PrácticaJP4

Práctica 4: Representación de funciones y polinomio de Taylor.

Los objetivos de esta práctica son:

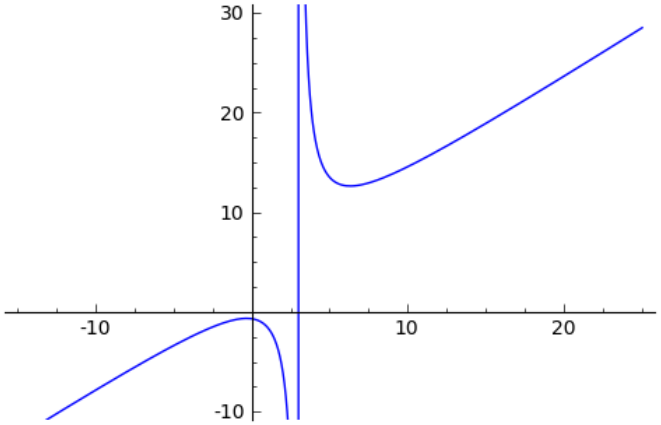
- Realizar un estudio de las gráficas de las funciones (dominio, asíntotas, monotonía, extremos, concavidad).
- Calcular polinomios de Taylor, representar errores y calcular límites.

4.1. Representación gráfica de funciones

1) Estudiar y representar la función **f(x)=(x^2+2)/(x-3)** (dominio de definición, asíntotas, crecimiento y decrecimiento, extremos, concavidad y convexidad, puntos de inflexión).

Empezamos representando la función:

```
f(x)=(x^2+2)/(x-3); plot(f(x),-15,25,ymin=-10,ymax=30)
```



Dominio: El denominador sólo se anula en **3**, así que el dominio es **R-{3}**. Si el denominador hubiera sido más complicado, hubiéramos podido calcular sus ceros usando `solve`:

```
solve(x-3==0,x)
    [x == 3]
```

Asíntotas:

```
limit(f(x),x=3,dir="minus"); limit(f(x),x=3,dir="plus")
    -Infinity
    +Infinity
```

Por tanto hay una asíntota vertical en **x=3**.

```
limit(f(x),x=oo); limit(f(x),x=-oo)
    +Infinity
    -Infinity
```

No tiene asíntotas horizontales, por tanto puede tener oblicuas.

```
limit(f(x)/x,x=oo); limit(f(x)-x,x=oo)
    1
    3
```

```
limit(f(x)/x,x=-oo); limit(f(x)-x,x=-oo)
    1
    3
```

De modo que la recta **y=x+3** es una asíntota de **f(x)** cuando $x \to \pm\infty$.

Crecimiento y Decrecimiento. Extremos relativos:

La función tiene un máximo relativo cerca de **0** (¿quizá en **0**?) y un mínimo relativo cerca de **6**. Vamos a calcularlos mediante el estudio de la derivada de **f** (la función **f** es derivable):

```
diff(f(x))
    2*x/(x - 3) - (x^2 + 2)/(x - 3)^2
```

```
diff(f(x)).simplify_rational()
    (x^2 - 6*x - 2)/(x^2 - 6*x + 9)
```

```
solve(x^2-6*x-2>0,x)
    [[x < -sqrt(11) + 3], [x > sqrt(11) + 3]]
```

Luego la función es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 3-\sqrt{11})$y en $(3+\sqrt{11}, \infty)$ Y es estrictamente decreciente en los intervalos $(3-\sqrt{11}, 3)$y $(3, 3+\sqrt{11})$. $x=3-\sqrt{11}$ es un máximo relativo, mientras que $x=3+\sqrt{11}$ es un mínimo relativo. También lo podemos ver calculando la segunda derivada en estos puntos.

```
g(x)=diff(f(x),2)
g(3-sqrt(11)); N(g(3-sqrt(11)),digits=10)
    -2/121*((sqrt(11) - 3)^2 + 2)*sqrt(11) + 2/11*sqrt(11) - 12/11
    -0.6030226892
```

```
g(3+sqrt(11)); N(g(3+sqrt(11)),digits=10)
    2/121*((sqrt(11) + 3)^2 + 2)*sqrt(11) - 2/11*sqrt(11) - 12/11
    0.6030226891
```

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión:

Estudiamos la segunda derivada:

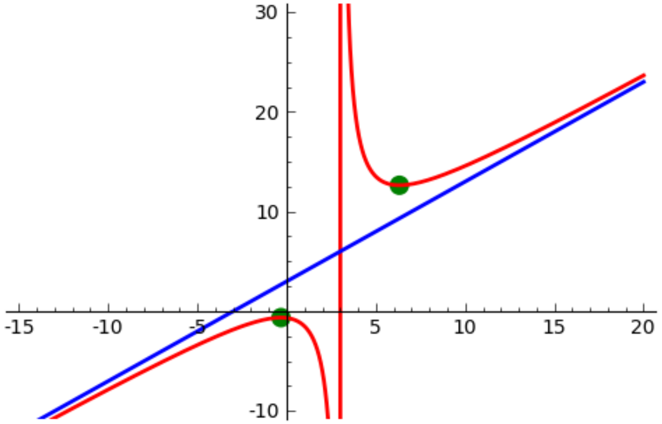
```
g; g.simplify_rational()
    x |--> 2/(x - 3) - 4*x/(x - 3)^2 + 2*(x^2 + 2)/(x - 3)^3
    x |--> 22/(x^3 - 9*x^2 + 27*x - 27)
```

```
solve(g(x)>0,x); solve(g(x)<0,x)
    [[x > 3]]
    [[x < 3]]
```

Por tanto, es convexa en $(3, \infty)$ y es cóncava en $(-\infty, 3)$ y no tiene puntos de inflexión. Volvemos a dibujar la gráfica para comprobar que todo es correcto:

```
p1=point((3-sqrt(11),f(3-sqrt(11))),pointsize=80,color="green")
p2=point((3+sqrt(11),f(3+sqrt(11))),pointsize=80,color="green")
```

```
gr1=plot(f(x),-15,20,ymin=-10,ymax=30,thickness=2,color="red")
gr2=plot(x+3,-15,20,ymin=-10,ymax=30,thickness=2,color="blue")
show(gr1+gr2+p1+p2)
```



4.2 Serie de Taylor

Las órdenes necesarias en este apartado son:

taylor(f,x,a,n) genera el polinomio de Taylor de orden **n** de la función **f** en el punto **a**.

Ejemplos:

1) Escribir $x^4+x^3-3x^2+4x-4$ en potencias de **(x-1)**.

```
taylor(x^4+x^3-3*x^2+4*x-4,x,1,4)
```

```
(x - 1)^4 + 5*(x - 1)^3 + 6*(x - 1)^2 + 5*x - 6
```

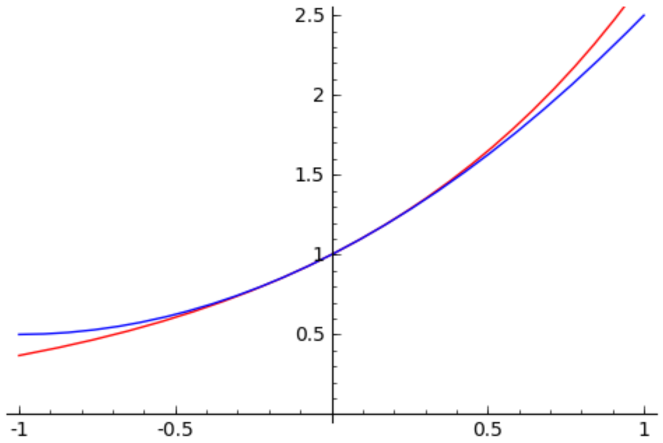
2) Hallar un polinomio que aproxime la función **e^x** en el intervalo **[-1,1]** con un error menor que **10^(-2).**

```
reset("f"); f(x)=e^x; poli=taylor(f(x),x,0,2); poli
```

```
1/2*x^2 + x + 1
```

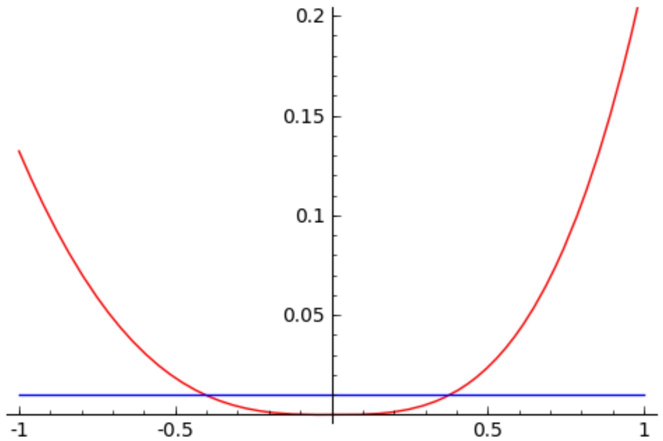
Representamos la función **f**, de color rojo, y el polinomio de grado **2**, de color azul:

```
plot(f(x),-1,1,ymin=0,ymax=2.5,rgbcolor=(1,0,0))+ plot(poli,-
1,1,ymin=0,ymax=2.5,rgbcolor=(0,0,1))
```



¿Con qué error aproxima este polinomio a la función? El error es el valor absoluto de la diferencia. En la gráfica anterior no se ve bien de qué tamaño es este error, así que vamos a representarlo junto a la recta $y=10^{-2}$. El error claramente no es menor que este valor.

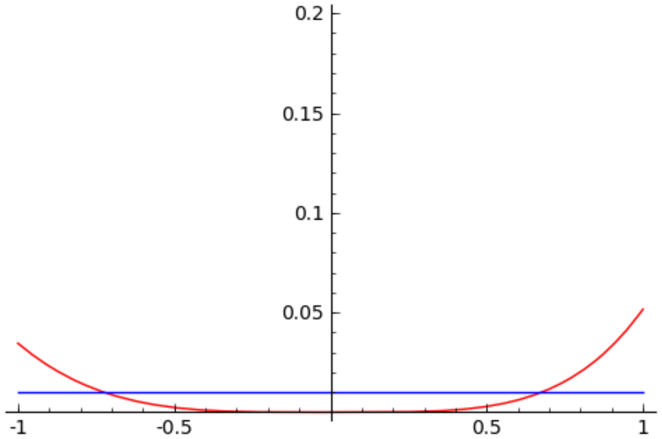
```
plot(abs(f(x)-poli),-1,1,ymin=0,ymax=0.15,rgbcolor=(1,0,0))+
plot(10^(-2),-1,1,rgbcolor=(0,0,1))
```



Ahora podemos tantear con polinomios de mayor grado, hasta que la gráfica del error (en color rojo) quede por debajo de la recta horizontal en todo el intervalo **[-1,1]**. Empezamos con el polinomio de grado **3**.

```
poli=taylor(f(x),x,0,3)
```

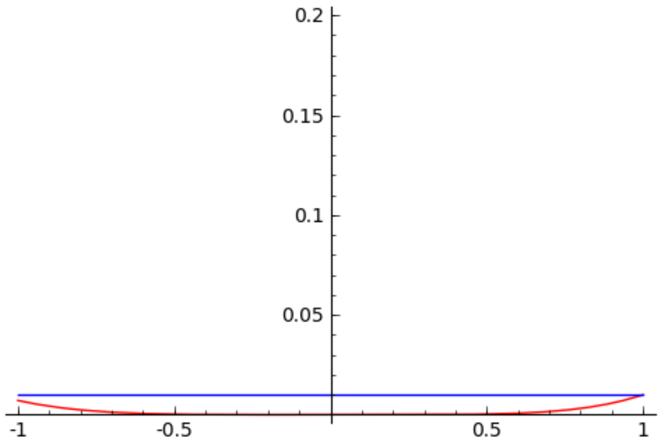
```
plot(abs(f(x)-poli),-1,1,ymin=0,ymax=0.15,rgbcolor=(1,0,0))+
plot(10^(-2),-1,1,rgbcolor=(0,0,1))
```



Tampoco sirve. El de grado **4** (sería más fácil, en vez de repetir, escribir sobre la orden anterior):

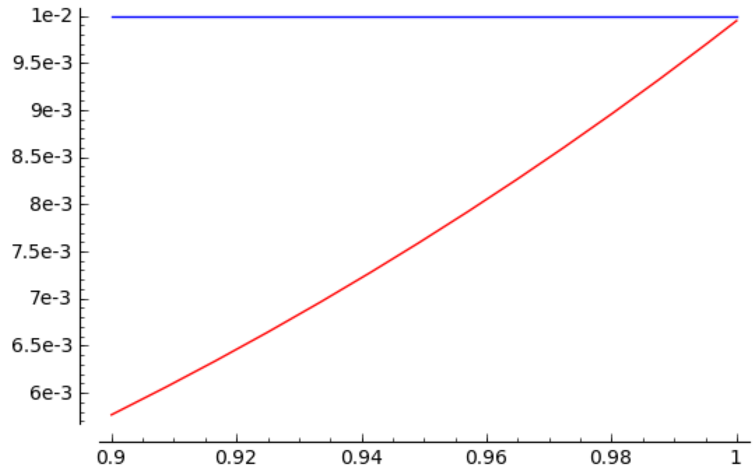
```
poli=taylor(f(x),x,0,4)
```

```
plot(abs(f(x)-poli),-1,1,ymin=0,ymax=0.15,rgbcolor=(1,0,0))+
plot(10^(-2),-1,1,rgbcolor=(0,0,1))
```



No está muy claro si sirve o no. Dibujamos la gráfica cerca de **1**:

```
plot(abs(f(x)-poli),0.95,1,rgbcolor=(1,0,0))+ plot(10^(-
2),0.95,1,rgbcolor=(0,0,1))
```



Si SAGE no está equivocado, el polinomio de grado **4** resuelve nuestro problema. Deberíamos probar con el rigor debido que esa es la solución. Recordemos cuál es el polinomio:

```
poli
```

```
1/24*x^4 + 1/6*x^3 + 1/2*x^2 + x + 1
```

4) Veamos como la función log(1+x) es aproximada por su polinomio de MacLaurin en el intervalos [-1,1] a medida que aumenta el grado del polinomio.

```
reset("f"); f = log(1+x); dibujof = plot(f,-1,1.1, thickness=2);
punto = point((0,f(x=0)), pointsize=80, rgbcolor=(1,0,0));
@interact
def _(orden=(1..15)):
 fy = f.taylor(x,0,orden)
 dibujotaylor = plot(fy,-1, 1.1, color='green', thickness=2)
 show(punto + dibujof + dibujotaylor, ymin = -2.5, ymax = 1)
```

5) Calculemos $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin x - x)\log(x+\sqrt{x^2+1})}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}$.

Este límite podría calcularse automáticamente mediante la orden `limit` que vimos en anteriores prácticas. No obstante, utilizaremos Taylor.

```
taylor(cos(x)-1+x^2/2,x,0)
```

```
0
```

```
taylor((sin(x)-x)*log(x+sqrt(x^2+1)),x,0,5)
```

```
-1/6*x^4
```

```
lim((-x^4/6)/(x^4/24),x=0)
```

```
-4
```