Soluciones del final de Cálculo (grupo D) (junio de 2016)

1. Sea $f(x,y)=\frac{y^2-x^4}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1 . **b)** Hallar, si existe, un $\overline{u}$ unitario tal que $D_{\overline{u}}f(1,-1)$ valga i) 0 , ii) 3 . **c)** Estudiar su continuidad, la existencia de derivadas parciales y su diferenciabilidad en $(0,0)$. [0.4+0.7+0.9=2 pts]

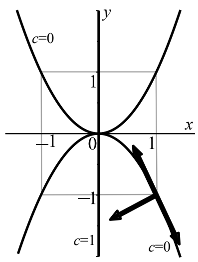
a) $f=0\to\ y^2=x^4$, $y=\pm x^2$ parábolas. $f=1\to\ x^2(1+x^2)=0$, $x=0$.

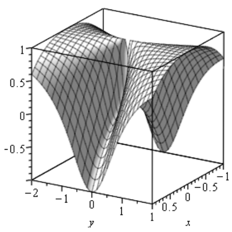
b) i) $D_{\overline{u}}=0$ en dirección perpendicular a ∇f (tangente a la curva nivel).

Por tanto: $\overline{u}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\mp\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (unitarios tangentes a $y=-x^2$ en $x=1$).

O bien: $\nabla f=\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\left(-x^4-2x^2y^2-y^2,\,xy(x^2+1)\right)\xrightarrow{(1,-1)}-(2,1)$ ...

ii) No existe $\overline{u}$ porque el valor máximo de $D_{\overline{u}}$ es $\|\nabla f\|=\sqrt{5}<3$.





c) Tan cerca de $\mathbf{0}$ como queramos hay puntos con $f=0$ y $f=1$ $\Rightarrow$

f discontinua en el origen. O bien, lo es porque: $f(x,mx)=\frac{m^2-x^2}{1+m^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{m^2}{1+m^2}$ distinto para distintos m .

f discontinua $\Rightarrow$ f no diferenciable.

$f(x,0)=-x^2\Rightarrow f_x(0,0)=-2x\big|_{x=0}=0$. $f(0,y)=\begin{cases}1, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ discontinua $\Rightarrow\ \nexists f_y(0,0)$. [Definiendo $f(0,0)=1$, la que no existiría sería f_x].

2. Sea $h(x,y)=3y^2-x^3$. Hallar los valores máximo y mínimo de h sobre el círculo $x^2+y^2\leq 4$. [2 puntos]

Los extremos han de existir por ser h continua en el conjunto compacto (el círculo).

Localizamos los puntos críticos en el interior (claramente no hay 'picos', pues $h\in C^\infty$):

$$\begin{cases}h_x=-3x^2=0\\ h_y=6y=0\end{cases}\to(0,0)\,.\quad H=\begin{vmatrix}-6x & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=36x\,.\quad H(0,0)=0 \text{ y el Hessiano no decide.}$$

[Aunque no se necesita (basta comparar $f(0,0)=0$ con el resto), como $f(x,0)=-x^3$ es una silla].

Para encontrar los extremos el borde $g(x,y)=x^2+y^2=4$ podemos usar mulltliplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases}-3x^2=2\lambda x & x=-2,\,0\to y=\pm 2\\ 6y=2\lambda y\to y=0,\ \lambda\overset{\uparrow}{=}3\\ x^2+y^2=4 & x\overset{\downarrow}{=}\pm 2\end{cases}\qquad f(0,\pm 2)=\boxed{12}\ \text{valor máximo.}\quad f(2,0)=\boxed{-8}\ \text{valor mínimo.}\qquad f(-2,0)=8\,.$$

También se podría parametrizar la circunferencia $(2\cos t,2\,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in[-\pi,\pi]$ $\to$ $h\big|_C=12\,\mathrm{sen}^2t-8\cos^3t\equiv s(t)$

$\to$ $s'(t)=24\,\mathrm{sen}\,t\cos t(1+\cos t)=0$ $\to$ $t=0,\pm\frac{\pi}{2},\pi$, que nos vuelve a dar los puntos de arriba.

O, incluso, es sencillo aquí $y^2=4-x^2$ $\to$ $h\big|_C=12-3x^2-x^3$, hallar sus extremos en $[-2,2]$ y deducir los y .

Elegir entre 3 y 3*:

3. Calcular el plano tangente a la superficie $x^2+y^2+3z^2=16$ en el punto $(3,2,1)$ y hallar el ángulo con el que la curva $\overline{c}(t)=(3e^t,2e^t,e^{3t})$ corta esa superficie. [1.5 puntos]

$\nabla F=2(x,y,3z)\xrightarrow{(3,2,1)}2(3,2,3)$. Plano tangente: $3(x-3)+2(y-2)+3(z-1)=0$, $z=\frac{16}{3}-x-\frac{2y}{3}$.

Se cortan si $3e^{6t}+13e^{2t}=16$ lo que claramente sucede si $t=0$, que lleva el punto $(3,2,1)$ de antes.

[De hecho, es el único corte, pues primer miembro creciente, o $e^{2t}=s\to\ 3s^3+13s-16=[s-1][3s^2+3s+16]=0$].

Un vector tangente a la curva es $\overline{c}'(0)=(3,2,3)$ normal al plano tangente.

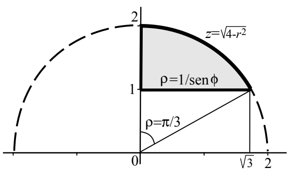
Curva y superficie son, pues, perpendiculares. Es decir, se cortan formando un ángulo $\frac{\pi}{2}$.

3*. Calcular $\iiint_V\frac{dx\,dy\,dz}{z^2}$, siendo V el sólido definido por $x^2+y^2+z^2\leq 4$, $z\geq 1$. [1.5 puntos]

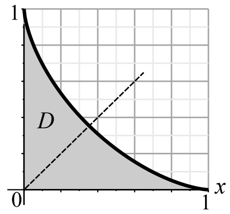
Cilíndricas: $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\frac{r}{z^2}\,dr\,dz\,d\theta=\pi\int_1^2\left(\frac{4}{z^2}-1\right)dz=\pi\left[-\frac{4}{z}\right]_1^2-\pi=\pi$.

O bien: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}}\frac{r}{z^2}\,dz\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(r-\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\right)dr=3\pi+2\pi\left[\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}}=\pi$.

Esféricas: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{1/\cos\phi}^2\frac{\mathrm{sen}\,\phi}{\cos^2\phi}\,d\rho\,d\phi\,d\theta=2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\frac{2s}{c^2}-\frac{s}{c^3}\right)d\phi=2\pi\left[\frac{2}{c}-\frac{1}{2c^2}\right]_0^{\pi/3}=\pi$.



4. Hallar el área de la región plana definida por $x^{2/3}+y^{2/3}\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, utilizando el cambio de variables $x=r\cos^3\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}^3\theta$. [2 puntos]



Como $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ es simétrica, tiene $y=[1-x^{2/3}]^{3/2}$ pendiente 0 en $(1,0)$, corta $y=x$ si $x=\sqrt{2}/4$, . . . la región D es la del dibujo (este usando Maple):

Jacobiano: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} c^3 & -3rc^2s \\ s^3 & 3rs^2c \end{vmatrix}=3r\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta(\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta)=3r\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta$.

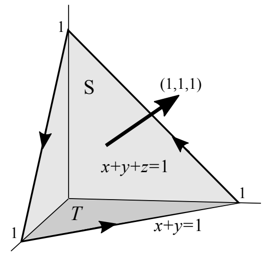
Veamos que conjunto $D^*=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ se transforma en nuestro recinto D :

$\theta=0\to y=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}\to x=0$; $x^{2/3}+y^{2/3}=r^{2/3}(\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta)=r^{2/3}\le 1$, $r\le 1$.

[Y en D^* es inyectivo, salvo en $(0,0)$, como las polares: $\theta=K$ constante lleva a distintas rectas $y=(\tan^3 K)x$].

$$\text{Área}=\iint_D 1=\tfrac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^1 r\,\mathrm{sen}^2 2\theta\,dr\,d\theta=\tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,d\theta=\tfrac{3\pi}{32}-0=\boxed{\tfrac{3\pi}{32}}\,.$$

5. Sea C la curva cerrada formada por los segmentos que unen los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,0,0)$, y $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=(z^3,0,-3(x+y))$. **a)** Calcular $\oint_C \bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}$ expresándola en términos de una integral de superficie. **b)** Parametrizar los segmentos y calcular directamente la integral anterior. [1.6+0.9=2.5 pts]



a) Nos lleva a utilizar Stokes. $\mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{f}}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^3 & 0 & -3(x+y) \end{vmatrix}=3(-1,1+z^2,0)$.

El plano por los puntos es claramente $x+y+z=1$ que da esta parametrización de S :

$\bar{r}(x,y)=(x,y,1-x-y)$, con $(x,y)\in T$ triángulo del dibujo.

$\bar{r}_x\times\bar{r}_y=(-f_x,-f_y,1)=(1,1,1)$ (que apunta en el sentido que pide Stokes).

$$\text{Stokes: } \oint_C \bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\iint_S \mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=3\iint_T z^2\,dx\,dy=3\int_0^1\!\!\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\big[-(1-x-y)^3\big]_0^{1-x}dx=\int_0^1(1-x)^3dx=-\tfrac{1}{4}(1-x)^4\Big]_0^1=\boxed{\tfrac{1}{4}}\,.$$

[Eligiendo parametrizaciones (no habituales) $\bar{r}(x,z)$ o $\bar{r}(y,z)$ se simplificarían algo algunos cálculos].

b) Parametrizaciones posibles de los 3 segmentos en el sentido dado son, por ejemplo:

$(t,1-t,0)$, $t\in[1,0]$, $(0,t,1-t)$, $t\in[1,0]$, $(t,0,1-t)$, $t\in[0,1]$ $\rightarrow$

$$\oint_C \bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_1^0(0,0,3t)\cdot(1,-1,0)+\int_1^0((1-t)^3,0,-3t)\cdot(0,1,-1)+\int_0^1((1-t)^3,0,-3t)\cdot(1,0,-1)$$

$$=\int_1^0 0+\int_1^0 3t+\int_0^1(1+3t^2-t^3)=0-\tfrac{3}{2}+1+1-\tfrac{1}{4}=\boxed{\tfrac{1}{4}}\,.$$