1. Hallar los b para los que $f(x,y)=x^2-bxy+y^2-4x-2y$ tiene un mínimo local en un punto de $y=1$. [1.5 ptos]

$\begin{array}{l} f_x=2x-by-4=0 \\ f_y=2y-bx-2=0,\ y=1 \to \end{array} \begin{array}{l} x=2 \quad b=-4 \\ b\overset{\uparrow}{=}0 \text{ ó } x\overset{\uparrow}{=}0 \end{array} \to (2,1),\ (0,1)$. $\begin{vmatrix} 2 & -b \\ -b & 2 \end{vmatrix}=4-b^2$. $(2,1)$ mínimo, si $\boxed{b=0}$ [$(0,1)$ silla].

2. Sea $F(x,y,z)=x^2e^{2y+2}+4\,\mathrm{sen}(x+2z)+2z^2$. **a)** Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $F(x,y,z)=6$ en el punto $(2,-1,-1)$. **b)** Escribir un vector unitario $\bar{u}$ tal que $D_{\bar{u}}F(2,-1,-1)=8$. [2.5 ptos]

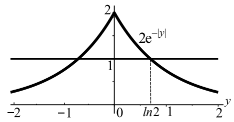
$\nabla F=(2x\,e^{2y+2}+4\cos(x+2z),\,2x^2e^{2y+2},\,8\cos(x+2z)+4z)$. $\nabla F(2,-1,-1)=(8,8,4)=4(2,2,1)$.

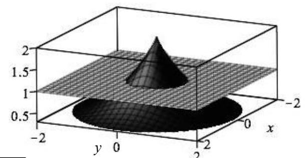
a) Plano tangente: $2(x-2)+2(y+1)+(z+1)=0$, $\boxed{2x+2y+z=1}$. Recta normal: $\boxed{(2t+2,\,2t-1,\,t-1)}$.

b) $\mathbf{i}$ o $\mathbf{j}$ claramente valen (pues $F_x=F_y=8$). [Hay otros infinitos que cumplen: $8a+8b+4c=8$ y $a^2+b^2+c^2=1$].

3. Sea $g(x,y)=2\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$. **a)** Dibujar su corte con el plano $x=0$ y su gráfica. ¿Es g diferenciable en $(0,0)$? **b)** Calcular el volumen del recinto limitado por la gráfica de g y el plano $z=1$. [2.5 ptos]

a) De revolución. $g(0,y)=2e^{-|y|} \Rightarrow g_y(0,0)$ no existe $\Rightarrow g$ **no diferenciable** en $(0,0)$.





b) $2\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}=1 \Leftrightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\log 2$. Polares-cilíndricas:

$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\ln 2} r\,[2\,e^{-r}-1]\,dr\,d\theta = 2\pi\left[-2(r+1)\,e^{-r}-\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{\ln 2}=\boxed{2\pi\left[1-\ln 2-\tfrac{1}{2}(\ln 2)^2\right]}$.

4. Sea $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=e^{-z}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-xe^{-z}\,\mathbf{k}$. **a]** Calcular directamente la integral de línea de $\bar{\mathrm{f}}$ desde $(1,1,0)$ hasta $(1,0,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos. **b]** Hallar, si existe, una función potencial para $\bar{\mathrm{f}}$. [2 ptos]

a] $\mathbf{c}(t)=(1,1-t,3t)$, $t\in[0,1] \to \int_{\mathbf{c}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_0^1(e^{-3t},1,-e^{-3t})\cdot(0,-1,3)\,dt=\int_0^1(-1-3e^{-3t})\,dt=\boxed{e^{-3}-2}$.

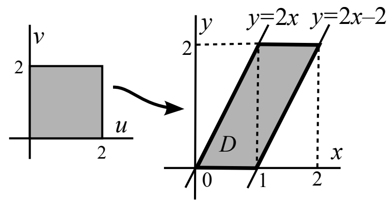
b] $\mathrm{rot}\,\bar{\mathrm{f}}=\bar{0}$, $\bar{\mathrm{f}}\in C^1 \Rightarrow$ hay potencial. $\begin{array}{l} U=xe^{-z}+p(y,z) \\ U=y+q(x,z) \\ U=xe^{-z}+r(x,y) \end{array}$, $\boxed{U=xe^{-z}+y}$ [$\int_{\mathbf{c}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=U(1,0,3)-U(1,1,0)=e^{-3}-2$].

Elegir entre 5 y 6:

5. Calcular $\iint_D(2x-y)^3\,dx\,dy$, siendo D el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,2)$ y $(1,2)$ de dos formas: i) directamente, ii) haciendo el cambio $u=2x-y$, $v=y$. [1.5 ptos]

i) Para no hacer 2 integrales, es mejor integrar primero respecto a x:

$\int_0^2\int_{y/2}^{y/2+1}(2x-y)^3\,dx\,dy=\int_0^2\tfrac{1}{8}\left[(2x-y)^4\right]_{y/2}^{y/2+1}dy=\int_0^2 2\,dy=\boxed{4}$.



Más largo: $\int_0^1\int_0^{2x}(2x-y)^3dy\,dx+\int_1^2\int_{2x-2}^2(2x-y)^3dy\,dx$

$=\int_0^1 4x^4dx+\int_1^2\left[4-4(x-1)^4\right]dx=\tfrac{4}{5}+4-\tfrac{4}{5}=4$.

ii) Con el cambio: $\begin{array}{l} u=2x-y \\ v=y \end{array}$, $\begin{array}{l} x=\frac{u+v}{2} \\ y=v \end{array}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\tfrac{1}{2}$. $\tfrac{1}{2}\int_0^2\int_0^2 u^3du\,dv=1\cdot\left[\tfrac{1}{4}u^4\right]_0^2=\boxed{4}$.

6. Hallar $\iint_S\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS$, para $\bar{F}(x,y,z)=(x,1,2)$, S la superficie $x^2+y^2+z^2=9$ y $\bar{n}$ su normal unitaria exterior. [Se puede hallar utilizando un teorema adecuado]. [1.5 ptos]

Mucho más corto utilizando el teorema de la divergencia. Es $S=\partial V$ esfera de radio 3 y es $\mathrm{div}\bar{F}=1$.

La integral pedida coincide con: $\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{\pi}\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta=\boxed{36\pi}=$ volumen de $V=\tfrac{4}{3}\pi 3^3$.

Directamente: $\bar{r}(\phi,\theta)=(3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\,3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\,3\cos\phi)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\phi\in[0,\pi]$, $\bar{r}_\phi\times\bar{r}_\theta=3\,\mathrm{sen}\,\phi\;\bar{r}(\phi,\theta)$.
[sentido correcto]

$\iint_S\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}9\,\mathrm{sen}\,\phi\,(3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,1,2)\cdot(\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\,\cos\phi)\,d\phi\,d\theta$

$=9\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\underbrace{\tfrac{3}{2}\,\mathrm{sen}^3\phi(1+\cos 2\theta)}_{\text{[se anula]}}+\underbrace{\mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}\,\theta}_{\text{[se anula]}}+\underbrace{2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi}_{\text{[se anula]}}\right]d\phi\,d\theta=$

$=27\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi=27\pi\left[-\cos\phi+\tfrac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi}=36\pi$.