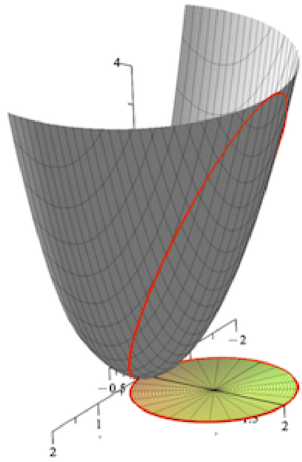
Soluciones de la segunda parte del examen final de mayo de Cálculo (C) (16-05-23)

3*. Calcular el volumen encerrado entre el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el plano $z=0$ sobre el círculo de centro $(0,1)$ limitado por $x^2+y^2=2y$.



Se puede describir el círculo $x^2+(y-1)^2\le 1$ con polares centradas en $(0,1)$:

$$x=\rho\cos\phi\,,\quad y=1+\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,,\quad \text{con } \rho\le 1 \text{ y } \phi\in[0,2\pi]\,.$$

[La constante no cambia el jacobiano del cambio habitual a polares $J=\rho$].

Con ellas se tiene $z=\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\mathrm{sen}^2\phi+2\rho\,\mathrm{sen}\,\phi+1$, y el volumen es:

$$V=\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1\big(\rho^3+\rho+2\rho^2\mathrm{sen}\,\phi\big)\,d\rho\,d\phi=\int_0^{2\pi}\big(\tfrac{3}{4}+\tfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\phi\big)\,d\phi=\boxed{\tfrac{3\pi}{2}}\,.$$

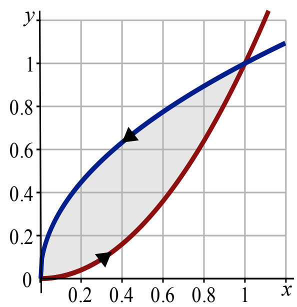
Tampoco sale mal en las polares usuales, ya que la circunferencia pasa a ser $r^2=2r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $r=2\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\theta\in[0,\pi]$. Y ahora claramente es $z=r^2$. Así que:

$$V=\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^3\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}4\,\mathrm{sen}^4\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)^2d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\big(1-2\cos 2\theta+\tfrac12+\tfrac12\cos 4\theta\big)\,d\theta=\boxed{\tfrac{3\pi}{2}}\,.$$

En los dos órdenes de integración en cartesianas se complica. Por ejemplo:

$$\int_{-1}^{1}\!\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx=2\int_0^1\Big[2x^2\sqrt{1-x^2}+\tfrac{(1+\sqrt{\cdot})^3-(1-\sqrt{\cdot})^3}{3}\Big]dx=\tfrac{8}{3}\int_0^1(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\,dx=\cdots$$

4. Comprobar el teorema de Green para $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(x^3,x^2y)$ y la región D acotada por las curvas $y=x^2$ y $x=y^2$.



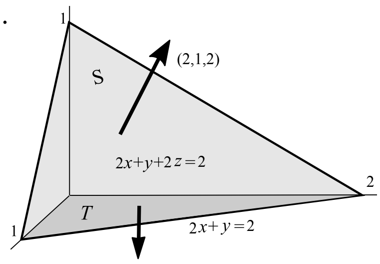
$g_x-f_y=2xy$. $\displaystyle\iint_D 2xy\,dx\,dy=2\int_0^1\!\!\int_{x^2}^{\sqrt{x}}2xy\,dy\,dx=\int_0^1 x\big(x-x^4\big)\,dx=\tfrac13-\tfrac16=\boxed{\tfrac16}$.

Parametrizamos las dos curvas que forman la ∂D en el sentido adecuado:

$$\bar{c}_1=(x,x^2)\,,\ x\in[0,1]\,.\quad \bar{c}_2=(y^2,y)\,,\ y\in[1,0]\,.$$

$$\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{\bar{c}_1}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}+\int_{\bar{c}_2}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_0^1(x^3,x^4)\cdot(1,2x)\,dx-\int_0^1(y^6,y^5)\cdot(2y,1)\,dy$$
$$=\int_0^1(x^3+2x^5)\,dx-\int_0^1(2y^7+y^5)\,dy=\tfrac14+\tfrac13-\tfrac14-\tfrac16=\boxed{\tfrac16}\,.$$

5. Sea V el volumen limitado por los planos coordenados y el plano inclinado que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,1)$. Comprobar el teorema de la divergencia (Gauss) para $\bar{\mathrm{F}}(x,y,z)=(0,xy,-1)$ en V.



No es difícil dar la ecuación del plano inclinado a simple vista: $2x+y+2z=2$.

[Si no se ve, un vector normal se podría hallar haciendo $(1,0,-1)\times(0,2,-1)$].

Como $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{F}}=x$ la integral triple es (por ejemplo en ese orden):

$$\iiint_V x=\int_0^1\!\!\int_0^{2(1-x)}\!\!\int_0^{1-x-y/2}x\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\!\!\int_0^{2(1-x)}\Big[x(1-x)-\tfrac{xy}{2}\Big]\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1\Big[2x(1-x)^2-x(1-x)^2\Big]dx=\int_0^1(x-2x^2+x^3)\,dx=\boxed{\tfrac{1}{12}}\,.$$

Habría que hallar el flujo sobre los 4 triángulos que forman la ∂V en la dirección de sus normales exteriores. Pero sobre $x=0$ e $y=0$ es $\bar{\mathrm{F}}\cdot\bar{n}=0$ pues son $\bar{\mathrm{F}}=(0,0,-1)$ y las respectivas normales $(-1,0,0)$ y $(0,-1,0)$. El flujo es 0 sobre ambos triángulos.

Sobre T resulta ser $\bar{\mathrm{F}}\cdot\bar{n}=(0,0,-1)\cdot(0,0,-1)=1$, con lo que $\iint_T 1=$ área de $T=1$ (base 1 y altura 2).

Sólo necesitamos integrales para el triángulo inclinado S que describimos $\bar{r}(x,y)=\big(x,y,1-x-\tfrac{y}{2}\big)$, $(x,y)\in T$.

Probablemente sepamos de memoria que $\bar{r}_x\times\bar{r}_y=(-f_x,-f_y,1)=\big(1,\tfrac12,1\big)$. Así que el flujo sobre S será:

$$\iint_T(0,0,-1)\cdot\big(1,\tfrac12,1\big)\,dx\,dy=\int_0^1\!\!\int_0^{2(1-x)}\big(\tfrac{xy}{2}-1\big)\,dy\,dx=\int_0^1\Big[x(1-x)^2-2(1-x)\Big]\,dx=\tfrac{1}{12}-1\,.$$

El flujo total sobre la frontera de V es, pues, $1+\tfrac{1}{12}-1=\boxed{\tfrac{1}{12}}$. Coinciden $\iiint_V\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{F}}=\iint_{\partial V}\bar{\mathrm{F}}\cdot\bar{n}\,dS$.