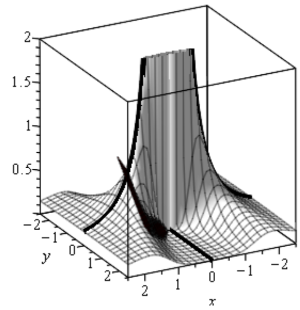
Soluciones del control 1 de Cálculo (5 de abril de 2016)

1. Sea $f(x,y)=\frac{x^4}{3y^2+x^6}$, $f(0,0)=0$. **a]** En $(0,0)$, precisar si existen f_x y f_y , si es continua y si es diferenciable. **b]** Hallar el $\overline{u}$ unitario para el que $D_{\overline{u}}f(1,1)$ es mínima. **c]** Hallar el plano tangente a la gráfica de f en $(1,1)$. **d]** Si $\overline{\mathrm{c}}(t)=(\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{3t})$, hallar, con la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, la derivada de $h(t)=f(\overline{\mathrm{c}}(t))$ en $t=0$. [0.4 puntos]



a] $f(x,0)=\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0 \Rightarrow f_x(0,0)$ **no existe**. $f(0,y)=0 \Rightarrow \boxed{f_y(0,0)=0}$.

Como sobre $y=0$ la $f \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$, es **discontinua** en el origen.

[O bien: $f(x,mx^2)=\frac{1}{3m^2+x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3m^2}$ o $f(x,mx^3)=\frac{1}{(3m^2+1)x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$.
De acercarse por rectas no se saca nada: $f(x,mx)=\frac{x^2}{3m^2+x^4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$].

Por no existir una parcial o no ser continua, f **no es diferenciable** en $(0,0)$.

b] $\nabla f=\left(\frac{2x^3(6y^2-x^6)}{(3y^2+x^6)^2},-\frac{6x^4y}{(3y^2+x^6)^2}\right)$, $\nabla f(1,1)=\frac{1}{8}(5,-3)$. $\boxed{\overline{u}=\left(-\frac{5}{\sqrt{34}},\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}$ (vector opuesto al gradiente y unitario).

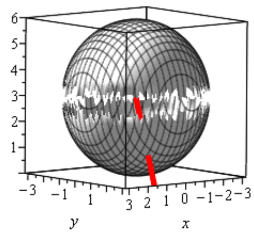
d] Plano tangente: $f(1,1)=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{4}+\frac{5}{8}(x-1)-\frac{3}{8}(y-1)$, o mejor, $\boxed{z=\frac{5x-3y}{8}}$.

e] $\overline{\mathrm{c}}(0)=(1,1)$, $\overline{\mathrm{c}'}(t)=(\mathrm{e}^t,3\mathrm{e}^{3t})$, $\overline{\mathrm{c}'}(0)=(1,3)$, $h'(0)=\nabla f(\overline{\mathrm{c}}(0))\cdot\overline{\mathrm{c}'}(0)=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

[Comprobamos componiendo y derivando: $h(t)=\frac{\mathrm{e}^{4t}}{3\mathrm{e}^{6t}+\mathrm{e}^{6t}}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} \to h'(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \overset{t=0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$].

2. Sea $\overline{\mathrm{f}}(x,y,z)=(xz^2,yx^2,zy^2-3z^2)$. **a]** Calcular: i) $\operatorname{div}\overline{\mathrm{f}}$, ii) $\nabla(\operatorname{div}\overline{\mathrm{f}})$, iii) $\operatorname{rot}\overline{\mathrm{f}}$ y iv) $\Delta(\operatorname{div}\overline{\mathrm{f}})$. **b]** Dibujar la superficie $\operatorname{div}\overline{\mathrm{f}}=0$, hallar la recta perpendicular a ella en el punto $(1,2,1)$ y precisar su punto de corte con el plano $x=0$. [0.35 puntos]

a] i) $\operatorname{div}\overline{\mathrm{f}}=z^2+x^2+y^2-6z$. ii) $\nabla(\operatorname{div}\overline{\mathrm{f}})=2(x,y,z-3)$. iii) $\operatorname{rot}\overline{\mathrm{f}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ xz^2 & yx^2 & zy^2-3z^2\end{vmatrix}=2(yz,xz,xy)$.
iv) $\Delta(\operatorname{div}\overline{\mathrm{f}})=6$.



b] $x^2+y^2+(z-3)^2=9$ es la superficie esférica de centro $(0,0,3)$ y radio 3 , y la recta perpendicular a ella en cualquier punto pasará por su centro.

Un vector normal a la superficie se obtiene de ii): $(1,2,-2)$.

$\mathbf{x}=(1,2,1)+t\,(1,2,-2)=(1+t,2+2t,1-2t)$ que corta $x=0$ para $t=-1$ $\to$ punto de corte $\boxed{(0,0,3)}$ que habíamos anticipado.

3. Sea $F(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}-2y$. **a]** Probar que $F=1$ define una función $y(x)$ de C^1 cerca del punto $(0,0)$ y hallar la recta tangente a la curva en ese punto. [0.35 puntos]
Elegir dos entre **b]**, **c]** y **d]**: **b]** Escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de F en torno a $(0,0)$.
c] Hallar un punto de la curva $F=1$ donde no sea aplicable el teorema de la función implícita.
d] Si $h(u,v)=F(u-v^3,v+u-2)$, hallar, utilizando la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, ∇h en $(u,v)=(1,1)$.

a] $F_y=\mathrm{e}^{x+y}-2$, $F_y(0,0)=-1\neq 0 \Rightarrow$ define $y(x)$. $\mathrm{e}^{x+y}(1+y')-2y'=0 \to y'=\frac{\mathrm{e}^{x+y}}{2-\mathrm{e}^{x+y}} \overset{(0,0)}{\longrightarrow} 1 \to \boxed{y=x}$.
$F(0,0)=1$ (es de la curva) $\qquad F_x=\mathrm{e}^{x+y}$, $y'=-\frac{F_x}{F_y}$ lleva a lo mismo ↗

b] $F(x,y)=1+(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+\cdots-2y=\boxed{1+x-y+\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+\cdots}$ (no se necesita derivar, aunque es fácil: $F_{xx}=F_{xy}=F_{yy}=\mathrm{e}^{x+y}$).

c] Problemas si $\mathrm{e}^{x+y}=2$, que llevado a $F=1$ nos da $2-2y=1$, $\boxed{y=\frac{1}{2}}$. $\mathrm{e}^{x+1/2}=2$, $\boxed{x=\ln 2-\frac{1}{2}}$.

[Como $F_x\neq 0$ La x siempre se puede poner siempre como función derivable de y , e incluso es calculable].

d] $(u,v)=(1,1)\to(x,y)=(0,0)$, $F_u=F_x+F_y \overset{(0,0)}{\longrightarrow} 1-1=0$, $F_v=-3v^2F_x+F_y \longrightarrow -3\cdot 1-1=-4$.
O en forma matricial: $\nabla h(1,1)=\nabla F(0,0)\begin{pmatrix}1 & -3v^2\\ 1 & 1\end{pmatrix}_{(1,1)}=(1,-1)\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\boxed{(0,-4)}$.

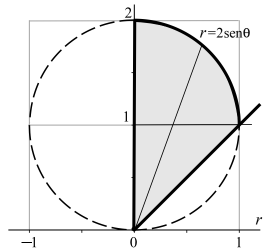
[Décimas: **1: a]** 6+6+3=15, ∇=5, **b]** 7, **c]** 5, **d]** 8. **2: a]** 4+4+4+4=16, **b]** 7+7+5=19, **c]** 8. **3: a]** 15, **b,c,d]** 10].

Soluciones del control 2 de Cálculo (24 de mayo de 2016)

Elegir entre 1a y 1b :

1a. Calcular la integral $\iint_D x\,dx\,dy$, donde D es la parte del círculo $x^2+y^2\le 2y$ con $x\ge 0$, $y\ge x$, integrando: i) en cartesianas (de las dos formas posibles), ii) en polares. [0.3 ptos]

$y^2-2y+x^2=0 \;\to\; y=1+\sqrt{1-x^2}\,,\; x=\sqrt{2y-y^2}$.



i) $\int_0^1\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx = \int_0^1 [x-x^2+x(2-x^2)^{1/2}]\,dx = \frac12 x^2-\frac13 x^3-\frac13(1-x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac12}$.

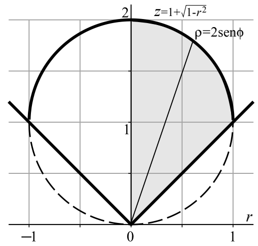
$\int_0^1\int_0^y x\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx\,dy = \frac12\int_0^1 y^2dy+\frac12\int_1^2(2y-y^2)\,dy = \frac16+\frac12\Big[y^2-\frac{y^3}{3}\Big]_1^2 = \boxed{\frac12}$.

ii) $r^2=2r\operatorname{sen}\theta$. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac83\int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\,d\theta = \frac23\operatorname{sen}^4\theta\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \boxed{\frac12}$.

1b. Calcular el volumen de la parte de la esfera $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$ situada por encima del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, integrando: i) en cilíndricas y ii) en esféricas. [0.3 ptos]

El cono $x^2+y^2=z^2$ y la esfera $x^2+y^2=2z-z^2$ se cortan si $z=0,1$.

V es el sólido de revolución del primer dibujo respecto al eje z .

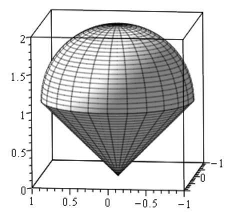


i) Cilíndricas. La esfera pasa a ser $z^2-2z-r^2=0$, $z=1+\sqrt{1-r^2}$ y el cono $z=r$.

$$\iiint_V 1 = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 [r-r^2+r(1-r^2)^{1/2}]\,dr$$

$$= 2\pi\Big[\frac12 r^2-\frac13 r^3-\frac13(1-r^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \boxed{\pi}\,.$$

[Con el orden $dr\,dz$ aparecen dos integrales como las de **1a**].



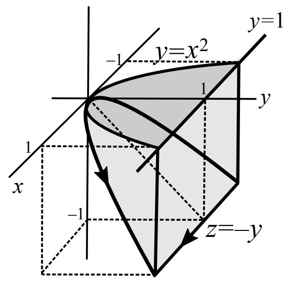
ii) En esféricas, la esfera toma la forma $\rho^2=2\rho\cos\phi$, $\rho=2\cos\phi$.

$$\iiint_V 1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\phi} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} 8\cos^3\phi\operatorname{sen}\phi\,d\phi$$

$$= \frac{4\pi}{3}\big[-\cos^4\phi\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3}\Big(1-\frac14\Big) = \boxed{\pi}\,.$$

2. a] Calcular $\iiint_V y\,dx\,dy\,dz$, si V es el sólido acotado por $y=x^2$ y los planos $y=1$, $z=0$ e $y+z=0$.

b] Hallar el valor de la integral de línea del campo vectorial $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=(y,x,z)$ desde $(-1,1,-1)$ hasta $(1,1,-1)$ sobre la curva intersección de $y=x^2$ con $y+z=0$. [0.2+0.2 = 0.4 ptos]



a] $\iiint_V y = \int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_{-y}^0 y\,dz\,dy\,dx = \int_{-1}^1\int_{x^2}^1 y^2\,dy\,dx = \frac23\int_0^1(1-x^6)\,dx = \frac23\Big[1-\frac17\Big] = \boxed{\frac47}$.

O bien: $\iiint_V y = \int_0^1\int_{-y}^0\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} y\,dx\,dz\,dy = \int_0^1\int_{-y}^0 2y^{3/2}\,dz\,dy = \int_0^1 2y^{5/2}dy = \boxed{\frac47}$.

b] $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & x & z \end{vmatrix} = (0,0,1-1) = \bar{0}$ y $\bar{\mathrm{f}}\in C^1$ en $\mathbf{R}^3$ $\Rightarrow$ existe función potencial.

$U_x=y \;\to\; U=xy+p(y,z)$
$U_y=x \;\to\; U=xy+q(x,z)$, $\boxed{U=xy+\frac12 z^2}$ $\Rightarrow \int_{\mathbf{c}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = U(1,1,-1)-U(-1,1,-1) = \boxed{2}$ para todo camino.
$U_z=z \;\to\; U=\frac12 z^2+r(x,y)$

También podríamos parametrizar la curva dada: $\mathbf{c}(x)=(x,x^2,-x^2)$, $x\in[-1,1] \to$

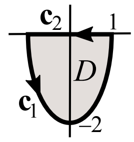
$$\int_{\mathbf{c}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_{-1}^1 (x^2,x,-x^2)\cdot(1,2x,-2x)\,dt = \int_{-1}^1(3x^2+2x^3)\,dx = 2\int_0^1 3x^2\,dx = \boxed{2}\,.$$

O tomar el camino más simple que une los puntos: $\mathbf{c}(x)=(x,1,-1)$, $x\in[-1,1] \;\to$

$$\int_{\mathbf{c}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_{-1}^1 (1,x,-1)\cdot(1,0,0)\,dx = \int_{-1}^1 dx = \boxed{2}\,.$$

3. Sea D parte de la elipse $4x^2+y^2\le 4$ con $y\le 0$. **a]** Comprobar el teorema de Green sobre D para el campo $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(y,2x)$, haciendo la integral doble $\Big[$mejor con el cambio $\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=2r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{matrix}\Big]$. **b]** Hallar $\oint xy\,ds$. [0.5 ptos]

a] $g_x-f_y=1$. Para hallar $\iint_D 1$ (que debe dar π, mitad del área de la elipse) usamos el cambio:



Jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta & 2r\cos\theta\end{vmatrix}=2r$. $4x^2+y^2=4r^2=4\ \to\ r=1$. $\theta\in[-\pi,0]$.

$$\iint_D 1\,dx\,dy=\int_{-\pi}^0\int_0^1 2r\,dr\,d\theta=\pi\,[r^2]_0^1=\boxed{\pi}.$$

$\Big[$En cartesianas: $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^0 dy\,dx=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\underset{x=\mathrm{sen}\,s}{=}4\int_0^{\pi/2}\cos^2 s\,ds=2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2s)\,ds=\pi\Big]$.

$\mathbf{c}_1=(\cos t,2\,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in[-\pi,0]$. $\displaystyle\int_{\mathbf{c}_1}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{-\pi}^0(2s,2c)\cdot(-s,2c)\,dt=\int_{-\pi}^0[3\cos 2t+1]\,dt=\tfrac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,2t\Big]_{-\pi}^0+\pi=\pi$.

$\Big[$En cartesianas: $\mathbf{c}_*=(x,-2\sqrt{1-x^2})$, $x\in[-1,1]$. $\displaystyle\int_{\mathbf{c}_*}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{-1}^1 2(-\sqrt{\cdot},x)\cdot\Big(1,\frac{2x}{\sqrt{\cdot}}\Big)\,dx=4\int_0^1\frac{3x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\cdots\Big]$.

Para el segmento: $\mathbf{c}_2=(x,0)$, $t\in[1,-1]$. $\displaystyle\int_{\mathbf{c}_2}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_1^{-1}\underbrace{(0,2x)\cdot(1,0)}_{=0}\,dx=0$. Por tanto, $\displaystyle\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\boxed{\pi}$.

b] Sobre $\mathbf{c}_2$ la integral es 0, pues lo es el integrando. Para la elipse: $\|\mathbf{c}_1'\|=\sqrt{s^2+4c^2}=\sqrt{4-3s^2}$. Por tanto:

$$\oint xy\,ds=0+\int_{-\pi}^0 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t\,(4-3\sin^2 t)^{1/2}\,dt=-\tfrac{2}{9}(4-3\sin^2 t)^{3/2}\Big]_{-\pi}^0=\boxed{0}$$ [integrando impar en x sobre curva simétrica].

$\Big[$En cartesianas: $\|\mathbf{c}_*'\|=\frac{\sqrt{1+3x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. $\displaystyle\oint xy\,ds=\int_{-1}^1-2x\sqrt{1+3x^2}\,dx=0$ (integrando impar)$\Big]$.