Solución de los problemas evaluables 1 (19 de octubre)

1a. Sea $f(x)=\frac{|2x+4|}{x-1}$. Determinar los reales x que cumplan: i) $f(x)=1$, ii) $f(x)<5$. ¿Es $\operatorname{im} f=\mathbf{R}$?

1b. Sea $f(x)=\frac{|2x+6|}{x-2}$. Determinar los reales x que cumplan: i) $f(x)=1$, ii) $f(x)<4$. ¿Es $\operatorname{im} f=\mathbf{R}$?

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{2x+4}{x-1}\,,\ x\in[-2,\infty)-\{1\} \\ -\frac{2x+4}{x-1}\,,\ x\in(-\infty,-2] \end{cases}$. i) $\begin{array}{l} \frac{2x+4}{x-1}=1 \to x=-5\,(<-2) \\ \frac{2x+4}{1-x}=1 \to x=-1\,(>-2) \end{array}$. **Ningún x lo cumple**.

ii) $\begin{array}{l} \frac{2x+4}{x-1}<5 \Leftrightarrow \frac{3(3-x)}{x-1}<0 \to x<1 \text{ ó } x>3 \to x\in[-2,1)\cup(3,\infty) \\ \frac{2x+4}{1-x}<5 \Leftrightarrow \frac{7x-1}{1-x}<0 \to x<\frac{1}{7} \text{ ó } x>1 \ \to\ x\in(-\infty,-2] \end{array}$ $\boxed{x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty)}$.

b) $f(x)=\begin{cases} \frac{2x+6}{x-2}\,,\ x\in[-3,\infty)-\{1\} \\ -\frac{2x+6}{x-2}\,,\ x\in(-\infty,-3] \end{cases}$. i) $\begin{array}{l} \frac{2x+6}{x-2}=1 \to x=-8\,(<-3) \\ \frac{2x+6}{2-x}=1 \to x=-\frac{4}{3}\,(>-3) \end{array}$. **Ningún x lo cumple**.

ii) $\begin{array}{l} \frac{2x+6}{x-2}<4 \Leftrightarrow \frac{2(7-x)}{x-2}<0 \to x<2 \text{ ó } x>7 \to x\in[-3,2)\cup(7,\infty) \\ \frac{2x+6}{2-x}<4 \Leftrightarrow \frac{2(3x-1)}{2-x}<0 \to x<\frac{1}{3} \text{ ó } x>2 \ \to\ x\in(-\infty,-3] \end{array}$ $\boxed{x\in(-\infty,2)\cup(7,\infty)}$.

Como para ningún x es $f(x)=1$, la $\operatorname{im} f$ no puede ser todo $\mathbf{R}$ (1 , al menos, no pertenece a ella).

2a. Sea $g(x)=2\operatorname{sen}2x-\cos 4x$. Hallar todos los reales x tales que $g(x)=3$. ¿Es g inyectiva en su dominio?

2b. Sea $g(x)=\cos 4x-2\cos 2x$. Hallar todos los reales x tales que $g(x)=3$. ¿Es g inyectiva en su dominio?

$\cos 4x=\cos^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x=2\cos^2 2x-1=1-2\operatorname{sen}^2 2x$.

a) $2\operatorname{sen}^2 2x+2\operatorname{sen}2x-1=3\,,\ \operatorname{sen}^2 2x+\operatorname{sen}2x-2=0 \to \begin{array}{l} \operatorname{sen}2x=-2 \text{ (imposible), o} \\ \operatorname{sen}2x=1 \to 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,, \end{array}$ $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}$.

b) $2\cos^2 2x-2\cos 2x-1=3\,,\ \cos^2 2x-\cos 2x-2=0 \to \begin{array}{l} \cos 2x=2 \text{ (imposible), o} \\ \cos 2x=-1 \to 2x=(2k+1)\pi\,, \end{array}$ $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\pi}$.

[Con un poco de vista: las únicas soluciones posibles son los x que, a la vez, hacen $\begin{array}{l} \textbf{a)}\ \operatorname{sen}2x=1,\ \cos 4x=-1 \\ \textbf{b)}\ \cos 2x=-1,\ \cos 4x=1 \end{array}$].

Acabamos de ver que infinitos x distintos tienen la misma imagen 3 , con lo que la función no es inyectiva. (De hecho, ninguna función periódica lo puede ser).

3a. Calcular $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^5$ trabajando en coordenadas a) cartesianas, b) polares.

3b. Calcular $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^5$ trabajando en coordenadas a) cartesianas, b) polares.

$\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10=\binom{5}{3}$.

a) $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^5=(\sqrt{3})^5-5(\sqrt{3})^4\mathrm{i}+10(\sqrt{3})^3\mathrm{i}^2-10(\sqrt{3})^2\mathrm{i}^3+5\sqrt{3}\mathrm{i}^4-\mathrm{i}^5$

$$=9\sqrt{3}-45\mathrm{i}-30\sqrt{3}+30\mathrm{i}+5\sqrt{3}-\mathrm{i}=\boxed{-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}}$$

$|\sqrt{3}-\mathrm{i}|=\sqrt{3+1}=2\,,\ \tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \underset{\text{cuadrante 4}}{\longrightarrow}\ \theta=\frac{\pi}{6}\,;\ \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}\right)^5=2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6}=32(\cos\frac{5\pi}{6}-\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6})$

b) $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^5=1+5\sqrt{3}\mathrm{i}+10(\sqrt{3})^2\mathrm{i}^2+10(\sqrt{3})^3\mathrm{i}^3+5(\sqrt{3})^4\mathrm{i}^4+(\sqrt{3})^5\mathrm{i}^5$

$$=1+5\sqrt{3}\mathrm{i}-30-30\sqrt{3}\mathrm{i}+45+9\sqrt{3}\mathrm{i}=\boxed{16-16\sqrt{3}\mathrm{i}}$$

$|1+\mathrm{i}\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2\,,\ \tan\theta=\sqrt{3}\ \underset{\text{cuadrante 1}}{\longrightarrow}\ \theta=\frac{\pi}{3}\,;\ \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\right)^5=2^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/3}=32(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3})$

Solución de los problemas evaluables 2 (12 de noviembre)

1a. Sean las sucesiones $a_n=\sqrt{n^3+3}-2n\cos n$ y $b_n=\frac{7\operatorname{sen}n-\sqrt{n}}{5n+4}$. **i]** Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
ii] Para la que tiene límite finito, encontrar razonadamente algún $N\in\mathbf{N}$ tal que para $n\geq N$ los términos de la sucesión disten del límite menos de $\varepsilon=\frac{1}{10}$.

1b. Sean las sucesiones $a_n=n\operatorname{sen}n-\sqrt{n^3+2}$ y $b_n=\frac{\sqrt{n}-4\cos n}{5n+1}$. **i]** Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
ii] Para la que tiene límite finito, encontrar razonadamente algún $N\in\mathbf{N}$ tal que para $n\geq N$ los términos de la sucesión disten del límite menos de $\varepsilon=\frac{1}{10}$.

a) $a_n=n\Big[\underbrace{\sqrt{n+\frac{3}{n^2}}}_{\infty\,-\,\text{acotado}}-2\cos n\Big]\underset{\infty\cdot\infty}{\longrightarrow}\infty$ ó $a_n=n^{3/2}\Big[\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{n^3}}}_{1\,-\,\text{acotado}/\infty}-\frac{2\cos n}{\sqrt{n}}\Big]\underset{\infty\cdot 1}{\longrightarrow}\infty$. $b_n=\frac{\frac{7\operatorname{sen}n}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{5+\frac{3}{n}}\to\frac{0}{5}=0$.

$|b_n-0|\leq\frac{|7\operatorname{sen}n|+\sqrt{n}}{5n+4}\leq\frac{7+\sqrt{n}}{5n+4}\leq\frac{7+\sqrt{n}}{5n}=\frac{7}{5n}+\frac{1}{5\sqrt{n}}<\frac{1}{20}+\frac{1}{20}$ si $n>28$ y $\sqrt{n}>4$. Basta $N=28$.

$\Big[$Más posibilidades: $\frac{7+\sqrt{n}}{5n+4}<\frac{1}{10}\Leftrightarrow\big(\sqrt{n}\big)^2-2\sqrt{n}+\frac{4}{5}-14>0$, cierto si $\sqrt{n}>1+\sqrt{15-\frac{4}{5}}\to N=25,\dots\Big]$.

b) $a_n=n\Big[\underbrace{\operatorname{sen}n-\sqrt{n+\frac{2}{n^2}}}_{\text{acotado}\,-\,\infty}\Big]\underset{\infty(-\infty)}{\longrightarrow}-\infty$ ó $a_n=n^{3/2}\Big[\frac{\operatorname{sen}n}{\sqrt{n}}-\underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}}_{\text{acotado}/\infty\,-\,1}\Big]\underset{\infty(-1)}{\longrightarrow}-\infty$. $b_n=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{4\cos n}{n}}{5+\frac{1}{n}}\to\frac{0}{5}=0$.

$|b_n-0|\leq\frac{\sqrt{n}+|4\cos n|}{5n+1}\leq\frac{\sqrt{n}+4}{5n+1}\leq\frac{\sqrt{n}+4}{5n}=\frac{1}{5\sqrt{n}}+\frac{4}{5n}<\frac{1}{20}+\frac{1}{20}$ si $\sqrt{n}>4$ y $n>16$. Basta $N=16$.

$\Big[$Más posibilidades: $\frac{\sqrt{n}+4}{5n+1}<\frac{1}{10}\Leftrightarrow\big(\sqrt{n}\big)^2-2\sqrt{n}+\frac{1}{5}-8>0$, cierto si $\sqrt{n}>1+\sqrt{9-\frac{1}{5}}\to N=16,\dots\Big]$.

2a. Sea $f(x)=\log(4-x)+\frac{3}{4-x}$. **i]** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=3$.
ii] Determinar los puntos del dominio en los que se anula $f''(x)$.

2b. Sea $f(x)=\log(4-x)-\frac{1}{4-x}$. **i]** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=3$.
ii] Determinar los puntos del dominio en los que se anula $f''(x)$.

a) $f(3)=3$. $f'(x)=-\frac{1}{4-x}+\frac{3}{(4-x)^2}$, $f'(3)=2$. Recta tangente: $y=3+2(x-3)$, ó $\boxed{y=2x-3}$.
$f''(x)=-\frac{1}{(4-x)^2}+\frac{6}{(4-x)^3}=\frac{x+2}{(4-x)^3}=0$ si $\boxed{x=-2}$, punto del dominio $(-\infty,4)$.

b) $f(3)=-1$. $f'(x)=-\frac{1}{4-x}-\frac{1}{(4-x)^2}$, $f'(3)=-2$. Recta tangente: $y=-1-2(x-3)$, ó $\boxed{y=5-2x}$.
$f''(x)=-\frac{1}{(4-x)^2}-\frac{2}{(4-x)^3}=\frac{x-6}{(4-x)^3}=0$ si $x=6$. **No se anula en el dominio** $(-\infty,4)$.

3a. Sea $g(x)=4\arctan x-x^2$. **i]** Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de g en el intervalo $[-1,4]$.
ii] Precisar cuántas veces se anula g en dicho intervalo. **iii]** Determinar la imagen de g.

3b. Sea $g(x)=x^2+4\arctan x$. **i]** Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de g en el intervalo $[-4,1]$.
ii] Precisar cuántas veces se anula g en dicho intervalo. **iii]** Determinar la imagen de g.

Como g es continua en el intervalo cerrado (lo es en $\mathbf{R}$), los valores extremos se alcanzan en dicho intervalo. Y como g es derivable en $\mathbf{R}$, esos valores se toman o en los extremos del intevalo o en los puntos con $g'=0$.

a) $g'(x)=\frac{4}{1+x^2}-2x=-2\,\frac{x^3+x-2}{1+x^2}=-2\,\frac{(x-1)\overbrace{(x^2+x+2)}^{>0}}{1+x^2}\Rightarrow$ g crece hasta 1 y luego decrece $\Rightarrow$ Valor **máximo** $g(1)=\boxed{\pi-1}$.

$g(4)=4\arctan 4-16<\frac{4\pi}{2}-16<7-16=-9<-\pi-1=g(-1)\Rightarrow\boxed{4\arctan 4-16}$ valor **mínimo**.

Como $g(-1)<0$, $g(1)>0$, $g(4)<0$, y g es estrictamente monótona en $[-1,1]$ y en $[1,4]$, el teorema de Bolzano, junto con la monotonía, dice que g **se anula exactamente 2 veces** en el intervalo (una en $x=0$).

g continua, $\pi-1$ máximo absoluto, y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g=-\infty\Rightarrow\boxed{\operatorname{im} g=(-\infty,\pi-1]}$.

b) $g'(x)=2x+\frac{4}{1+x^2}=2\,\frac{x^3+x+2}{1+x^2}=2\,\frac{(x+1)\overbrace{(x^2-x+2)}^{>0}}{1+x^2}\Rightarrow$ g crece desde -1 y antes decrece $\Rightarrow$ Valor **mínimo** $g(-1)=\boxed{1-\pi}$.

$g(-4)=16-4\arctan 4>16-\frac{4\pi}{2}>16-7=9>\pi+1=g(1)\Rightarrow\boxed{16-4\arctan 4}$ valor **máximo**.

Como $g(-4)>0$, $g(-1)<0$, $g(1)>0$, y g es estrictamente monótona en $[-4,-1]$ y en $[-1,1]$, el teorema de Bolzano y la monotonía aseguran que g **se anula exactamente 2 veces** en el intervalo (una en $x=0$).

g continua, $1-\pi$ mínimo absoluto, y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g=\infty\Rightarrow\boxed{\operatorname{im} g=[1-\pi,\infty)}$.

Solución de los problemas evaluables 3 (17 de diciembre)

1a. i] Precisar para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)\,x^{3n}}{(n^2+14)\,8^n}$. [0.25 puntos]

ii] Hallar un racional que aproxime para $x=-1$ el valor de la suma de la serie con error menor que 10^{-2}.

1b. i] Precisar para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+17)\,x^{3n}}{(n^2+1)\,27^n}$. [0.25 puntos]

ii] Hallar un racional que aproxime para $x=-1$ el valor de la suma de la serie con error menor que 10^{-2}.

1a. i] Cociente: $\frac{n+6}{n+5}\frac{n^2+14}{n^2+2n+15}\frac{8^n}{8^{n+1}}\frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} \to \frac{|x|^3}{8} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{converge si } |x|<2\\ \text{diverge si } |x|>2\end{array}$ ($R=2$ radio de convergencia).

Para $x=2$ queda la serie $\sum \frac{n+5}{n^2+14}$ que diverge, pues su término general $\sim \frac{1}{n}$ $\left(\frac{a_n}{1/n}=\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{14}{n^2}}\to 1\right)$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

La de $x=-2$, $\sum (-1)^n \frac{n+5}{n^2+14}$, converge por Leibniz, ya que $a_n=\frac{n+5}{n^2+14}\to 0$ y es decreciente:

$$a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+5}{n^2+14} > \frac{n+6}{n^2+2n+15} \Leftrightarrow n^3+7n^2+25n+75 > n^3+6n^2+14n+84 \Leftrightarrow n^2+11n>9 \text{ si } n\geq 1.$$

Por tanto, la serie converge exactamente $\boxed{\forall x\in[-2,2)}$.

ii] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+5)}{(n^2+14)\,8^n} = -\frac{1}{20}+\frac{7}{1152}-\cdots$ (serie de Leibniz). La suma es $\approx \boxed{-\frac{1}{20}}$ con $|\text{error}|<\frac{7}{1152}<\frac{1}{100}$.

1b. i] Cociente: $\frac{n+18}{n+17}\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}\frac{27^n}{27^{n+1}}\frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} \to \frac{|x|^3}{27} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{converge si } |x|<3\\ \text{diverge si } |x|>3\end{array}$ ($R=3$ radio de convergencia).

Para $x=3$ queda la serie $\sum \frac{n+17}{n^2+1}$ que diverge, pues su término general $\sim \frac{1}{n}$ $\left(\frac{a_n}{1/n}=\frac{1+\frac{17}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\to 1\right)$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

La de $x=-3$, $\sum (-1)^n \frac{n+17}{n^2+1}$, converge por Leibniz, ya que $a_n=\frac{n+17}{n^2+1}\to 0$ y es decreciente:

$$a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+17}{n^2+1} > \frac{n+18}{n^2+2n+2} \Leftrightarrow n^3+19n^2+36n+34 > n^3+18n^2+n+18 \Leftrightarrow n^2+35n+16>0 \text{ si } n\geq 1.$$

Por tanto, la serie converge exactamente $\boxed{\forall x\in[-3,3)}$.

ii] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+17)}{(n^2+1)\,27^n} = -\frac{1}{3}+\frac{19}{3645}-\cdots$ (serie de Leibniz). La suma es $\approx \boxed{-\frac{1}{3}}$ con $|\text{error}|<\frac{19}{3645}<\frac{1}{100}$.

2a. i] Hallar el límite cuando x tiende a 0 y $-\infty$ de $f(x)=\frac{e^{-x}\arctan x - x(1-2x)^{1/2}}{x^3}$.

ii] Definiendo $f(0)=0$, hallar, si existe, $f'''(0)$. [0.25 puntos]

2b. i] Hallar el límite cuando x tiende a 0 e ∞ de $f(x)=\frac{e^{x}\arctan x - x(1+3x)^{1/3}}{x^3}$.

ii] Definiendo $f(0)=0$, hallar, si existe, $f'''(0)$. [0.25 puntos]

2a. i] $e^{-x}\arctan x = \left[1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right]\left[x-\frac{1}{3}x^3+\cdots\right] = x-x^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})x^3+\cdots$ $\left(\text{si } |x|<1\right)$.

$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2+\cdots \Rightarrow (1-2x)^{1/2} = 1-x-\frac{1}{2}x^2+\cdots$ $\left(\text{si } |x|<\frac{1}{2}\right)$.

$f(x) = \frac{x-x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots-x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\cdots}{x^3} = \frac{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{2}{3}}$. (Por L'H mucho más largo).

Cuando $x\to-\infty$, $\frac{(1-2x)^{1/2}}{x^2}\to 0$, $\arctan x\to -\frac{\pi}{2}$ y $\frac{e^{-x}}{x^3}\to-\infty$. Por tanto, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \boxed{\infty}$.

ii] Como f no es continua en $x=0$, no existe ninguna derivada de la función f.

2a. i] $e^{x}\arctan x = \left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right]\left[x-\frac{1}{3}x^3+\cdots\right] = x+x^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})x^3+\cdots$ $\left(\text{si } |x|<1\right)$.

$(1+x)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}x+\frac{(1/3)(-2/3)}{2}x^2+\cdots \Rightarrow (1-3x)^{1/3} = 1+x-x^2+\cdots$ $\left(\text{si } |x|<\frac{1}{2}\right)$.

$f(x) = \frac{x+x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots-x-x^2+x^3+\cdots}{x^3} = \frac{\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{7}{6}}$. (Por L'H mucho más largo).

Cuando $x\to\infty$, $\frac{(1+3x)^{1/3}}{x^2}\to 0$, $\arctan x\to\frac{\pi}{2}$ y $\frac{e^{x}}{x^3}\to\infty$. Por tanto, $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{\infty}$.

ii] Como f no es continua en $x=0$, no existe ninguna derivada de la función f.

[No es **ii]** lo que yo pensaba preguntar, quería ver si sabíais que todas las derivadas se 'ven' en un desarrollo de Taylor. Una posible pregunta hubiese sido 'hallar la derivada tercera del numerador $g(x)$ en $x=0$', y en cada caso sería:

a. $g(x)=\frac{2}{6}x^3+\cdots \Rightarrow \frac{g'''(0)}{3!}=\frac{2}{3}$, $g'''(0)=4$. **b.** $g(x)=\frac{7}{6}x^3+\cdots \Rightarrow \frac{g'''(0)}{3!}=\frac{7}{6}$, $g'''(0)=7$].

Solución de los problemas evaluables 4 (25 de enero)

1a. Hallar las integrales, simplificando el resultado: **i]** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$; **ii]** $\displaystyle\int_3^4 \frac{\log x}{(x-2)^2}\,dx$.

1b. Hallar las integrales, simplificando el resultado: **i]** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}\,dx$; **ii]** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log(x+2)}{x^2}\,dx$.

a) i] $\displaystyle\int \frac{(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x} = \int \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x \cos x\right] dx = \frac{1}{2}\cos^2 x - \log|\cos x| \Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \log\frac{1}{2} + \log\frac{1}{2^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{8}}$

ii] $\displaystyle\int \frac{\log x\,dx}{(x-2)^2} \underset{\text{partes}}{=} -\frac{\log x}{x-2} + \int \frac{dx}{x(x-2)} = -\frac{\log x}{x-2} + \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right] dx = \frac{\log(x-2)}{2} - \frac{x\log x}{2(x-2)} \Rightarrow \int_3^4 = \frac{\log 2}{2} - \frac{4\log 4}{2} + \frac{3\log 3}{2} = \boxed{\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}}$

b) i] $\displaystyle\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x} = \int\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x\cos x\right] dx = \log|\operatorname{sen} x| - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \int_{\pi/6}^{\pi/4} = \log\frac{1}{2^{1/2}} - \log\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{8}}$

ii] $\displaystyle\int \frac{\log(x+2)\,dx}{x^2} \underset{\text{partes}}{=} -\frac{\log(x+2)}{x} + \int \frac{dx}{x(x+2)} = -\frac{\log(x+2)}{x} + \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right] dx = \frac{\log x}{2} - \frac{x+2}{2x}\log(x+2) \Rightarrow \int_1^2 = \boxed{\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}}$

2a. Sea $H(x) = \displaystyle\int_{5-2x}^{1} \mathrm{e}^{-t^4}\,dt$. **i]** Hallar $H'(2)$. **ii]** Determinar el $x \in [1,3]$ que hace máximo el valor de H y probar que este valor máximo es mayor que $\frac{2}{3}$.

2b. Sea $H(x) = \displaystyle\int_{2x-1}^{1} \mathrm{e}^{-t^6}\,dt$. **i]** Hallar $H'(1)$. **ii]** Determinar el $x \in [0,2]$ que hace máximo el valor de H y probar que este valor máximo es mayor que $\frac{2}{3}$.

a) i] $H'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-(5-2x)^4} \Rightarrow \boxed{H'(2) = 2\,\mathrm{e}^{-1}}$.

ii] Como $H' > 0$, H es estrictamente creciente en todo **R**, con lo que **el valor máximo se toma en** $x = 3$.

$$t \in [-1,1] \Rightarrow t^4 \le 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{-t^4} \ge \mathrm{e}^{-1} \Rightarrow H(3) = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-t^4}\,dt \ge \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-1}\,dt = \frac{2}{\mathrm{e}} > \frac{2}{3} .$$

[Se podría usar Taylor: $H(3) = 2\int_0^1 \left[1 - t^4 + \cdots\right] dt = 2 - \frac{2}{5} + \cdots > \frac{8}{5} > \frac{2}{3}$].

b) i] $H'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-(2x-1)^6} \Rightarrow \boxed{H'(1) = -2\,\mathrm{e}^{-1}}$.

ii] Como $H' < 0$, H es estrictamente decreciente en todo **R** y **el valor máximo se toma en** $x = 0$.

$$t \in [-1,1] \Rightarrow t^6 \le 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{-t^6} \ge \mathrm{e}^{-1} \Rightarrow H(0) = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-t^6}\,dt \ge \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-1}\,dt = \frac{2}{\mathrm{e}} > \frac{2}{3} .$$

[Se podría usar Taylor: $H(1) = 2\int_0^1 \left[1 - t^6 + \cdots\right] dt = 2 - \frac{2}{7} + \cdots > \frac{12}{7} > \frac{2}{3}$].

3a. Estudiar si converge la integral impropia $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x-2}}$.

3b. Estudiar si converge la integral impropia $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-3}}$.

a) Hay dos impropiedades, la del infinito y además otra en 2^+, pues se anula el denominador.

En 2^+ se comporta como la convergente $\int_{2^+} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$: $\dfrac{\frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}{\frac{1}{\sqrt{x-2}}} = \dfrac{1}{(x+2)} \underset{x\to 2^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$.

Y en ∞ como la también convergente $\int^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$: $\dfrac{\frac{1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \dfrac{1}{(1+\frac{2}{x})\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Como ambas impropias convergen, la integral dada es **convergente**.

b) Hay dos impropiedades, la del infinito y además otra en 3^+, pues se anula el denominador.

En 3^+ se comporta como la convergente $\int_{3^+} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$: $\dfrac{\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-3}}}{\frac{1}{\sqrt{x-3}}} = \dfrac{1}{(x+1)} \underset{x\to 3^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$.

Y en ∞ como la también convergente $\int^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$: $\dfrac{\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-3}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{x})\sqrt{1-\frac{3}{x}}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Como ambas impropias convergen, la integral dada es **convergente**.

[Lo podíamos asegurar sin hacer uso de criterios en ambos casos, por ser las primitivas calculables:

$$\int \frac{dx}{(x-a+4)\sqrt{x-a}} \overset{u=\sqrt{x-a}}{=} \int \frac{2\,du}{4+u^2} = \int \frac{(1/2)\,du}{1+(u/2)^2} = \arctan\frac{u}{2} = \arctan\frac{\sqrt{x-a}}{2} \Rightarrow \int_a^{\infty} = \frac{\pi}{2} \text{ para las dos}\Big].$$