Soluciones del parcial de Cálculo (grupo C) (11 de marzo de 2024)

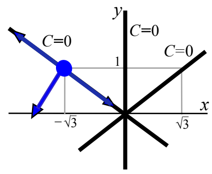
1. Sea $f(x,y)=\frac{3xy^2-x^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. **a]** Probar que f es continua en $(0,0)$. Hallar, si existen, $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ y $D_{(1,2)}f(0,0)$, derivada según el vector $(1,2)$. Precisar si f es diferenciable o no en $(0,0)$.
b] Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y hallar un vector $\bar{v}$ para el que sea $D_{\bar{v}}f\big(-\sqrt{3}\,,1\big)=0$.
c] Calcular $\Delta f(1,1)$ $\big[$mejor a partir de la expresión $f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ $\big]$. [3.5 puntos] (1.9+.8+.8)

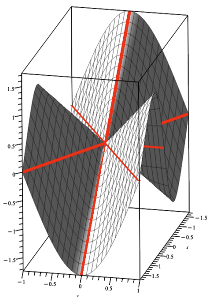
a] Polares. $f(r,\theta)=r\big(3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta-\cos^3\theta\big)$. Como $\big|f(r,\theta)-0\big|\le 4r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ es f continua.

$f(x,0)=-x \Rightarrow f_x(0,0)=-1$. $f(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0$. $\nabla f(0,0)=(-1,0)$.

Con la definición: $\frac{f(h,2h)-f(0,0)}{h}=\frac{11h^3}{5h^2h}=\frac{11}{5}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\frac{11}{5}=D_{(1,2)}f(0,0)$.

Si fuera diferenciable sería $D_{(1,2)}f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot(1,2)=-1$.
No puede, por tanto, serlo. O directamente con la definición:
$\frac{f(\bar{x})-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot\bar{x}}{\|\bar{x}\|}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ sin límite en $\bar{0}$ (rectas o polares).





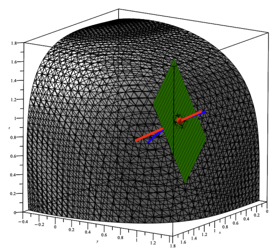
b] $f(x,y)=0 \to x=0$, $x=\pm\sqrt{3}y$. Sobre la recta que contiene $\bar{v}=\big(\pm\sqrt{3},\mp 1\big)$ es f constante y es, pues, $D_{\bar{v}}=0$ para esos $\bar{v}$. No se necesita el $\nabla f=\Big(\frac{3y^4-6x^2y^2-x^4}{(x^2+y^2)^2},\frac{8x^3y}{(x^2+y^2)^2}\Big)\overset{(-\sqrt{3},1)}{\longrightarrow}-\frac{3}{2}\big(1,\sqrt{3}\big)$, perpendicular a los $\bar{v}$ ahí.

c] $f_r=3cs^2-c^3$, $f_{rr}=0$, $f_\theta=3r\big(3c^2s-s^3\big)$, $f_{\theta\theta}=9r\big(c^3-3cs^2\big)$. $\Delta f=\frac{8c}{r}\big(c^2-3s^2\big)\overset{r=\sqrt{2},\theta=\pi/4}{\longrightarrow}-4$.

Con más cálculos se llega en cartesianas a: $\Delta f=\frac{8x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\overset{x,y=1}{\longrightarrow}-4$.

2. Sean $F(x,y,z)=x^4+5y^2+z^4+2xyz$, la superficie S dada por $F=9$ y la curva $\bar{c}(t)=\big(t,t^2,t\big)$, con $t\ge 0$.
a] Calcular en el punto $\bar{p}$ de corte entre ambas el plano tangente a la superficie y la recta tangente a la curva. Hallar el ángulo con el que la recta corta el plano.
b] Si $h(t)=F\big(\bar{c}(t)\big)$, calcular, mediante la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, el valor de $h'(1)$.
c] Calcular paso a paso, a partir de la definición, el $\text{rot}\big(\nabla F\big)$. [3.5 puntos] (2+.8+.7)

a] Se cortan si $9t^4=9 \to t=1$. Es $\bar{p}=(1,1,1)$. $\nabla F=\big(4x^3+2yz,10y+2xz,4z^3+2xy\big)$.
$\nabla F(1,1,1)=6(1,2,1)$. Plano: $(1,2,1)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$, $z=4-x-2y$.
El vector tangente a la curva en $\bar{p}$ es $\bar{c}'(1)=(1,2t,1)\big|_{t=1}=(1,2,1)$.
Y la recta es, por tanto: $\bar{x}=(1+t,1+2t,1+t)$.
El vector normal al plano y el tangente a la curva coinciden. El ángulo es $\frac{\pi}{2}$.



b] $h'(1)=\nabla F\big(\bar{c}(1)\big)\cdot\bar{c}'(1)=6(1,2,1)\cdot(1,2,1)=36$ $\big($como la derivada de $h(t)=9t^4\big)$.

c] $\text{rot}\big(\nabla F\big)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial_x & \partial/\partial_y & \partial/\partial_z\\ 4x^3+2yz & 10y+2xz & 4z^3+2xy\end{vmatrix}=\big(2x-2x,2y-2y,2z-2z\big)=(0,0,0)$, como sabíamos que debía ocurrir.

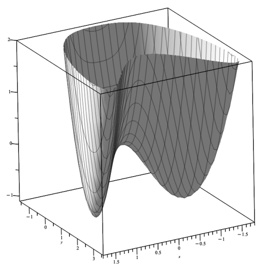
3. Sea $h(x,y)=y^2-2x^2y+2x^4-2x^2$. **a]** Hallar y clasificar los puntos críticos de h . [3 puntos] (1.8+.6+.6)
Elegir dos entre **b]**, **c]** y **d]**:
b] Probar, completando un par de cuadrados, que hay mínimos globales.
c] Escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de h en torno al punto $(1,1)$.
d] Hallar $y'(1)$ si $y(x)$ es la función definida implícitamente por $h=0$ cerca de $(1,2)$, justificando que existe.

a] $h_x=4\big(2x^3-xy-x\big)=0$ $\;4x(x^2-1)=0$
$h_y=2\big(y-x^2\big)=0$, $y=x^2\uparrow$ $\;\longrightarrow$ Puntos críticos $(0,0)$ y $(\pm 1,1)$.

$h_{xx}=4\big(6x^2-y-1\big)$, $h_{yy}=2$, $h_{xy}=-4x$. $H=8\begin{vmatrix}6x^2-y-1 & -x\\ -2x & 1\end{vmatrix}$.

En $(0,0)$ es $H=-8<0$ y por lo tanto se trata de un **punto silla**, con $h(0,0)=0$.

Y como $H(\pm 1,1)=\begin{vmatrix}16 & \mp 4\\ \mp 4 & 2\end{vmatrix}>0$ y $h_{xx}>0$. **Mínimos locales**, con $h(\pm 1,1)=-1$.



b] $h(x,y)=\big(y-x^2\big)^2+x^4-2x^2=\big(y-x^2\big)^2+\big(x^2-1\big)^2-1\ge -1\ \forall x,y$. Valor mínimo global.

c] Tenemos ya todas las derivadas: $h(x,y)=-1+8(x-1)^2-4(x-1)(y-1)+(y-1)^2+\cdots$

d] $h\in C^1$, $h(1,2)=0$, $h_y(1,2)\ne 0 \Rightarrow$ existe $y(x)$ de C^1. $y'=-\frac{h_x}{h_y}=\frac{2x(1+y-2x^2)}{y-x^2}\overset{(1,2)}{\longrightarrow}y'(1)=2$.

$\big[$La curva $h=0$ dibujada por Maple es la de la derecha. Su expresión es $y=x^2\pm x\sqrt{2-x^2}$ $\big]$.