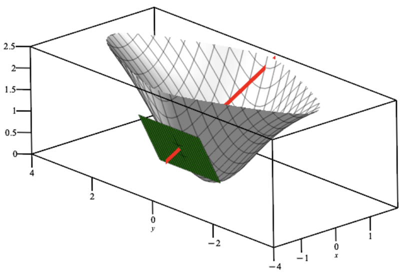
Soluciones del examen de Cálculo (grupo C) (20 de mayo de 2024)

1. Sea la superficie S dada por la expresión $F(x,y,z)\equiv \mathrm{e}^{z-x^2}-y^2=1$. **a]** Escribir en el punto $(-1,0,1)$: i) ∇F, ii) la ecuación del plano tangente a S, iii) una expresión paramétrica de la recta normal a S.
b] Volver a calcular el plano despejando z de $F=1$ y usando la otra expresión para los planos tangentes.
c] Encontrar el otro punto en que la recta normal vuelve a cortar la superficie S.



a] i) $\nabla F=\left(-2x\mathrm{e}^{z-x^2},-2y,\mathrm{e}^{z-x^2}\right)\xrightarrow{(-1,0,1)}\boxed{(2,0,1)}$.

ii) Plano tangente: $0=(2,0,1)\cdot(x+1,y,z-1)=2x+2+z-1$, $\boxed{z=-2x-1}$.

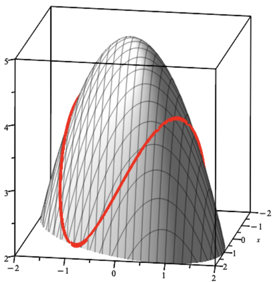
iii) Recta: $\overline{x}=(-1,0,1)+t\,(2,0,1)=\boxed{(2t-1,0,t+1)}$.

b] $z=x^2+\ln(1+y^2)$. $z(-1,0)=1$, $z_x=2x\xrightarrow{(-1,0)}-2$, $z_y=\frac{2y}{1+y^2}\xrightarrow{(-1,0)}0$.

Plano: $z=z(-1,0)+z_x(-1,0)(x+1)+z_y(-1,0)(y-0)$, $z=1-2(x+1)^{\uparrow}$.

c] Sustituyendo la recta: $\mathrm{e}^{t+1-4t^2+4t-1}=1\rightarrow 5t-4t^2=0$, $t=0$ (el inicial) y $t=\frac{5}{4}\rightarrow\boxed{\left(\frac{3}{2},0,\frac{9}{4}\right)}$.

2. Hallar los valores máximo y mínimo de $f(x,y)=5-x^2+xy-y^2$ sobre el círculo $x^2+y^2\leq 2$.



Deben existir por ser f continua (y C^1) en el círculo compacto. Puntos críticos:

$$\begin{matrix} f_x=y-2x=0 \\ f_y=x-2y=0\end{matrix}\rightarrow(0,0)\text{ con } H=\begin{vmatrix}\overset{<0}{-2} & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}>0.$$

Máximo local en nuestro círculo (y absoluto en $\mathbf{R}^2$) con $f(0,0)=\boxed{5}$.

Los máximos y mínimos en el borde con multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} y-2x=2\lambda x\rightarrow\lambda+1=\frac{y}{2x}\ (x\neq0,\text{ pues } x=0\rightarrow y=0) \searrow \\ x-2y=2\lambda y\rightarrow\lambda+1=\frac{x}{2y}\ (y\neq0,\text{ pues } y=0\rightarrow x=0) \nearrow \\ x^2+y^2=2\end{cases}$$

$$\frac{y}{2x}=\frac{x}{2y},\ y^2=x^2,\ y=\pm x\downarrow$$

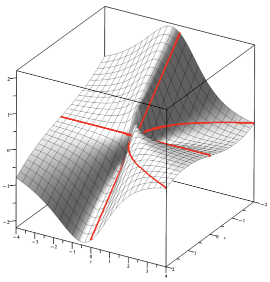
$$2x^2=2,\ x=\pm1 \text{ e } y=\pm1$$

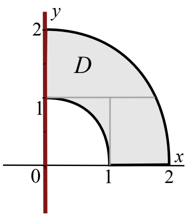
con $f(\pm1,\mp1)=\boxed{2}$ **valor mínimo** en los dos, $f(\pm1,\pm1)=4$.

O parametrizando la circunferencia $\overline{c}(t)=\left(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$, $t\in[0,2\pi]$. $f\big|_{\bar{c}(t)}=3+\mathrm{sen}\,2t$ con esos extremos:

$2\cos 2t=0\rightarrow t=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ (esos mismos puntos).

3. Sea $g(x,y)=\frac{xy-x^3}{x^2+y^2}$, $g(0,0)=0$. **a]** Hallar $g_x(0,0)$ y $g_y(0,0)$ y ver si es g continua y diferenciable en $(0,0)$.
b] Si D es el conjunto definido por $1\leq x^2+y^2\leq 4$, $x,y\geq0$, calcular $\iint_D g$ (mucho mejor integrando en polares).





a] $g(x,0)=-x\ \forall x\Rightarrow\boxed{g_x(0,0)=-1}$. $g(0,y)=0\ \forall y\Rightarrow\boxed{g_y(0,0)=0}$.

Por rectas: $g(x,mx)=\frac{m+x}{1+m^2}\xrightarrow{x\to0}\frac{m}{1+m^2}$ distinto para cada $m\Rightarrow$

g es **discontinua** en el origen $\Rightarrow g$ **no es diferenciable** en $(0,0)$.

b] $g(r,\theta)=\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta-r\cos^3\theta$ ($\rightarrow cs$ distinto según θ, otra prueba de la discontinuidad).

$$\int_0^{\pi/2}\!\!\int_1^2\left(rcs-r^2c^3\right)d\theta=\int_0^{\pi/2}\left[\tfrac{3}{2}cs-\tfrac{7}{3}(c-cs^2)\right]d\theta$$

$$=\left[\tfrac{3}{4}s^2-\tfrac{7}{3}s+\tfrac{7}{9}s^3\right]_0^{\pi/2}=\tfrac{3}{4}-\tfrac{7}{3}+\tfrac{7}{9}=\boxed{-\tfrac{29}{36}}.$$

[En cartesianas, mucho peor, es mejor $dx\,dy$ y habría que hacer dos integrales, alguna larga con partes:

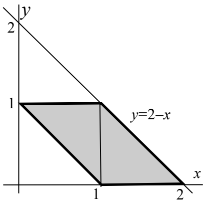
$$g(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}-x+\frac{xy^2}{x^2+y^2}\rightarrow\int g(x,y)\,dx=\tfrac{1}{2}\left[(y+y^2)\ln(x^2+y^2)-x^2\right]\equiv G(x,y),$$

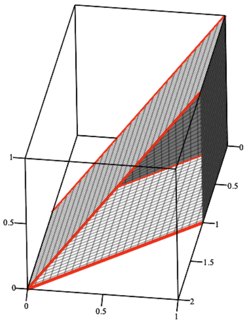
$$\int_0^1[G]_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}dy+\int_1^2[G]_0^{\sqrt{4-y^2}}dy=\int_0^1\left[\ln2\left(y+y^2\right)-\tfrac{3}{2}\right]dy+\int_1^2\left[(\ln2-\ln y)\left(y+y^2\right)+\tfrac{1}{2}y^2-2\right]dy=\cdots\ ].$$

4. Sean $G(x,y,z)=x\mathrm{e}^{x+y}$ y V el sólido limitado por los planos $y=0$, $y=1$, $x+y=1$, $x+y=2$, $z=0$ y $z=y$. Calcular $\iiint_V G\,dz\,dx\,dy$ con ese orden de integración y comprobar su valor integrando de otra forma.

$$\int_0^1\int_{1-y}^{2-y}\int_0^y x\mathrm{e}^{x+y}\,dz\,dx\,dy=\int_0^1\int_{1-y}^{2-y} xy\mathrm{e}^{x+y}\,dx\,dy \overset{\bullet}{=} \int_0^1\big[\mathrm{e}^2\overset{1/2-1/3}{(y-y^2)}+\mathrm{e}y^2\big]\,dy=\boxed{\tfrac{\mathrm{e}^2}{6}+\tfrac{\mathrm{e}}{3}}\,.$$

• Por partes $\int x\mathrm{e}^{x+y}dx=(x-1)\mathrm{e}^{x+y}$





El habitual $dz\,dy\,dx$ exige calcular dos integrales:

$$\int_0^1\int_{1-x}^1\int_0^y x\mathrm{e}^{x+y}\,dz\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{2-x}\int_0^y x\mathrm{e}^{x+y}\,dz\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1 \mathrm{e}x^2dx+\int_1^2\big[(x-x^2)\mathrm{e}^2+x\mathrm{e}^x\big]dx=\cdots=\tfrac{\mathrm{e}}{3}+\tfrac{\mathrm{e}^2}{6}\,.$$

Tiene una sola integral el orden $\int_0^1\int_z^1\int_{1-y}^{2-y} x\mathrm{e}^{x+y}\,dx\,dy\,dz=\cdots$

Muy parecida a la inicial es la que sale de este: $\int_0^1\int_0^y\int_{1-y}^{2-y} x\mathrm{e}^{x+y}\,dx\,dz\,dy=\int_0^1\int_0^y\big[(1-y)\mathrm{e}^2+\mathrm{e}y\big]dz\,dy=\cdots$

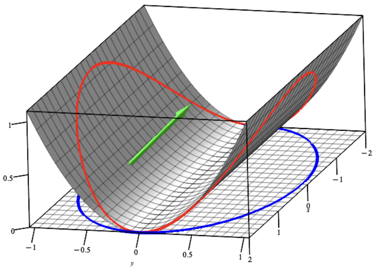
O incluso simplifica los cálculos el sencillo cambio lineal $u=x+y$, $v=y$, $w=z$, con $J=1$, que lleva a:

$$\int_1^2\int_0^1\int_0^v (u-v)\mathrm{e}^u\,dw\,dv\,du=\int_1^2\big(\tfrac{1}{2}u\mathrm{e}^u-\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^u\big)dv=\cdots=\tfrac{\mathrm{e}}{3}+\tfrac{\mathrm{e}^2}{6}\,.$$

5. Comprobar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\bar{\mathrm{g}}(x,y,z)=(x,xz,1)$ y la superficie S formada por la parte de $z=y^2$ cuya proyección sobre $z=0$ es la elipse $x^2+4y^2\leq 4$.

Parametrizando en cartesianas $\bar{r}(x,y)=(x,y,y^2)$, con $(x,y)\in D$ elipse dada.

Será $\bar{r}_x\times\bar{r}_y=(-f_x,-f_y,1)=(0,-2y,1)$ (que apunta hacia arriba).

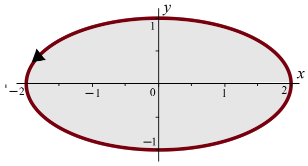


El rotacional de $\bar{\mathrm{g}}$ es: $\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ x&xz&1\end{vmatrix}=(-x,0,z)$. $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}\big(\bar{r}(x,y)\big)=\big(-x,0,y^2\big)$.

Por tanto, $\iint_S \operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{S}=\iint_D(-x,0,y^2)\cdot(0,-2y,1)\,dx\,dy=\iint_D y^2\,dx\,dy$.

Lo más directo para hacer esta integral doble es usar el cambio de las elipses:

$$\begin{matrix}x=2r\cos\varphi\\ y=r\operatorname{sen}\varphi\end{matrix}\ \text{con } J=2r\to\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^3\operatorname{sen}^2\varphi\,dr\,d\varphi=\tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=\boxed{\tfrac{\pi}{2}}\,.$$



En cartesianas $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} y^2\,dy\,dx \underset{\text{paridades}\uparrow}{=} 4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} y^2\,dy\,dx=\tfrac{1}{6}\int_0^2(4-x^2)^{3/2}dx$

$$x=2\operatorname{sen}t\to\quad=\tfrac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4t\,dt=\tfrac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\big(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\big)\,dt=\cdots$$

O más corto: $\int_{-1}^1\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} y^2\,dx\,dy=8\int_0^1 y^2\sqrt{1-y^2}\,dy=8\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2t\cos^2t\,dt=2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2t\,dt=\tfrac{\pi}{2}$.

Se podría directamente parametrizar la superficie: $\bar{r}(r,\varphi)=\big(2r\cos\varphi,r\operatorname{sen}\varphi,r^2\operatorname{sen}^2\varphi\big)$, $r\in[0,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$.
Se tendría entonces $\bar{r}_r\times\bar{r}_\varphi=\big(0,-4r^2s,2r\big)$, $\big(-2rc,0,r^2s^2\big)\cdot\big(0,-4r^2s,2r\big)=2r^3s^2$ y se acaba arriba.

Prametrizamos ahora la ∂S en el sentido adecuado al $\bar{n}$: $\bar{\mathrm{c}}(t)=\big(2\cos t,\operatorname{sen}t,\operatorname{sen}^2t\big)$, $t\in[-\pi,\pi]$ $\rightarrow$

$$\oint_{\partial S}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}=\int_{-\pi}^{\pi}(2c,2cs^2,1)\cdot(-2s,c,2sc)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\big[\underset{\text{par}}{2\operatorname{sen}^2t\cos^2t}-\underset{\text{impar}}{2sc}\big]dt=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 2t\,dt=\boxed{\tfrac{\pi}{2}}\,.$$