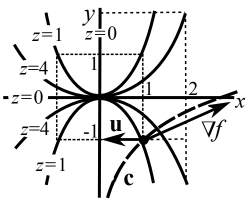
Soluciones del control 1 de Cálculo (23 de marzo de 2015)

1. Sea $f(x,y)=\frac{x^4}{y^2}$, $f(x,0)=0$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0,1,4$. **b]** Precisar si f es continua, si tiene derivadas parciales y si es diferenciable en $(0,0)$. **c]** Hallar un vector unitario $\bar{u}$ tal que $D_{\bar{u}}f(1,-1)=-4$. **d]** Escribir la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(1,-1)$. **e]** Si $\bar{c}(t)=\big(e^t,t-1\big)$, hallar, mediante la regla de la cadena, la derivada de $h(t)=f(\bar{c}(t))$ en $t=0$. [0.5 puntos]



a] $\frac{x^4}{y^2}=0 \to x=0$ (e $y=0$), $\frac{x^4}{y^2}=1$ y $4 \to y=\pm x^2$ e $y=\pm\frac{1}{2}x^2$ (parábolas).

b] Las curvas de nivel muestran que no tiene límite f en $(0,0)$ y **no es continua**.

[Cerca del origen hay puntos donde f vale $1,4,\dots$, o bien, $f(x,mx^2)=\frac{1}{m^2}$].

Por no ser continua, f **no es diferenciable** en el punto.

$f(x,0)=f(0,y)=0 \Rightarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. **Existen las parciales**.

c] $\nabla f=\big(\frac{4x^3}{y^2},-\frac{2x^4}{y^3}\big)$, $\nabla f(1,-1)=(4,2)$. Vale $\boxed{\bar{u}=(-1,0)}=-\mathbf{i}$, pues 4 es la $D_{\bar{u}}$ en la dirección de $\mathbf{i}$.

[Con más trabajo $\bar{u}=\big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\big) \to D_{\bar{u}}f(1,-1)=\frac{4a+2b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-4 \Rightarrow b=0$ ó $b=\frac{4a}{3} \to \big(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\big)$].

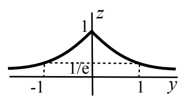
d] Plano tangente: $z=1+4(x-1)+2(y+1)$, o bien, $\boxed{z=4x+2y-1}$.

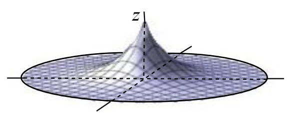
e] $\bar{c}(0)=(1,-1)$, $\bar{c}'(0)=(1,1)$, $h'(0)=\nabla f(\bar{c}(0))\cdot\bar{c}'(0)=\boxed{6}$.

O bien: $h(t)=f\big(e^t,t-1\big) \to h'(t)=f_x\big(e^t,t-1\big)e^t+f_y\big(e^t,t-1\big) \xrightarrow{t=0} h'(0)=f_x(1,-1)+f_y(1,-1)=6$.

[Componiendo y derivando: $h(t)=\frac{e^{4t}}{(t-1)^2} \to h'(t)=\frac{2e^{4t}(2t-3)}{(t-1)^3} \xrightarrow{t=0} 6$].

2. Sea $g(x,y)=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$. **a]** Dibujar aproximadamente $g(0,y)$ y la gráfica de g . ¿Es diferenciable en $(0,0)$? **b]** Calcular $\nabla g(-2,0)$, utilizando cartesianas y polares. Calcular $\Delta g(-2,0)$ en cartesianas o en polares. **c]** Si $h(u,v,w)=g\big(u+3v,\arctan(vw)\big)$, hallar, utilizando la regla de la cadena, $\frac{\partial h}{\partial v}(1,-1,0)$. [0.3 puntos]





a] $g(0,y)=e^{-\sqrt{y^2}}=e^{-|y|}$, par y es e^{-y}, si $y\geq 0$. De revolución.

Como no existe $g_y(0,0)$, no es diferenciable en el origen.

b] En cartesianas: $g_x(x,y)=-\frac{x\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g_y(x,y)=-\frac{y\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\boxed{\nabla g(-2,0)=\big(e^{-2},0\big)}$.

En polares: $g(r,\theta)=e^{-r}$. $\nabla g=g_r\,\mathbf{e_r}=-e^{-r}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) \xrightarrow[r=2]{\theta=\pi} -e^{-2}(-1,0)$ $\nearrow$.

Laplaciano mejor en polares: $\Delta g=g_{rr}+\frac{1}{r}g_r=e^{-r}-\frac{1}{r}e^{-r}=\big(1-\frac{1}{r}\big)e^{-r}\Big|_{r=2}=\boxed{\frac{1}{2}e^{-2}}$.

$\nwarrow(-2,0)$

$g_{xx}=-\frac{e^{-\sqrt{\cdot}}}{(x^2+y^2)^{1/2}}+\frac{x^2e^{-\sqrt{\cdot}}}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\frac{x^2e^{-\sqrt{\cdot}}}{x^2+y^2}=\frac{(x^2\sqrt{\cdot}-y^2)e^{-\sqrt{\cdot}}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $g_{yy}=\frac{(y^2\sqrt{\cdot}-x^2)e^{-\sqrt{\cdot}}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. $\Delta g=\frac{\big(\sqrt{x^2+y^2}-1\big)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

c] $h_v=g_x x_v+g_y y_v=3g_x+\frac{w}{1+v^2w^2}g_y \to h_v(1,-1,0)=3g_x(-2,0)+0\cdot g_y(-2,0)=\boxed{3e^{-2}}$.

3. Sean $\bar{a}=(-1,0,3)$ y $\bar{f}(x,y,z)=\big(xz,y^2,x\big)$. **a]** Calcular: i) $\bar{a}\times\bar{f}(\bar{a})$, ii) el ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{f}(\bar{a})$, iii) $\operatorname{div}\bar{f}$, iv) $\nabla\big(\operatorname{div}\bar{f}\big)$, v) $\operatorname{rot}\bar{f}$ y vi) $\bar{f}\cdot\operatorname{rot}\bar{f}$. **b]** Precisar el punto de corte con el plano $z=5$ de la recta perpendicular a la superficie $\operatorname{div}\bar{f}=3$ en el punto $\bar{a}$. [0.3 puntos]

a] i) $\bar{a}\times\bar{f}(\bar{a})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&0&3\\-3&0&-1\end{vmatrix}=(0,-10,0)$. ii) $\bar{a}\cdot\bar{f}(\bar{a})=0$, ángulo $\frac{\pi}{2}$. iii) $\operatorname{div}\bar{f}=z+2y$. iv) $\nabla\big(\operatorname{div}\bar{f}\big)=(0,2,1)$.
v) $\operatorname{rot}\bar{f}=(0,x-1,0)$, vi) $\bar{f}\cdot\operatorname{rot}\bar{f}=(x-1)y^2$.

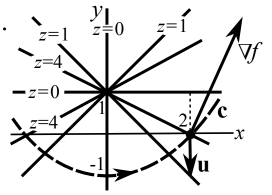
b] $z+2y=3$ es un plano (al que pertenece $\bar{a}$), con vector perpendicular $(0,2,1)$. La recta perpendicular será:

$\mathbf{x}=(-1,0,3)+t\,(0,2,1)=(-1,2t,3+t)$ que corta $z=5$ para $t=2 \to$ punto $\boxed{(-1,4,5)}$.

[Décimas: **1: a]** 10, **b]** 8+5+5=18, **c,d]** 3∇+6+5=14, **e]** 8. **2: a]** 9, **b]** 4+5+4=13, **c]** 8. **3: a]** 3+4+3+3+4+3=20, **b]** 10].

Soluciones del control 1* de Cálculo (23 de marzo de 2015)

1. Sea $f(x,y)=\frac{x^2}{(y-1)^2}$, $f(x,1)=0$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0,1,4$. **b]** Precisar si f es continua, si tiene derivadas parciales y si es diferenciable en $(0,1)$. **c]** Hallar un vector unitario $\bar{u}$ tal que $D_{\bar{u}}f(2,0)=-8$. **d]** Escribir la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(2,0)$. **e]** Si $\bar{c}(t)=\big(2t,t^2-1\big)$, hallar, mediante la regla de la cadena, la derivada de $h(t)=f(\bar{c}(t))$ en $t=1$. [0.5 puntos]



a] $\frac{x^2}{(y-1)^2}=0 \to x=0$ (e $y=0$), $\frac{x^2}{(y-1)^2}=1\,,4 \to y=1\pm x\,,\ y=1\pm\frac{x}{2}$ [rectas por $(0,1)$].

b] Las curvas de nivel muestran que no tiene límite f en $(0,0)$ y **no es continua**.

$\big[$Cerca del origen hay puntos donde f vale $1,4,\dots$, o bien, $f(x,1+mx)=\frac{1}{m^2}\,\big]$.

Por no ser continua, f **no es diferenciable** en el punto.

$f(x,1)=f(0,y)=0 \Rightarrow f_x(0,1)=f_y(0,1)=0$. **Existen las parciales**.

c] $\nabla f=\big(\frac{2x}{(y-1)^2},-\frac{2x^2}{(y-1)^3}\big)$, $\nabla f(2,0)=(4,8)$. Vale $\boxed{\bar{u}=(0,-1)}=-\mathbf{j}$, pues 8 es la $D_{\bar{u}}$ en la dirección de $\mathbf{j}$.

$\big[$Con más trabajo $\bar{u}=\big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\big) \to D_{\bar{u}}f(2,0)=\frac{4a+8b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-8 \Rightarrow a=0$ ó $a=\frac{4b}{3} \to \big(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\big)\,\big]$.

d] Plano tangente: $z=4+4(x-2)+8(y-0)$, o bien, $\boxed{z=4x+8y-4}$.

e] $\bar{c}(1)=(2,0)$, $\bar{c}'(1)=(2,2)$, $h'(1)=\nabla f(\bar{c}(1))\cdot\bar{c}'(1)=\boxed{24}$.

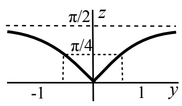
O bien: $h(t)=f\big(2t,t^2-1\big) \to h'(t)=2f_x\big(2t,t^2-1\big)+2tf_y\big(2t,t^2-1\big) \xrightarrow{t=1} h'(1)=2f_x(2,0)+2f_y(2,0)=24$.

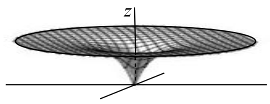
$\big[$Componiendo y derivando: $h(t)=\frac{4t^2}{(t^2-2)^2} \to h'(t)=-\frac{8t(t^2+2)}{(t^2-2)^3} \xrightarrow{t=1} 24\,\big]$.

2. Sea $g(x,y)=\arctan\sqrt{x^2+y^2}$. **a]** Dibujar aproximadamente $g(0,y)$ y la gráfica de g . ¿Es diferenciable en $(0,0)$? **b]** Calcular $\nabla g(0,-2)$, utilizando cartesianas y polares. Calcular $\Delta g(0,-2)$ en cartesianas o en polares. **c]** Si $h(u,v,w)=g\big(ue^w,4v+6w\big)$, hallar, utilizando la regla de la cadena, $\frac{\partial h}{\partial w}(0,1,-1)$. [0.3 puntos]

a] $g(0,y)=\arctan|y|$, par y es $\arctan y$, si $y\ge 0$. De revolución.

Como no existe $g_y(0,0)$, no es diferenciable en el origen.





b] En cartesianas: $g_x(x,y)=\frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$, $g_y(x,y)=\frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$. $\boxed{\nabla g(0,-1)=\big(0,-\frac{1}{5}\big)}$.

En polares: $g(r,\theta)=\arctan r$. $\nabla g=g_r\,\mathbf{e_r}=\frac{1}{1+r^2}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) \xrightarrow[r=2]{\theta=-\pi/2} \frac{1}{5}(0,-1)$.

Laplaciano mejor en polares: $\Delta g=g_{rr}+\frac{1}{r}g_r=-\frac{2r}{(1+r^2)^2}+\frac{1}{r(1+r^2)}=\frac{1-r^2}{r(1+r^2)^2}\Big|_{r=2}=\boxed{-\frac{3}{50}}$.

$(0,-2)$

$g_{xx}=\frac{1}{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)^{1/2}}+\cdots=\frac{y^2+y^4-x^2y^2-2x^4}{(1+x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^{3/2}}$, $g_{yy}=\frac{x^2+x^4-x^2y^2-2y^4}{(1+x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^{3/2}}$. $\Delta g=\frac{1-x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}$.

c] $h_w=g_xx_w+g_yy_w=ue^wg_x+6g_y \to h_w(0,1,-1)=0\cdot g_x(0,-2)+6g_y(0,-2)=\boxed{-\frac{6}{5}}$.

3. Sean $\bar{a}=(2,2,-1)$ y $\bar{f}(x,y,z)=\big(x^2,yz,y^2\big)$. **a]** Calcular: i) $\bar{a}\times\bar{f}(\bar{a})$, ii) el ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{f}(\bar{a})$, iii) $\operatorname{div}\bar{f}$, iv) $\nabla\big(\operatorname{div}\bar{f}\big)$, v) $\operatorname{rot}\bar{f}$ y vi) $\bar{f}\cdot\operatorname{rot}\bar{f}$. **b]** Precisar el punto de corte con el plano $z=0$ de la recta perpendicular a la superficie $\operatorname{div}\bar{f}=3$ en el punto $\bar{a}$. [0.3 puntos]

a] i) $\bar{a}\times\bar{f}(\bar{a})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&2&-1\\4&-2&4\end{vmatrix}=(6,-12,-12)$. ii) $\bar{a}\cdot\bar{f}(\bar{a})=0$, ángulo $\frac{\pi}{2}$. iii) $\operatorname{div}\bar{f}=2x+z$.

iv) $\nabla\big(\operatorname{div}\bar{f}\big)=(2,0,1)$. v) $\operatorname{rot}\bar{f}=(y,0,0)$. vi) $\bar{f}\cdot\operatorname{rot}\bar{f}=x^2y$.

b] $z+2x=3$ es un plano (al que pertenece $\bar{a}$), con vector perpendicular $(2,0,1)$. La recta perpendicular será:

$\mathbf{x}=(2,2,-1)+t\,(2,0,1)=(2+2t,2,t-1)$ que corta $z=0$ para $t=1 \to$ punto $\boxed{(4,2,0)}$.

$\big[$Décimas: **1: a]** 10, **b]** 8+5+5=18, **c,d]** 3∇+6+5=14, **e]** 8. **2: a]** 9, **b]** 4+5+4=13, **c]** 8. **3: a]** 3+4+3+3+4+3=20, **b]** 10$\,\big]$.

Soluciones del control 2 de Cálculo (26 de mayo de 2015)

1. Calcular la integral doble $\iint_D y\,dx\,dy$, donde D es el semicírculo definido por $(x-1)^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$:

a] Integrando: i) en cartesianas (de una de las dos formas posibles) y ii) en las polares habituales.

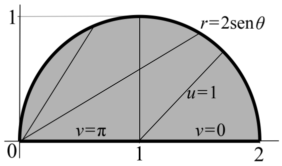
b] Usando 'polares centradas en $(1,0)$': $x=1+u\cos v$, $y=u\,\mathrm{sen}\,v$ (tras hallar su jacobiano). [0.26+0.14 = 0.4 ptos]

a] i) $\iint_D y=\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\big[4-\frac{8}{3}\big]=\boxed{\frac{2}{3}}$.

$\iint_D y=\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} y\,dx\,dy=\int_0^1 2y(1-y^2)^{1/2}\,dy=-\frac{2}{3}\big[(1-y^2)^{3/2}\big]_0^1=\boxed{\frac{2}{3}}$.

ii) $\iint_D y \underset{\downarrow}{=}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\big[-\cos^4\theta\big]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

$x^2+y^2=2x$, $r^2=2r\cos\theta$, $r=2\cos\theta$



b] Jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\,\mathrm{sen}\,v\\ \mathrm{sen}\,v & u\cos v\end{vmatrix}=u$. $(x-1)^2+y^2=1\to u=1$. $y\ge 0$ si $v\in[0,\pi]$. Por tanto:

$$\iint_D y=\int_0^{\pi}\int_0^1 u^2\,\mathrm{sen}\,v\,du\,dv=\big[\tfrac{u^3}{3}\big]_0^1\big[-\cos v\big]_0^{\pi}=\boxed{\tfrac{2}{3}}.$$

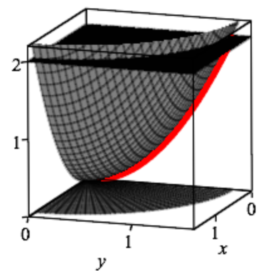
2. Sea $f(x,y,z)=y$. **a]** Hallar $\iiint_V f$, si V es el sólido acotado en $x,y\ge 0$ por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y $z=2$.
(Mejor en cilíndricas, aunque no es difícil en cartesianas).

b] Si C es el corte de $z=x^2+y^2$ con $x=0$, para $y\ge 0$, $0\le z\le 2$, parametrizar la curva C y hallar:
i) $\int_C f\,ds$. ii) $\int_C \nabla f\cdot d\bar{s}$, en el sentido las z crecientes. [0.2+0.2 = 0.4 ptos]

a] Paraboloide y plano se cortan en la circunferencia de radio $\sqrt{2}$. Cilíndricas:

$$\iiint_V f=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^2 r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dz\,dr\,d\theta=\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}}(2r^2-r^4)\,dr$$
$$=\big[\tfrac{2r^2}{3}-\tfrac{r^5}{5}\big]_0^{\sqrt{2}}=\big[\tfrac{4\sqrt{2}}{3}-\tfrac{4\sqrt{2}}{5}\big]=\boxed{\tfrac{8}{15}\sqrt{2}}.$$

$$\iiint_V f=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^2 y\,dz\,dy\,dx=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(2y-x^2y-y^3)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^{\sqrt{2}}\big[\tfrac{1}{2}(2-x^2)^2-\tfrac{1}{4}(2-x^2)^2\big]\,dx=\int_0^{\sqrt{2}}\big(1-x^2+\tfrac{1}{4}x^4\big)\,dx=\sqrt{2}\,\big(1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}\big).$$



b] Podemos parametrizar C con $\mathbf{c}(t)=(0,t,t^2)$, $t\in[0,\sqrt{2}]$, o con $\mathbf{c}_*(t)=(0,\sqrt{t},t)$, $t\in[0,2]$.

i) $\mathbf{c}'(t)=(0,1,2t)$, $\|\mathbf{c}'\|=\sqrt{1+4t^2}$, $\int_C f\,ds=\int_0^{\sqrt{2}} t\,(1+4t^2)^{1/2}dt=\frac{1}{12}(1+4t^2)^{3/2}\big]_0^{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{13}{6}}$.

$\mathbf{c}_*'(t)=\big(0,\frac{1}{2\sqrt{t}},1\big)$, $\|\mathbf{c}'\|=\sqrt{\frac{1}{4t}+1}$, $\int_C f\,ds=\int_0^2\frac{1}{2}(1+4t)^{1/2}dt=\frac{1}{12}(1+4t)^{3/2}\big]_0^2=\boxed{\frac{13}{6}}$.

ii) $\int_C \nabla f\cdot d\bar{s}=f\big(0,\sqrt{2},2\big)-f(0,0,0)=\boxed{\sqrt{2}}$. $\Big[$O bien: $\int_0^{\sqrt{2}}(0,1,0)\cdot(0,1,2t)\,dt=\int_0^2(0,1,0)\cdot\big(0,\frac{1}{2\sqrt{t}},1\big)\,dt=\sqrt{2}\Big]$.

3. Comprobar el teorema de Green para el campo vectorial $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(-xy,y)$ en el recinto D limitado por la parábola $y=x^2$ y el segmento que une los puntos $(-1,1)$ y $(2,4)$. [0.4 puntos]

$g_x-f_y=x$. $\iint_D x=\int_{-1}^2\int_{x^2}^{2+x} x\,dy\,dx=\int_{-1}^2(2x+x^2-x^3)\,dx=\big[3+\frac{9}{3}-\frac{15}{4}\big]=\boxed{\frac{9}{4}}$.

O bien: $\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy=0+\frac{1}{2}\int_1^4(5y-y^2-4)\,dy=\boxed{\frac{9}{4}}$.

Parametrizamos los dos tramos de la frontera:

$\mathbf{c}_1(x)=(x,x^2)$, $x\in[-1,2]$. $\mathbf{c}_2(x)=(x,x+2)$, $x\in[2,-1]$
$\big[$o $\mathbf{c}_2(y)=(y-2,y)$, $y\in[4,1]$, o $\mathbf{c}_2(t)=(2-3t,4-3t)$, $t\in[0,1]\big]$.

$$\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{-1}^2(-x^3,x^2)\cdot(1,2x)\,dx+\int_2^{-1}(-x^2-2x,2+x)\cdot(1,1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^2 x^3\,dx+\int_{-1}^2(x^2+x-2)\,dx=\tfrac{15}{4}+\tfrac{9}{3}+\tfrac{3}{2}-6=\tfrac{15}{4}-\tfrac{3}{2}=\boxed{\tfrac{9}{4}}.$$