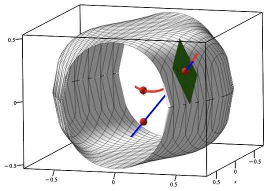
Soluciones del examen extraordinario de Cálculo (grupo C) (23 de junio de 2025)

1. Sean $F(x,y,z)=2x^2y^2+y^4+z^2$, S la superficie $F=\frac{1}{4}$ y C la curva dada por $\bar{c}(t)=\left(t,t,t^2\right)$, $t\in[0,1]$. [2 ptos]
a] Calcular la recta R tangente a C en el punto $\bar{p}$ de corte entre C y S y dar el punto en que R corta $x=0$.
b] Hallar: i) el plano P tangente a S en $\bar{p}$, ii) el coseno del ángulo que forman R y un vector normal a P .



a] S y C se cortan si $2t^4+t^4+t^4=4t^4=\frac{1}{4}\rightarrow t=\frac{1}{2}$, $\bar{p}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

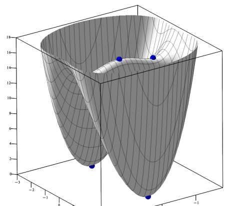
$\bar{c}'(t)=(1,1,2t)\xrightarrow{t=1/2}(1,1,1)$. R dada por $\bar{r}(s)=\bar{p}+s(1,1,1)=\boxed{\left(\frac{1}{2}+s,\frac{1}{2}+s,\frac{1}{4}+s\right)}$.

R corta $x=0$ para $s=-\frac{1}{2}$. El punto de corte es $\boxed{\left(0,0,-\frac{1}{4}\right)}$.

b] i) $\nabla F=\left(4xy^2,4x^2y+4y^3,2z\right)\xrightarrow{\bar{p}}\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$, $(1,2,1)\cdot\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2},z-\frac{1}{4}\right)=0$, $\boxed{z=\frac{7}{4}-x-2y}$.

ii) El coseno del ángulo formado por $(1,1,1)$ y $(1,2,1)$ lo da $\cos\phi=\frac{(1,1,1)\cdot(1,2,1)}{\|(1,1,1)\|\|(1,2,1)\|}=\frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

2. Sea $h(x,y)=\left(x^2+y^2-4\right)^2+6x^2$. Hallar y clasificar sus puntos críticos. ¿Son absolutos sus mínimos? [2 ptos]



$$\begin{cases} h_x=4x\left(x^2+y^2-1\right)=0, & x=0_{\downarrow} \text{ o } x^2+y^2=1_{\downarrow} \quad x=\pm1 \\ h_y=4y\left(x^2+y^2-4\right)=0, & y\left(y^2-4\right)=0 \qquad\quad y=0^{\uparrow} \end{cases} \rightarrow (0,0)\,,\ (\pm1,0) \text{ y } (0,\pm2)\,.$$

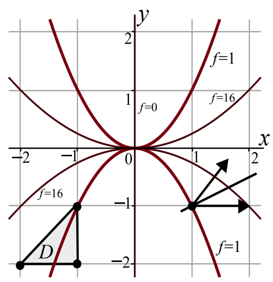
$H(x,y)=16\begin{vmatrix}3x^2+y^2-1 & 2xy\\ 2xy & x^2+3y^2-4\end{vmatrix}$. $H(0,0)=\begin{vmatrix}-4&0\\0&-16\end{vmatrix}$, $H(\pm1,0)=\begin{vmatrix}8&0\\0&-12\end{vmatrix}$, $H(0,\pm2)=\begin{vmatrix}12&0\\0&32\end{vmatrix}$.

Por tanto $(0,0)$ es máximo local, $(\pm1,0)$ son sillas y $(0,\pm2)$ son mínimos locales.

Como $h(0,\pm2)=0$ y es claramente $h(x,y)\geq0\ \forall(x,y)$, los mínimos son absolutos.

3. Sea $\begin{cases} f(x,y)=\frac{x^4}{y^2} \\ f(x,0)=0 \end{cases}$. **a]** Dibujar las curvas $f=1$ y precisar si f es continua y diferenciable en $(0,0)$. Hallar dos $\bar{u}$ unitarios tales que la derivada $D_{\bar{u}}f(1,-1)=4$. [2 ptos]
b] Calcular la integral $\iint_D f$, con D triángulo de vértices $(-2,-2)$, $(-1,-2)$ y $(-1,-1)$.

a] $f=1\rightarrow y=\pm x^2$ (parábolas, también $f=16$ en el dibujo). **Discontinua $\Rightarrow$ no diferenciable.**



$\nabla f(1,-1)=\left(\frac{4x^3}{y^2},-\frac{2x^4}{y^3}\right)_{(1,-1)}=(4,2)$. Si $\bar{u}=(a,b)$, $D_{\bar{u}}f(1,-1)=4\rightarrow\begin{cases}4a+2b=4\\a^2+b^2=1\end{cases}$.

$b=2-2a\rightarrow5a^2-8a+3=0$, $a=1,\frac{3}{5}$, $\boxed{\bar{u}=(1,0)}$ (obvio) o $\boxed{\bar{u}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}$ (mismo ángulo con gradiente)

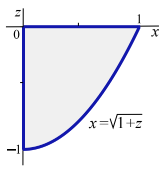
b] $\iint_D f=\int_{-2}^{-1}\int_{-2}^{x}\frac{x^4}{y^2}\,dy\,dx=\int_{-2}^{-1}\left[-\frac{x^4}{y}\right]_{-2}^{x}dx=-\int_{-2}^{-1}\left(x^3+\frac{1}{2}x^4\right)dx=\boxed{\frac{13}{20}}$.

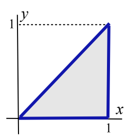
O bien, $\int_{-2}^{-1}\int_{y}^{-1}\frac{x^4}{y^2}\,dx\,dy=-\frac{1}{5}\int_{-2}^{-1}\left(y^3+\frac{1}{y^2}\right)dy\nearrow$

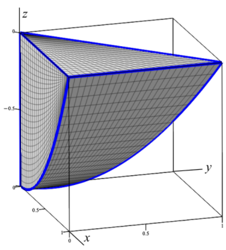
4. Calcular $\iiint_V e^z$, siendo V el sólido limitado por $y=0$, $x=1$, $y=x$, $z=0$ y $z=x^2-1$, integrando las variables en estos dos órdenes: i) $dz\,dy\,dx$, ii) $dy\,dx\,dz$. [2 ptos]

$$\int_0^1\int_0^x\int_{x^2-1}^0 e^z\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^x\left[1-e^{x^2-1}\right]dy\,dx=\int_0^1\left[x-xe^{x^2-1}\right]dx=\frac{1}{2}\left[x^2-e^{x^2-1}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{2e}}\,.$$

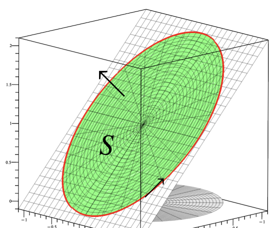
$$\int_{-1}^0\int_0^{\sqrt{1+z}}\int_0^x e^z\,dy\,dx\,dz=\int_{-1}^0\int_0^{\sqrt{1+z}}x\,e^z\,dx\,dz$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^0(z+1)\,e^z dz=\frac{1}{2}\left[z\,e^z\right]_{-1}^0=\boxed{\frac{1}{2e}}\,.$$







5. Sean $\bar{f}(x,y,z)=(x,xz,xy)$, la superficie S formada por la parte del plano $z=1-x$ cuya proyección sobre $z=0$ es $x^2+y^2\leq1$ y la curva ∂S que limita S . **a]** Parametrizar S y calcular la integral de superficie del $\operatorname{rot}\bar{f}$ sobre S .
b] Parametrizar ∂S , hallar la integral de línea $\oint_{\partial S}\bar{f}\cdot d\bar{s}$ y comprobar que se cumple el teorema de Stokes. [2 ptos]



a] $\bar{r}(x,y)=\left(x,y,1-x\right)$, con $(x,y)\in B$ círculo centrado de radio 1 . $\bar{r}_x\times\bar{r}_y=(1,0,1)\uparrow$

$\operatorname{rot}\bar{f}=(0,-y,z)$, $\iint_B\operatorname{rot}\bar{f}\cdot d\bar{S}=\iint_B(0,-y,1-x)\cdot(1,0,1)=\iint_B(1-\underbrace{x}_{\text{impar}})=\boxed{\pi}$ (área de B)

b] Parametrizamos la elipse ∂S : $\bar{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t,1-\cos t)$, $t\in[-\pi,\pi]$ (buen sentido).

$$\oint_{\partial S}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{-\pi}^{\pi}\left(c,c-c^2,cs\right)\cdot(-s,c,s)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\big(c^2+\underbrace{s^2c-c^3}_{2s^2c-c}-\underbrace{sc}_{\text{impar}}\big)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos2t)\,dt+\left.\frac{2}{3}s^3-s\right]_{-\pi}^{\pi}+0=\boxed{\pi}\,.$$