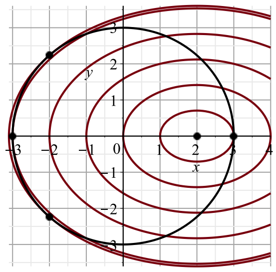
Soluciones del final de junio de Cálculo (grupo C) (2015)

1. Sea $g(x,y)=x^2+2y^2-4x$. **a)** Clasificar los puntos críticos de g. [2 puntos]
b) Hallar los valores máximo y mínimo de g sobre el círculo $x^2+y^2\leq 9$.

a) $\begin{matrix} g_x=2(x-2)=0 \\ g_y=4y=0 \end{matrix} \to (2,0)$. Como $Hg=\begin{vmatrix}2&0\\0&4\end{vmatrix}>0$, el punto es un **mínimo**.

$\big[$Poniendo $g=(x-2)^2+2y^2-4$ queda claro (y que el mínimo es absoluto)$\big]$.



b) Ambos extremos han de existir, por ser g continua en un conjunto compacto.

Sobre el borde del círculo: $\begin{matrix} x-2=\lambda x \\ 2y=\lambda y \\ x^2+y^2=9 \end{matrix} \to \lambda=2^{\uparrow}, y=0_{\downarrow} \quad \begin{matrix} x=-2,\ y=\pm\sqrt{5} \\ \\ x=\pm 3\end{matrix}$. 5 candidatos:

$g\big(-2,\pm\sqrt{5}\big)=\boxed{22}$ máximos, $g(-3,0)=21$, $g(3,0)=-3$, $g(2,0)=\boxed{-4}$ mínimo.

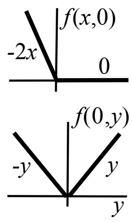
[Las curvas de nivel de g son elipses, que, como deben, son tangentes en los puntos calculados a la circunferencia].

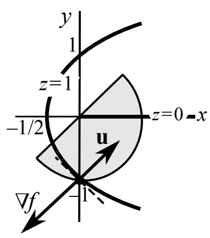
2. Sea $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x$. **a)** Estudiar si tiene derivadas parciales y si es diferenciable en $(0,0)$.
b) Dibujar la curva de nivel $f(x,y)=1$ y precisar para qué vector $\bar{u}$ unitario es mínima $D_{\bar{u}}f(0,-1)$.
c) Hallar $\iint_D f$, siendo D el semicírculo $x^2+y^2\leq 1$, $y\leq x$. [2.5 puntos]

a) $f(x,0)=|x|-x$, $f(0,y)=|y|$ no derivables $\Rightarrow \nexists$ **parciales** en $(0,0)$.

Como no existen las parciales, f **no es diferenciable** en $(0,0)$.

[Que f es continua en $\mathbf{R}^2$ es obvio, pues lo es la raíz para valores positivos].





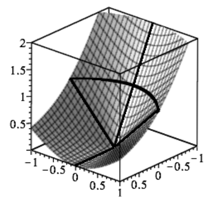
b) $f=1 \Rightarrow x^2+y^2=x^2+2x+1$, $x=\frac{1}{2}[y^2-1]$ $\big[$parábola con $x'(-1)=-1\big]$.

$\nabla f=\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)$, $\nabla f(0,-1)=(-1,-1) \Rightarrow \bar{u}=\boxed{\big(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big)}$,

pues la derivada direccional el mínima en sentido opuesto al gradiente.

$\big[$En polares: $\nabla f=f_r\,\mathbf{e_r}+\frac{1}{r}f_\theta\,\mathbf{e}_\theta=(\cos\theta-1,\operatorname{sen}\theta)\big]$.

[También se deduce del hecho de que el gradiente es perpendicular a la curva de nivel en el punto y de que apunta hacia donde crece el campo].



dibujo de f con Maple

c) $\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\int_0^1 r^2(1-\cos\theta)\,dr\,d\theta=\frac{1}{3}\big(\pi-\big[\operatorname{sen}\theta\big]_{-3\pi/4}^{\pi/4}\big)=\boxed{\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}}$.

$\big[$En cartesianas las integrales son bastante complicadas$\big]$.

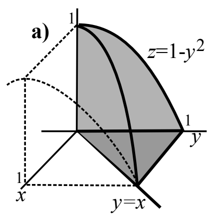
$\big[$Pensé preguntar también: d) $\Delta f=\frac{1}{r}=(x^2+y^2)^{-1/2}$ (mejor en polares)$\big]$.

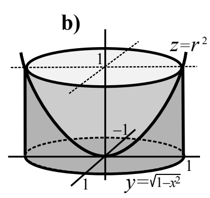
3. Calcular **una de las dos** integrales triples $\iiint_V f\,dx\,dy\,dz$ siguientes: [1 punto]
a) Si V es el sólido acotado en $x\geq 0$, $y\geq 0$ por $x=y$, $z=0$ e $y^2+z=1$, y siendo $f(x,y,z)=e^{-z}$.
b) Si V es el sólido encerrado entre $x^2+y^2=1$, $z=0$ y $z=x^2+y^2$, y siendo $f(x,y,z)=z$.

a) Es importante elegir un buen orden de integración:

$$\int_0^1\int_0^y\int_0^{1-y^2} e^{-z}\,dz\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y\big(1-e^{y^2-1}\big)\,dy=\frac{1}{2}\big[y^2-e^{y^2-1}\big]_0^1=\boxed{\frac{1}{2e}}.$$

$\Big[$Por ejemplo, con $\int_0^1\int_x^1\int_0^{1-y^2} e^{-z}\,dz\,dy\,dx$ aparece $\int_x^1 e^{y^2-1}\,dy$ no calculable$\Big]$.





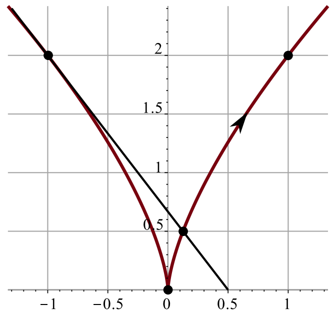
b) Claramente las coordenadas adecuadas son las cilíndricas:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} rz\,dz\,dr\,d\theta=2\pi\,\frac{1}{2}\int_0^1 r^5\,dr=\boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

$\Big[$En cartesianas es largo: $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{x^2+y^2} z\,dz\,dy\,dx=2\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\big(x^4+2x^2y^2+y^4\big)\,dy\,dx=\frac{2}{15}\int_0^1\big(8x^4+4x^2+3\big)\sqrt{1-x^2}\,dx$

$\underset{x=\operatorname{sen}t\uparrow}{=}\frac{2}{15}\int_0^{\pi/2}\big(8\operatorname{sen}^4 t+4\operatorname{sen}^2 t+3\big)\cos^2 t\,dt=\cdots\Big]$.

4. Sean $\bar{\mathrm{c}}(t)=\big(t^3,2t^2\big)$. **a)** Hallar la longitud del tramo de curva descrita por $\bar{\mathrm{c}}$ cuando $t\in[-1,0]$. [2 puntos]
b) Hallar su recta tangente en $(-1,2)$ y el punto en que esta recta tangente vuelve a cortar la curva.
c) Si $h(x,y)=\mathrm{e}^{2x+y}$, hallar la integral de línea de ∇h desde $(0,0)$ hasta $(1,2)$ sobre la curva descrita por $\bar{\mathrm{c}}$.



a) $\bar{\mathrm{c}}'(t)=(3t^2,4t)$, $\|\bar{\mathrm{c}}'(t)\|=\sqrt{9t^4+16t^2}=|t|\sqrt{9t^2+16}$.

$L=\int_{-1}^{0}(-t)\sqrt{9t^2+16}\,dt=\frac{1}{27}\big[-(9t^2+16)^{3/2}\big]_{-1}^{0}=\frac{5^3-4^3}{27}=\boxed{\frac{61}{27}}$.

b) $\bar{\mathrm{c}}(-1)=(-1,2)$, $\bar{\mathrm{c}}'(-1)=(3,-4)$. Tangente: $\bar{x}(s)=(3s-1,2-4s)\xrightarrow{s=1/2}\big(\frac{1}{2},0\big)$.

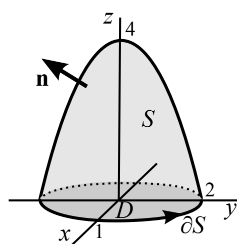
Corta la curva para t y s que cumplan: $t^3=3s-1$, $2t^2=2-4s$ $\rightarrow$

$(3s-1)^2=(1-2s)^3$, $8s^3-3s^2=0$, $s=\frac{3}{8}\rightarrow\boxed{\big(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\big)}$ $\big[$y $s=0\rightarrow(-1,2)\big]$.

$\big[$O bien, la curva $y=2x^{2/3}$ y la recta $y=\frac{2-4x}{3}$ se cortan si $27x^2\overset{\uparrow}{=}(1-2x)^3\big]$.

c) $\int_{\bar c}\nabla h\cdot d\bar{s}=h(1,2)-h(0,0)=\boxed{\mathrm{e}^4-1}=\int_0^1(6t^2+4t)\,\mathrm{e}^{2t^3+2t^2}dt=\mathrm{e}^{2t^3+2t^2}\big]_0^1$ (cálculo innecesario).

5. Sean S la superficie $z=4-4x^2-y^2$, con $z\geq 0$ y $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=(y,2x,1+yz)$. **a)** Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$ y $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}$. [2.5 puntos]
b) Calcular la integral de línea de $\bar{\mathrm{f}}$ sobre la elipse que limita S. **c)** Comprobar el teorema de Stokes.

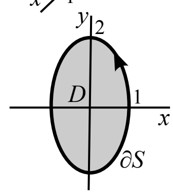


a) $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}=0+0+y=\boxed{y}$. $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ y&2x&1+yz\end{vmatrix}=\boxed{(z,0,1)}$.

b) Parametrización más sencilla (en el sentido del dibujo): $\mathbf{c}(t)=(\cos t,2\operatorname{sen}t,0)$.

$\oint_{\partial S}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(2\operatorname{sen}t,2\cos t,1)\cdot(-\operatorname{sen}t,2\cos t,0)\,dt$

$=\int_0^{2\pi}(4\cos^2 t-2\operatorname{sen}^2 t)\,dt=\int_0^{2\pi}(1+3\cos 2t)\,dt=\boxed{2\pi}$.



c) Una posible parametrización de la superficie S es

$\bar{r}(x,y)=(x,y,4-4x^2-y^2)$, $\bar{r}_x\times\bar{r}_y=(8x,2y,1)$, con $(x,y)\in D$, región elíptica.

[El **pvf** apunta en el sentido adecuado al recorrido de ∂D para aplicar Stokes].

$\iint_S\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=\iint_D\big[\underbrace{8x\,(4-4x^2-y^2)}_{\text{impar y } D \text{ simétrico}}+1\big]\,dx\,dy=\iint_D 1$ $\big[=\text{área de } D=\pi\cdot 2\cdot 1\big]$.

Para hallar este área lo más útil es (ejemplo de apuntes) el cambio $x=\cos\theta$, $y=2\operatorname{sen}\theta$, con $J=2r$ $\rightarrow$

Área de $D=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\,dr\,d\theta=\boxed{2\pi}$. $\big[$Sin usar la imparidad, aquí saldría una $\int_0^{2\pi}\int_0^1 16r^2c(4-4r^2)\,dr\,d\theta=0\big]$.

$\big[$En cartesianas (aún sin simplificar) acaba saliendo: $\int_{-1}^1\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}}1\,dy\,dx=8\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=2\pi\big]$.

También podíamos parametrizar S usando las polares anteriores típicas de las elipses:

$\mathbf{r}=(r\cos\theta,2r\operatorname{sen}\theta,4-4r^2)$, $\begin{matrix}0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{matrix}\rightarrow\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ c&2s&-2r\\ -rs&2rc&0\end{vmatrix}=2r(8r\cos\theta,4r\operatorname{sen}\theta,1)$.

Con ellas queda: $\iint_S\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r(4-4r^2,0,1)\cdot(8r\cos\theta,4r\operatorname{sen}\theta,1)\,dr\,d\theta=2\pi$ como antes.