Soluciones del control t12 de Cálculo C (26 de febrero de 2024)

1. Sean $\bar{g}(x,y,z)=\left(x^2+z,\,x,\,y+z^2\right)$, $\bar{a}=(1,0,-1)$ y la curva $\bar{c}(t)=\left(e^t, t^2, -e^{-t}\right)$. [1.2 ptos] (.9+.3)

a] Hallar $\operatorname{div}\bar{g}$, $\operatorname{rot}\bar{g}$, el determinante jacobiano $|\mathbf{D}\bar{g}|$, el vector $\bar{a}\times\bar{g}(\bar{a})$ y el ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{g}(\bar{a})$.

b] Probar que la curva $\bar{c}(t)$ corta perpendicularmente en el punto $\bar{a}$ a la superficie $\operatorname{div}\bar{g}=0$.

a] $\operatorname{div}\bar{g}=2x+2z$. $\operatorname{rot}\bar{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ x^2+z&x&y+z^2\end{vmatrix}=(1,1,1)$. $J=|\mathbf{D}\bar{g}|=\begin{vmatrix}2x&0&1\\1&0&0\\0&1&2z\end{vmatrix}=1$. $\bar{a}\times\bar{g}(\bar{a})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=(1,-1,1)$.

$\frac{\bar{a}\cdot\bar{g}(\bar{a})}{\|\bar{a}\|\|\bar{g}(\bar{a})\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ forman un ángulo $\frac{2\pi}{3}$.

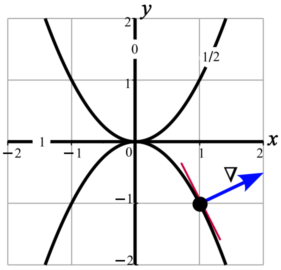
b] $x+z=0$ es un plano (al que pertenece $\bar{a}$), con vector perpendicular $(1,0,1)$. La curva pasa por $\bar{a}$ si $t=0$.
Su vector tangente en ese punto será $\bar{c}\,'(0)=\left(e^t, 2t, e^{-t}\right)\big|_{t=0}=(1,0,1)$, el perpendicular al plano citado.

2. Sea $f(x,y)=\frac{x^4}{y^2+x^4}$, $f(0,0)=0$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0,\frac{1}{2},1$ y el $\nabla f(1,-1)$. [1.8 ptos]

b] En $(0,0)$, precisar si existen f_x y f_y, si f es continua y si es diferenciable. (.6+.5+.4+.3)

c] Hallar el vector $\bar{u}$ unitario para el que $D_{\bar{u}}f(1,-1)$ es máxima y el valor de esa derivada máxima.

d] Si $\bar{c}(t)=\left(t+1, t^2-1\right)$, calcular, mediante la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, la derivada de $h(t)=f(\bar{c}(t))$ en $t=0$.



a] $f=0\to x=0$. $\frac{x^4}{y^2+x^4}=C\to y^2=\left(\frac{1}{C}-1\right)x^4$. $C=\frac{1}{2}\to y=\pm x^2$, $C=1\to y=0$.

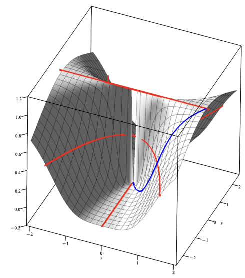
$\nabla f=\left(\frac{4x^3y^2}{(y^2+x^4)^2},-\frac{2x^4y}{(y^2+x^4)^2}\right)\xrightarrow{(1,-1)}\left(1,\frac{1}{2}\right)$ (perpendicular a la curva de nivel como debía).

b] $f(x,0)=\begin{cases}1,\ x\neq0\\0,\ x=0\end{cases}\Rightarrow f_x(0,0)$ **no existe**. $f(0,y)=0\ \forall y\Rightarrow\boxed{f_y(0,0)=0}$.

Con sólo ver $f(x,0)$ es claro que f es **discontinua** en el origen.

[Más largo: $f(x,mx^2)=\frac{1}{m^2+1}$, valor distinto en cada parábola $\Rightarrow$ discontinua.
De acercarnos por rectas no obtenemos nada: $f(x,mx)=\frac{x^2}{m^2+x^2}\xrightarrow{x\to0}0$].

Por no existir una parcial o no ser continua, f **no es diferenciable** en $(0,0)$.



c] La derivada es máxima en la dirección y sentido del gradiente y su valor es el $\|\nabla\|$.

$\|\left(1,\frac{1}{2}\right)\|=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{5}}\to\boxed{\bar{u}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$. Comprobamos que $D_{\bar{u}}f(1,-1)=\left(1,\frac{1}{2}\right)\cdot\bar{u}=\frac{5}{2\sqrt{5}}$.

[Bastaba mirar las curvas de nivel para saber que ∇f era múltiplo de $(2,1)$ y tener el $\bar{u}$].

d] $\bar{c}(0)=(1,-1)$, $\bar{c}\,'(t)=(1,2t)$, $\bar{c}\,'(0)=(1,0)$, $h'(0)=\nabla f\left(\bar{c}(0)\right)\cdot\bar{c}\,'(0)=\boxed{1}$.

3. Sean $F(x,y,z)=z^3+x^2+y^2$, la superficie S definida por $F=10$ y el punto $\bar{p}=(-1,1,2)\in S$. [1.8 ptos] (1.1+.7)

a] Hallar en $\bar{p}$ el plano tangente a la superficie S, la recta normal a S y el punto en que esta recta corta $z=0$.
Escribir un $\bar{u}$ unitario para el que sea $D_{\bar{u}}F(\bar{p})=0$.

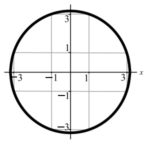
Elegir entre **b]** y **c]**: **b]** Dibujar sus cortes con $z=0$ y $x=0$ y una gráfica aproximada de S $\left[\sqrt{10}\approx3.16,\ \sqrt[3]{10}\approx2.15\right]$.

c] Comprobar que el teorema de la función implícita asegura que $F=10$ define una $z(x,y)$ de C^1 cerca de $\bar{p}$ y calcular z_x y z_y en $(-1,1)$ derivando implícitamente. ¿Hay $z(x,y)$ implícita C^1 cerca de $(1,3,0)$?

a] $\nabla F=\left(2x,2y,3x^2\right)\xrightarrow{(-1,1,2)}2(-1,1,6)$. Plano tangente: $(-1,1,6)\cdot(x+1,y-1,z-2)=0\to\boxed{z=\frac{1}{6}(14+x-y)}$.

Recta normal: $\bar{x}=(-1,1,2)+t(-1,1,6)=\boxed{(-1-t,1+t,2+6t)}$, que corta $z=0$ en $\boxed{\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},0\right)}$.

Cualquier $\bar{u}\perp\nabla$ nos vale, por ejemplo $\boxed{\bar{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)}$.

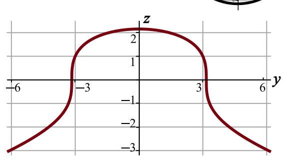


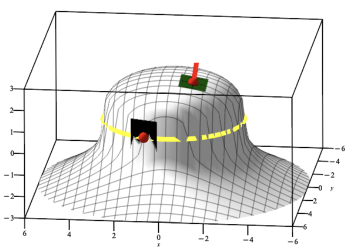
b] El corte con $z=0$ es una circunferencia: $x^2+y^2=10$, $R=\sqrt{10}\approx3.16$.
[Y lo es todo corte con $z=C<\sqrt[3]{10}$. Es de revolución.]

Corte con $x=0$: $z=\sqrt[3]{10-y^2}$, $z'=\frac{-2y}{(10-y^2)^{2/3}}$.

[Par, pendiente vertical en $(\sqrt{10},0)$. $z\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}-\infty$, $z'\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}0$.

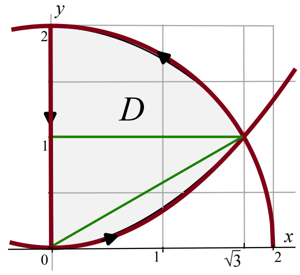
Puntos: $(0,\sqrt[3]{10})\approx(0,2.15)$, $(\sqrt{3},2)$, $(3,1)$, $(3\sqrt{2},-2)$].





c] $3z_xz^2+2x=0$, $z_x=-\frac{2x}{3z^2}\xrightarrow{\bar{p}}\frac{1}{6}$. $3z_yz^2+2y=0$, $z_y=-\frac{2y}{3z^2}\xrightarrow{\bar{p}}-\frac{1}{6}$. $\left[z=2+\frac{1}{6}(x-1)-\frac{1}{6}(y+1)\right.$ es el plano de arriba$\left.\right]$.
El TFI asegura que $F=10$ define $z(x,y)$ en todo punto de S con $z\neq0$. En $(1,3,0)$, $F_z=0$ y no es aplicable.
Despejando se tiene la única $z(x,y)=\left(10-x^2-y^2\right)^{1/3}$, pero no es de C^1 si $z=0$ (el plano tangente es vertical).

1. Comprobar el teorema de Green para $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(x^2,5xy)$ y D región definida por $x^2+y^2\le 4$, $y\ge\frac{1}{3}x^2$ y $x\ge 0$, calculando la integral doble i) en cartesianas y ii) en polares [usar el cambio $\tan\theta=u$]. [2.6 ptos]



Con $y^2+3y=4$ (o a ojo) se halla el corte de circunferencia y parábola $(\sqrt{3},1)$.

i) Para calcular $\iint_D [g_x-f_y]=\int_D 5y$ en cartesianas es más corto:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\int_{x^2/3}^{\sqrt{4-x^2}}5y\,dy\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(10-\tfrac{5}{2}x^2-\tfrac{5}{18}x^4\right)dx=10\sqrt{3}-\left[\tfrac{5}{6}x^3+\tfrac{1}{18}x^5\right]_0^{\sqrt{3}}=\boxed{7\sqrt{3}}.$$

Peor: $\int_0^1\int_0^{\sqrt{3y}}5y\,dx\,dy+\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}5y\,dx\,dy=5\sqrt{3}\int_0^1 y^{3/2}+5\int_1^2 y\sqrt{4-y^2}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$.

ii) Bastante más largo es aquí en polares. Hay 2 casos dependiendo de θ.

Uno fácil para la circunferencia y más complicado con la parábola: $r\,\mathrm{sen}\,\theta=\frac{1}{3}r^2\cos^2\theta\ \to\ r=3\,\mathrm{sen}\,\theta/\cos^2\theta$.

$$\iint_D 5y\,dx\,dy=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^2 5r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta+\int_0^{\pi/6}\int_0^{3\,\mathrm{sen}\,\theta/\cos^2\theta}5r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=\tfrac{20}{3}\sqrt{3}+45\int_0^{\pi/6}\frac{\mathrm{sen}^4\theta}{\cos^6\theta}\,d\theta=\boxed{7\sqrt{3}}.$$

$$\tan\theta=u,\ du=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\ \to\quad 45\int_0^{1/\sqrt{3}}u^4du=\frac{9}{9\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

Parametrizando ∂D. Semicircunferencia: $\bar{\mathrm{c}}_1=(2\cos t,2\,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$. Parábola: $\bar{\mathrm{c}}_2=\left(x,\frac{x^2}{3}\right)$, $x\in[0,\sqrt{3}]$.
El segmento ni lo parametrizamos, pues es claramente $\bar{\mathrm{f}}=\bar{0}$ cuando $x=0$ y su integral es nula.

$$\int_{\bar{\mathrm{c}}_1}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=8\int_{\pi/6}^{\pi/2}\underbrace{(c^2,5cs)\cdot(-s,c)}_{4sc^2}\,dt=\tfrac{32}{3}\left[-\cos^3 t\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=4\sqrt{3}.$$

$$\left[\text{En cartesianas: } \bar{\mathrm{c}}_*=(x,\sqrt{4-x^2}),\ x\in[\sqrt{3},0].\ \int_{\bar{\mathrm{c}}_*}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\cdots=\int_{\sqrt{3}}^0-4x^2dx=\tfrac{4}{3}x^3\Big]_0^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\right].$$

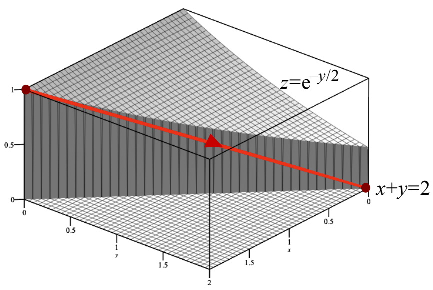
Para la parábola: $\int_{\bar{\mathrm{c}}_2}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2,\tfrac{5}{3}x^3\right)\cdot\left(1,\tfrac{2x}{3}\right)dx=\left[\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{2}{9}x^5\right]_0^{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$. $\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}+0=\boxed{7\sqrt{3}}$.

2. Sean $F(x,y,z)=2xz$, $\bar{\mathrm{c}}(t)=\left(2-t,t,1-\frac{t}{2}\right)$, $t\in[0,2]$, y V el sólido limitado por $x,y,z=0$, $x+y=2$ y $z=\mathrm{e}^{-y/2}$.

a] Calcular la integral triple $\iiint_V F\,dx\,dy\,dz$ (haciendo algún dibujo). [1.1+.4+.3+.4 = 2.2 ptos]

b] Calcular la integral de línea del campo escalar $\int_{\bar{\mathrm{c}}}F\,ds$. **c]** Hallar el valor de la integral $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\nabla F\cdot d\bar{s}$.

d] Dar un ejemplo de un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$ no constante $\bar{\mathrm{g}}$ para el que sea 0 la integral de línea $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}$.



a] $\int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^{\mathrm{e}^{-y/2}}2xz\,dz\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^{2-x}x\mathrm{e}^{-y}dy\,dx=\int_0^2\left(x-x\mathrm{e}^{x-2}\right)dx=$ (partes)

$$=2-x\mathrm{e}^{x-2}\Big]_0^2+\int_0^2\mathrm{e}^{x-2}dx=\boxed{1-\mathrm{e}^{-2}}.$$

$\left[\text{Un poco más largo haciendo } \int_0^2\int_0^{2-y}\int_0^{\mathrm{e}^{-y/2}}2xz\,dz\,dx\,dy=\tfrac{1}{2}\int_0^2(y-2)^2\mathrm{e}^{-y}dy\right].$

b] Es $\bar{\mathrm{c}}'(t)=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)\to\|\bar{\mathrm{c}}'\|=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$. $F(\bar{\mathrm{c}}(t))=(t-2)^2$.

Por tanto, $\int_{\bar{\mathrm{c}}}F\,ds=\int_0^2\frac{3}{2}(t-2)^2dt=\frac{1}{2}(t-2)^3\Big]_0^2=\boxed{4}$.

c] La integral de un gradiente es inmediata: $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\nabla F\cdot d\bar{s}=F(\bar{\mathrm{c}}(2))-F(\bar{\mathrm{c}}(0))=F(0,2,0)-F(2,0,1)=\boxed{-4}$.

Perdiendo el tiempo podríamos utilizar la definición hallando $\nabla F=(2z,0,2x)$ y usando la parametrización dada:

$$\int_{\bar{\mathrm{c}}}\nabla F\cdot d\bar{s}=\int_0^2(2-t,0,4-2t)\cdot\left(-1,1,-\tfrac{1}{2}\right)dt=\int_0^2(2t-4)\,dt=4-8=\boxed{-4}.$$

d] Inspirados en **c]** podemos dar una nueva F que se anule en ambos puntos: $G(x,y,z)=xy\to\boxed{\bar{\mathrm{g}}=(y,x,0)}=\nabla G$.

O no es difícil dar un $\bar{\mathrm{g}}$ tal que $\bar{\mathrm{g}}(\bar{\mathrm{c}}(t))=\bar{0}$. Por ejemplo es sencillo $\boxed{\bar{\mathrm{g}}=(0,x-2z,0)}$.

U otro para el que $\bar{\mathrm{g}}(\bar{\mathrm{c}}(t))$ sea perpendicular a $\bar{\mathrm{c}}'(t)$. Por ejemplo, con la y: $\boxed{\bar{\mathrm{g}}=(y,y,0)}\to\bar{\mathrm{g}}(\bar{\mathrm{c}}(t))=(t,t,0)$.

O dejar una constante suelta y ajustarla: $\bar{\mathrm{g}}=(a,y,0)\to\int_0^2(a,t,0)\cdot\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)dt=2-2a\to\boxed{\bar{\mathrm{g}}=(1,y,0)}$ ...