Problemas evaluables 1(a) (21 de octubre) [Cada problema vale 0.2 puntos].

1a. Si $f(x)=\left(2+\frac{5}{x}\right)^2$, precisar todos los reales x que cumplen $\begin{array}{l}\text{i) } f(x)=1\\ \text{ii) } f(x)<9\end{array}$. ¿Es f inyectiva en su dominio?

2b. Sea $g(x)=\log\left(3x-2\sqrt{x}\right)$. Hallar su dominio D y todos los números reales x que hacen $g(x)=0$.

3a. Sea $z=\frac{3\mathrm{i}-1}{2-\mathrm{i}}$. Escribir z en las formas $a+b\mathrm{i}$ y $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Calcular z^8.

Solución de los problemas evaluables 1 (21 de octubre)

1a. i) $f(x)=1 \Leftrightarrow 2+\frac{5}{x}=\pm 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x}=-1$ ó -3, $\boxed{x=-5 \text{ ó } x=-\frac{5}{3}}$ [y, por tanto, no es inyectiva].

O de otra forma algo más larga: $f(x)=\frac{4x^2+20x+25}{x^2}=1$, $3x^2+20x+25=0$, $x=\frac{-10\pm\sqrt{25}}{3}=-5,-\frac{5}{3}$.

ii) $\left(2+\frac{5}{x}\right)^2<9 \Leftrightarrow \left|2+\frac{5}{x}\right|<3 \Leftrightarrow -3<2+\frac{5}{x}<3 \Leftrightarrow \frac{5}{x}+5=\frac{5(x+1)}{x}>0$ y $\frac{5}{x}-1=\frac{5-x}{x}<0 \Leftrightarrow$

$x<-1$ ó $x>0$ y $x<0$ ó $x>5$. Las dos cosas se dan si: $\boxed{x\in(-\infty,-1)\cup(5,\infty)}$.

O bien: $\frac{4x^2+20x+25}{x^2}<9 \Leftrightarrow \frac{5x^2-20x-25}{x^2}>0 \overset{x^2\text{ positivo}}{\Longleftrightarrow} 5(x+1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<-1$ ó $x>5$.

[El paso de la doble implicación larga debe ser explicado por el cuidado con productos y desigualdades].

2a. Definida si $x\geq 0$ (por la raíz) y (por el logaritmo) si además $3x-2\sqrt{x}>0 \Leftrightarrow 3x>2\sqrt{x} \overset{\sqrt{x}>0}{\Leftrightarrow} 3\sqrt{x}>2$.

Y esto equivale, al ser ambos miembros de la desigualdad positivos, a $9x>4$. Por tanto: $\boxed{D=\left(\frac{4}{9},\infty\right)}$.

$g(x)=0 \Leftrightarrow 3x-2\sqrt{x}=1 \overset{t=\sqrt{x}}{\Longleftrightarrow} 3t^2-2t-1=0$, $t=\frac{1\pm\sqrt{4}}{3}=1,-\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x=1}$ $\left[\sqrt{x}=-\frac{1}{3} \text{ imposible}\right]$.

3a. $z=\frac{3\mathrm{i}-1}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3\mathrm{i}-1)(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{5\mathrm{i}-5}{4+1}=\boxed{-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}}$ $\left[|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2},\ \tan\theta=-1 \text{ y cuadrante } 2^{\text{o}}\right]$.

$\left[\theta \text{ no es el } \arctan(-1)\right]$.

Por tanto: $z^8=\left(\sqrt{2}\right)^8\mathrm{e}^{6\pi\mathrm{i}}=16\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}}=\boxed{16}$. Mucho más largo:

$$(-1+\mathrm{i})^8=1-8\mathrm{i}+28\mathrm{i}^2-56\mathrm{i}^3+70\mathrm{i}^4-56\mathrm{i}^5+28\mathrm{i}^6-8\mathrm{i}^7+\mathrm{i}^8=1-28+70-28+1+\mathrm{i}(-8+56-56+8)=16.$$

[Casual forma corta de hacer z^8 en cartesianas: $z^2=1+\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}=-2\mathrm{i} \Rightarrow z^8=(-2\mathrm{i})^4=16\mathrm{i}^4=16$].

Problemas evaluables 23(a) (16 de noviembre)

1a. Sean $a_n=\frac{n-\sqrt{2n+7}}{\pi-\sqrt{n}}$ y $b_n=\frac{n-\sqrt{2n+7}}{\pi-n!}$.
Hallar el límite de las sucesiones: i) $\{a_n\}$, ii) $\{b_n\}$, iii) $\left\{\frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}\right\}$, iv) $\left\{\frac{\operatorname{sen}(b_n)}{b_n}\right\}$. [0.15 puntos]

2a. Sea $f(x)=(x+1)\arctan\frac{1}{x^2}$, $f(0)=0$. **i]** Calcular $f'(-1)$ y $f''(1)$. **ii]** Estudiar si es continua en $x=0$. **iii]** Probar que es continua en $x=-1$ utilizando sólo la definición $\varepsilon-\delta$. [0.15 puntos]

3a. Sea $g(x)=(x^3+3x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. **i]** Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en $x=0$. **ii]** Hallar, si existen, sus valores máximo y mínimo en el intervalo $[0,3]$. **iii]** Probar que g se anula en el intervalo $[-1,1]$ y precisar cuántas veces lo hace en todo el dominio. **iv]** Determinar la imagen de g. [0.3 puntos]

Problemas evaluables 23(b) (16 de noviembre)

1b. Sean $a_n=\frac{2n-\sqrt{n+8}}{\sqrt{n}+\pi}$ y $b_n=\frac{2n-\sqrt{n+8}}{n!+\pi}$.
Hallar el límite de las sucesiones: i) $\{a_n\}$, ii) $\{b_n\}$, iii) $\left\{\frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}\right\}$, iv) $\left\{\frac{\operatorname{sen}(b_n)}{b_n}\right\}$. [0.15 puntos]

2b. Sea $f(x)=(x-1)\arctan\frac{1}{x^2}$, $f(0)=0$. **i]** Calcular $f'(1)$ y $f''(-1)$. **ii]** Estudiar si es continua en $x=0$. **iii]** Probar que es continua en $x=1$ utilizando sólo la definición $\varepsilon-\delta$. [0.15 puntos]

3b. Sea $g(x)=(8x^3+6x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$. **i]** Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en $x=0$. **ii]** Hallar, si existen, sus valores máximo y mínimo en el intervalo $[-1,2]$. **iii]** Probar que g se anula en el intervalo $[-1,1]$ y precisar cuántas veces lo hace en todo el dominio. **iv]** Determinar la imagen de g. [0.3 puntos]

Solución de los problemas evaluables 23 (16 de noviembre)

1a. i) $a_n=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{2+\frac{7}{n}}}{\frac{\pi}{\sqrt{n}}-1}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{-\infty}$ “$\frac{\infty-\sqrt{2}}{-1}$”. ii) $b_n=\frac{1-\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}}{\frac{\pi}{n}-(n-1)!}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{0}$ “$\frac{1}{-\infty}$”. iii) $\frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{0}$ “$\frac{\text{acot.}}{-\infty}$”. iv) $\frac{\operatorname{sen}(b_n)}{b_n}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{1}$.
$b_n\to 0$ y $\frac{\operatorname{sen}x}{x}\underset{x\to 0}{\to}1$

2a. **i]** $f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}+\frac{(x+1)(-2x^{-3})}{1+x^{-4}}=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x(x+1)}{x^4+1}$ si $x\neq 0\Rightarrow f'(-1)=\boxed{\frac{\pi}{4}}$.

$f''(x)=-\frac{2x}{x^4+1}-\frac{4x+2}{x^4+1}+\frac{8x^4(x+1)}{(x^4+1)^2}$, $x\neq 0\Rightarrow f''(1)=-1-3+4=\boxed{0}$.

ii] $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1\cdot\frac{\pi}{2}\neq 0=f(0)$ $\left[\text{“}\arctan\frac{1}{+0}=\arctan(\infty)=\frac{\pi}{2}\text{”}\right]\Rightarrow f$ **discontinua** en 0.

iii] $\forall\varepsilon>0$, $\left|(x+1)\arctan\frac{1}{x^2}-0\right|\le\frac{\pi}{2}|x+1|<\varepsilon$ si $|x-(-1)|<\delta=\frac{2\varepsilon}{\pi}$.

3a. **i]** $g(0)=1$, $g'(0)=(3x^2+2-x^3-3x)\,\mathrm{e}^{-x}\big|_{x=0}=2\Rightarrow$ recta tangente: $\boxed{y=1+2x}$.

ii] $g'(x)=-(x-2)(\underbrace{x^2-x+1}_{>0})\,\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow$ g crece en $(-\infty,2]$, g decrece en $[2,\infty)$ $\Rightarrow$ **Valor máximo** $=g(2)=\boxed{15\,\mathrm{e}^{-2}}$.

El mínimo será $g(0)$ o $g(3)=\frac{37}{\mathrm{e}^3}$. Como $\mathrm{e}<3$, es mayor $g(3)$. **Valor mínimo** $=g(0)=\boxed{1}$.

iii] $g(-1)=-3\mathrm{e}<0$, $g(1)=5\mathrm{e}^{-1}>0$ y g continua en $[-1,1]\overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}\exists c\in(-1,1)$ con $g(c)=0$.

Se anula $\boxed{1}$ vez en todo el $\operatorname{dom}g=\mathbf{R}$, pues crece estrictamente hasta 2 y es claro que $g(x)>0$ si $x\ge 2$.

[De otra forma: g se anula si lo hace el polinomio x^3+3x+1 (estrictamente creciente o utilizando Descartes)].

iv] g continua en todo $\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ y $g(2)$ máximo absoluto $\Rightarrow$ $\operatorname{im}g=\boxed{\left(-\infty,15\,\mathrm{e}^{-2}\right]}$.

1b. i) $a_n=\frac{2\sqrt{n}-\sqrt{1+\frac{8}{n}}}{1+\frac{\pi}{\sqrt{n}}}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{\infty}$. ii) $b_n=\frac{2-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}}}{(n-1)!+\frac{\pi}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{0}$. iii) $\frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{0}$. iv) $\frac{\operatorname{sen}(b_n)}{b_n}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{1}$.

2b. **i]** $f'(1)=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x(x-1)}{x^4+1}\Big|_{x=1}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$. $f''(-1)=-\frac{2x}{x^4+1}-\frac{4x-2}{x^4+1}+\frac{8x^4(x-1)}{(x^4+1)^2}\Big|_{x=-1}=\boxed{0}$.

ii] $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\frac{\pi}{2}\neq f(0)\Rightarrow f$ **discontinua** en 0. **iii]** $\left|(x-1)\arctan\frac{1}{x^2}\right|\le\frac{\pi}{2}|x-1|<\varepsilon$ si $|x-1|<\delta=\frac{2\varepsilon}{\pi}$.

3b. **i]** $g(0)=1$, $g'(0)=(24x^2+4-16x^3-12x)\,\mathrm{e}^{-2x}\big|_{x=0}=4\Rightarrow$ recta tangente: $\boxed{y=1+4x}$.

ii] $g'(x)=-4(x-1)(\underbrace{4x^2-2x+1}_{>0})\,\mathrm{e}^{-2x}\Rightarrow$ **Vmáximo** $=g(1)=\boxed{15\,\mathrm{e}^{-2}}$. **Vmínimo** $=g(-1)=\boxed{-13\,\mathrm{e}^{2}}$.
$\left[g(2)=77\,\mathrm{e}^{-4}\right]$

iii] $g(-1)g(1)<0$, g continua en $[-1,1]\Rightarrow\exists c\in(-1,1)$ con $g(c)=0$.

g crece estrictamente hasta 1 y $g(x)>0$ si $x\ge 1\Rightarrow$ se anula $\boxed{1}$ vez en $\operatorname{dom}g=\mathbf{R}$. [O como en **3a**].

iv] g continua en todo $\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ y $g(1)$ máximo absoluto $\Rightarrow$ $\operatorname{im}g=\boxed{\left(-\infty,15\,\mathrm{e}^{-2}\right]}$.

Problemas evaluables 4(a) (16 de diciembre)

1a. i] Precisar para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{5^n-2n}$. [0.25 puntos]

ii] Hallar un racional que aproxime para $x=-1$ el valor de la suma de la serie con error menor que 10^{-2}.

2a. i] Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^4 de la función $f(x)=\mathrm{e}^{x/2}\log(1+x)$. ¿Cuánto vale $f'''(0)$?

ii] Hallar el límite de $\frac{\mathrm{e}^{x/2}\log(1+x)-x}{x^3-2x^4}$, cuando x tiende hacia **a)** 0, **b)** ∞, **c)** -1^+. [0.35 puntos]

Problemas evaluables 4(b) (16 de diciembre)

1b. i] Precisar para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{4^n+5n^2}$. [0.25 puntos]

ii] Hallar un racional que aproxime para $x=-1$ el valor de la suma de la serie con error menor que 10^{-2}.

2b. i] Hallar el desarrollo de Taylor hasta x^4 de la función $f(x)=\mathrm{e}^{x}\log(1+2x)$. ¿Cuánto vale $f'''(0)$?

ii] Hallar el límite de $\frac{\mathrm{e}^{x}\log(1+2x)-2x}{8x^3-x^4}$, cuando x tiende hacia **a)** 0, **b)** ∞, **c)** 8^+. [0.35 puntos]

Solución de los problemas evaluables 4 (16 de diciembre)

1a. i] Cociente: $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{5^n-2n}{5^{n+1}-2(n+1)}\frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} = \frac{1-2n5^{-n}}{5-2(n+1)5^{-n}}|x|^3 \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{5}|x|^3 \Rightarrow$ converge si $|x|<5^{1/3}$, diverge si $|x|>5^{1/3}$.

Raíz: $\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{|x|^3}{[5^n-2n]^{1/n}} = \frac{|x|^3}{5[1-2n5^{-n}]^{1/n}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{|x|^3}{5\cdot 1^0} \nearrow$ [Se sabe que $\frac{n^a}{b^n}\to 0$, si $b>1$].

Si $x=5^{1/3}$ queda $\sum \frac{5^n}{5^n-2n}$ que diverge, pues su término general $\frac{1}{1-2n5^{-n}}\to 1\neq 0$.

Si $x=-5^{1/3}$, $\sum \frac{(-1)^n5^n}{5^n-2n}$ también diverge, pues $a_n \not\to 0$ (pares $\to 1$, impares $\to -1$). $\boxed{x\in\left(-\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{5}\right)}$.

ii] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{5^n-2n} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{21}-\frac{1}{119}+\cdots$. Por ser serie de Leibniz el error es menor que $\frac{1}{119}<\frac{1}{100}$, si aproximamos la suma infinita con los dos primeros términos: $S\approx -\frac{7}{21}+\frac{1}{21} = \boxed{-\frac{2}{7}}$.

2a. i] $\left[1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{48}x^3+\cdots\right]\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\right] = x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8})x^3+(\frac{1}{48}-\frac{1}{16}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4})x^4+\cdots$

$= \boxed{x+\frac{5}{24}x^3-\frac{1}{8}x^4+\cdots} \Rightarrow \frac{f'''(0)}{3!}=\frac{5}{24}$, $\boxed{f'''(0)=\frac{5}{4}}$.

ii] a) $\frac{\frac{5}{24}x^3+\cdots}{x^3+\cdots} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{5}{24}}$. [Por L'Hôpital habría que derivar 3 veces].

b) $\frac{\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{x^4}\log(1+x)-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}-2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{-\infty}$ $\left[\frac{\infty\cdot\infty-0}{0-2}\right.$ (sabemos que $\frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^n}\to\infty$, si $a>0$)$\left.\right]$.

c) Si $x\to -1^+$, el denominador tiende a -3 y el numerador a $-\infty$ $\left(\mathrm{e}^{-1/2}\cdot\infty-1\right)$. El límite es $\boxed{\infty}$.

1b. i] Cociente: $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{4^n+5n^2}{4^{n+1}+5(n+1)^2}\frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} = \frac{1+5n^24^{-n}}{4+5(n+1)^24^{-n}}|x|^3 \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{4}|x|^3 \Rightarrow$ converge si $|x|<4^{1/3}$, diverge si $|x|>4^{1/3}$.

Raíz: $\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{|x|^3}{[4^n+5n^2]^{1/n}} = \frac{|x|^3}{4[1+5n^24^{-n}]^{1/n}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{|x|^3}{4\cdot 1^0} \nearrow$ [Se sabe que $\frac{n^a}{b^n}\to 0$, si $b>1$].

Si $x=4^{1/3}$ queda $\sum \frac{4^n}{4^n+5n^2}$ que diverge, pues su término general $\frac{1}{1+5n^24^{-n}}\to 1\neq 0$.

Si $x=-4^{1/3}$, $\sum \frac{(-1)^n4^n}{4^n+5n^2}$ también diverge, pues $a_n \not\to 0$ (pares $\to 1$, impares $\to -1$). $\boxed{x\in\left(-\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{4}\right)}$.

ii] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{4^n+5n^2} = -\frac{1}{9}+\frac{1}{36}-\frac{1}{109}+\cdots$. Por ser serie de Leibniz el error es menor que $\frac{1}{109}<\frac{1}{100}$, si aproximamos la suma infinita con los dos primeros términos: $S\approx -\frac{4}{36}+\frac{1}{36} = \boxed{-\frac{1}{12}}$.

2b. i] $\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right]\left[2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4+\cdots\right] = 2x+(2-2)x^2+(\frac{8}{3}-2+1)x^3+(\frac{1}{3}-1+\frac{8}{3}-4)x^4+\cdots$

$= \boxed{2x+\frac{5}{3}x^3-2x^4+\cdots} \Rightarrow \frac{f'''(0)}{3!}=\frac{5}{3}$, $\boxed{f'''(0)=10}$.

ii] a) $\frac{\frac{5}{3}x^3+\cdots}{8x^3+\cdots} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{5}{24}}$ [Por L'Hôpital habría que derivar 3 veces].

b) $\frac{\frac{\mathrm{e}^{x}}{x^4}\log(1+2x)-\frac{2}{x^3}}{\frac{8}{x}-1} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{-\infty}$ $\left[\frac{\infty\cdot\infty-0}{0-1}\right.$ (sabemos que $\frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^n}\to\infty$, si $a>0$)$\left.\right]$.

c) Si $x\to 8^+$, $x^3(8-x)\to 0$ (-0) y el numerador $\to \mathrm{e}^8\log 17-16>2^8\cdot 1-16>0$. El límite es $\boxed{-\infty}$.

Problemas evaluables 5 (24 de enero)

Apellidos:		**Firma:**
Nombre:	**DNI:**	

1. Sea $H(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{6+t^3}$. **i]** Hallar $H'(2)$. **ii]** Determinar el $x\in[0,2]$ que hace máximo el valor de H en el intervalo y probar que este valor máximo es menor que $\frac{1}{7}$.
[Muy desaconsejable calcular la primitiva y Taylor no es válido]. [0.2 puntos]

2. Hallar, si existe, la integral $\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3\cos^2 x+4\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. [0.2 puntos]

3. Sea $f(x)=(x^2-4)\,\mathrm{e}^{-x/2}$. **i]** Hallar una primitiva de f .
ii] Estudiar si converge la integral impropia $\int_2^{\infty} f$. [0.2 puntos]

Solución de los problemas evaluables 5 (24 de enero)

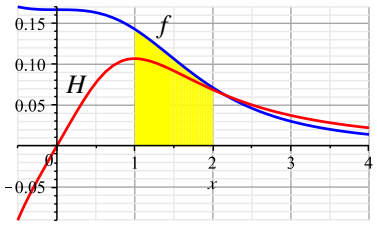
1. Integrando continuo si $t\geq 0$ y límites de integración derivables $\Rightarrow$ H es derivable $\forall x\in[0,2]$ y es:

$H'(x)=\frac{2}{6+8x^3}-\frac{1}{6+x^3}=\frac{3(1-x^3)}{(3+4x^3)(6+x^3)}\Rightarrow\boxed{H'(2)=-\frac{3}{70}}$.

$H'(x)=0$ si $x=1$. Crece en $[0,1]$ y decrece en $[1,2]$.

Por tanto, el máximo local y absoluto será $\boxed{H(1)=\int_1^2 f}$.

[Su cálculo sería largo; el denominador es $(t+6^{1/3})(t^2-6^{1/3}t+6^{2/3})$].



En el intervalo $[1,2]$ el integrando $f\leq\frac{1}{7}$ (denominador mínimo) $\Rightarrow$ el valor máximo $\int_1^2 f\leq\int_1^2\frac{1}{7}=\frac{1}{7}$.

2. El cambio más adecuado es: $t=\cos x$, $dt=-\operatorname{sen}x\,dx$, $x=0\to t=1$, $x=\pi\to t=-1$:

$$\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos^2 x)\operatorname{sen}x\,dx}{4-\cos^2 x}=\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)\,dt}{4-t^2}=\int_{-1}^{1}\Big[1-\frac{3}{(2+t)(2-t)}\Big]dt=2-\int_{-1}^{1}\Big[\frac{A}{2+t}+\frac{B}{2-t}\Big]dt\quad\left[\begin{array}{c}3=A(2-t)+B(2+t)\\ t=2\to B=3/4\\ t=-2\to A=3/4\end{array}\right]$$

$$=2-\int_{-1}^{1}\Big[\frac{3/4}{2+t}+\frac{3/4}{2-t}\Big]dt=2-\frac{3}{4}\log\Big|\frac{2+t}{2-t}\Big|\Big]_{-1}^{1}=\boxed{2-\frac{3}{2}\log 3}\,.$$

$$\left[\text{Muchísimo más largo: }\begin{array}{c}z=\tan\frac{x}{2}\\ \tan\frac{\pi}{2}=\infty\end{array}\to\int_0^{\infty}\frac{16z^3dz}{(1+z^2)^2(1+3z^2)(3+z^2)}=\int_0^{\infty}\Big(\frac{4z}{(1+z^2)^2}+\frac{3z/2}{3+z^2}-\frac{9z/2}{1+3z^2}\Big)dz=2-\frac{3}{2}\log 3\right].$$

3. i] $\int f(x)\,dx\underset{\text{partes}}{=}-2(x^2-4)\,\mathrm{e}^{-x/2}+4\int x\,\mathrm{e}^{-x/2}dx=-2(x^2+4x-4)\,\mathrm{e}^{-x/2}+8\int\mathrm{e}^{-x/2}dx=\boxed{-2(x+2)^2\,\mathrm{e}^{-x/2}}$.

ii] A partir de la primitiva: $\int_2^{\infty} f=\lim_{x\to\infty}\big[-2(x+2)^2\,\mathrm{e}^{-x/2}\big]_2^{\infty}=32\mathrm{e}^{-1}$ (**converge** y su valor es ese).

Directamente: $\int^{\infty}\frac{1}{x^2}$ convergente y $\frac{f(x)}{x^{-2}}=\frac{x^4-4x^2}{\mathrm{e}^{x/2}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ (menor que convergente) $\Rightarrow$ **converge**.

Problemas evaluables 5* (24 de enero)

Apellidos:		**Firma:**
Nombre:	**DNI:**	

1*. Sea $H(x)=\int_{x/2}^{x}\frac{dt}{6+t^3}$. **i]** Hallar $H'(1)$. **ii]** Determinar el $x\in[0,4]$ que hace máximo el valor de H en el intervalo y probar que este valor máximo es mayor que $\frac{1}{14}$.
[Muy desaconsejable calcular la primitiva y Taylor no es válido]. [0.2 puntos]

2*. Hallar, si existe, la integral $\int_0^{\pi}\frac{\cos^3 x}{3\operatorname{sen}^2 x+4\cos^2 x}\,dx$. [0.2 puntos]

3*. Sea $f(x)=(x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. **i]** Hallar una primitiva de f .
ii] Estudiar si converge la integral impropia $\int_1^{\infty} f$. [0.2 puntos]