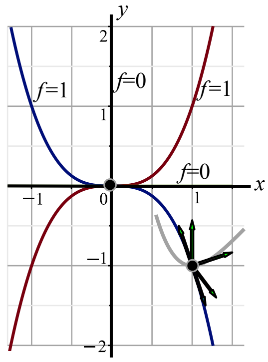
Soluciones del examen de Cálculo (grupo C) (24 de junio de 2024)

1. Sea $f(x,y)=\frac{x^6}{y^2}$, con $f(x,0)=0$. **a]** Dibujar las curvas $f=1$ y precisar si f es continua en $(0,0)$. [2 ptos]
b] Hallar, si lo hay, un $\bar{u}$ unitario para el que la derivada $D_{\bar{u}}f(1,-1)$ tenga por valor: i) 0 , ii) 2 , iii) 8 .
c] Si $\bar{c}(t)=\left(e^t,-\cos 2t\right)$ y $h(t)=f\left(\bar{c}(t)\right)$, calcular utilizando la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$ el valor de $h'(0)$.

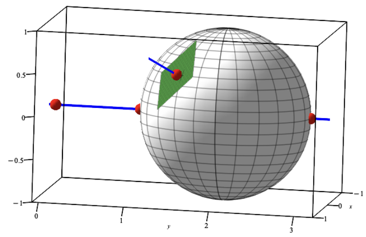


a] $f=1 \;\rightarrow\; y=\pm x^3$. Y la función vale 0 en los ejes. Discontinua.
Más en general: $f(x,mx^3)=\frac{1}{m^2}$, distinta para cada m .
Que en polares tienda a 0 si $r\to 0$ no prueba, desde luego, la continuidad.

b] $\nabla f=\left(\frac{6x^5}{y^2},-\frac{2x^6}{y^3}\right)\xrightarrow{(1,-1)}(6,2)$. $D_{\bar{u}}$ máxima $=\|(6,2)\|=2\sqrt{10}<8 \;\Rightarrow\;$ iii) imposible.
i) $D_{\bar{u}}=0$ si $\bar{u}\perp\nabla$: $\bar{u}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}},\mp\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ [dirección tangente a la curva de nivel].
ii) $D_{\bar{u}}=2$ obviamente si $\bar{u}=(0,1)$ y además $\begin{array}{ll} 6a+2b=2\,,\; b=1-3a\downarrow & b=-4/5\,. \\ a^2+b^2=1 \quad 10a^2-6a=0\,,\; a=0,\,\frac{3}{5}\uparrow & \end{array}$

c] $\bar{c}(0)=(1,-1)$, $\bar{c}'(t)=\left(e^t,2\,\mathrm{sen}\,2t\right)$, $\bar{c}'(0)=(1,0)$, $h'(0)=\nabla f(1,-1)\cdot\bar{c}'(0)=\boxed{6}$.

2. Sea el elipsoide $2x^2+(y-2)^2+z^2=1$. **a]** Escribir su plano tangente en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. [2 ptos]
b] Calcular, con multiplicadores de Lagrange y minimizando la distancia al cuadrado, los puntos del elipsoide más y menos cercanos al origen.



a] Si $F\equiv 2x^2+(y-2)^2+z^2$ es $\nabla F=(4x,2(y-2),2z)\xrightarrow{(1/2,3/2,1/2)}(2,-1,1)$.
El plano tangente: $(2,-1,1)\cdot\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{3}{2},z-\frac{1}{2}\right)=0 \rightarrow \boxed{z=y-2x}$.

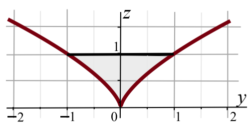
b] Minimizamos $D(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ con la condición $F=1$.

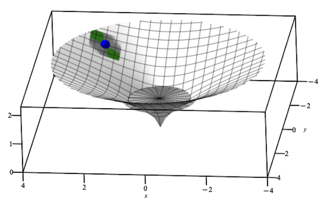
$$\begin{cases} 2x=4\lambda x\,,\; x(1-2\lambda)=0 \rightarrow x=0 \text{ o } \lambda=\frac{1}{2} \rightarrow y=-2,\; z=0 \text{ (imposible la 4)} \\ 2y=2\lambda(y-2)\,,\; y(1-\lambda)+2\lambda=0 \nwarrow \\ 2x=2\lambda z\,,\; z(1-\lambda)=0 \rightarrow \lambda=1 \text{ (imposible) o } z=0 \\ 2x^2+(y-2)^2+z^2=1 \xrightarrow{x=z=0} y=1,3 \end{cases}$$

$(0,1,0)$ próximo $(d=1)$,
$(0,3,0)$ lejano $(d=3)$.

[Dibujando la esfera comprimida en el sentido del eje x y centrada en $(0,2,0)$ es claro].

3. **a]** Precisar si $g(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{1/3}$ es diferenciable en $(0,0)$. **b]** Hallar su plano tangente en $(2,-2)$. [2 ptos]
c] Hallar el volumen del sólido acotado por la gráfica de g y el plano $z=1$ (integrando en polares o cilíndricas).





a] $g(x,0)=x^{2/3}$ y $g(0,y)=y^{2/3}$ no son derivables en 0
$\Rightarrow$ no existen las parciales $\Rightarrow$ **no es diferenciable**.

b] $g(2,-2)=2$, $\nabla g=\frac{2}{3(x^2+y^2)^{2/3}}(x,y)\xrightarrow{(2,-2)}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.
Plano tangente $z=2+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{3}(y+2)$, $\boxed{z=\frac{1}{3}(2+x-y)}$

c] $z=1$ si $x^2+y^2=1$. En polares $g(r,\theta)=r^{2/3}$. Y es $J=r$. El volumen pedido es:

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r\left(1-r^{2/3}\right)dr\,d\theta = 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^2-\tfrac{3}{8}r^{8/3}\right]_0^1 = \pi\left[1-\tfrac{3}{4}\right] = \boxed{\tfrac{\pi}{4}}\,.$$

4. Si $\bar{g}(x,y,z)=\left(2-y,-x,1\right)$ y $\bar{c}(t)=\left(4\cos t,4\,\mathrm{sen}\,t,3t\right)$, $t\in[0,\pi]$, calcular: [2 ptos]
a] la longitud de la curva descrita por $\bar{c}$, **b]** el $\mathrm{rot}\,\bar{g}$, **c]** el valor de la integral de línea $\int_{\bar{c}}\bar{g}\cdot d\bar{s}$.

a] $\|\bar{c}'\|=\|(-4s,4c,3)\|=\sqrt{16(s^2+c^2)+9}=5 \rightarrow L=\int_0^{\pi}5\,dt=\boxed{5\pi}$.

b] $\mathrm{rot}\,\bar{g}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2-y & -x & 1 \end{vmatrix}=(0,0,-1+1)=\bar{0}$. Y como $\bar{g}\in C^1\left(\mathbf{R}^3\right)$ el campo deriva de un potencial.

c] Podemos utilizar directamente la definición:

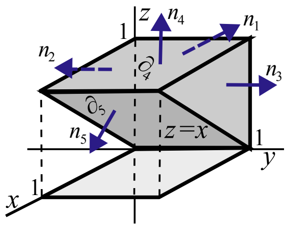
$$\int_0^{\pi}(2-4s,-4c,1)\cdot(-4s,4c,3)\,dt=\int_0^{\pi}\left(3-8\,\mathrm{sen}\,t-16\cos 2t\right)dt = 3\pi+\left[8\cos t-8\,\mathrm{sen}\,2t\right]_0^{\pi} = \boxed{3\pi-16}\,.$$

O hallar la función potencial:

$$\begin{array}{l} U_x=2-y \;\rightarrow\; U=2x-xy+p(y,z) \\ U_y=-x \;\rightarrow\; U=-xy+q(x,z) \\ U_z=1 \;\rightarrow\; U=z+r(x,y) \end{array}\;,\; U=z+2x-xy \;\Rightarrow\; \int_{\bar{c}}\bar{g}\cdot d\bar{s}=U(-4,0,3\pi)-U(4,0,0)=\boxed{3\pi-8-8}\;\;\forall\bar{c}\,.$$

O también podríamos ir por el segmento que une los puntos inicial y final: $(4-8t,0,3\pi t)$, $t\in[0,1]$.

5. Comprobar el teorema de Gauss para el campo vectorial $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=\left(0,0,z^2\right)$ sobre el volumen V formado por la parte del cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ con $z\geq x$. [2 ptos]



$\operatorname{div}\bar{f}=2z$, $\iiint_V \operatorname{div}\bar{f}=\int_0^1\int_0^1\int_x^1 2z\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=1-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

El flujo sobre 3 de las 5 caras del borde ∂V es nulo:

Sobre $x=0$ es $\bar{n}_1=(-1,0,0)\Rightarrow \bar{\mathrm{f}}\cdot\bar{n}_1=0$, como su integral en el cuadrado trasero.

Sobre $y=0,1$, $\bar{n}_{2,3}=(0,\mp 1,0)\ \Rightarrow$ se anula la integral de $\bar{\mathrm{f}}\cdot\bar{n}$ en ambos triángulos.

En la superior $z=1$, $\bar{n}_4=(0,0,1)\ \Rightarrow\ \bar{\mathrm{f}}\cdot\bar{n}_4=1$, $\iint_{\partial_4}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=$ área del cuadrado $=1$.

Solo falta el flujo sobre el cuadrado inclinado ∂_5 que parametrizamos en la forma:

$r(x,y)=(x,y,x)$, $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, con producto vectorial fundamental $r_x\times r_y=(-1,0,1)$.

Como este vector apunta hacia el interior, el flujo hacia el exterior es

$$\iint_{\partial_5}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=-\int_0^1\int_0^1\left(0,0,x^2\right)\cdot(-1,0,1)\,dx\,dy=-\int_0^1 x^2dx=-\frac{1}{3}.$$

Con lo que el flujo sobre toda la frontera es $\iint_{\partial V}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=0+0+0+1-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$ como debía.