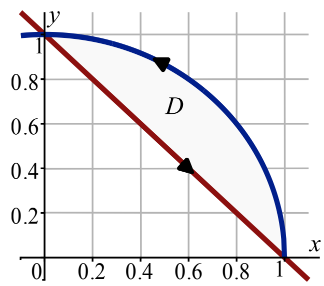
Soluciones de la segunda parte del examen final de junio de Cálculo (C) (26-06-23)

Elegir entre el problema 3 (de la primera parte) y este 3*:

3*. Comprobar el teorema de Green para $\bar{f}(x,y)=(x^3,xy)$ y D región del primer cuadrante acotada por la curva $x^2+y^2=1$ y el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$.



$g_x-f_y=y$. $\iint_D y\,dx\,dy=\int_0^1\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx=\frac12\int_0^1\left(2x-2x^2\right)dx=\frac12-\frac13=\boxed{\frac16}$.

Más largo:

$$\int_0^1\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} y\,dy\,dx=\int_0^1\left(y\sqrt{1-y^2}-y+y^2\right)dy=-\tfrac13(1-y^2)^{3/2}\Big]_0^1-\tfrac12+\tfrac13=\boxed{\tfrac16}.$$

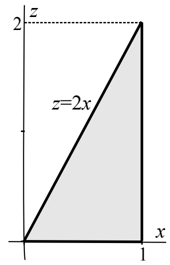
Parametrizamos el arco de circunferencia y el segmento que forman la ∂D:

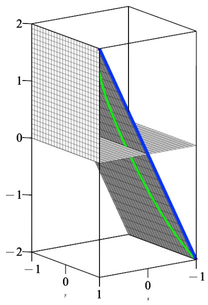
$\bar{c}_1=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. $\bar{c}_2=(x,1-x)$, $x\in[0,1]$.

$$\int_{\partial D}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_0^{\pi/2}\underbrace{(c^3,cs)\cdot(-s,c)}_{c^2s-c^3s}\,dt+\int_0^1\underbrace{(t^3,t-t^2)\cdot(1,-1)}_{t^3+t^2-t}\,dt=\tfrac1{12}+\tfrac1{12}=\boxed{\tfrac16}.$$

[Circunferencia fácil en cartesianas: $\bar{c}_1^*(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$, $t\in[1,0]\to\int_1^0(t^3,t\sqrt{\cdot})\cdot(1,\frac{-t}{\sqrt{\cdot}})\,dt=\int_0^1(t^2-t^3)=\frac1{12}$].

4. Sea el campo $\bar{F}(x,y,z)=(2xz+y,x,x^2)$. a) Escribir $\operatorname{div}\bar{F}$ y $\operatorname{rot}\bar{F}$. ¿Es $\bar{F}$ conservativo?
b) Calcular $\iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\,dx\,dy\,dz$ siendo V el sólido acotado por los planos $x=1$, $y=-1$, $y=1$, $z=0$, $z=2x$.
c) Si $\bar{c}(t)=(t,e^{t^2-1},2t)$, hallar el valor de la integral de línea $\int_{\bar{c}}\bar{F}\cdot d\bar{s}$ desde $(-1,1,-2)$ hasta $(1,1,2)$.





a) $\operatorname{div}\bar{F}=2z$, $\operatorname{rot}\bar{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ 2xz+y&x&x^2\end{vmatrix}=(0,2x-2x,1-1)=\bar{0}$ y además $\bar{F}\in C^1\Rightarrow\exists U$ potencial.

b) $\iiint_V 2z\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_{-1}^1\int_0^{2x}2z\,dz\,dy\,dx=\int_0^1 8x^2\,dx=\boxed{\frac83}$.

c) Hallando el potencial U: $\begin{matrix}U=x^2z+xy+\cdots\\ U=xy+\cdots\\ U=x^2z+\cdots\end{matrix}\Rightarrow U(x,y,z)=x^2z+xy$.

Por tanto: $\int_{\bar{c}}\bar{F}\cdot d\bar{s}=U(1,1,2)-U(-1,1,-2)=3-(-3)=\boxed{6}$.

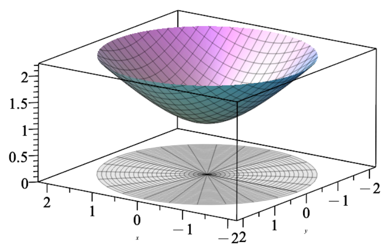
Como al ser conservativo la integral no depende de camino, se podría ir por el segmento que une los puntos:

$\bar{c}_*(t)=(t,1,2t)$, $t\in[-1,1]$. $\int_{-1}^1(4t^2+1,t,t^2)\cdot(1,0,2)\,dt=2\int_0^1(6t^2+1)\,dt=\boxed{6}$.

Utilizando la definición con la $\bar{c}$ dada se complica el cálculo y surge una integral que parece no calculable:

$$\int_{-1}^1\left(4t^2+e^{t^2-1},t,t^2\right)\cdot\left(1,2te^{t^2-1},2\right)dt=2\int_0^1\Big[6t^2+\underbrace{(2t^2+1)\,e^{t^2-1}}_{\text{derivada de } te^{t^2-1}}\Big]dt=\Big[2t^3+te^{t^2-1}\Big]_0^1=\boxed{6}.$$

5. Calcular la integral de superficie del campo escalar $f(x,y,z)=z$ sobre la parte del hiperboloide $z^2=1+x^2+y^2$ comprendida entre $z=1$ y $z=\sqrt5$.



$\bar{r}(r,\theta)=(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta,\sqrt{1+r^2})$. $\theta\in[0,2\pi]$, $r\in[0,2]$ (es $5=1+r^2$ si $r=2$).

$\bar{r}_r\times\bar{r}_\theta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ c&s&r/\sqrt{\cdot}\\ -rs&rc&0\end{vmatrix}=\left(-\frac{r^2c}{\sqrt{\cdot}},-\frac{r^2s}{\sqrt{\cdot}},r\right)$. $\|\bar{r}_r\times\bar{r}_\theta\|=\frac{r\sqrt{1+2r^2}}{\sqrt{1+r^2}}$.

Por tanto: $\iint_S z\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{1+2r^2}\,dr\,d\theta=\frac{2\pi}{6}\left(1+2r^2\right)^{3/2}\Big]_0^2=\boxed{\frac{26\pi}{3}}$.

O bien: $\bar{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{1+x^2+y^2})$, $(x,y)\in B$ círculo de centro (0,0) y radio 2.

$\bar{r}_x\times\bar{r}_y=\left(-\frac{x}{\sqrt{\cdot}},-\frac{y}{\sqrt{\cdot}},1\right)\xrightarrow{\|\ \|}\frac{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$. $\iint_S z\,dS=\iint_B\sqrt{1+2x^2+2y^2}\,dx\,dy=\cdots$ (usando polares acabamos arriba).