇f en algunos puntos. Hallar la la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1)$.

5. Sea $f(x,y)=\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Hallar en $(0,0)$ sus parciales y, con la definición, su derivada según el vector $(1,-1)$. Estudiar si f es continua en $(0,0)$. Precisar si f es diferenciable o no en $(0,0)$.

6. Sea $f(x,y)=y\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Estudiar en qué puntos: a) es continua, b) existen las parciales, c) es diferenciable. Hallar (si existe) la derivada de f según $\mathbf{v}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ en el punto $(1,0)$.

7. Sea $f(x,y)=\frac{x^3}{y-1}$, $f(x,1)=0$. Estudiar si f es continua y diferenciable en el punto $(0,1)$.
Precisar en la dirección de qué vector unitario es mínima la derivada direccional en el punto $(1,0)$.
Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,0)$.

8. Sea $f(x,y)=\frac{y^2-x^4}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1 . b) Hallar, si existe, un $\bar{u}$ unitario tal que $D_{\bar{u}}f(1,-1)$ valga i) 0 , ii) 3 . c) Estudiar su continuidad, la existencia de derivadas parciales y la existencia de plano tangente en $(0,0)$.

9. Precisar si i) son continuos, ii) tienen derivadas parciales, iii) son diferenciables, en el punto $(0,0)$:

a) $f(x,y)=\left(y-x^3\right)^{1/3}$ b) $\begin{cases} g(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \\ g(0,0)=0 \end{cases}$ c) $r(x,y)=\sqrt{|xy|}$

e) $\begin{cases} h(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ h(0,0)=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} k(x,y)=\frac{3x^2y^2-x^6}{x^2+y^2} \\ k(0,0)=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} l(x,y)=\frac{x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}-x}{x^2+y^2} \\ l(0,0)=0 \end{cases}$

10. Sea $f(x,y)=\frac{2xy+y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$. Estudiar si tiene derivadas parciales, si es continua y si es diferenciable en $(0,0)$. Hallar un $\bar{u}$ unitario tal que $D_{\bar{u}}f(-2,2)=0$.

11. Sea $f(x,y)$ diferenciable en todo $\mathbf{R}^2$. Se sabe que $f(1,2)=2$ y que sus derivadas direccionales en el punto $(1,2)$ según los vectores $\left(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\right)$ y $(3/5,4/5)$ son $-\sqrt{2}$ y 3 , respectivamente. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal a gráfica de $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$.

12. Sea $f(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^{2x-z}$. Hallar $\nabla f(1,-1,2)$ y escribir uno de los infinitos vectores unitarios $\mathbf{u}$ para los que la derivada de f en $(1,-1,2)$ en la dirección del vector $\mathbf{u}$ es 0 .

13. Sea $f(x,y,z)=ax^2y+by^2z+cz^2x$. Hallar las constantes a , b y c para las que la derivada direccional en el punto $(1,1,1)$ es máxima en la dirección de $\mathbf{u}=(1,5,0)/\sqrt{26}$ y vale 13 .

14. Calcular la derivada direccional de $f(x,y,z)=\arctan(xy)-zy$ en el punto $(0,1,1)$ en la dirección del vector $(3,0,4)$ y la ecuación del plano tangente a $f(x,y,z)=-1$ en el mismo punto.

15. Hallar los planos tangentes a las superficies en los puntos que se indican:
a) $z=x^2+y^3$ en $(3,1,10)$ b) $x^2+(y-2)^2+2z^2=4$ en $(1,3,-1)$ c) $yz=\log(x+z)$ en $(0,0,1)$

16. Calcular las derivadas parciales de segundo orden:

$$f(x,y)=x^5y-x^2y^4 \qquad g(x,y)=x\,e^{x-y} \qquad h(x,y)=\frac{\cos(xy)}{x} \qquad k(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

17. Sea $f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Hallar f_x y f_y si $(x,y)\neq(0,0)$. Probar que $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$. ¿Por qué las derivadas cruzadas no coinciden en $(0,0)$?

18. Comprobar que las siguientes funciones $u(x,t)$ satisfacen la 'ecuación de ondas' $u_{tt}-u_{xx}=0$:
a) $u(x,t)=\operatorname{sen}(x-t)$ b) $u(x,t)=\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2x$ c) $u(x,t)=\arctan(x+t)$ d) $u(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}e^{-s^2}ds$

19. Hallar los desarrollos de Taylor de orden 2 en torno a los puntos que se indican:
a) $f(x,y)=(x-y)^2$ en $(1,2)$ b) $g(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ en $(0,0)$ c) $h(x,y)=e^{xy}\cos(x+y)$ en $(0,\pi)$

20. Sea $f(x,y)=\frac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. a) Desarrollar el numerador por Taylor hasta orden 2 en torno a $(0,0)$. b) Precisar si f en $(0,0)$: i) es continua, ii) tiene derivadas parciales, iii) es diferenciable.

21. Sea la curva descrita por $\mathbf{c}(t)=\left(e^t,\,t^2\right)$, $t\in[-2,2]$. Hallar: i) expresiones de la recta tangente en el punto $(e,1)$, ii) un vector unitario normal a la curva en ese punto , iii) el vector aceleración para $t=0$, iv) el punto de corte y el ángulo de interseccion con la curva $\mathbf{r}(s)=(s,s-1)$, $s\in[0,5]$.

22. Calcular el plano tangente a la superficie $x^2+y^2+3z^2=16$ en el punto $(3,2,1)$ y hallar el ángulo con el que la curva $\overline{c}(t)=\left(3e^t,2e^t,e^{3t}\right)$ corta esa superficie.

23. Sean $f(x,y)\in C^2$ y $h(t)=f\left(e^t,\cos t\right)$. Utilizando la regla de la cadena hallar la expresión de $h''(t)$ en función de las derivadas de f . Comprobar la expresión anterior en el caso de que $f(x,y)=xy$.

24. Sea $f(x,y)=9-x^2-y^2$. a) Dibujar las curvas de nivel $f=8,5,0,-7$, el corte con $x=0$ y su gráfica. b) Hallar un vector unitario $\mathbf{u}$ tal que la derivada de f en el punto $(2,1)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ sea 0 . c) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1)$. d) Si $\mathbf{c}(t)=\left(2t,t^3\right)$, hallar la derivada de la función $h(t)=f(\mathbf{c}(t))$ en $t=1$ utilizando la regla de la cadena.

25. Sea $f(x,y)=\frac{x^4}{y^2}$, $f(x,0)=0$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0,1,4$. b) Precisar si f es continua, tiene derivadas parciales y es diferenciable en $(0,0)$. c) Hallar un $\overline{u}$ unitario tal que $D_{\overline{u}}f(1,-1)=-4$. d) Si $\overline{c}(t)=\left(e^t,\,t-1\right)$, calcular, mediante la regla de la cadena, la derivada de $h(t)=f(\overline{c}(t))$ en $t=0$.

26. Sea $f(x,y)=\frac{x^4}{3y^2+x^6}$, $f(0,0)=0$. a) Precisar si existen f_x , f_y y si es continua y diferenciable en $(0,0)$. b) Hallar el $\mathbf{u}$ unitario para el que $D_{\mathbf{u}}f(1,1)$ es mínima. c) Hallar el plano tangente a su gráfica en $(1,1)$. d) Si $\mathbf{c}(t)=\left(e^t,e^{3t}\right)$, hallar, con la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, la derivada de $h(t)=f(\mathbf{c}(t))$ en $t=0$.

27. Sea $f(x,y)=\cos(x+2y)+e^{x-y}$. a) Hallar el plano tangente a la gráfica de f en su punto $P=(0,0,2)$. b) Hallar la derivada direccional de f en $(0,0)$ en la dirección de $\overline{v}=(1,-1)$. ¿Existe algún $\bar{u}$ unitario tal que la derivada $D_{\bar{u}}f(0,0)=2$? c) Comprobar que la curva $\overline{c}(t)=\left(-2t\,,\,t\,,\,1+e^{-3t}\right)$ está contenida en la gráfica y pasa por P . ¿Qué relación hay entre su tangente en P y el ∇g , si $g(x,y,z)=z-f(x,y)$?

28. a) Calcular en $\mathbf{a}=(1,0,1)$ el plano tangente a la superficie S dada por $x^3-x^2y+y^2-xz+z^2=1$.
b) Si $F(x,y,z)=xyz$ y $\mathbf{c}:[0,2]\to\mathbf{R}^3$ es una curva diferenciable contenida en S y con $\mathbf{c}(1)=\mathbf{a}$, hallar la derivada $D_{\mathbf{u}}F(\mathbf{a})$ en la dirección $\mathbf{u}$ de la tangente a $\mathbf{c}$, sabiendo que $\mathbf{u}$ es ortogonal al vector $(1,1,0)$.

29. Sean $\mathbf{f}(u,v)=\left(e^{u+2v},2u+v\right)$ y $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(2x^2-y+3z^3,2y-x^2\right)$. Calcular la matriz de la diferencial de $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ en $(2,-1,1)$, i) utilizando la regla de la cadena, ii) componiendo y diferenciando.

30. Sea $f(x,y)=\frac{x+y}{1+xy}$. a) Hallar su plano tangente en el punto $(0,2)$ y la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por dicho punto. b) Si $h(u,v)=f(u^3+v^2-1,e^v+1)$, hallar la derivada direccional de h según el vector $\mathbf{u}=\left(1/\sqrt{2}\,,-1/\sqrt{2}\right)$ en el punto $(u,v)=(1,0)$.

31. Escribir, con la regla de la cadena, la ecuación en derivadas parciales $(y-2)u_y - xu_x = x^2 y$ en las nuevas variables $s=xy-2x$, $t=x$. Comprobar que es solución $u(x,y)=f(xy-2x)+x^2-x^2y$, $\forall f\in C^1$.

32. Escribir la ecuación en derivadas parciales $y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=0$ en las nuevas variables $s=xy$, $t=\frac{x}{y}$. Comprobar que $u(x,y)=f(xy)+xg\left(\frac{x}{y}\right)$, con $f,g\in C^2(\mathbf{R})$, cumple la ecuación.

33. Sea $h(x,y,z)=g\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)$, con $u(x,y,z)=x^2+2yz$, $v(x,y,z)=y^2+2xz$, y $g(u,v)$ campo C^1. Simplificar al máximo, con la regla de la cadena, la expresión $(y^2-xz)\frac{\partial h}{\partial x}+(x^2-yz)\frac{\partial h}{\partial y}+(z^2-xy)\frac{\partial h}{\partial z}$.

34. Las ecuaciones $u=f(x,y,z)$, $x=s^2+t^2$, $y=s^2-t^2$, $z=2st$ definen u en función de s y t: $u=F(s,t)$. Expresar las derivadas segundas de F respecto a s y t en función de las derivadas de f $\left(\text{es } f\in C^2\right)$.

35. Sean $\mathbf{a}=(-1,0,3)$ y $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(xz,y^2,x\right)$. a) Calcular: i) $\mathbf{a}\times\mathbf{f}(\mathbf{a})$, ii) el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, iii) $\operatorname{div}\mathbf{f}$, iv) $\nabla\big(\operatorname{div}\mathbf{f}\big)$, v) $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ y vi) $\mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{f}$. b) Precisar el punto de corte con el plano $z=5$ de la recta perpendicular a la superficie $\operatorname{div}\mathbf{f}=3$ en el punto $\mathbf{a}$.

36. Sean $\mathbf{f}(x,y,z)=(x^2,1,y^2)$, $g(x,y,z)=z$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, ∇g, Δg, $\operatorname{rot}(\nabla g)$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})$, $\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)$, $\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)$, $\operatorname{rot}\big(\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)\big)$, $\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)\big)$. b) Probar que en general es: $\operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}$, $\operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}$, y comprobarlo con los campos anteriores.

37. Sea $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=\left(xz^2,-x^2y,-y^2z\right)$. a) Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$, $\nabla\big(\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}\big)$ y $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}$. b) Obtener la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}=0$ en el punto $(3,4,5)$. ¿Corta esa recta alguno de los ejes? c) Hallar $\mathbf{D}\bar{\mathrm{f}}$. Si $\bar{\mathrm{c}}(t)=\left(3,5-t^2,5t\right)$ y $\bar{\mathrm{r}}=\bar{\mathrm{f}}\circ\bar{\mathrm{c}}$, hallar $\bar{\mathrm{c}}\,'(1)$ y, con la regla de la cadena, $\bar{\mathrm{r}}\,'(1)$.

38. Sea $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=\left(xz^2,yx^2,zy^2-3z^2\right)$. a) Calcular: i) $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$, ii) $\nabla\big(\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}\big)$, iii) $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}$ y iv) $\Delta\big(\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}\big)$.
b) Dibujar la superficie $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}=0$, hallar la recta perpendicular a ella en el punto $(1,2,1)$ y precisar su punto de corte con el plano $x=0$.

39. Si $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(xz,y^2,2xz\right)$ y $\mathbf{c}(t)=\left(1,t,1-t^3\right)$, a) hallar: i) $\operatorname{div}\mathbf{f}$, ii) $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, iii) $\mathbf{Df}$, iv) $J\mathbf{f}$, v) $\mathbf{c}'(-1)$. b) Si $\mathbf{r}(t)=\big(\mathbf{f}\circ\mathbf{c}\big)(t)$, calcular $\mathbf{r}'(-1)$ con la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$. c) Hallar la recta tangente en $(1,-1,2)$ a la curva dada por $\mathbf{c}$ y otro punto en el que la tangente corta la curva.

40. Comprobar que las siguientes funciones $u(x,y)$ satisfacen la 'ecuación de Laplace' $\Delta u=0$:
a) $u(x,y)=x^3-3xy^2$ b) $u(x,y)=\operatorname{sen}x\operatorname{ch}y$ c) $u(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ d) $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

41. Sea $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0,1,\frac{1}{2},\frac{2}{5}$, y $\nabla f(2,1)$. Hallar el vector unitario $\mathbf{u}$ tal que la derivada $D_{\mathbf{u}}f(2,1)$ sea máxima. Hallar $\operatorname{div}(\nabla f)$ en cartesianas y polares.

42. Sea $f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/4}$. Dibujar aproximadamente su gráfica. Hallar ∇f en cartesianas y polares. Estudiar en qué puntos es f diferenciable. Calcular $\Delta f(0,1)$. Determinar en qué punto del segmento que une $(0,1)$ y $(-2,0)$ y en la dirección de qué vector el campo f crece más rápidamente.

43. Sea $\begin{cases} g(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ g(0,0)=0 \end{cases}$. a) Precisar si g es continua, si tiene parciales y si es diferenciable en $(0,0)$. b) Calcular Δg en cartesianas y en polares (y comprobar que coinciden).
c) Determinar si g crece o decrece en el punto $(4,3)$ en la dirección de $\mathbf{v}=(2,-1)$ y hallar la ecuación de la recta tangente la curva de nivel de g que pasa por $(4,3)$.
d) Si $\mathbf{c}(t)=\left(t^2,3t-3\right)$, hallar, con la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, la derivada de $h(t)=g\big(\mathbf{c}(t)\big)$ en $t=2$.

44. Sean $\bar{r}(x,y)=(x,y)$, $r=\|\bar{r}\|$. Probar que: $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\bar{r}}{r^3}$, $\nabla\left(\log r\right)=\frac{\bar{r}}{r^2}$, $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^3}$, $\Delta\left(\log r\right)=0$.

45. Sea $\mathbf{c}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$. Probar que en coordenadas polares $\mathbf{c}''(t)=\mathbf{a}(t)=\left(r''-r(\theta')^2\right)\mathbf{e}_r+(r\theta''+2r'\theta')\,\mathbf{e}_\theta$. Sea $\mathbf{c}(t)$ definida por $r(t)=2$, $\theta(t)=\log t$, $t\in[1,e^{2\pi}]$. Dibujar la curva. Calcular $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ si $t=1$, $t=e^{\pi}$ y $t=e^{2\pi}$. Comprobar el resultado trabajando con la expresión cartesiana de $\mathbf{c}$.

1. Sean las curvas: a) $2x^2y-y^3-x^5=0$, b) $x-2\log x+3y-6\log y=4$, c) $y^2-x\,\mathrm{e}^{x-xy}=0$.
i) Probar que definen a y como función de x cerca del punto $(1,1)$, hallar la recta tangente a la curva en ese punto y calcular $y''(1)$.
ii) Encontrar puntos de estas curvas en los que no se pueda aplicar el teorema de la función implícita.

2. Sea $F(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}-2y$. a) Encontrar el desarrollo de Taylor de orden dos de F en torno a $(0,0)$.
b) Si $h(u,v)=F\big(u-v^3,v+u-2\big)$, hallar, utilizando la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, ∇h en $(u,v)=(1,1)$.
c) Probar que $F=1$ define una $y(x)$ de C^1 cerca del punto (0,0) y hallar la recta tangente a la curva en ese punto. Hallar un punto de la curva $F=1$ donde no sea aplicable el teorema de la función implícita.

3. Sea $x^2-3y^2+2z^2-yz+y=0$. Precisar en qué puntos no define una función $z(x,y)$. Hallar z_x y z_y cuando estén definidas y la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1,1,1)$.

4. Sea $F(x,y,z)=x^3-2yz+\mathrm{e}^xz^2$. a) Hallar la ecuación del plano tangente a $F=0$ en $(0,1,2)$.
b) Probar que $F=0$ define implícitamente una $z(x,y)$ de C^1 cerca de $(0,1,2)$ y dar el valor de $z_x(0,1)$.
c) Encontrar un $\mathbf{u}$ unitario que sea perpendicular al vector $(1,0,1)$ y tal que $D_{\mathbf{u}}F(0,1,2)=0$.

5. Utilizando el teorema general de la función implícita:
a) Hallar la recta tangente a la curva intersección de $z=x^2+y^2$ y $4x^2+y^2+z^2=9$ en el punto $(-1,1,2)$.
b) Probar que $\begin{cases} y^2+2xzu+u^2=4 \\ yzu+x-uv=1 \end{cases}$ define $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ cerca de $(1,1,1,1,1)$ y hallar $v_y(1,1,1)$.

6. Precisar dónde el teorema de la función inversa asegura inversa local, estudiar si hay inversa global y dar una expresión para u_x (si existe) derivando implícitamente:

a) $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\,\mathrm{sen}\,v \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=u \\ y=v+u^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=v^2-u^2 \\ y=uv \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=\frac{u^2}{u^2+v^2} \\ y=\frac{v^2}{u^2+v^2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{v+w} \\ y=u-w \\ z=u-v \end{cases}$

7. Sea $f(x,y)=x\,\mathrm{sen}\,2y$. Hallar $\mathbf{v}$ unitario tal que $D_{\mathbf{v}}f(1,0)$ sea: i) máxima, ii) mínima, iii) 0, iv) 1. Hallar su desarrollo de Taylor de orden 2 en $(0,0)$ y precisar si tiene o no un extremo local en ese punto.

8. Localizar y clasificar los puntos críticos de:

a) $f(x,y)=3x-3y-x^2+xy-y^2$ b) $g(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$
c) $h(x,y)=x-x^3-xy^2$ d) $k(x,y)=2y^3+3x^2y^2-6xy-6y$
e) $e(x,y)=y(y-x)\,\mathrm{e}^{x+y}$ f) $l(x,y)=x^3-3x-3x^2y+y^2+3y$
g) $G(x,y,z)=x^4+2x^2+y^2+3z^2-2y$ h) $H(x,y,z)=x^3-3y^2-z^2-6xy-9x+2z$

9. Determinar p sabiendo que $f(x,y)=x^3+x^2y+y^2+2y+p$ tiene un mínimo local con valor 0.

10. Hallar y clasificar los puntos críticos de: a) $f(x,y)=(x-1)^3+(y-x)^2-3x$, b) $g(x,y)=\big(x^2-y^2\big)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$. En caso de existir extremos precisar si son o no absolutos.

11. a) Probar que $F(x,y,z)\equiv 3x^2+2xz+2y^2+3z^2=24$ define implícitamente una $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $P=(-1,0,3)$. b) Comprobar que $(-1,0)$ es punto crítico de f hallando implícitamente sus derivadas. c) Sabiendo que las parciales f_{xx} y f_{yy} son negativas en $(-1,0)$, clasificar el punto crítico.

12. Sea $f(x,y)=x^3+2xy+y^2$. a) Hallar y clasificar los puntos críticos de f. ¿Posee extremos absolutos?
b) Encontrar los extremos locales sobre $x+y=2$ sin utilizar y utilizando multiplicadores de Lagrange.

13. Hallar los máximos y mínimos de estas funciones cuando se restringen a las regiones indicadas:
a) $f(x,y)=6x^2+6y^2-18y+17$, con (x,y) sobre la curva $(x-2)^2+y^2=1$.
b) $g(x,y.z)=x+y+z$, sobre la superficie esférica dada por $x^2+y^2+z^2+x-y+z=\frac{9}{4}$.

14. Sea $h(x,y)=3y^2-x^3$. Hallar los valores máximo y mínimo de h sobre el círculo $x^2+y^2\le 4$.

15. Hallar los extremos de $f(x,y)=1-2x^2+xy-y^2$ sobre: i) $x^2+y^2\le 1$, ii) $y+x^2=4$, iii) $y^2-x^2+2x=1$.

16. Sea A la región interior a la elipse $5x^2+6xy+5y^2=8$. a) Hallar el punto de la elipse con coordenada x máxima. b) Calcular las distancias máxima y mínima de los puntos de ∂A al origen de coordenadas. c) Encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ sobre A.

17. Sea $g(x,y)=y^3-2x^2+2xy-2y^2$. a) Encontrar sus extremos locales. ¿Posee g extremos absolutos? b) Hallar los puntos críticos de g sobre $y-2x=1$ con multiplicadores de Lagrange. c) Justificar que $g(x,y)=0$ define una función $y(x)$ de C^1 cerca de $(0,2)$ y dar la recta tangente a $y(x)$ en ese punto. d) Si $\bar{c}(t)=\left(t-1,t+t^2\right)$ y $h(t)=g(\bar{c}(t))$, calcular $h'(1)$ utilizando la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$.

18. Calcular los extremos absolutos de $f(x,y,z)=x-y+2z$ en la región $x^2+y^2+2z^2\le 2$.

19. La suma de tres reales positivos es 27. Encontrar su producto máximo.

20. Hallar los puntos de la curva intersección de $x^2+z^2=2$ e $y+z=0$ que hacen máximo y mínimo el valor de $f(x,y,z)=2x+3y+z$.

1. Calcular los valores de las siguientes integrales sobre el rectángulo $R=[0,1]\times[-1,1]$:

a) $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ b) $\iint_R y\,e^{xy}dx\,dy$ c) $\iint_R |x-y|\,dx\,dy$ d) $\iint_R (xy)^2\cos x^3\,dx\,dy$

2. Calcular las integrales dobles $\iint_D f\,dx\,dy$ de las f que se dan en los recintos $D\subset\mathbf{R}^2$ que se indican:

a) $f(x,y)=\log(xy)$, D rectángulo $[1,2]\times[1,2]$.
b) $f(x,y)=x^3y$, D región acotada por el eje y y $x=4-y^2$.
c) $f(x,y)=xy$, D región encerrada entre $y=x$ e $y=x^2$.
d) $f(x,y)=e^{x-y}$, D cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ y $(-1,0)$.
e) $f(x,y)=\operatorname{sen}x$, D triángulo limitado por las rectas $y=0$, $y=x$ e $y=\pi-x$.
f) $f(x,y)=x$, D triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,4)$ y $(-4,7)$.

3. Evaluar la integral $\int_0^2\int_y^2 e^{x^2}dx\,dy$ cambiando el orden de integración.

4. Calcular la integral de la función $f(x,y)=x^2+2xy^2+2$ sobre la región del plano acotada por la gráfica de $y=x-x^2$, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=2$.

5. Sea $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$. a) Dibujar las curvas de nivel $f=0,1,-1$. Hallar $\nabla f(0,1)$, $D_{\mathbf{v}}f(0,1)$ para $\mathbf{v}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ y $\Delta f(x,y)$. b) Calcular $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el triángulo de vértices $(1,0)$, $(2,0)$ y $(1,1)$.

6. Calcular $\iint_D (2x-y)^3\,dx\,dy$, con D cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,2)$ y $(1,2)$ de dos formas: i) directamente, ii) haciendo el cambio $u=2x-y$, $v=y$.

7. Calcular $\iint_D e^{y-x}\,dx\,dy$, para D de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(0,2)$: a) directamente, b) con $u=y-x$, $v=y+x$.

8. Calcular mediante el cambio de variable $u=y-x$, $v=y+x$, la integral $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$, con D región acotada por los ejes y la recta $x+y=2$.

9. Hallar $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ con D región del primer cuadrante acotada por las curvas $\begin{matrix} xy=1\,,\ x^2-y^2=1 \\ xy=2\,,\ x^2-y^2=4 \end{matrix}$.

10. Calcular sobre el cículo unidad $x^2+y^2\le 1$ la integral de: a) $f(x,y)=x^3$, b) $g(x,y)=x^4$.

11. Trabajando en coordenadas i) cartesianas y ii) polares, hallar las siguientes integrales dobles $\iint_D f$:

a) $f(x,y)=x^2y$, D parte del círculo $x^2+y^2\le 1$, con $x,y\ge 0$.
b) $f(x,y)=x$, D región definida por $x^2+y^2\le 2$, $x\ge 1$, $y\ge 0$.
c) $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D región del primer cuadrante limitada por $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$.
d) $f(x,y)=1$, D curva dada en polares por $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$.

12. Sea $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x$. a) Estudiar si tiene derivadas parciales y si es diferenciable en $(0,0)$. b) Dibujar la curva de nivel $f(x,y)=1$ y precisar para qué vector $\bar{u}$ unitario es mínima $D_{\bar{u}}f(0,-1)$. c) Hallar $\iint_D f$, siendo D el semicírculo $x^2+y^2\le 1$, $y\le x$.

13. Calcular el área de la región plana definida por $x^{2/3}+y^{2/3}\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, utilizando el cambio de variables $x=r\cos^3\theta$, $y=r\operatorname{sen}^3\theta$.

14. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z=x^2+y$ sobre el rectángulo $[0,1]\times[1,2]$.

15. Calcular el volumen encerrado entre el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el plano $z=0$ sobre el círculo de centro $(0,1)$ limitado por $x^2+y^2=2y$.

16. Sea $g(x,y)=2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}$. a) Dibujar su corte con $x=0$ y su gráfica. ¿Es g diferenciable en $(0,0)$? b) Calcular el volumen del recinto limitado por la gráfica de g y el plano $z=1$.

17. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z=x^2+y^2$ y $z=2-x^2-7y^2$.

18. Hallar el centro de masas de una lámina de densidad $\sigma(r,\theta)=\cos\theta$ que ocupa la región $r\le\cos\theta$.

19. Determinar el centroide de las regiones:

a) $\{0\le y\le \operatorname{sen}^2 x,\ 0\le x\le\pi\}$ b) $\{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

20. Calcular $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ para las funciones f y los sólidos V que se indican:

a) $f(x,y,z)=2x+3y+z$, para el paralelepípedo $V=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

b) $f(x,y,z)=x^2\cos z$, con V acotado por los planos $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $x=0$, $x+y=1$.

c) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^y$, con V limitado por los planos $x=0$, $x=2$, $y=1$, $z=0$, $y+z=0$.

d) $f(x,y,z)=xy^2z^3$, V limitado en $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ por $y=x$ y $x=1$ y la superficie $z=xy$.

21. Hallar $\iiint_V xy\,dx\,dy\,dz$ donde V es el sólido comprendido en $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$ entre el plano $z=-1$ y el plano tangente a la superficie $x^2+y^2+z=4$ en el punto $(1,1,2)$.

22. Dados los puntos $P=(0,2,-4)$ en rectangulares, $Q=\left(4,\frac{4\pi}{3},3\right)$ en cilíndricas y $R=\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ en esféricas, escribir cada uno de ellos en los dos sistemas de coordenadas restantes.

23. Dibujar los siguientes conjuntos y expresarlos en los otros dos sistemas de coordenadas:

$A=\{(x,y,z):\ x=0,\ z=-2y\}$ $B=\{(r,\theta,z):\ r=1\}$ $C=\{(\rho,\theta,\phi):\ \phi\le\frac{\pi}{4},\ \rho\le 1\}$

24. Calcular $\iiint_V \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, si V es la región de $1\le x^2+y^2\le 4$ acotada por $z=-2$ y $z=\operatorname{sen}(x^2+y^2)$.

25. Calcular en cilíndricas $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, siendo V el cono limitado por $3z^2=x^2+y^2$ y $z=1$ (en $z\ge 0$). Comprobar el resultado calculando la integral en otro sistema de coordenadas (más corto en esféricas).

26. a) Calcular en cartesianas y polares $\iint_D x\,dx\,dy$, con D parte del círculo $x^2+y^2\le 2y$ con $x\ge 0$, $y\ge x$. b) Hallar el volumen de la parte de la esfera $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$ situada por encima del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, integrando en: i) cilíndricas, ii) esféricas.

27. Calcular $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, siendo V el sólido limitado por las superficies:

a) $x=0$, $y=0$, $x+y=2$, $z=0$, $z=\mathrm{e}^{-x}$ b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2=4$

28. Calcular el volumen de las siguientes regiones ulizando más de un sistema de coordenadas:

a) región limitada por el cilindro $x^2+y^2=1$ y los planos $z=0$ y $z=y+2$.

b) región acotada por el cilindro $x^2+y^2=1$, el plano $z=0$ y la superficie $z+x^2=1$.

c) región encerrada entre las superficies $z=x^2+y^2$ y $x^2+y^2+z^2=2$.

29. Calcular la integral de $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ sobre el sólido comprendido entre las superficies esféricas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

30. Calcular el momento de inercia de una esfera de densidad constante respecto de su diámetro.

1. Hallar la longitud de las curvas:
a) $x=|t|$, $y=\left|t-\frac{1}{2}\right|$, $t\in[-1,1]$; b) $y=\log x$, $x\in[1,\mathrm{e}]$; c) $y=x^{2/3}$, $x\in[1,8]$;
d) $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\,\mathrm{sen}\,t-\mathrm{sen}\,2t$, $t\in[0,2\pi]$ (cardioide);

2. Sea R la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la curva $r=2(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)$. a) Calcular el área de R. b) Hallar la longitud del perímetro de R.

3. Hallar $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ para la f y las curvas que se indican: a) $f(x,y,z)=yz$, $\mathbf{c}(t)=(t,3t,2t)$, $t\in[1,3]$. b) $f(x,y,z)=x+z$, $\mathbf{c}(t)=\left(t,t^2,\frac{2}{3}t^3\right)$, $t\in[0,1]$.

4. Un alambre está sobre el tramo de espiral $r=\mathrm{e}^{\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. En cada punto (r,θ) la temperatura es r. Calcular la longitud y la temperatura media del alambre.

5. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=0$, si la densidad en (x,y,z) es x^2 por unidad de longitud.

6. Hallar el área de la superficie generada por el giro de a) $x=y^2$, $y\in[1,2]$ b) $r=1+\cos\theta$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alrededor del eje x.

7. Sean $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(3,z^2-1,2yz\right)$ y $\mathbf{c}(t)=\left(t^2,t,t^2\right)$, $t\in[0,1]$. Hallar $\mathrm{div}\,\mathbf{g}$ y $\mathrm{rot}\,\mathbf{g}$. Calcular las integrales de línea $\int_{\mathbf{c}}\mathrm{div}\,\mathbf{g}\,ds$ y $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\overline{s}$.

8. Hallar $\int_C (x^2+y^2)dx+dy$ siendo C: a) $y=x^2$, $0\le x\le 1$, b) $y=\frac{1}{2}$, $1\le x\le 2$, c) $x=2$, $0\le y\le\frac{1}{2}$.

9. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{f}(x,y)=(3y^2+2,16x)$ al mover una partícula de $(-1,0)$ a $(1,0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2+y^2=b^2$. ¿Para qué valor de b es mínimo el trabajo?

10. Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{f}(x,y)=(xy,0)$ entre $(-1,0)$ y $(1,0)$ a lo largo de: a) el eje x, b) $y=1-x^2$, c) $y=|x|-1$, d) la parte inferior de la circunferencia $x^2+y^2=1$. ¿Es $\mathbf{f}$ conservativo?

11. Sea $\mathbf{c}(t)=\left(t^3,2t^2\right)$. a) Hallar la longitud del tramo de curva descrita por $\mathbf{c}$ cuando $t\in[-1,0]$. b) Si $h(x,y)=\mathrm{e}^{2x+y}$, hallar la integral de línea de ∇h desde $(0,0)$ hasta $(1,2)$ sobre la curva dada por $\mathbf{c}$.

12. a) Sea $f(x,y)=x^2-y^2$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y el vector $\nabla f(1,1)$. Hallar la derivada de f en el punto $(1,1)$ según el vector $\mathbf{v}=(-1,-1)$. Hallar $\Delta f(x,y)$. b) Hallar la integral de línea de $\mathbf{g}(x,y)=(2x,-2y)$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$ sobre el tramo de circunferencia $x^2+y^2=1$ con $x,y\ge 0$.

13. Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{f}(x,y)=\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+(y-1)^2=1$, recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial?

14. Sea D el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,-1)$ y $(2,-1)$. a) Calcular $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$ de dos formas distintas. b) Hallar la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(1,\cos y)$ a lo largo de la frontera de D, recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

15. Hallar la integral de $\mathbf{f}(x,y)=\left(-\frac{y}{(y+x)^2},\frac{x}{(y+x)^2}\right)$ entre $(2,0)$ y $(1,1)$ a lo largo de la parábola $x=2-y^2$.

16. Sea $g(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^{2x-z}$. a) Hallar $\iiint_V g$, siendo V el sólido acotado por los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ y $z=2-x$. b) Hallar el valor de la integral de línea de i) g, ii) ∇g desde $(0,0,0)$ hasta $(1,2,2)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

17. Sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(xy,2x,-yz)$. Hallar $\mathrm{div}\,\mathbf{f}$ y $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$. Calcular la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo del camino $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\mathrm{sen}\,t,1)$, $t\in[0,\pi]$ y la longitud de la curva descrita por $\mathbf{c}(t)$.

18. Calcular la integral de $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ a lo largo de: a) $\mathbf{c}(t)=(t,t,t)$, $t\in[0,1]$. b) $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\mathrm{sen}\,t,0)$, $t\in[0,2\pi]$.

19. Sea el campo $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(2xz+y,x,x^2\right)$. a) Escribir $\operatorname{div}\mathbf{F}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{F}$. ¿Es $\mathbf{F}$ conservativo?
b) Calcular $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz$, con V sólido acotado por los planos $x=1$, $y=-1$, $y=1$, $z=0$, $z=2x$.
c) Si $\mathbf{c}(t)=\left(t,e^{t^2-1},2t\right)$, hallar el valor de la integral de línea $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ desde $(-1,1,-2)$ hasta $(1,1,2)$.
d) Hallar la recta tangente a la curva dada por $\mathbf{c}$ en el punto $(1,1,2)$ y el punto en que la recta corta $z=0$.

20. Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{i}+2yz\,\mathbf{j}+y^2\,\mathbf{k}$ entre $(1,0,2)$ y $(0,3,0)$ a lo largo del segmento que une esos puntos. ¿Para alguna curva que una ambos puntos la integral es 0?

21. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(z^2,2y,cxz\right)$, c constante. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. b) Precisar para qué valor de c deriva $\mathbf{f}$ de un potencial U. c) Para este c, ¿cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ entre $(0,0,0)$ y $(1,0,1)$ a lo largo del segmento que une los puntos? d) Calcular la integral anterior para cualquier c.

22. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=e^{-z}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-xe^{-z}\,\mathbf{k}$. a) Calcular directamente la integral de línea de $\mathbf{f}$ desde $(1,1,0)$ hasta $(1,0,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos. b) Hallar, si existe, una función potencial para $\mathbf{f}$.

23. a) Calcular $\iiint_V y\,dx\,dy\,dz$, si V es el sólido acotado por $y=x^2$ y los planos $y=1$, $z=0$ e $y+z=0$.
b) Hallar el valor de la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(y,x,z)$ desde $(-1,1,-1)$ hasta $(1,1,-1)$ sobre la curva intersección de $y=x^2$ con $y+z=0$.

24. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=y^2\,\mathbf{i}+2xy\,\mathbf{j}-2z\,\mathbf{k}$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})$ y $\Delta(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})$. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial?
b) Hallar $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz$, siendo V el sólido acotado por $z=4-y^2$ y los planos $x=0$, $x=3$ y $z=0$.
c) Hallar la integral de línea de $\mathbf{f}$ de $(3,0,4)$ a $(0,2,0)$ sobre la curva $\mathbf{c}(t)=\left(3-\frac{3t}{2},t,4-t^2\right)$, $t\in[0,2]$.

25. Sea $\mathbf{f}(x,y)=\left(1,xy^2\right)$. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial? Hallar el valor de la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=4$, recorrida en sentido opuesto a las agujas del reloj: i) directamente, tras dar una parametrización, ii) mediante el teorema de Green (integrando en polares).

26. Sea D la región comprendida entre las gráficas de $y=e^{-x}$, $y=e^{x-2}$ y el eje y. a) Hallar $\iint_D x\,e^x\,dxdy$.
b) ¿Cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(xy\,e^x,1)$ a lo largo de ∂D, en sentido horario?

27. Hallar con una integral de línea el área encerrada entre el eje $y=0$ y un arco de la cicloide $x=t-\operatorname{sen}t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\pi$.

28. Comprobar el teorema de Green para los campos $\mathbf{f}$ y recintos D que se indican:
a) $\mathbf{f}(x,y)=\left(y^2,2x\right)$ y D región del plano encerrada entre la parábola $x=4-y^2$ y la recta $y=x-2$.
b) $\mathbf{f}(x,y)=\left(y^2,xy\right)$ y D semicírculo girado dada por $x^2+y^2\le 2$ e $y\ge x$.
c) $\mathbf{f}(x,y)=(-xy,y)$ y D limitado por $y=x^2$ y el segmento que une los puntos $(-1,1)$ y $(2,4)$.
d) $\mathbf{f}(x,y)=\left(x,x^2\right)$ y D parte de la elipse $4x^2+9y^2=1$ con $x\ge 0$.
e) $\mathbf{f}(x,y)=\left(xy,2-x^2\right)$ y D dado en polares por $r\le 1$, $0\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$.
f) $\mathbf{f}(x,y)=\left(x^3,x^2y\right)$ y D acotada por las curvas $y=x^2$ y $x=y^2$.
g) $\mathbf{f}(x,y)=\left(y^2,x^2\right)$ y D semicírculo dado por $x^2+y^2\le 9$, $x\ge 0$.

29. Comprobar los teoremas de Green y la divergencia para el campo vectorial $\mathbf{g}(x,y)=\left(x^2,-2xy\right)$ en el triángulo D cuyos vértices son los puntos $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,4)$.

30. Verificar el teorema de la divergencia para: i) $\mathbf{f}(x,y)=(x,y)$ y D el disco unidad $x^2+y^2\le 1$,
ii) $\mathbf{f}(x,y)=(2xy,-y^2)$ y D el cuadrado unidad.

1. a) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\mathbf{r}(u,v)=(2u,u^2+v,v^2)$ en el punto $(0,1,1)$ a partir del producto vectorial fundamental. b) Escribir la superficie en la forma $z=f(x,y)$ y calcular ese plano utilizando la fórmula del capítulo 2.

2. Comprobar que $\mathbf{r}(u,v)=(\operatorname{ch} u\cos v,\operatorname{ch} u\operatorname{sen} v,\operatorname{sh} u)$, $u\in\mathbf{R}$, $v\in[0,2\pi]$, parametriza el hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$. Hallar de dos formas su plano tangente en el punto con $u=0$ y $v=\frac{\pi}{4}$.

3. Hallar el área del toro dado por $\mathbf{r}(\theta,\phi)=\big((2+\cos\phi)\cos\theta,(2+\cos\phi)\operatorname{sen}\theta,\operatorname{sen}\phi\big)$, $\theta,\phi\in[0,2\pi]$.

4. Calcular $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, siendo S la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=4$.

5. Calcular la integral de superficie del campo $f(x,y,z)=z$ sobre la parte del hiperboloide $z^2=1+x^2+y^2$ comprendida entre $z=1$ y $z=\sqrt{5}$.

6. Sea S la superficie cilíndrica $x^2+y^2=4$ comprendida entre los planos $z=0$ y $z=3$. a) Hallar el área de S utilizando integrales de superficie. b) Calcular la integral de superficie sobre S de: i) $f(x,y,z)=x^2$, ii) $\mathbf{f}(x,y,z)=(xz,yz,2)$ (respecto de la normal exterior).

7. Sea S la parte de la superficie cónica $z^2=x^2+y^2$ comprendida entre los planos $z=1$ y $z=2$, y sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,1)$. a) Calcular el área de S y la integral de superficie de $\mathbf{f}$ sobre S respecto de la normal exterior al cono. b) Calcular el $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. ¿Cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo de la circunferencia que limita superiormente la superficie?

8. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)(x,y,z)$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{F}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{F}$. b) Comprobar el teorema de Gauss para $\mathbf{F}$ sobre la esfera unidad.

9. Comprobar el teorema de Gauss para $\mathbf{f}(x,y,z)=4x\,\mathbf{i}+4y\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$ en el volumen $x^2+y^2\le 25$, $0\le z\le 2$.

10. Sean las superficies $S=\{x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\ge 0\}$ y $B=\{x^2+y^2\le R^2,\ z=0\}$. Comprobar que se verifica el teorema de la divergencia sobre $S\cup B$ para el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(y,-x,1)$.

11. Comprobar el teorema de Gauss para $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,1,y)$ y el sólido dado por $0\le z\le 1-(x^2+y^2)^2$.

12. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=3yz\,\mathbf{i}+2xz\,\mathbf{j}+(z+xy)\,\mathbf{k}$, hacia el exterior de la superficie de la esfera $x^2-6x+y^2+z^2=0$.

13. Comprobar el teorema de la divergencia para $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,x,2)$ en el volumen comprendido entre las superficies $x^2+y^2+z^2=4$ y $z=-1$.

14. Sea el campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(-y,x,2)$. Comprobar el teorema de Stokes para la superficie S definida por las condiciones $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge -1$.

15. Comprobar el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=\big(y,2x+z,e^x\big)$ y la superficie D contenida en el plano $z=0$, definida por $y\ge 0$, $x^2+y^2\le 1$, $x^2+2y^2\ge 1$.

16. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=(yz,e^y,1)$ y S el triángulo determinado por los puntos $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(-1,1,1)$. Calcular la integral de superficie de $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ sobre S directamente y utilizando el teorema de Stokes.

17. Sea S la parte del paraboloide elíptico $z=4-4x^2-y^2$ con $z\ge 0$ y $x\ge 0$, y sea $\mathbf{f}(x,y,z)=(3,x^2,y)$. Comprobar el teorema de Stokes calculando la integral de superficie de $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ sobre S y la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo del contorno cerrado que limita dicha superficie.

18. Comprobar el teorema de Stokes, calculando las integrales correspondientes, para el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=-y\,\mathbf{i}+2x\,\mathbf{j}+(x+z)\,\mathbf{k}$ en la parte de la superficie $x^2+y^2+z^2=9$ con $z\ge 0$.

19. Sean V el sólido limitado por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$, S la parte de dicho paraboloide con $z \geq 0$, C la intersección del paraboloide con el plano $z = 0$, S^* la superficie de V y $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, xy, 2z)$. Comprobar que se cumplen los teoremas de Stokes y de la divergencia calculando:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}\,, \quad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS\,, \quad \iint_{S^*} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS \quad \text{e} \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f}\, dx\, dy\, dz\,.$$

20. a) Comprobar que si $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es de C^2 se satisface $u\, \Delta u = \operatorname{div}(u \nabla u) - \|\nabla u\|^2$.

b) Deducir, con el teorema de la divergencia en el plano, que $u \in C^2(D)$ cumple la 'fórmula de Greeen':
$\iint_D u\, \Delta u\, dx\, dy = \oint_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds - \iint_D \|\nabla u\|^2 dx\, dy$, con $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ derivada según la normal unitaria exterior.

c) Escribir y probar la fórmula para $\mathbf{R}^3$. d) ¿Qué resultado de $\mathbf{R}$ generalizan estas fórmulas?
(se utilizan demostrando la unicidad de las soluciones de algunas ecuaciones en derivadas parciales).