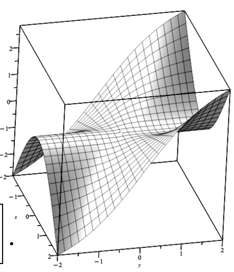
Soluciones del examen parcial de Cálculo (grupo C) (17 de marzo de 2025)

1. Sea $f(x,y)=\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0)=0$. **a]** Hallar, si existen, $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ y precisar si f es continua y si es diferenciable en $(0,0)$. [1.5+1=2.5 ptos]
b] Calcular $\nabla f(-1,-1)$ [quizás con $f_r\,\bar e_r+\frac{1}{r}f_\theta\,\bar e_\theta$] y hallar un $\bar u$ unitario tal que la derivada $D_{\bar u}f(-1,-1)=0$.

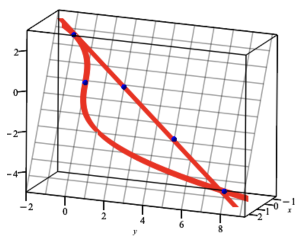


a] $f(x,0)=0\ \forall x$, $f(0,y)=0\ \forall y \Rightarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Probamos que es diferenciable:
$\frac{f(\bar x)-0-\bar 0\cdot\bar x}{\|\bar x\|}=\frac{x^2y}{x^2+y^2}=r\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \xrightarrow[r\to0]{} 0$, estando acotado $|\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta|\le1$.
Como es diferenciable, también es continua. [Directamente $|f(r,\theta)-0|=r^2|c^2s|\le r^2\to0$].

b] $f_x=\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{xy(x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ↘
ó $\nabla f=2rc^2s(c,s)+r(c^3-2cs^2)(-s,c)$, $r=\sqrt2$, $\theta=\frac{5\pi}{4}$, $c=s=-\frac{1}{\sqrt2}\to\boxed{\nabla f(-1,-1)=\frac{\sqrt2}{4}(3,1)}$.
$\bar u$ debe ser $\perp\nabla$. Los $\bar v=(\pm1,\mp3)$ lo son. Luego $\boxed{\bar u=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}},\mp\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}$.

2. Sean $\bar g(x,y,z)=(x^2,-zy,z^2)$ y $\bar c(t)=(t,t^3,-2t)$. **a]** Hallar: i) $\mathrm{div}\,\bar g$, ii) $\mathrm{rot}\,\bar g$, iii) $D\bar g$ y $J\bar g$, iv) $\bar c'(t)$.
b] Hallar la recta tangente en $(-1,-1,2)$ a la curva dada por $\bar c$ y otro punto en el que la tangente corta esa curva.
c] Si $\bar r(t)=(\bar g\circ\bar c)(t)$, calcular $\bar r'(-1)$ utilizando la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$. [.8+1+.7=2.5 ptos]

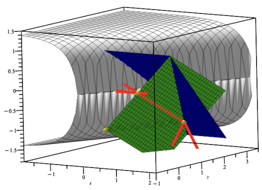
a] i) $\mathrm{div}\,\bar g=\boxed{2x+z}$, ii) $\mathrm{rot}\,\bar g=\boxed{(y,0,0)}$, iii) $D\bar g=\boxed{\begin{pmatrix}2x&0&0\\0&-z&-y\\0&0&2z\end{pmatrix}}$, $J\bar g=\boxed{-4xz^2}$, iv) $\boxed{\bar c'(t)=(1,3t^2,-2)}$.



b] $\bar c(-1)=(-1,-1,2)$, $\bar c'(-1)=(1,3,-2)$. Recta tangente: $\boxed{\bar x=(s-1,3s-1,2-2s)}$.
Se cortan si $t=s-1$, $t^3=3s-1$ (la 3ª es la 1ª) $\to (s-1)^3=3s-1$, $\overset{\text{(inicial)}\ \downarrow}{s^2(s-3)=0}$.
O bien $t^3-3t-2=0$ (2 a ojo) $\to \underset{\text{(inicial)}}{t=-1}$ doble y $t=2\ \to$ El otro es $\boxed{(2,8,-4)}$.

c] $\bar r'(-1)=D\bar g(\bar c(-1))\,\bar c'(-1)=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&1\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-2\\-8\\-8\end{pmatrix}}$ [o puesto como vector fila; comprobable componiendo y derivando $(t^2,2t^4,4t^2)$].

3. Sean $F(x,y,z)=z^2+e^{2x-y}$, la superficie S dada por $F=2$ y el punto $\bar p=(1,2,-1)$. [1.5+1=2.5 ptos]
a] Calcular en $\bar p$ el plano P tangente a S. Hallar el menor ángulo formado por el plano P y el $y+z=1$.
Elegir entre:
b₁] Escribir la ecuación de una recta que esté contenida en P y que corte el eje x.
b₂] Comprobar que el teorema de la función implícita asegura que $F=2$ define cerca de $\bar p$ una $z(x,y)$ de C^1 y calcular $z_x(1,2)$ y $z_y(1,2)$ derivando implícitamente.



a] $\nabla F=(2e^{2x-y},-e^{2x-y},2z)\xrightarrow{\bar p}\boxed{(2,-1,-2)}$. $2(x-1)-(y-2)-2(z+1)=0$, $\boxed{2x-y-2z=2}$.
Forman sus vectores normales $\cos\phi=\frac{(2,-1,-2)\cdot(0,1,1)}{3\sqrt2}=-\frac{1}{\sqrt2}$, $\phi=\frac{3\pi}{4}$. El menor es $\boxed{\frac{\pi}{4}}$.
b₁] P corta el eje x ($y=z=0$) en el punto $\bar q=(1,0,0)$. Otro punto de P nos da una recta del plano. Por ejemplo, la que une $\bar q$ con el $\bar p$ dado es $\boxed{\bar x=(1,2t,-t)}$ (y muchas más).
b₂] $F\in C^1$, $F(\bar p)=2$, $F_z(\bar p)=-2\neq0\overset{\text{TFI}}{\Rightarrow}$ define $z\in C^1$ cerca de $\bar p$. [$z=-1+(x-1)-\frac12(y-2)$ es P como debía].
$2e^{2x-y}+2zz_x=0$, $z_x=-\frac{e^{2x-y}}{z}\xrightarrow{\bar p}\boxed{1}$. $-e^{2x-y}+2zz_y=0$, $z_y=\frac{e^{2x-y}}{2z}\xrightarrow{\bar p}\boxed{-\frac12}$. ↑

4. Hallar y clasificar los puntos críticos de $h(x,y)=2x^2y+4xy+ay^2$ según los valores de la constante a. ¿Posee h extremos absolutos para algún a? [2.5 ptos]

$\begin{cases}h_x=4y(x+1)=0, & y=0\downarrow \quad\text{o}\quad x=-1\downarrow\\ h_y=2x^2+4x+2ay=0, & 2x(x+2)=0 \quad\ \ ay=1\end{cases}\to(0,0),(-2,0)$ y $\left(-1,\frac1a\right)$ sólo si $a\neq0$. $H(x,y)=\begin{vmatrix}4y&4x+4\\4x+4&2a\end{vmatrix}$.
$H(0,0)=\begin{vmatrix}0&4\\4&2a\end{vmatrix}$, $H(-2,0)=\begin{vmatrix}0&-4\\-4&2a\end{vmatrix}$ son sillas $\forall a$.
$H\left(-1,\frac1a\right)=\begin{vmatrix}4/a&0\\0&2a\end{vmatrix}=8$. Máximo local si $a<0$ y mínimo local si $a>0$ (y no existía si $a=0$).
Claramente nunca hay extremos absolutos. Por ejemplo $h(x,x)=2x^3+(4+a)x^2\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}\pm\infty$.