Soluciones del parcial de Cálculo (grupo D) (abril de 2016)

1. Sea $f(x,y)=\frac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. **a)** Desarrollar el numerador por Taylor hasta orden 2 en torno a $(0,0)$. **b)** Precisar si f en $(0,0)$: i) es continua, ii) tiene derivadas parciales, iii) es diferenciable. [0.5+1 pts]

a) $\cos z=1-\frac{z^2}{2}+\cdots \to \underbrace{\cos(x+y)-\cos(x-y)}_{[\,=-2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\,]}=1-\frac{1}{2}(x+y)^2+\cdots-\left[1-\frac{1}{2}(x-y)^2+\cdots\right]=\boxed{-2xy+o(x^2+y^2)}$.

[Más largo derivar: $f_x=-s+s$, $f_y=-s-s$, $f_{xx}=f_{yy}=-c+c$, que se anulan en $(0,0)$, y $f_{xy}=-c-c\big|_{(0,0)}=-2$].

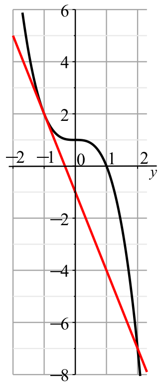
b) $f(x,x)=\frac{\cos 2x-1}{2x^2}=\frac{-2x^2+\cdots}{2x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-1$ $\left[\,f(x,mx)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{-2m}{1+m^2}\text{ en general}\right]\Rightarrow$ **discontinua** $\Rightarrow$ **no diferenciable**.

$f(x,0)=f(0,y)=0$ [pues $\cos y=\cos(-y)$] $\Rightarrow$ las parciales son $\boxed{f_x(0,0)=f_y(0,0)=0}$.

2. Sea $z(x,y)=g\left(\frac{3x+y}{5x+2y}\right)$, con $g\in C^1$ de una variable. Hallar $a,b\in\mathbf{R}$ tales que $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{5x+2y}\,g'\left(\frac{3x+y}{5x+2y}\right)$. [1.5 pts]

$z_x=\frac{y}{(5x+2y)^2}\,g'\left(\frac{3x+y}{5x+2y}\right)$, $z_y=-\frac{x}{(5x+2y)^2}\,g'\left(\frac{3x+y}{5x+2y}\right)$. $az_x+bz_y=\frac{ay-bx}{(5x+2y)^2}\,g'\left(\frac{3x+y}{5x+2y}\right)\Rightarrow\boxed{a=2\,,\ b=-5}$.

3. Sean $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=(xz,y^2,2xz)$ y $\bar{\mathrm{c}}(t)=(1,t,1-t^3)$. **a)** Hallar: i) $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$, ii) $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}$, iii) $\mathbf{D}\bar{\mathrm{f}}$, iv) $J\bar{\mathrm{f}}$, v) $\bar{\mathrm{c}}'(-1)$.
b) Si $\bar{\mathrm{r}}(t)=(\bar{\mathrm{f}}\circ\bar{\mathrm{c}})(t)$, calcular $\bar{\mathrm{r}}'(-1)$ utilizando la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$. [1+0.5+1 pts]
c) Hallar la recta tangente en $(1,-1,2)$ a la curva dada por $\bar{c}$ y otro punto en el que la tangente corta la curva.



a) i) $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}=\boxed{2x+2y+z}$, ii) $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}=\boxed{(0,x-2z,0)}$, iii) $\mathbf{D}\bar{\mathrm{f}}=\boxed{\begin{pmatrix}z&0&x\\0&2y&0\\2z&0&2x\end{pmatrix}}$, iv) $J\bar{\mathrm{f}}=\boxed{0}$,

v) $\bar{\mathrm{c}}'(t)=(0,1,-3t^2)$, $\boxed{\bar{\mathrm{c}}'(-1)=(0,1,-3)}$.

b) $\bar{\mathrm{c}}(-1)=(1,-1,2)$. $\bar{\mathrm{r}}'(-1)=\mathbf{D}\bar{\mathrm{f}}(\bar{\mathrm{c}}(-1))\,\bar{\mathrm{c}}'(-1)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-2&0\\4&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3\\-2\\-6\end{pmatrix}}$ [se suele escribir como vector fila].

c) Recta tangente (si $t=-1$): $\boxed{(1,s-1,2-3s)}$. Corta otra vez si $t=s-1$, $1-t^3=2-3s$.

$\to t^3-3t-2=0\ \to\ t=2$ [y $t=-1$ doble]. El otro punto es $\boxed{(1,2,-7)}$.

[A la derecha, el dibujo de la curva y la tangente ($z=1-y^3$, $z=-1-3y$), sobre el plano $x=1$].

4. Sea $F(x,y,z)=x^3-2yz+e^x z^2$. **a)** Hallar la ecuación del plano tangente a $F=0$ en $(0,1,2)$.
b) Probar que $F=0$ define implícitamente una $z(x,y)$ de C^1 cerca de $(0,1,2)$ y hallar el valor de $z_x(0,1)$.
c) Encontrar un $\bar{u}$ unitario que sea perpendicular al vector $(1,0,1)$ y tal que $D_{\bar{u}}F(0,1,2)=0$. [1+0.5+1 pts]

a) $\nabla F=(3x^2+z^2e^x,-2z,2ze^x-2y)\overset{(0,1,2)}{\longrightarrow}2(2,-2,1)$. Plano: $(2,-2,1)\cdot(x,y-1,z-2)=0$. $\boxed{z=2y-2x}$.

b) $F\in C^1$, $F(0,1,2)=0$, $F_z(0,1,2)=2\neq 0\ \Rightarrow\ \exists z(x,y)$ por el teorema de la función implícita.

Derivando implícitamente: $3x^2-2yz_x+e^x z^2+2e^x zz_x=0$, $z_x=\frac{3x^2+z^2e^x}{2(y-ze^x)}\Big|_{(0,1,2)}=\boxed{-2}$ [o bien $z_x=-\frac{F_x}{F_z}$].

[Coincide con **a**). Más largo es derivar $z=e^{-x}\left(y+\sqrt{y^2-x^3e^x}\right)$].

c) Perpendicular al vector y al gradiente en el punto es $(1,0,1)\times(2,-2,1)=(2,1,-2)\to\boxed{\bar{u}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)}$ [o $-\bar{u}$].

[O resolviendo $\begin{matrix}a+c=0\ \to\ c=-a\\2a-2b+c=0\quad a=2b\end{matrix}$, vector de la forma $(2b,b,-2b)$ de módulo $9|b|$].

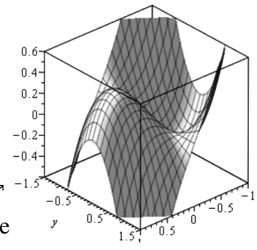
5. Sea $h(x,y)=x-x^3-xy^2$. Hallar y clasificar sus puntos críticos. [2 pts]

$\begin{matrix}h_x=1-3x^2-y^2=0,\ y=\pm 1,\ x=\pm 1/\sqrt{3}\\ h_y=-2xy=0,\ x=0\nearrow,\ y=0\nearrow\end{matrix}\to(0,\pm 1)$, $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}},0\right)$. $Hh=\begin{vmatrix}-6x&-2y\\-2y&-2x\end{vmatrix}=4(x^2-3y^2)$.

Como en ellos el hessiano es negativo, $\boxed{(0,\pm 1)}$ son **sillas** (y en ellos h vale 0).

Los otros serán máximos o mínimos. Viendo el signo de h_{xx} :

$\boxed{(1/\sqrt{3},0)}$ es **máximo** y $\boxed{(-1/\sqrt{3},0)}$ es **mínimo** (sólo locales).



dibujo con Maple ↗