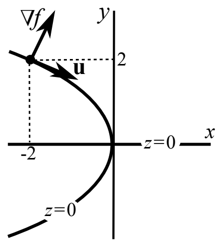
Soluciones del parcial de Cálculo (grupo C) (abril de 2015)

1. Sea $f(x,y)=\frac{2xy+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$.
b) Estudiar la existencia de derivadas parciales, la continuidad y la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.
c) Hallar un vector unitario $\bar{u}$ tal que $D_{\bar{u}}f(-2,2)=0$. [0.5+1.5+1=3pt]



a) $f=0$, $y(2x+y^2)=0 \;\to\; y=0$ y la parábola $x=-\frac{1}{2}y^2$ [que pasa por $(-2,2)$].

b) $\begin{matrix} f(x,0)=0 \\ f(0,y)=y \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} f_x(0,0)=0 \\ f_y(0,0)=1 \end{matrix}$. $f(x,mx)=\frac{2m+m^3x}{1+m^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow$ **discontinua** en $(0,0)$.

[En polares es casi lo mismo: $f(r,\theta)=2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta+r\,\text{sen}^3\theta \underset{r\to 0}{\to} \text{sen}\,2\theta$ dependiente de θ].

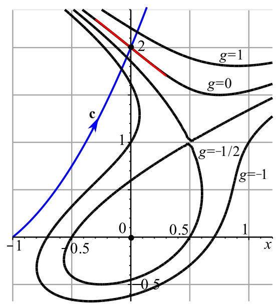
[Para probar la discontinuidad bastaba comprobar, por ejemplo, que $f(x,x)\underset{x\to 0}{\to} 1$].

Por no ser f continua, deducimos que f **no es diferenciable** en ese punto.

c) $\nabla f=\left(\frac{2y(y^2-x^2-xy^2)}{(x^2+y^2)^2},\frac{2x^3-2xy^2+3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)\Big|_{(-2,2)}=\left(\frac{1}{2},1\right)$, $(2,-1)$ perpendicular $\Rightarrow \bar{u}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ [ó $-\bar{u}$].

[Más corto: $\bar{u}$ debe ser vector tangente a la curva de nivel, que tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ en el punto].

2. Sea $g(x,y)=y^3-2x^2+2xy-2y^2$. **a)** Hallar sus extremos locales. ¿Tiene extremos absolutos? **b)** Justificar que $g(x,y)=0$ define una función $y(x)$ de C^1 cerca de $(0,2)$ y hallar la recta tangente a $y(x)$ en ese punto.
c) Si $\bar{c}(t)=\left(t-1,t+t^2\right)$ y $h(t)=g(\bar{c}(t))$, calcular $h'(1)$ utilizando la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$. [2+0.7+0.8=3.5pt]



a) $\begin{matrix} g_x=2y-4x=0\,,\; y=2x \searrow \\ g_y=3y^2+2x-4y=0\,,\quad 6x(2x-1)=0 \end{matrix}$, $Hg=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 6y-4 \end{vmatrix}=12(1-2y) \;\to$

$\left(\frac{1}{2},1\right)$ silla y $(0,0)$ máximo local [con valores $g\left(\frac{1}{2},1\right)=-\frac{1}{2}$ y $g(0,0)=0$].

$g(0,y)=y^3-2y^2 \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} \pm\infty \Rightarrow$ no tiene extremos absolutos.

b) $g(0,2)=0$, $g_y(0,2)=4\neq 0 \Rightarrow$ existe $y(x)\in C^1$ cerca de $(0,2)$, $g_x(0,2)=4$,
$y'(0)=-\frac{4}{4}=-1$. Recta tangente $y=y(0)+y'(0)(x-0)=2-x$.

c) $\bar{c}(1)=(0,2)$, $\bar{c}\,'(1)=(1,3)$, $h'(1)=\nabla g(\bar{c}(1))\cdot\bar{c}\,'(1)=(4,4)\cdot(1,3)=16$.

[Con Maple pintamos las curvas de nivel $g=-1,-\frac{1}{2},0$ y 1 . Se ve que la recta es tangente a $g=0$. También se ve que $h'(1)>0$. La curva $g=0$ es precisamente la curva $f=2$ del problema anterior (buscando más información sobre f llegaríamos a ella)].

3. Sea $\bar{f}(x,y,z)=\left(xz^2,-x^2y,-y^2z\right)$. **a)** Calcular: i) $\text{div}\,\bar{f}$, ii) $\nabla\left(\text{div}\,\bar{f}\right)$, iii) $\text{rot}\,\bar{f}$.
b) Obtener la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $\text{div}\,\bar{f}=0$ en el punto $(3,4,5)$.
¿Corta la recta normal alguno de los tres ejes? [1+1.5=2.5pt]

a) $\text{div}\,\bar{f}=z^2-y^2-x^2$ [$=0$ **cono**]. $\nabla\left(\text{div}\,\bar{f}\right)=(-2x,-2y,2z)\xrightarrow{(3,4,5)} 2(-3,-4,5)$. $\text{rot}\,\bar{f}=(-2yz,2xz,-2xy)$.

b) Plano tangente: $-3(x-3)-4(y-3)+5(z-5)=0$, $5z=3x+4y$ (pasa por el origen como en todo cono) [ó $z=\sqrt{x^2+y^2}\ldots$].

Recta normal: $\left(3(1-t),4(1-t),5(1+t)\right)$, que para $t=1$ corta el eje z (esperable en cono) en $(0,0,10)$.

4. Comprobar que $u(x,y)=xy+x\,h\left(\frac{y}{x}\right)$, con $h\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ derivable y $x>0$, cumple la ecuación $x\,u_x+y\,u_y=u+xy$.
[1 pt]

$u_x=y+h\left(\frac{y}{x}\right)-x\,h'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}$, $u_y=x+x\,h'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}$, $x\,u_x+y\,u_y=2xy+x\,h\left(\frac{y}{x}\right)-y\,h'\left(\frac{y}{x}\right)+y\,h'\left(\frac{y}{x}\right)=2xy+x\,h\left(\frac{y}{x}\right)=u+xy$.

otros apartados preparados que no llegué a preguntar:

1. d) Calcular $\Delta f(-2,2)$ (mejor en polares).
2. a*) Hallar los puntos críticos de g sobre $y-2x=1$ ulizando multiplicadores de Lagrange.
3. c) Hallar $\mathbf{D}\bar{f}$. Si $\bar{c}(t)=\left(3,5-t^2,5t\right)$ y $\bar{r}(t)=\left(\bar{f}\circ\bar{c}\right)(t)$, hallar $\bar{c}\,'(1)$ y, con la regla de la cadena, $\bar{r}\,'(1)$.

1d) $f(r,\theta)=\text{sen}\,2\theta+r\,\text{sen}^3\theta \Rightarrow f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}\Big|_{(2\sqrt{2},3\pi/4)}=1$ [o peor $f_{xx}+f_{yy}=\frac{2y(3x^2-y^2-4x)}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{(-2,2)}=1$].

2a*) $\begin{matrix} y-2x=-\lambda & \searrow \\ 3y^2+2x-4y=\lambda & \downarrow 3y(y-1)=0 \\ y-2x=1 & x=-1/2,0 \end{matrix} \;\to\; \left(-\frac{1}{2},0\right)$, $(0,1)$. [La recta $y=2x+1$ es tangente a las curvas de nivel $g=-\frac{1}{2}$ y $g=-1$ del dibujo de arriba].

3c) $\bar{c}\,'(1)=(0,-2,5)$. $\bar{c}(1)=(3,4,5)$. $\mathbf{D}\bar{f}=\begin{pmatrix} z^2 & 0 & 2xz \\ -2xy & -x^2 & 0 \\ 0 & -2yz & -y^2 \end{pmatrix}$. $\bar{c}\,'(1)=\mathbf{D}\bar{f}(\bar{c}(1))\,\bar{c}\,'(1)=(150,18,0)$.