Soluciones de septiembre de Cálculo (grupo D) (2016)

1. Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en todo el plano. Se sabe que sus derivadas direccionales en el punto $(1,2)$ según los vectores $\left(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\right)$ y $(3/5,4/5)$ son $-\sqrt{2}$ y 3, respectivamente, y que $f(1,2)=2$. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal a gráfica de $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$. [2 ptos]

$$\nabla f(2,1)=\big(f_x(1,2),f_y(1,2)\big)\equiv(c,d)\,,\ D_{(u,v)}f(2,1)=cu+dv \to \begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{2}}c-\frac{1}{\sqrt{2}}d=-\sqrt{2}\\ \frac{3}{5}c+\frac{4}{5}d=3\end{array} \to f_x(1,2)=1,\ f_y(1,2)=3\,.$$

Plano tangente: $z=2+(x-1)+3(y-2)$, $\boxed{x+3y-z=5}$. Recta normal a la superficie: $\boxed{\mathbf{x}=(1,2,2)+t(1,3,-1)}$.

2. Sea $h(x,y,z)=g\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)$, con $u(x,y,z)=x^2+2yz$, $v(x,y,z)=y^2+2xz$, y $g(u,v)$ campo escalar C^1. Simplificar al máximo, con la regla de la cadena, la expresión $(y^2-xz)\frac{\partial h}{\partial x}+(x^2-yz)\frac{\partial h}{\partial y}+(z^2-xy)\frac{\partial h}{\partial z}$. [2 ptos]

$$\begin{array}{l}\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}2x+\frac{\partial g}{\partial v}2z\\ \frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}2z+\frac{\partial g}{\partial v}2y\\ \frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial u}2y+\frac{\partial g}{\partial v}2x\end{array} \to \begin{array}{l}(y^2-xz)\frac{\partial h}{\partial x}+(x^2-yz)\frac{\partial h}{\partial y}+(z^2-xy)\frac{\partial h}{\partial z}\\ \quad =2\big(xy^2-x^2z+x^2z-yz^2+yz^2-xy^2\big)\frac{\partial g}{\partial u}+2\big(y^2z-x^2z+x^2y-y^2z+x^2z-x^2y\big)\frac{\partial g}{\partial v}=\boxed{0}\,.\end{array}$$

Elegir entre 3 y 3*:

3. Sea $f(x,y)=(x-1)^3+(y-x)^2-3x$. Hallar sus máximos y mínimos locales y precisar si alguno es absoluto. [2 ptos]

$$\begin{array}{l}f_x=3(x-1)^2-2(y-x)-3=0\,,\ (x-1)^2=1\\ f_y=2(y-x)=0 \quad\to\quad y=x\nearrow\end{array} \to (0,0) \text{ y } (2,2)\,.\quad H=\begin{vmatrix}6(x-1)+2 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=6(x-1)\,.\quad \begin{array}{l}(0,0) \text{ silla}\\ (2,2) \text{ mínimo.}\end{array}$$

El valor mínimo $f(2,2)=-5$ no es absoluto, pues, por ejemplo, sobre $y=x$ es $f(x,x)=x^3-3x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

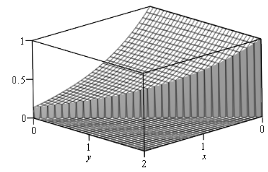
$\big[$O basta encontrar un punto donde valga menos, por ejemplo: $f(-2,-2)=-21<-5\,\big]$.

3*. Calcular $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$ si V es el sólido limitado por $x=0$, $y=0$, $x+y=2$, $z=0$ y $z=e^{-x}$. [2 ptos]

$$\int_0^2\!\int_0^{2-x}\!\int_0^{e^{-x}} z\,dz\,dy\,dx=\int_0^2\!\int_0^{2-x}\tfrac{1}{2}e^{-2x}dy\,dx=\int_0^2\left(1-\tfrac{x}{2}\right)e^{-2x}dx = \text{(partes)}$$

$$=\left(\tfrac{x}{4}-\tfrac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big]_0^2-\tfrac{1}{4}\int_0^2 e^{-2x}dx=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}\big[e^{-2x}\big]_0^2=\boxed{\tfrac{3+e^{-4}}{8}}\,.$$

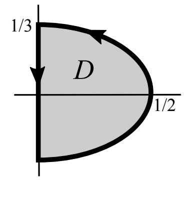
$\big[$Algo más corto haciendo $\int_0^2\!\int_0^{2-y}\!\int_0^{e^{-x}} z\,dz\,dx\,dy\big]$.



4. Comprobar el teorema de Green para $\bar{f}(x,y)=\left(x,x^2\right)$ sobre la parte de la elipse $4x^2+9y^2=1$ con $x\geq 0$. [2 ptos]

$$g_x-f_y=2x\,.\ \iint_D 2x=\int_{-1/3}^{1/3}\!\int_0^{\sqrt{1-9y^2}/2}2x\,dx\,dy=\tfrac{1}{2}\int_0^{1/3}(1-9y^2)\,dy=\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\big[3y^3\big]_0^{1/3}=\boxed{\tfrac{1}{9}}\,.$$

O con $x=\frac{r}{2}\cos\theta$, $y=\frac{r}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta$, $J=\frac{r}{6}$, $\frac{1}{6}\int_0^1\!\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos\theta\,d\theta\,dr=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{9}$.



Sobre $x=0$ el campo es nulo y la elipse viene dada por $\mathbf{c}(t)=\left(\frac{1}{2}\cos t,\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,t\right)$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\to \oint_{\partial D}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\tfrac{c}{2},\tfrac{c^2}{4}\right)\cdot\left(-\tfrac{s}{2},\tfrac{c}{3}\right)dt=\tfrac{1}{6}\int_0^{\pi/2}(1-s^2)c\,dt=\tfrac{1}{6}\left[s-\tfrac{1}{3}s^3\right]_0^{\pi/2}=\tfrac{1}{9}\,.$$

5. Comprobar el teorema de Gauss para $\bar{f}(x,y,z)=(x,1,y)$ y el sólido dado por $0\leq z\leq 1-\left(x^2+y^2\right)^2$. [2 ptos]

$\mathrm{div}\,\bar{f}=1$. Cilíndricas: $\iiint_V \mathrm{div}\,\bar{f}=\int_0^{2\pi}\!\int_0^1\!\int_0^{1-r^4} r\,dz\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^1\left(r-r^5\right)dr=\boxed{\frac{2\pi}{3}}$.

Sobre la base B: $(x,y,0)$, $\iint_{\bigcirc}(x,1,y)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy=-\iint_{\bigcirc} y\,dx\,dy=0$ (impar).

Sobre la tapa S: $\bar{r}(x,y)=\left(x,y,1-(x^2+y^2)^2\right)\to \bar{r}_x\times\bar{r}_y=\left(4x(),4y(),1\right)$ (exterior).

$$\iint_{\bigcirc}\big(\underbrace{4x^2(x^2+y^2)}_{}+\underbrace{4y(x^2+y^2)}_{\text{impar}}+\underbrace{y}_{\text{impar}}\big)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\!\int_0^1 \underset{\substack{\parallel\\ 2r^5(1+\cos 2\theta)}}{4r^5\cos^2\theta}\,dr\,d\theta=\tfrac{1}{3}\cdot 2\pi=\iiint_{\partial V}\bar{f}\cdot d\bar{S}\,.$$

[O bien, $\bar{r}(r,\theta)=\left(r\cos\theta,r\,\mathrm{sen}\,\theta,1-r^4\right)\ \ldots\,\big]$.