

**Métodos simples
para el análisis
de puntos degenerados
de sistemas analíticos planos**

J. I. Aranda

Índice

1. Introducción	5
2. Puntos críticos con un único autovalor cero	9
3. Análisis de puntos 'poco degenerados'	15
3.1. Utilizando la expresión en polares	18
3.2. Usando el blow-up: $x=x$, $y=xv$	21
3.3. Polinomios de tercer grado	27
3.4. La aproximación homogénea para $n=2$	29
3.5. Polinomios de cuarto grado	34
3.6. La aproximación homogénea para $n=3$	42
3.7. Ideas sobre estabilidad	51
4. ¿Centros o focos?	55
4.1. Sistemas homogéneos	59
4.2. Cálculo de la integral I para $n=3$	64
4.3. Centros y focos homogéneos para $n=3$	79
4.4. Inestabilización de centros elementales	85
4.5. Centros y focos no homogéneos y no elementales	100
5. Utilizando la poligonal	107
5.1. Ejemplos introductorios	110
5.2. Resultados generales	117
5.3. Aplicando los teoremas	130
5.4. Situaciones no recogidas en los teoremas	136
6. Análisis del infinito	147
6.1. Cambios de variable	150
6.2. El análisis homogéneo	154
6.3. Acudiendo a la poligonal	158
6.4. Ejemplos que exigen la poligonal	162
7. Referencias	177
8. Conclusiones	181

**Métodos simples para el análisis
de puntos degenerados
de sistemas analíticos planos**

José Ignacio Aranda Iriarte

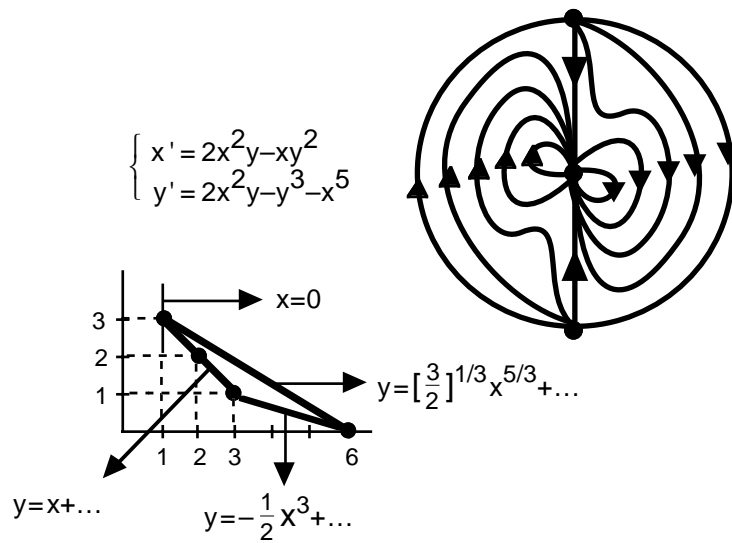
1998

Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Jesús Esquinas Candenás

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

a CM



Gracias por su ayuda y comentarios a:

Ana, Armengol, Carmen,
 Carmen María, Chema,
 Gabriel, Jaume, Jaume,
 Javier, Jesús, Juanma,
 Miguel Ángel, Paco, Ricardo.

1. Introducción.

El objetivo principal de este trabajo es presentar un método práctico y sistemático, basado en técnicas mucho más directas que otras ya conocidas, para analizar la estructura de las órbitas, cerca del origen y del infinito, del sistema autónomo analítico plano:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

Desde que hacia 1900 comenzaron Poincaré [1], Lyapunov [2], Bendixon [3], Dulac [4]... a tratar estos sistemas, mucho se ha escrito sobre ellos. El propio Poincaré clasificaba ya sus puntos críticos elementales (nodos, sillas, focos, centros) y Bendixon estudiaba aquellos con un autovalor cero (nodos, sillas, silla-nodos). Forster [5] trataba el caso en que los desarrollos de f y g comienzan por polinomios homogéneos del mismo grado sin raíces comunes. Aparecen más aportaciones en conocidos libros de los años sesenta como los de Nemytskii-Stepanov [6], Lefschetz [7] o Andronov-Leontovich-Gordon-Maier [8] (edición rusa del 66).

Un resultado básico en el estudio de puntos críticos es el hecho de que, mediante cambios de variable ('blow-ups'), el análisis de un punto no elemental de un sistema analítico (que no sea centro o foco) se reduce al de otros en que, como mucho, uno de los autovalores de su aproximación lineal es cero. La prueba de esta afirmación (exigiendo a [S] algo menos que la analiticidad) se encuentra en el artículo de Dumortier de 1977 ("Singularities of vector fields on the plane" [9]). Este resultado, en teoría, cierra el problema. Pero la vía habitual de estudiar los puntos críticos degenerados utilizando exclusivamente los blow-ups exige realizar excesivos cálculos y no existe aún una teoría práctica sobre el tema.

A lo largo de los años han seguido apareciendo trabajos que proponían métodos más rápidos que los anteriores para llevar a cabo el análisis de puntos críticos (éste es uno de ellos). Por ejemplo, en el libro "Local methods in nonlinear differential equations" [11] (1979, en ruso), Bruno defiende las ventajas de su algoritmo basado en la utilización de formas normales y en la poligonal de Newton (que nosotros también emplearemos de forma más directa). Sus ideas son citadas como las más prácticas por Arnold e Il'Yashenko en [10]. Aplicando las técnicas que expondremos al estudio de los ejemplos de Bruno de las páginas 143-151, se comprueba claramente que las suyas exigen muchos más cálculos (lo que puede dar lugar a errores, como de hecho sucede con el de la página 149).

El mapa de fases cerca de un punto crítico elemental, que no sea centro o foco, queda fijado si hallamos las variedades que llegan al origen (es decir, si hallamos los vectores propios de la aproximación lineal) y fijamos el flujo sobre ellas (con el signo del autovalor asociado). Esta es la idea que presidirá los métodos aquí presentados: determinaremos (a partir de los términos homogéneos de menor orden o utilizando la poligonal) la forma de las órbitas que pasan por el origen (si las hay) y las orientaremos. Con poco trabajo más veremos si el sector comprendido entre dos de esas órbitas consecutivas es parabólico, elíptico o hiperbólico que son, como es sabido, las únicas posibilidades ([6], [7], [8]). Con ello quedará determinada, sin hacer cambios de variable y salvo en las excepciones que detallaremos, la estructura local del punto.

Si no existen variedades que lleguen al origen, la cuestión (bastante más complicada y que todavía plantea problemas abiertos) será discutir si dicho punto es un centro o un foco (en los sistemas analíticos no se acumulan los ciclos límites ([4]) y no pueden existir los centro-focos). A esta discusión se dedican otros de los resultados originales que hemos obtenido.

El **capítulo 2** contiene un repaso de los puntos con un autovalor no nulo (su signo da el flujo sobre la variedad estable o inestable asociada) y otro cero (asociado a la 'variedad centro'). La estructura local queda determinada aquí también por el flujo sobre las variedades (para fijarlo sobre la centro hay que hallar términos de su desarrollo de Taylor). Presentamos los resultados sin suponer que la parte lineal esté en forma de Jordan para simplificar los cálculos habituales.

El **capítulo 3** muestra que considerar la 'aproximación homogénea' para un sistema que comienza por términos homogéneos de orden $n \geq 2$ es casi tan sencillo como considerarla para $n=1$ (la aproximación lineal). Bastará hallar unos 'vectores propios', obtener unos 'autovalores' a partir de ellos y determinar el signo de un polinomio. Como en el caso lineal, nuestros 'vectores propios' darán las rectas invariantes de la aproximación homogénea y los 'autovalores' fijarán el flujo sobre ellas. Aunque se han tratado ampliamente en la literatura los sistemas homogéneos y sus perturbaciones, aportamos aquí esta visión novedosa en lenguaje lineal, organizamos de forma práctica los cálculos e incluimos la posibilidad no recogida en trabajos anteriores de que existan 'autovalores cero simples' (asociados a variedades regulares tipo centro). Para probar los teoremas se hará explotar el origen en puntos sencillos con los clásicos blow-ups para el estudio de puntos degenerados: el cambio a polares o, mejor, el cambio $x=x; y=xv$. Pero, una vez demostrados, sólo en casos excepcionales serán necesarios los cambios para analizar el origen (el capítulo 5 los hará innecesarios incluso en algunos de estos casos).

La secciones posteriores del capítulo estudian las aproximaciones homogéneas para $n=2$ y $n=3$, utilizando las respectivas 'ecuaciones de autovalores' y simplificando el problema de precisar cuándo hay valores propios múltiples con autovalor cero, que es uno de los casos en que no bastan las técnicas mostradas para analizar el punto. Previamente se deducen formas, adecuadas a nuestros intereses, de calcular las raíces polinomios de tercer o cuarto grado, se caracteriza cuándo son simples o múltiples y cuántas son reales y cuántas complejas. Concluye el capítulo con unas breves ideas, basadas en estos resultados, sobre la estabilidad del origen.

El capítulo 3 no aborda el caso de que todos los autovalores sean complejos. Entonces no hay variedades que lleguen al origen y el punto es centro o foco. A este problema se dedica el **capítulo 4**. La situación vuelve a ser similar al caso $n=1$: si la aproximación homogénea posee un foco, el sistema completo también (con la misma estabilidad); si un centro, puede convertirse en un foco al añadir términos de mayor orden. Pero si $n > 1$ e impar (si es par siempre hay órbitas pasando por el origen) la distinción entre centro y foco de la aproximación homogénea no es tan simple como el signo de la parte real de un autovalor: la da el signo de una integral I de un cociente de polinomios (si $I=0$ hay un centro). Hallar el signo de I analíticamente es ya difícil incluso si $n=3$, y no existe casi ningún resultado general sobre el tema.

Para atacar este problema escribiremos I en términos de las raíces de polinomios de tercer orden, la expresaremos en términos de los coeficientes del sistema en diversos casos y deduciremos una condición polinómica necesaria (aunque no suficiente) para su anulación. Esto nos permitirá analizar varios ejemplos de distinción entre centros y focos homogéneos, más generales que los que ilustran otros trabajos.

Más complicado es ver en qué se convierte un centro. Primero repasamos el problema para $n=1$, simplificando los cálculos clásicos de los valores focales o constantes de Lyapunov. Se aborda después el problema (mucho más difícil y menos tratado) para $n \geq 3$. Reduciendo las complicadas integrales que dan la estabilidad para $n=3$ conseguimos, en ocasiones, dar un signo definido al integrando y probar algebraicamente que el centro se ha convertido en foco.

Analizamos en el **capítulo 5** el caso de autovalor cero múltiple usando como herramienta fundamental la poligonal de Newton que, aunque se ha utilizado (de forma menos práctica que la aquí propuesta) por varios autores (Bruno, Berezowskaya, Brunella-Miari,...), es ignorada, desafortunadamente, en casi todas las referencias recientes. Veremos que para completar el análisis homogéneo bastará, una vez más, hallar y orientar las órbitas que pasan por el origen (y como mucho fijar el signo de algún polinomio más). Hallar esas órbitas (si entran con pendiente horizontal o vertical) se puede hacer de forma sencilla: determinando, a partir de la poligonal, las ramas de una curva algebraica. Probaremos que las ramas asociadas a los segmentos de la poligonal (y tal vez otras asociadas a los vértices) dan todas las variedades buscadas. El origen quedará determinado con el flujo sobre ellas y el signo de uno o más polinomios. Este resultado generaliza los del capítulo 3: allí la poligonal se reduce a un segmento de pendiente -1 y las ramas son las rectas invariantes ya citadas. Los términos del sistema que dan puntos sobre la poligonal son casi siempre los únicos necesarios para fijar la estructura del origen. Constituyen, aún más que la aproximación homogénea, la mejor generalización de la aproximación lineal elemental. Los teoremas son de demostración larga y exigirán la realización de sucesivos blow-ups, pero una vez probados serán, en general, innecesarios los cambios. Sólo quedarán por analizar, además de los centros y focos no abordables con el capítulo 4 (que sí sabremos tratar si la poligonal se reduce a un segmento), unas situaciones muy excepcionales. Se darán ideas de cómo atacarlas también sin cambios de variable. Se estudiarán a lo largo del capítulo varios sistemas concretos (algunos ya tratados con otras técnicas) para mostrar la bondad del método.

El **capítulo 6** prueba que para el análisis del infinito de un sistema polinomial se puede dar una teoría directa, dual y con el mismo grado de dificultad que la del origen (tampoco esta idea ha sido aprovechada lo suficiente en la literatura). Tras presentar (de un modo más directo que el habitual) los cambios de variable que llevan puntos críticos del infinito a otros finitos se van deduciendo resultados similares a los de los capítulos anteriores. De nuevo no habrá que hacer ningún cambio, salvo excepciones, para determinar la estructura del infinito: bastará hallar las variedades que lleguen al infinito, orientarlas y precisar el signo de algún polinomio. Para ello en muchos casos basta considerar los términos homogéneos de mayor orden. También será muy parecida la forma de distinguir entre centros y focos en el infinito. Cuando los términos de mayor orden no basten habrá que acudir a la poligonal (en este caso a la que rodea por arriba a los puntos del sistema, que no ha sido utilizada en este análisis). Los resultados del capítulo, unidos a los del origen, permiten analizar los sistemas polinomiales mucho más rápidamente que con las técnicas habituales basadas en blow-ups que, aún hoy en día, se utilizan. Esto se comprueba en los ejemplos del final del capítulo. Gracias a la poligonal es fácil construir sistemas con propiedades deseadas (por ejemplo, sistemas con ciclos límites o atractores inestables) o clasificar, con pocos cálculos, sistemas que dependen de parámetros. Trataremos también ejemplos que presentan una especie de 'bifurcación de Hopf no lineal'.

Para favorecer la lectura casi no se han introducido las referencias dentro del texto, como es usual, sino en la introducción de cada capítulo (al final se resumen todas en el **capítulo 7**). En esas introducciones detallaremos dónde encontrar los resultados presentados sin prueba o que hemos demostrado de forma distinta y citaremos los resultados parciales mejorados por este trabajo. Un breve **capítulo 8** final resume las principales aportaciones de esta memoria.

Digamos algo más sobre la forma de presentar los resultados. Intentando hacer más legible el texto no hemos querido usar demasiado las palabras 'definición', 'teorema' o similares y por eso muchas conclusiones aparecerán entre los cálculos, según han sido deducidas. Aunque el objetivo del trabajo es elaborar métodos generales, para hacerlos más comprensibles hemos tratado una gran cantidad de ejemplos (que tienen en muchos casos interés en sí mismos).

Para la edición, con el fin de controlar mejor la presentación, se ha escrito el texto con el Microsoft Word y sobre él se han pegado los dibujos hechos con el SuperPaint. Las órbitas aproximadas proceden de un viejo programa de 78K: el DEGraph (sus curvas arrugadas sobre ejes sin unidades pueden recordar que son sólo aproximaciones numéricas). Para algunos cálculos no realizables a mano se ha utilizado el Maple. Gran parte de ellos se han hecho con un lento Macintosh SE20 con 4 megas de memoria (es fácil, pues, reproducir muchas cuentas). Sólo en ocasiones se han tenido que utilizar ordenadores más potentes (para alguna integral numérica o para el manejo de alguno de los largos polinomios de los capítulos 3 ó 4).

Referencias de esta introducción

- [1] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.
Jour. Math. Pures et Appl. [1881-82-85-86].
- [2] A. M. Lyapunov. Investigation of one of the singular cases of the theory of stability of motion.
Mathematicheskii Sbornik, **17** [1893].
- [3] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math., **24** [1901].
- [4] H. Dulac. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France **51** [1923].
- [5] H. Forster. Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung
erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Math. Zeit., Dtsch, **43** [1938].
- [6] V. V. Nemytskii - V. V. Stepanov. Qualitative theory of differential equations.
Princeton University Press [1960].
- [7] S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- [8] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory
of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [9] F. Dumortier. Singularities of vector fields on the plane. J. of Diff. Eq. **23** [1977], 53-106.
- [10] V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations.
Encyclopaedia of Math. Sci., vol 1. Springer- Verlag [1989].
- [11] A. D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer- Verlag [1989].

2. Puntos críticos con un único autovalor cero.

Consideremos el sistema analítico

$$[S] \quad \begin{cases} x' = ax + by + A^p(x,y) + A^{p+1}(x,y) + \dots \equiv f(x,y) \\ y' = cx + dy + B^p(x,y) + B^{p+1}(x,y) + \dots \equiv g(x,y) \end{cases}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con A^k y B^k polinomios homogéneos de grado $k \geq 2$, es decir:

$$A^k(x,y) = \sum_{j=0}^k a_{k-j,k} x^{k-j} y^j ; \quad B^k(x,y) = \sum_{j=0}^k b_{k-j,k} x^{k-j} y^j$$

Supongamos que el origen $\mathbf{0}$ es un punto crítico aislado, que los autovalores de la matriz M son $\lambda_0=0$ y $\lambda_1 \neq 0$ (es decir, que $ab=cd$ y $\lambda_1=a+d \neq 0$) y sean \mathbf{v}_0 y \mathbf{v}_1 los vectores propios respectivos. La estructura local de estos puntos es bien conocida y fue establecida ya por Bendixson ([1]). Para determinarla basta, como en los puntos elementales con autovalores reales, encontrar las variedades que llegan a $\mathbf{0}$ con pendiente definida y fijar el flujo local sobre ellas. Simplemente es algo más complicado que en los elementales estudiar las variedades asociadas al autovalor 0 (variedades centro). En el siguiente teorema presentamos, como ya se hizo en [6], una forma más directa que la habitual de analizar estos puntos (sin suponer, a diferencia de resultados anteriores, que la matriz M esté escrita en forma de Jordan):

Teorema 2.1

- i) Existe una única variedad (**variedad estable o inestable**) que llega al origen siendo tangente a \mathbf{v}_1 ; el sentido del flujo local sobre esta variedad queda determinado por el signo de λ_1 .
- ii) Existe al menos una variedad de clase C^∞ asociada a λ_0 (**variedad centro**) que llega al origen siendo tangente a \mathbf{v}_0 ; el flujo local sobre esta variedad depende de los términos no lineales de [S] y se puede determinar calculando algún término de su desarrollo en serie de Taylor a partir de la ecuación de las órbitas del sistema [S] [$dy/dx = g(x,y)/f(x,y)$].
- iii) La estructura de las órbitas de [S] en un entorno del origen queda determinada por λ_1 y el flujo sobre la variedad centro, pudiendo tratarse de un nodo (estable o inestable), de un punto silla o de un silla-nodo.

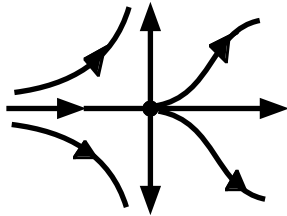
[Observemos que la variedad centro no tiene por qué ser única.
De hecho, salvo en el caso del punto silla, existen infinitas].

Ejemplos de las tres posibles configuraciones citadas en el teorema nos los dan los tres sencillos sistemas siguientes, para los que la expresión de sus órbitas es fácilmente calculable:

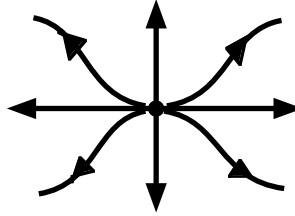
$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = y \end{cases} \rightarrow y = Ce^{-1/x}$$

$$\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = y \end{cases} \rightarrow y = Ce^{-1/2x^2}$$

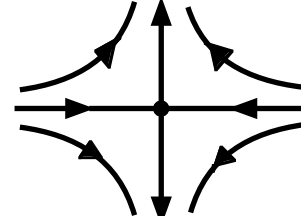
$$\begin{cases} x' = -x^3 \\ y' = y \end{cases} \rightarrow y = Ce^{1/2x^2}$$



silla-nodo



nodo



silla

Como se observa, en el primero y segundo casos existen infinitas variedades centro, todas ellas son C^∞ y todas tienen la misma serie de Taylor, aunque, salvo la $y=0$, ninguna sea analítica. Para sistemas del tipo [S], en general, no dispondremos de una expresión explícita de la variedad centro, pero siempre podremos (por ser la variedad infinitamente derivable) calcular algún término de su desarrollo en serie de potencias (que podría converger sólo para $x=0$). Esto bastará para determinar el flujo sobre ella y la estructura local de las órbitas.

Observemos también que las variedades asociadas a autovalores no nulos, en general, no admiten estos desarrollos. Por ejemplo, el nodo elemental $x' = x$, $y' = 2y - x^2$ tiene por órbitas $y = [C - \log|x|]x^2$ y todas las variedades que pasan por el origen siendo tangentes al eje x son solamente C^1 en un entorno de $x=0$. Pero la no regularidad estas variedades no dificulta el análisis ya que el flujo sobre ellas viene dado por el signo del autovalor.

La justificación de las afirmaciones hechas hasta ahora se deduce de la vasta bibliografía existente sobre variedades centro (los libros [4], [5], [6], [8], [9], [10] y [11], por ejemplo) o de resultados más antiguos en los que se aborda directamente y por otros métodos el análisis de este tipo de puntos (como el capítulo X de [2] y el IX de [3]). Usualmente, se supone que, tras cambios de variable lineales, [S] tiene la matriz M escrita ya en forma de Jordan:

$$[Sd] \quad \begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = d y + Q(x,y) \end{cases}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad d \neq 0, \quad P, Q \text{ de orden } > 1$$

Para estos sistemas se demuestra [ver, por ejemplo, el libro de Chow-Hale] que si P y Q son de clase C^k en un entorno U del origen existe una variedad centro local $y=h(x)$ de clase C^k con $h(0)=h'(0)=0$. Además, si $d < 0$, se prueba que la estabilidad del origen de [Sd] es la misma que la de la solución $x=0$ de la ecuación escalar $x' = P(x, h(x))$ y se tiene que dentro de U todas las soluciones se acercan exponencialmente a las soluciones sobre la variedad centro. Si $d > 0$, basta cambiar el sentido de las órbitas. La caracterización de la página anterior es una forma simplificada de presentar los resultados referidos, de forma más práctica para los cálculos concretos (es un rodeo innecesario poner M en forma de Jordan).

Ilustremos el método propuesto de análisis de puntos con un $\lambda=0$ con un par de ejemplos:

Ejemplo 1. $\begin{cases} x' = x-y-xy-x^3 \\ y' = -x+y+3y^2 \end{cases}$ En este caso $\lambda_0=0$, $\mathbf{v}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1=2$, $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Existe variedad inestable tangente a \mathbf{v}_1 . Para ver el flujo sobre la variedad centro (tangente a \mathbf{v}_0) probamos soluciones de la forma $y = x+c_2x^2+\dots$ en la ecuación diferencial de las órbitas:

$$[x-y-xy-x^3] \frac{dy}{dx} = -x+y+3y^2 \rightarrow$$

$$[x-x-c_2x^2-\dots-x^2-\dots+x^3] [1+2c_2x+\dots] = -x+x+c_2x^2+\dots+3x^2+\dots$$

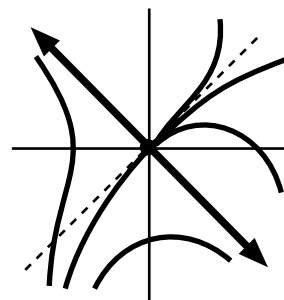
Por tanto, $-c_2-1 = -c_2+3 \rightarrow c_2 = -2$

La variedad centro es de la forma $y = x-2x^2+O(x^3)$.

Llevando esta expresión a la primera ecuación del sistema obtenemos

$$x' = x-x+2x^2-x^2+O(x^3) = x^2+O(x^3)$$

con lo que la variedad centro se recorre hacia la derecha a ambos lados del origen y se trata de un silla-nodo.



Para determinar el flujo en la variedad centro, en ocasiones necesitaremos varios términos de su desarrollo (y en otras nos bastará con el término lineal que se deduce de \mathbf{v}_1) como en:

Ejemplo 2. $\begin{cases} x' = xy-x^3+xy^2 \\ y' = -y+x^2 \end{cases}$ $\lambda_0=0$, $\mathbf{v}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1=-1$, $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Probamos $y = c_2x^2+c_3x^3+\dots$ en la ecuación de las órbitas:

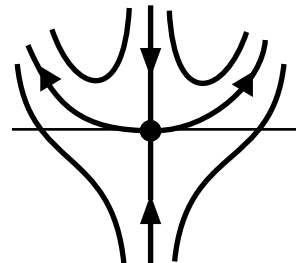
$$[c_2x^3+c_3x^4+c_4x^5+\dots-x^3+c_2^2x^5+\dots] [2c_2x+3c_3x^2+\dots] =$$

$$= -c_2x^2-c_3x^3-\dots+x^2 \rightarrow c_2=1.$$

Esto no basta, pues de $y = x^2+O(x^3)$ sólo deducimos $x' = O(x^4)$.

Necesitamos calcular también $c_3=0$, $c_4=0$ (y ningún término más).

Ahora $y = x^2+O(x^5) \rightarrow x' = x^5+O(x^4)$, y el origen es un punto silla.



Volvamos al sistema general [S]. Sea $d \neq 0$ (en caso contrario cambiaríamos los papeles de x e y). Como el vector propio asociado a $\lambda_0=0$ es $(1, -c/d)$ probamos series de la forma

$$y = -\frac{c}{d}x + c_p x^p + \dots \rightarrow$$

$$[bc_p x^p + A^p(x, -\frac{c}{d}x + \dots) + \dots] [-\frac{c}{d}x + \dots] = dc_p x^p + B^p(x, -\frac{c}{d}x + \dots) + \dots \rightarrow$$

$$(1) \quad y = h(x) = -\frac{c}{d}x + \frac{1}{d(d+a)} [cA^p(1, -\frac{c}{d}) + dB^p(1, -\frac{c}{d})] x^p + O(x^{p+1}) \rightarrow$$

$$(2) \quad x' = \frac{1}{d+a} [dA^p(1, -\frac{c}{d}) - bB^p(1, -\frac{c}{d})] x^p + O(x^{p+1})$$

y, por tanto, si el corchete no se anula basta para determinar la estructura del origen.

Tratemos ahora el caso particular en que el sistema tenga la forma [S_d]. Si todos los $b_{k0}=0$ la variedad centro es $y=0$ (sobre dicho eje es $y'=0$). En caso contrario, supongamos que el primer b_{k0} que no se anula es b_{N0} . Entonces es fácil comprobar que $c_2 = \dots = c_{N-1} = 0$ y $dc_N + b_N = 0$, y por tanto la variedad centro es simplemente de la forma

$$y = -\frac{b_{N0}}{d}x^N + O(x^{N+1}), \quad N \geq p$$

[Observemos que, en general, no son los términos no lineales de menor orden los que más influyen en la forma de la variedad o en la estructura del origen de [S_d] (por ejemplo, influyen más que b_{02} el b_{30} en la forma y el a_{30} en la estructura). Esto no contradice (1) y (2); de allí:

$$h(x) = -\frac{1}{d}b_{p0}x^p + O(x^{p+1}) = O(x^{p+1}) \text{ si } N > p; \quad x' = a_{p0}x^p + O(x^{p+1}) \quad]$$

Los sistemas con $a=b=c=0$ permiten, además, determinar su estructura mediante cálculos más sencillos [método de Lyapunov-Schmidt; ver [5], o [3] para un estudio similar más directo]. Sea $y = L(x)$ la función analítica con $L(0)=L'(0)=0$ definida en un entorno de $\mathbf{0}$ por la ecuación $dy + A^p(x,y) + \dots = 0$ (el teorema de la función implícita garantiza su existencia). Se demuestra que entonces el flujo local sobre la variedad centro coincide con el de la ecuación escalar obtenida al sustituir la y por $L(x)$ en la primera ecuación: $x' = P(x, L(x))$. También aquí bastará hallar un número finito de términos del desarrollo de $L(x)$ para analizar cada ejemplo concreto. El primer término de este desarrollo es, de nuevo, $(-b_{N0}/d)x^N$ aunque $L(x)$ y $h(x)$ diferirán en términos posteriores. Observemos que la ecuación escalar para x' obtenida al sustituir y por $h(x)$ o $L(x)$ no puede ser $x'=0$, ya que esto implicaría que $y=h(x)$ e $y=L(x)$ serían curvas de puntos críticos y el origen no sería aislado.

Calculemos, utilizando ambos métodos descritos, algún término más de los desarrollos en un sistema de la forma [S_d], en el caso de que P y Q comiencen por términos de orden dos:

$$h(x) = c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \rightarrow$$

$$h(x) = -\frac{b_{20}}{d}x^2 + \left[\frac{(b_{11}-2a_{20})b_{20}}{d^2} - \frac{b_{30}}{d} \right] x^3 + \left[\frac{b_{20}}{d^3} (2b_{20}a_{11} + 5a_{20}b_{11} - 6a_{20}^2 - b_{20}b_{02} - b_{11}^2) + \frac{b_{20}}{d^2} (b_{21} - 2a_{30}) + \frac{b_{30}}{d^2} (b_{11} - 3a_{20}) - \frac{b_{40}}{d} \right] x^4 + O(x^5) \rightarrow$$

$$x' = a_{20}x^2 + \left[a_{30} - \frac{a_{11}b_{20}}{d} \right] x^3 + \left[a_{40} - \frac{a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30}}{d} + \frac{b_{20}(a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11} - 2a_{20}a_{11})}{d^2} \right] x^4 + O(x^5)$$

Los primeros términos de $L(x)$ son (basta hacer todos los $a_{ij}=0$):

$$L(x) = -\frac{b_{20}}{d}x^2 + \left[\frac{b_{11}b_{20}}{d^2} - \frac{b_{30}}{d} \right] x^3 + \left[-\frac{b_{20}}{d^3} (b_{20}b_{02} + b_{11}^2) + \frac{b_{20}b_{21} + b_{11}b_{30}}{d^2} - \frac{b_{40}}{d} \right] x^4 + O(x^5)$$

$$\rightarrow x' = a_{20}x^2 + \left[a_{30} - \frac{a_{11}b_{20}}{d} \right] x^3 + \left[a_{40} - \frac{a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30}}{d} + \frac{b_{20}(a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11})}{d^2} \right] x^4 + O(x^5)$$

que nos proporciona la misma estabilidad.

Referencias del capítulo 2

- [1] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math., **24** [1901].
- [2] S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- [3] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [4] J. Carr. Applications of center manifold theory. Springer-Verlag [1981].
- [5] S. N. Chow - J. K. Hale. Methods of bifurcation theory. Springer-Verlag [1982].
- [6] J. Guckenheimer - P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag [1983].
- [7] J.I.Aranda. Métodos simples para el estudio de puntos singulares degenerados. Actas VII CEDYA [1984], 11-14.
- [8] S. Wiggins. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer-Verlag [1990].
- [9] D. K. Arrowsmith - C. M. Place. An introduction to dynamical systems. Cambridge University Press [1990].
- [10] J. Hale - H. Koçak. Dynamics and bifurcations. Springer-Verlag [1991].
- [11] L. Perko. Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag [1996].

3. Análisis de puntos 'poco degenerados'.

Consideremos en este capítulo el sistema analítico

$$[S] \quad \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + A^p(x,y) + \dots \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + B^p(x,y) + \dots \end{cases}$$

con $p > n \geq 1$, donde A^k y B^k son polinomios homogéneos de grado k como en el capítulo anterior y donde al menos uno de los A^n o B^n no es idénticamente nulo. En el capítulo vamos a tratar [S] de forma similar a como se trata el caso lineal y por eso introduciremos nosotros unas notaciones inspiradas en ese caso. Así, diremos que su '**aproximación homogénea**' es el sistema [H] obtenido considerando sólo los términos de menor orden:

$$[H] \quad \begin{cases} x' = A^n(x,y) \\ y' = B^n(x,y) \end{cases}$$

Suponemos también que el origen $\mathbf{0}$ es un punto crítico aislado de [S] (si hay una curva de puntos críticos $p(x,y)=0$, con p factor común de f y g , tras dividir ambos segundos miembros por p tenemos un sistema (de estructura más sencilla) con las mismas órbitas que [S], salvo la desaparición de puntos críticos y el posible cambio de sentido de parte de las órbitas).

Los puntos '**poco degenerados**' de este capítulo serán aquellos para los que bastaría un único cambio de variable a polares o la realización de un único 'blow-up' $x=x, y=xv$ (y tal vez además uno $x=yu; y=y$) para precisar su estructura. Es decir, aquellos para los que con sólo uno de estos cambios el origen queda descompuesto en varios de los conocidos puntos elementales o con un único autovalor cero (llamaremos puntos 'simples' a los que sean de uno de estos dos tipos). Entonces será inmediato caracterizar los sectores parabólicos, hiperbólicos o elípticos que rodean al punto.

Los cambios de variable citados fueron usados ya por Bendixon para precisar las posibles direcciones de llegada al origen y hay trabajos en la línea de los de las dos primeras secciones en variadas referencias, como [3] (que cita a Forster [1]), [4], [5], [7], [8], [9],[14] o [16].

Sin embargo no se ha observado hasta ahora que para estos puntos 'poco degenerados' ni siquiera es preciso realizar explícitamente los cambios y que se puede emplear en su análisis un algoritmo muy similar y, en teoría, no mucho más complicado que el de los puntos simples: en vez de resolver una ecuación de segundo grado para hallar autovalores y autovectores, bastará con hallar unos '**vectores propios**' (las raíces de un polinomio P de grado $n+1$ basado en la aproximación homogénea), deducir de ellos unos '**autovalores**' (el valor de otro polinomio en esas raíces), fijar el signo de P entre sus raíces (para orientar una circunferencia) y, tal vez, calcular algún término del desarrollo de una '**variedad centro**', probando (como se hizo en el capítulo 2) series en la ecuación de las órbitas. Estas ideas se precisan en el teorema básico del capítulo: el **teorema 3.2** de la página 19 (presentado en [13]).

En los resultados previos sobre sistemas homogéneos y sus perturbaciones se supone además que A y B no tienen factores comunes, es decir, que no hay rectas de puntos críticos (es decir, en nuestros términos, 'autovalores cero'). El teorema 3.2 admite también esta situación (si el vector propio es simple): bastará entonces hallar términos de variedades 'centro'. [15] discute la presencia de factores comunes pero en sistemas propiamente homogéneos.

Otra analogía entre los puntos 'poco degenerados' y los elementales será que si todos los 'autovalores' son no nulos la estructura local de $[S]$ mantiene la estructura de su aproximación homogénea $[H]$ (como ocurre con la aproximación lineal). Este resultado (corolario inmediato del teorema 3.2) se puede encontrar, con otras palabras, en [16].

Si para el caso lineal era fácil analizar el punto excepto si los dos autovalores eran cero (o si eran imaginarios) aquí ocurrirá algo parecido: sólo será insuficiente el teorema 3.2 cuando sea $P \equiv 0$, cuando existan 'vectores propios múltiples' asociados a un 'autovalor cero' o cuando sean complejos todos los 'autovalores' (en este caso el origen será un centro o un foco).

En las secciones 3.4 y 3.6, explotando la descrita visión lineal (no utilizada hasta ahora) del problema, estudiaremos con detalle las **ecuaciones de autovalores y vectores propios** de los sistemas para los que A^n y B^n son de **orden 2** y de **orden 3**, para caracterizar, de forma sencilla y en términos de los coeficientes del sistema, cuándo influyen en la estructura los términos de mayor orden y cuándo el teorema 3.2 no decide.

Por ejemplo, si $n=2$, para descubrir que hay 'autovalores cero' debemos en principio hallar las raíces reales de un polinomio de tercer grado y ver que anulan otro del mismo grado. Con la ecuación de autovalores el problema se reduce a ver que se anula su término independiente (polinomio de orden 4 en los coeficientes del sistema). Más simplificaremos, todavía, la cuestión de precisar si hay 'vectores propios múltiples' con 'autovalor cero'. En el caso $n=3$ la ecuación de autovalores proporcionará además una información directa sobre la **estabilidad** del origen.

Nuestros resultados sobre perturbaciones de sistemas homogéneos cuadráticos y cúbicos se pueden comparar con la variada literatura que estudia los sistemas homogéneos de esos órdenes: así los cuadráticos son clasificados en [10], [11] o [12] y los cúbicos en [14] (aunque, como hemos dicho, nuestro objetivo es diferente: no buscamos una clasificación sino precisar de modo inmediato cuando hay rectas dobles de puntos críticos en esos sistemas).

Como los vectores propios son raíces de un polinomio de grado $n+1$ y las dificultades están asociadas a raíces múltiples (o complejas), antes de tratar los sistemas de orden 2 y 3 vamos a precisar (en las secciones 3.3 y 3.5) cuándo son múltiples las raíces (y cómo calcularlas) de los polinomios de grados 3 y 4, y cuando todas ellas son complejas (en los de grado 4). Algunas de las ideas que utilizaremos (raíces, resultante, discriminante, método de Sturm...) se han inspirado en los libros [2] y [6], pero aquí deduciremos muchos resultados que no están en ellos (expresiones compactas de discriminantes, caracterización del número de raíces reales y complejas de los polinomios de grado 4, métodos para su cálculo adecuados a nuestros objetivos,...). No obstante, no sería extraño que hayamos vuelto a 'descubrir' viejos resultados sobre un tema tan clásico.

Las formas de abordar las situaciones no recogidas en este capítulo serán descritas en los posteriores: los centros y focos se tratarán en el 4 y los casos $P \equiv 0$ y autovalores cero múltiples en el 5. Conseguiremos en esos capítulos hacer innecesarios los cambios de variable también en esos casos (salvo en situaciones cada vez más excepcionales).

Referencias del capítulo 3

- [1] H. Forster. Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Math. Zeit., Dtsch, **43** [1938].
- [2] J. V. Uspensky. Theory of equations. McGraw-Hill [1948].
- [3] V. V. Nemytskii - V. V. Stepanov. Qualitative theory of differential equations. Princeton University Press [1960].
- [4] S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- [5] P. Hartman. Ordinary differential equations. Wiley [1964].
- [6] J. Rey Pastor. Análisis matemático. Kapelusz [1965].
- [7] C. Coleman. Equivalence of planar dynamical and differential systems. J. of Diff. Eq. **1** [1965], 222-233.
- [8] J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans \mathbb{R}^2 . Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV **79** [1968], 35-69.
- [9] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [10] N. I. Vulpe - K. S. Sibirskii. Geometric classification of quadratic differential systems. Differential Equations **13** [1977], 548-556.
- [11] T. A. Newton. Two dimensional homogeneous quadratic differential systems. J. of Diff. Eq. **20** [1978], 120-138.
- [12] T. Date. Classification and analysis of two-dimensional homogeneous quadratic differential systems. J. of Diff. Eq. **32** [1979], 311-334.
- [13] J.I.Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos. Actas X CEDYA [1987], 20-25.
- [14] A. Cima - J.Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. J. of Math. Anal. and Appl. **147** [1990], 420-448.
- [15] C. B. Collins. Algebraic conditions for a center or a focus in some simple systems of arbitrary degree. J. of Math. Anal. and Appl. **195** [1995], 719-735.
- [16] J. Llibre - J. S. Pérez del Río - J. A. Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity. J. of Diff. Eq. **125** [1996], 490-520.

3.1. Utilizando la expresión en polares

Comencemos con el cambio a **polares**: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi/2, 3\pi/2]$. Denotaremos para abreviar en esta sección y la siguiente $c \equiv \cos \theta$, $s \equiv \sin \theta$, $A^n \equiv A$ y $B^n \equiv B$. El sistema [S] se convierte en:

$$\begin{cases} r' = r^n [cA(c,s) + sB(c,s)] + \dots & \equiv r^n R(\theta) + \dots \\ \theta' = r^{n-1} [cB(c,s) - sA(c,s)] + r^{p-1} [cB^p(c,s) - sA^p(c,s)] + \dots & \equiv r^{n-1} \Theta(\theta) + r^{p-1} \Theta^p(\theta) + \dots \end{cases}$$

Las órbitas de este sistema en $r > 0$ son las mismas que las de

$$[P] \begin{cases} r' = r [cA(c,s) + sB(c,s)] + \dots & = r R(\theta) + \dots \\ \theta' = [cB(c,s) - sA(c,s)] + r^{p-n} [cB^p(c,s) - sA^p(c,s)] + \dots & = \Theta(\theta) + r^{p-n} \Theta^p(\theta) + \dots \end{cases}$$

Los puntos críticos de [P] sobre $r=0$ vienen dados por

$$(1) \quad cB(c,s) - sA(c,s) \equiv \Theta(\theta) = 0$$

polinomio homogéneo de grado $n+1$ en $\cos \theta$ y $\sin \theta$. Supondremos durante toda esta sección que $\Theta(\theta)$ **no es idénticamente nulo**.

Podemos escribir (1) en la forma:

$$(2) \quad B(1, \tan \theta) - \tan \theta A(1, \tan \theta) = 0$$

(teniendo en cuenta que si $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ son raíces de (1) no aparecerán entre las raíces de (2)). Esta ecuación tiene a lo más $2n+2$ raíces reales θ_i agrupadas por parejas, ya que si θ_i es raíz también lo es $\theta_i + \pi$. Llamaremos $\theta_1, \dots, \theta_q$ (con $q \leq n+1$) a las raíces de (1) que se encuentren en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2]$. Observemos que, por ser el origen un punto crítico aislado, no existen más puntos en el entorno del eje $r=0$ que los dados por (1). Como dicho eje es una órbita de [P], las órbitas de $r > 0$ que lleguen a él sólo pueden hacerlo a los puntos $(0, \theta_i)$ anteriores. A cada órbita que llegue a uno de esos puntos se corresponderá una órbita de [S] que llega al origen con pendiente $\tan \theta_i$ y esas serán las únicas posibles pendientes de las órbitas de [S] que lleguen a $\mathbf{0}$. En el caso de que no existiese ninguna raíz real de (1), ninguna órbita podría acercarse a $\mathbf{0}$ con pendiente definida y entonces $\mathbf{0}$ se trataría de un centro o de un foco estable o inestable (dedicaremos el capítulo 4 a estudiar estas últimas posibilidades).

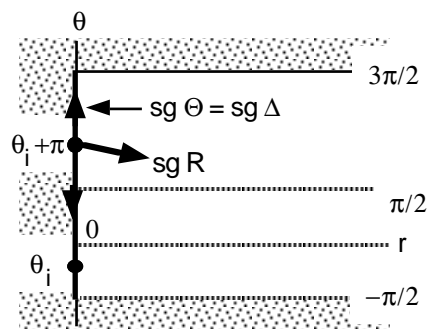
De forma equivalente, escribiendo (1) en cartesianas obtenemos la ecuación más sencilla

$$(3) \quad \Delta(x,y) \equiv xB(x,y) - yA(x,y) = 0$$

que define a lo más $n+1$ rectas que pasan por el origen. Con todo lo anterior está claro que,

si una órbita llega a $\mathbf{0}$ lo hará siendo tangente a alguna de las rectas definidas por la ecuación (3).

Si cada uno de los $(0, \theta_i)$ fuese un punto simple, la estructura de las órbitas de [P] cerca del eje $r=0$, y por tanto la estructura de $\mathbf{0}$, quedaría perfectamente determinada. La matriz de la aproximación lineal de [P] en cada uno de esos puntos es:



$$M(\theta_i) = \begin{pmatrix} R(\theta_i) & 0 \\ E(\theta_i) & \frac{d}{d\theta} \Theta(\theta_i) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad E(\theta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n+1 \\ \Theta^{n+1}(\theta_i) & \text{si } p = n+1 \end{cases}$$

Los autovalores de $M(\theta_i)$ son $\Lambda_i = R(\theta_i)$ y $M_i = \Theta'(\theta_i)$, asociado este último a un vector propio vertical. Como $r=0$ es órbita, si $(0, \theta_i)$ es simple sólo puede tratarse de un nodo, una silla o un silla-nodo. Los autovalores de $M(\theta_i + \pi)$ son los mismos Λ_i y M_i si n es impar o $-\Lambda_i$, $-M_i$ si n es par. Así pues,

la estructura local de 0 queda determinada si $\Lambda_i^2 + M_i^2 \neq 0$ para todo $i=1, \dots, q$.

Veamos como podemos precisar esta estructura realizando el mínimo de cálculos. Si θ_i es una raíz simple de $\Theta(\theta)=0$ entonces $\Theta'(\theta_i)$ será distinto de cero, con lo que $(0, \theta_i)$ será un punto simple. Si ninguna raíz es múltiple, a cada $(0, \theta_i)$ llegará una variedad no vertical (al menos). El flujo sobre esta variedad estará determinado por $R(\theta_i)$ si es no nulo. Si $R(\theta_i)=0$ será más cómodo determinar el flujo sobre la variedad centro volviendo al sistema [S] y probando la serie adecuada (la variedad seguirá siendo infinitamente derivable en cartesianas). Como $\theta' = \Theta(\theta)$ en $r=0$, para analizar el flujo en la variedad vertical más rápido que calcular los M_i será determinar el signo de Θ en $[0, 2\pi]$ (es decir, el signo de $\Delta(x, y)$). Para ello se puede calcular Θ en algún θ que no sea raíz de (1) e ir luego orientando alternativamente los segmentos entre puntos críticos.

Si θ_i es un raíz de multiplicidad k y $\Lambda_i = R(\theta_i) \neq 0$ (si es cero exigirá un análisis bastante más detallado que veremos en capítulos posteriores) la variedad no centro está ya orientada con Λ_i . El flujo en las cercanías de $(0, \theta_i)$ sobre $r=0$ (variedad centro) se determinará de forma análoga a la de antes (sin calcular M_i), teniendo en cuenta que ahora la orientación del eje por encima y por debajo del punto será la misma o la opuesta dependiendo de que la multiplicidad k sea par o impar respectivamente.

Resumamos los cálculos anteriores en un teorema:

Teorema 3.1

Supongamos que $\Theta(\theta) = \cos \theta B(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta A(\cos \theta, \sin \theta) \pm 0$ y que $\Theta(\theta)=0$ posee $q \neq 0$ ceros reales $\theta_1, \dots, \theta_q$ en $(-\pi/2, \pi/2]$. Si todos ellos son simples o si para aquellos θ_i que sean múltiples se tiene que $R(\theta_i) \neq 0$, existe para cada $i=1, \dots, q$ al menos una variedad de [S] que llega a **0** con pendiente $\tan \theta_i$.

El flujo local sobre cada una de ellas viene dado por el signo de $R(\theta_i)$ si no es nulo o se puede precisar calculando algún término del desarrollo de la variedad si es $R(\theta_i)=0$.

Estos flujos y el signo de $\Theta(\theta)$ en $[0, 2\pi]$ determinan la estructura local de **0**.

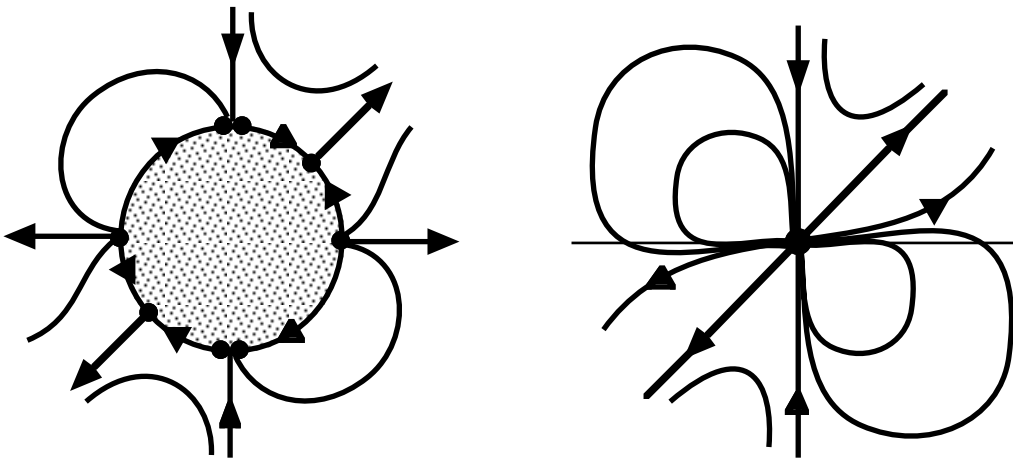
En la práctica conviene ir esquematizando la información obtenida sobre una circunferencia (el eje $r=0$, identificando $\theta=0$ y $\theta=2\pi$) en la que habremos situado tantas parejas de puntos críticos asociados a cada raíz de (1) como indique su multiplicidad. Lo ilustramos con un ejemplo preparado para que se den todas las situaciones anteriores:

Ejemplo 1. $\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$ Con las notaciones vistas se tiene:

$$cB - sA = 2c^2s(c-s) \rightarrow \theta_1=0, \theta_2=\frac{\pi}{4}, \theta_3=\frac{\pi}{2} \text{ doble}$$

$$cA + sB = 2c^3s + c^2s^2 - s^4 \rightarrow \Lambda_1=0, \Lambda_2=\frac{1}{2}, \Lambda_3=-1$$

Las tres θ_i están asociadas a puntos simples. Como para $\theta \in (0, \pi/4)$ es $\Theta(\theta) > 0$, sin más que tener en cuenta la paridad de la multiplicidad de las θ_i se obtiene que la orientación de la circunferencia entre puntos críticos es la del dibujo. Falta sólo por orientar la variedad centro correspondiente a θ_1 , para lo que necesitamos conocer algún término de su desarrollo.



Probando $y = c_2x^2 + \dots$ se tiene que

$$[2c_2x^4 + O(x^5)] [2c_2x + O(x^2)] = 2c_2x^4 + 2c_3x^5 - x^5 + O(x^6)$$

$$\rightarrow c_2=0, c_3=\frac{1}{2}; \text{ es decir, } y = \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)$$

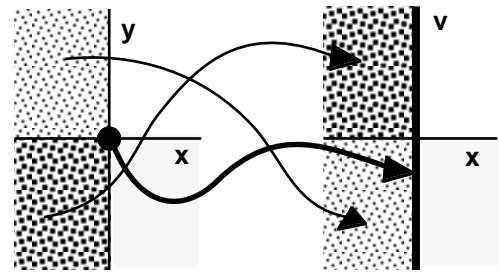
(más adelante veremos como calcular el primer término de los desarrollos de variedades de tangente horizontal o vertical mucho más rápidamente utilizando la poligonal de Newton).

Por tanto, sobre la variedad centro: $x' = x^5 + O(x^6)$.

Las demás órbitas en un entorno de $r=0$ quedan entonces determinadas y, por tanto, el retrato local de fases en un entorno del origen (único punto crítico del sistema) es el dibujado (faltaría sólo por precisar, para un retrato global, si existe o no algún sector parabólico entre los sectores elípticos e hiperbólicos).

3.2. Usando el blow-up: $x=x, y=xv$

Mediante el cambio de variable $x=x, y=xv$ llegaremos a resultados similares a los obtenidos con las polares. Dicho cambio 'estira' verticalmente el punto $(x,y)=(0,0)$ y lo convierte en todo el eje v ($x=0$), deja el eje x invariante, y lleva puntos de los cuadrantes 1, 2, 3 y 4 del plano xy a puntos de los cuadrantes 1, 3, 2 y 4 del plano xv .



Haciendo $x=x, y=xv$, [S] se convierte en el sistema:

$$\begin{cases} x' = x^n A(1, v) + x^p A^p(1, v) + \dots \\ v' = x^{n-1} [B(1, v) - vA(1, v)] + x^{p-1} [B^p(1, v) - vA^p(1, v)] + \dots \end{cases}$$

para el que $x=0$ es una recta de puntos críticos. Sus órbitas para $x<0$ y $x>0$ son las de:

$$[B] \begin{cases} x' = xA(1, v) + \dots \\ v' = [B(1, v) - vA(1, v)] + x^{p-n} [B^p(1, v) - vA^p(1, v)] + \dots \end{cases}$$

aunque su orientación en $x<0$ es la opuesta si n es par. Los puntos críticos de [B] sobre el eje $x=0$ (formado por órbitas) se obtienen resolviendo

$$(4) \quad P_{n+1}(v) \equiv B(1, v) - vA(1, v) = 0$$

ecuación de orden a lo más $n+1$ en v y por tanto con $n+1$ raíces reales como mucho. Supondremos que $B-vA \neq 0$ y que (4) posee r raíces v_1, \dots, v_r , suposiciones equivalentes a las que hicimos trabajando con las polares. La aproximación lineal en un punto crítico $(0, v_i)$ es

$$M(v_i) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ E & \frac{d}{dv} [B - vA] \end{pmatrix}_{(1, v_i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ E_i & \mu_i \end{pmatrix}$$

donde E_i puede ser cero. El autovalor μ_i informa aquí también de la multiplicidad de v_i como raíz de (4). Supongamos que ninguna raíz es múltiple o que, si alguna lo es, el correspondiente $\lambda_i \neq 0$. Entonces es posible dibujar de forma elemental las órbitas de [B] en un entorno de $x=0$ (calculando, por una parte, los $\lambda_i = A(1, v_i)$ y el flujo en las posibles variedades centro, y analizando por otra el signo de $B-vA$). A cada variedad no vertical que llegue a un $(0, v_i)$ corresponderá una variedad de [S] que llegará a $\mathbf{0}$ siendo tangente a la recta $y=v_i x$ y la orientación de esta última variedad a la izquierda del origen coincidirá con la de aquella o se invertirá, dependiendo de la paridad de n (para evitar estos líos con las paridades será más cómodo orientar las variedades que vayamos encontrando sustituyendo directamente su expresión en la primera ecuación del sistema [S]).

Por este camino hemos llegado, pues, de nuevo, a que las posibles direcciones de aproximación a **0** vienen dadas por la ecuación (3), ya que podemos escribir (4):

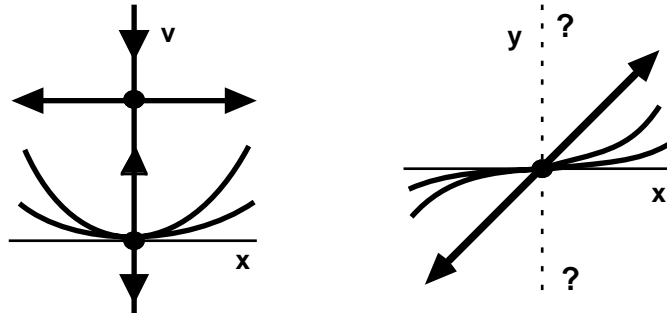
$$0 = B(1, \frac{y}{x}) - \frac{y}{x} A(1, \frac{y}{x}) = \frac{\Delta(x,y)}{x^{n+1}}$$

(la ecuación (4) no da las posibles variedades verticales de [S], así que de nuevo resolveremos mejor la ecuación (3), es decir $\Delta=0$).

¿Queda determinada la estructura de **0** con el análisis de todos los $(0, v_i)$? Volvamos al ejemplo 1. La ecuación (4) es en este caso $2v-v^2=0$ así que los v_i de [B] son $v_1=0$ y $v_2=1$, con $\lambda_1=A(1,0)=0$, $\lambda_2=A(1,1)=1$. Con el signo de $2v-v^2$ orientamos el eje $x=0$. El flujo en la variedad centro podemos determinarlo calculando términos suyos como hicimos antes

(o llevando el cambio hasta el final: $\begin{cases} x' = 2xv - xv^2 \\ v' = 2v - 2v^2 - x^2 \end{cases} \rightarrow v = \frac{x^2}{2} + O(x^3) \rightarrow y = \frac{x^3}{2} + O(x^4)$)

El dibujo de xv está determinado, así como las órbitas pintadas en el plano xy (se invierten los cuadrantes 2 y 3 pero no el sentido de las órbitas en ellos por ser n impar). Como dijimos antes, para fijar los sentidos, mejor que fijarnos en los λ y en paridades será llevar las expresiones de las variedades a la ecuación en x' : por ejemplo, la variedad no centro $y = x+o(x)$ se orienta mejor con $x' = x^3+o(x^3)$. Pero aún no tenemos información con el trabajo realizado de lo que ocurre en un entorno del eje y .



Evidentemente podemos "estirar" **0** en dirección horizontal haciendo $x=yu$. Obtenemos la ecuación equivalente a (4) que ahora será $A(u,1)-uB(u,1) = 0$ y que al igual que (4) está incluida en la ecuación más general (3). Si u es raíz simple de esta ecuación (es decir, si $x=0$ lo es de (3)) o si, a pesar de no serlo, $\lambda_\infty=B(0,1)=b_{0n} \neq 0$ existirá una variedad no horizontal que llega a $(u,y)=(0,0)$ y por tanto habrá una variedad de [S] que llegará a **0** con pendiente vertical (para determinar el flujo nos bastará $b_{0n} < 0$, en el peor de los casos, necesitaremos algún término de la variedad centro $x=h(y)$).

En el ejemplo 1, aunque $x=0$ era doble, tenemos que $\lambda_\infty=B(0,1)=-1$, con lo que existe una variedad estable que llega al origen con pendiente vertical. Para determinar las órbitas en un entorno de ella no necesitamos hacer un dibujo en el plano uy . En la práctica convendrá reflejar la información que nos dan los λ_i y el posible λ_∞ sobre la conocida circunferencia con puntos y orientada. De hecho los Λ y los λ tienen el mismo signo en $(-\pi/2, \pi/2]$:

$$\Lambda_i = cA + sB = cA - \frac{s^2 A}{c} = \frac{A(c,s)}{c} = \cos^{n-1} \theta_i \cdot A(1, \tan \theta_i) = \cos^{n-1} \theta_i \cdot \lambda_i, \theta_i \neq \frac{\pi}{2}; \Lambda_{\pi/2} = B(0,1) = \lambda_\infty$$

Pero los λ son más fáciles de calcular que los Λ . Podemos mejorar el teorema 3.1 con los últimos cálculos. Hemos obtenido así un resultado más cómodo de utilizar en la práctica:

Teorema 3.2

Supongamos que $\Delta(x,y) = x B(x,y) - y A(x,y) \neq 0$ y que $\Delta(x,y)=0$ posee $q \neq 0$ raíces reales $y=v_1x, \dots, y=v_qx$ [y tal vez $x=0$].

Si para aquellas v_i que no sean simples se tiene que $A(1,v_i) \neq 0$ [$B(0,1) \neq 0$], existen en [S] variedades $y=v_ix+o(x)$ [ó $x=o(y)$] que llegan a $\mathbf{0}$ con pendiente v_i [∞] y la estructura local de $\mathbf{0}$ queda totalmente determinada con el signo de $\Delta(x,y)$ y el flujo local sobre cada una de estas variedades.

Este flujo viene dado por $x' = A(x,v_ix)$ si $A(1,v_i) \neq 0$ [$y' = B(0,y)$ si $B(0,1) \neq 0$] o se puede precisar hallando algún término más de las variedades si fuese cero.

(lo que sucede si no hay raíces reales (centro o foco) se estudiará en el capítulo 4)

Si el sistema es **homogéneo** (es decir, si es de la forma [H]), las rectas $y=v_ix$ asociadas a las raíces reales de $\Delta=0$ están formadas por órbitas del sistema (son invariantes, como en los lineales homogéneos: $n=1$), ya que $y=v_ix$ es tangente al campo definido por el sistema [H] si y sólo si para algún λ :

$$[v\lambda] \quad \begin{cases} A(1,v) = \lambda \\ B(1,v) = \lambda v \end{cases}$$

Por tanto, para cada v que satisfaga $[v\lambda]$ (es decir que cumpla $P_{n+1}(v)=0$) se tiene una recta invariante dada por $(1,v)$. Y los λ que obtenemos a partir de cada v nos dan la orientación sobre la recta. Como sucedía también en los lineales, a un $\lambda=0$ está asociada una recta de puntos críticos (y el único punto aislado posible es el origen). Y de nuevo la estructura que se obtiene del análisis local de [H] es válida para todo \mathbf{R}^2 .

Observemos más similitudes entre el último teorema y la forma de analizar los puntos simples: el papel de los '**vectores propios**' lo cumplen aquí los v_i y el de los '**autovalores**', los $\lambda_i=A(1,v_i)$. En estos términos, el teorema 3.2 asegura que la estructura queda determinada si no existen 'vectores propios' múltiples asociados al 'autovalor' $\lambda=0$. Se tiene también que, como en los puntos elementales, **si existen λ_i reales y todos son distintos de cero el sistema no homogéneo [S] mantiene la estructura de la 'aproximación homogénea' [H]**. La forma de proceder con los $\lambda=0$ asociados a v simples es también enteramente análoga al trabajo con sistemas lineales con un único autovalor cero que hicimos en el capítulo 2: hay entonces que calcular términos de una '**variedad centro**'.

Para $n=1$ se calculan primero los autovalores y después los vectores propios asociados, pero se podría proceder a la inversa, como aquí. Podríamos encontrar también una '**ecuación de autovalores**' eliminando la v del sistema $[v\lambda]$ (así lo haremos para $n=2$ y $n=3$ en 3.4 y 3.6). Pero, a diferencia de los lineales (para los que la ecuación de autovalores contiene, en general, toda la información sobre la estructura del punto), conociendo para $n>1$ los λ (e incluso los v) no queda determinada la estructura: es necesario también el signo de $\Delta(x,y)$.

Acabamos la teoría de esta sección, comprobando que al probar formalmente **series** arbitrarias en la ecuación diferencial de las órbitas obtenemos resultados concordantes con los anteriores. De paso calculamos el término siguiente del desarrollo en serie de la variedad en el caso en que lo necesitamos, es decir, cuando $A(x, v_i x)$ [o $B(0, y)$] es idénticamente cero.

Probemos, pues, $y = c_1 x + c_2 x^{p-n+1} + \dots$ en $g(x, y) - f(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$

(se ve fácil que los coeficientes de x^2, \dots, x^{p-n} han de ser necesariamente cero); entonces:

$$\begin{aligned} & [B(x, c_1 x + c_2 x^{p-n+1} + \dots) + B(x^p, c_1 x + \dots)] - \\ & - [c_1 + (p-n+1)c_2 x^{p-n} + \dots] [A(x, c_1 x + c_2 x^{p-n+1} + \dots) + A(x^p, c_1 x + \dots)] = 0 \end{aligned}$$

Igualando a cero el coeficiente de x^n obtenemos las viejas conocidas posibles variedades:

$$B(1, c_1) - c_1 A(1, c_1) = 0$$

Calculamos el siguiente término para un c_1 que sea raíz simple de la ecuación anterior y tal que $A(1, c_1) = 0$ (es decir, asociado a un v_i simple con $\lambda_i = 0$). Tenemos que

$$\begin{aligned} A(x, c_1 x + c_2 x^r + \dots) &= \sum_{k=0}^n a_{n-k, k} x^{n-k} (c_1 x + c_2 x^r + \dots)^k = \\ &= \sum_{k=0}^n a_{n-k, k} x^{n-k} (c_1^k x^k + k c_1^{k-1} c_2 x^{k+r-1} + \dots) = x^n \sum_{k=0}^n a_{n-k, k} c_1^k + c_2 x^{n+r-1} \sum_{k=0}^n k a_{n-k, k} c_1^{k-1} + \dots = \\ &= x^n A(1, c_1) + c_2 x^{n+r-1} A_y(1, c_1) + \dots \end{aligned}$$

Igualando a 0 el coeficiente de la siguiente potencia (x^p) y teniendo en cuenta que $A(1, c_1) = 0$:

$$c_2 B_y - B^p - c_1 c_2 A_y - c_1 A^p = 0 \quad ; \quad [B_y - c_1 A_y + (p-n+1)A] c_2 = c_1 A^p - B^p$$

El corchete no se anula (es μ_i y la raíz es simple). Así pues: $y = c_1 x + \frac{c_1 A^p - B^p}{B_y - c_1 A_y} x^{p-n+1} + O(x^{p-n+2})$

Llevándolo a la primera ecuación de [P]:

$$x' = A(x, c_1 x + \dots) + A^p(x, c_1 x + \dots) + \dots = [c_2 A_y + A^p] x^p + \dots$$

Y volviendo a la notación del teorema 3.2

$$x' = \frac{A^p B_y - A_y B^p}{B_y - v_i A_y} \Big|_{(1, v_i)} x^p + O(x^{p+1})$$

informa sobre el flujo en la variedad centro asociado a un v_i simple con $\lambda_i = 0$, si el coeficiente de x^p no se anula (como en el ejemplo 1). Análogamente, si $x=0$ es raíz simple y $\lambda_\infty = 0$ se puede demostrar que sobre el flujo en la variedad centro vertical informa:

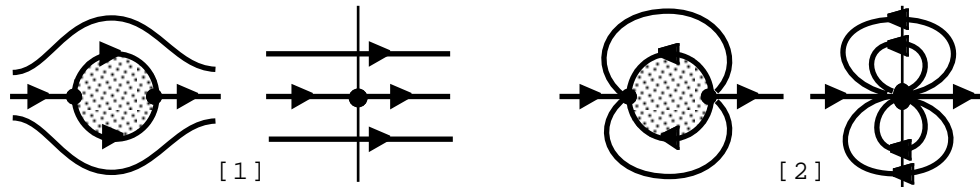
$$y' = \frac{a_{1, n-1} b_{0p} - a_{0p} b_{1, n-1}}{a_{1, n-1}} y^p + O(y^{p+1})$$

Ejemplo 2. Consideremos: [1] $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = 0 \end{cases}$ y [2] $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$

Para [1] se tiene $\Delta(x,y) = -y(x^2 + y^2)$, mientras que para [2] es $\Delta(x,y) = y(x^2 + y^2)$.

Ambos tienen el mismo único vector propio ($v=0$) asociado al mismo autovalor ($\lambda=1$).

Sin embargo sus mapas de fase son esencialmente diferentes:



Ejemplo 3. Analicemos todas las posibles estructuras del origen en un sistema de la forma:

$$[S] \begin{cases} x' = ax^2 - y^2 + A^p(x,y) + \dots \\ y' = 2xy + B^p(x,y) + \dots \end{cases} \quad \text{con } p > 2$$

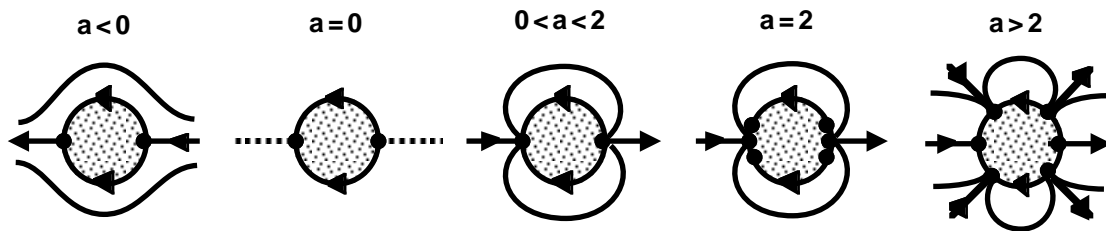
Tratemos primero la aproximación homogénea (para la que los retratos de fase serán globales):

$$[H] \begin{cases} x' = ax^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases} \rightarrow \Delta(x,y) = y[(2-a)x^2 + y^2]$$

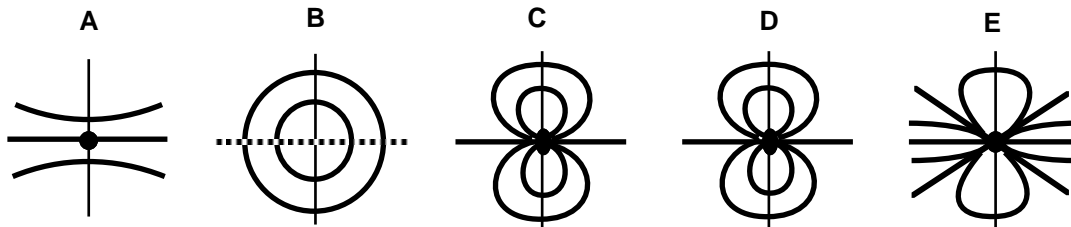
Sus raíces son $y=0$ para todo a (simple, salvo si $a=2$, en que es triple) e $y = \pm\sqrt{a-2}x$ para $a > 2$.

Los autovalores correspondientes son: $\lambda_0 = a$, $\lambda_+ = \lambda_- = 2$.

Existen por tanto los siguientes cinco casos para [H]:



asociados a los siguientes retratos de fase:

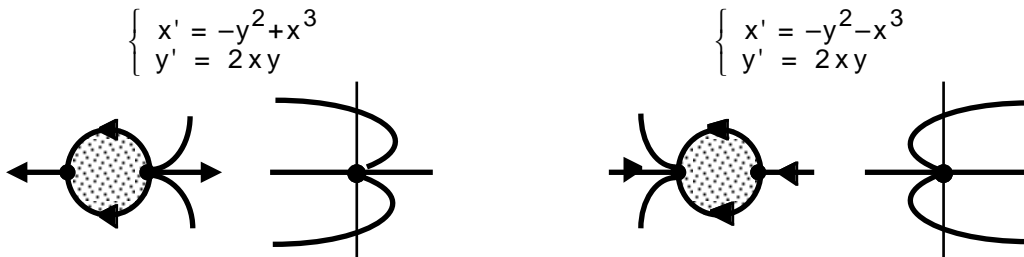


¿Cuáles de ellos son localmente equivalentes a los de cualquier sistema de tipo [S]?, o, en otras palabras, ¿en qué casos la estructura local de [S] está determinada por los términos homogéneos de menor orden? Como ya sabemos en los casos A, C, D y E el origen de [S] mantiene la estructura de la aproximación homogénea [H] (e incluso A, C y E la mantiene aunque perturbemos [S] con términos de la forma $\varepsilon A^2(x,y)$, $\varepsilon B^2(x,y)$, para ε suficientemente pequeño; y hasta D lo hace si no distinguimos entre las estructuras C, D y E que son localmente homeomorfas).

En el caso B ($a=0$), sin embargo, los términos A^p , B^p influyen en el flujo de la variedad centro, habiendo (en el caso de que el origen sea aislado) cuatro posibilidades (determinadas por $a_{p,0}$, si este coeficiente no es nulo) ejemplificadas por dos que vuelven a dar C y A, respectivamente:

$$\begin{cases} x' = -y^2 + x^4 \\ y' = 2xy \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -y^2 - x^4 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

y por otras dos que proporcionan mapas locales de fase de nuevo tipo:



Si $a_{p,0}=0$ es necesario considerar los términos de orden mayor que p ; así, por ejemplo, en

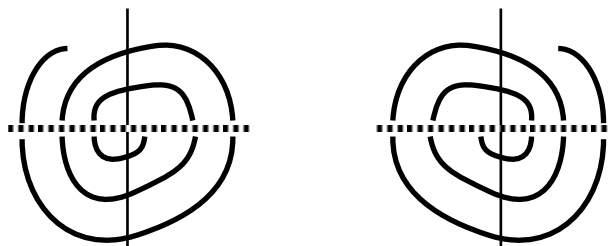
$$\begin{cases} x' = -y^2 + x^6 \\ y' = 2xy + y^3 + x^4 \end{cases}$$

necesitamos conocer el término x^3 del desarrollo de variedad y el término x^6 para fijar el flujo sobre ella; probando series se obtiene, respectivamente:

$$y = \frac{1}{4}x^3 + O(x^4) \quad y \quad x' = \frac{3}{4}x^6 + O(x^7)$$

Este sistema tiene, pues, la estructura C (con la poligonal del capítulo 6 podríamos precisar qué términos son significativos para el cálculo de la variedad sin necesidad de series).

Por último, consideremos dos nuevos casos que pueden derivar del B si hay una curva de puntos críticos $y=h(x)$. Dividiendo por $y-h(x)$ ambos segundos miembros del sistema obtendríamos uno del tipo $x'=-y+\dots$; $y'=2x+\dots$ para los que la aproximación lineal es un centro. Así, [S] podría tener también las dos siguientes estructuras:



3.3 Polinomios de tercer grado.

Consideremos el polinomio $P_3(z) = pz^3 + qz^2 + rz + s$, con $p, s \neq 0$.

Veamos en primer lugar cuándo posee una raíz múltiple z . La z debe satisfacer:

$$\begin{cases} pz^3 + qz^2 + rz + s = 0 \\ 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (5) \begin{cases} qz^2 + 2rz + 3s = 0 \\ 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases}$$

Es sabido que un sistema de ecuaciones de la forma: $\begin{cases} cz^2 + bz + a = 0 \\ gz^2 + fz + e = 0 \end{cases}$

tiene solución en z si y sólo si se anula su **resultante**, dada por el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ e & f & g & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \end{vmatrix}$$

Por tanto, P_3 posee raíz múltiple si y solo si se anula el llamado **discriminante** del polinomio:

$$D_3 \equiv \frac{1}{3} \begin{vmatrix} r & 2q & 3p & 0 \\ 3s & 2r & q & 0 \\ 0 & r & 2q & 3p \\ 0 & 3s & 2r & q \end{vmatrix} = q^2r^2 - 4pr^3 - 4q^3s + 18pqrs - 27p^2s^2$$

(esto sigue siendo válido aunque sea $p=0$ ó $s=0$).

Para poder expresar el D_3 de forma más compacta definimos:

$$R \equiv q^2 - 3pr, \quad V \equiv 9ps - qr, \quad W \equiv r^2 - 3qs, \quad S \equiv 27p^2s - 9pqr + 2q^3 = 3pV + 2qR$$

Se tiene entonces que:

$$D_3 = \frac{1}{3} [4RW - V^2] = \frac{1}{27p^2} [4R^3 - S^2]$$

Si $D_3=0$ ($\Rightarrow R \geq 0$), las raíces de $P_3(z)$ se calculan fácilmente:

El sistema (5) implica que $2Rz - V = 0$. Por tanto, si $D_3=0$ y $R > 0$, la raíz doble es:

$$z_d = \frac{V}{2R} = -\frac{q}{3p} + \frac{S}{6pR}$$

A partir de ella se puede deducir que la tercera raíz (simple) es:

$$z_s = -\frac{q}{p} - \frac{V}{R} = -\frac{q}{3p} - \frac{S}{3pR}$$

Si además de ser $D_3=0$ es $R=0$ (o lo que es lo mismo, si $R=V=0$ o si $R=S=0$), hay raíz triple:

$$z_t = -\frac{q}{3p}$$

ya que z_t satisface (5) y además anula la segunda derivada del polinomio: $6pz + 2q$.

Lleguemos a estas expresiones por otra vía. Si z_1, z_2, z_3 son las raíces de P_3 se tiene que

$$q = -p(z_1 + z_2 + z_3) ; \quad r = p(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) ; \quad s = -p z_1 z_2 z_3$$

De aquí:

$$R = \frac{1}{2} p^2 [(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_3)^2] , \quad V = p^2 [z_3(z_1 - z_2)^2 + z_2(z_1 - z_3)^2 + z_1(z_2 - z_3)^2]$$

$$S = p^3 (z_1 + z_2 - 2z_3)(z_1 + z_3 - 2z_2)(z_2 + z_3 - 2z_1) , \quad D_3 = p^4 (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 (z_2 - z_3)^2$$

y por tanto:

$$z_2 = z_3 = z_d \Rightarrow q = -p(z_s + 2z_d) , \quad R = p^2 (z_s - z_d)^2 , \quad V = 2p^2 z_d (z_s - z_d)^2 , \quad S = 2p^3 (z_d - z_s)^3 , \quad D_3 = 0$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_t \Rightarrow q = -3pz_t , \quad R = V = S = D_3 = 0$$

Podemos obtener una expresión para un z múltiple z_m que es válida también aunque sea $R=0$ (nos proporciona z_d y también z_t):

$$D_3 = 0 \Rightarrow [S/2]^{1/3} = \frac{S}{2R} \Rightarrow z_m = \frac{-q + [S/2]^{1/3}}{3p}$$

También se pueden dar expresiones de las raíces simples de P_3 (ver [2] o [6]):

Si $D_3 < 0$, P_3 tiene una única raíz real z_r . Se comprueba que viene dada por

$$z_r = \frac{1}{3p} \left(\left[\frac{1}{2} (-S + \sqrt{S^2 - 4R^3}) \right]^{1/3} + \left[\frac{1}{2} (-S - \sqrt{S^2 - 4R^3}) \right]^{1/3} - q \right)$$

Si $D_3 > 0$ ($\Rightarrow R > 0$), hay tres raíces reales $z_{1,2,3}$ que admiten una expresión no algebraica:

$$z_{1,2,3} = \frac{1}{3p} \left[2\sqrt{R} \cos \frac{\phi + 2k\pi}{3} - q \right] , \quad k=0,1,2 , \quad \text{con } \phi = \arccos \left(\frac{-S}{2R^{3/2}} \right)$$

En la siguiente sección realizaremos cambios de variable del tipo $z = M + tc^{-k}$. Si $P_3(t)$ es el polinomio obtenido al multiplicar por c^j el que resulta del cambio, es decir, $P_3(t) \equiv c^j P_3(M + tc^{-k})$ se comprueba que los p, R, S y D_3 del $P_3(t)$ son casi los de $P_3(z)$ (no lo son q, r, s, V y W):

$$(6) \quad p_t = c^{j-3k} p ; \quad R_t = c^{2j-4k} R ; \quad S_t = c^{3j-6k} S ; \quad D_{3t} = c^{4j-6k} D_3$$

Comparemos los cálculos anteriores con los sencillos polinomios de segundo grado:

$P_2(z) = qz^2 + rz + s$, con $q, s \neq 0$ posee raíz múltiple si y sólo si se satisface:

$$\begin{cases} qz^2 + rz + s = 0 \\ 2qz + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rz + 2s = 0 \\ 2qz + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow D_2 \equiv \begin{vmatrix} r & 2q \\ 2s & r \end{vmatrix} = r^2 - 4qs = 0$$

$$\text{Si } D_2 = 0 \text{ la raíz doble es: } z_d = -\frac{r}{2q} .$$

A lo mismo se llega a partir de las raíces z_1, z_2 de P_2 . Como $r = -q(z_1 + z_2)$; $s = qz_1 z_2$,

$$D_2 = q^2 (z_1 - z_2)^2 \text{ y } z_1 = z_2 = z_d \Rightarrow D_2 = 0 , \quad r = -2qz_d \Rightarrow z_d = -\frac{r}{2q}$$

Y el signo del discriminante, como antes, nos informa del número de raíces reales de P_2 .

3.4 La aproximación homogénea para $n=2$.

Consideremos el sistema homogéneo

$$[H2] \quad \begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = ex^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$$

Supongamos, por ahora, que $c \neq 0$. Como vimos en la sección 3.2 sus autovalores λ y sus vectores propios $(1, z)$ se pueden obtener resolviendo el sistema:

$$[z\lambda] \quad \begin{cases} a + bz + cz^2 = \lambda \\ e + fz + gz^2 = \lambda z \end{cases}$$

Eliminando la λ obtenemos la conocida ecuación para los **vectores propios** de [H2]:

$$P_3(z) = cz^3 + (b-g)z^2 + (a-f)z - e = 0$$

Y la resultante en z de $[z\lambda]$ nos dará la ecuación para los λ de [H2]:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & 0 \\ e & f-\lambda & g & 0 \\ 0 & a-\lambda & b & c \\ 0 & e & f-\lambda & g \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos la siguiente ecuación de **autovalores**:

$$P_3(\lambda) \equiv c\lambda^3 + q_\lambda\lambda^2 + r_\lambda\lambda + s_\lambda \equiv c\lambda^3 + [bg-g^2-ac-2fc]\lambda^2 + [2ag^2-abg-fbg+2afc+f^2c-bce-2gce]\lambda + [-a^2g^2+afbg-af^2c-b^2ge+2agce+fbce-c^2e^2] = 0$$

Si llamamos $q \equiv b+2g$, $m \equiv 2a+f$, $F \equiv bg-cf$, $E \equiv ag-ce$, podemos escribir:

$$r_\lambda = qE - mF, \quad s_\lambda = -\frac{1}{c} [aF^2 - bEF + cE^2]$$

A partir de un λ podemos calcular el z del que procede (lo contrario está claro). Multiplicando la primera ecuación de $[z\lambda]$ por g y la segunda por c y restando se tiene: $[E-g\lambda] + [F+c\lambda]z = 0$, lo que nos permite hallar z de forma única siempre que $F+c\lambda \neq 0$.

Investiguemos cuándo se presentan problemas en la aplicación del teorema 3.2. Está claro que siempre hay algún z real, con lo que **no hay ni centros ni focos**. De la ecuación de autovalores y de los resultados de 3.3 se deduce inmediatamente que:

Teorema 3.3

$$\begin{aligned} \lambda=0 \text{ es autovalor} &\Leftrightarrow s_\lambda = -a^2g^2 + afbg - af^2c - b^2ge + 2agce + fbce - c^2e^2 = 0 \\ \text{Existe } z \text{ múltiple} &\Leftrightarrow D_z \equiv (b-g)^2(a-f)^2 - 4c(a-f)^3 + 4e(b-g)^3 - 18ce(b-g)(a-f) - 27c^2e^2 = 0 \end{aligned}$$

Vimos en 3.3 que el D_z se puede expresar de forma más compacta introduciendo:

$$R \equiv (b-g)^2 - 3c(a-f), \quad V \equiv -(b-g)(a-f) - 9ce, \quad W \equiv (a-f)^2 + 3(b-g)e, \quad S \equiv 2(b-g)R + 3cV \rightarrow$$

$$D_z = \frac{1}{3} [4RW - V^2] = \frac{1}{27c^2} [4R^3 - S^2]$$

Recordemos que para un sistema no homogéneo con aproximación homogénea [H2], el teorema 3.2 precisa la estructura del origen aunque existan z múltiples o haya un $\lambda=0$, siempre que no se den las dos cosas a la vez. Estudiemos cuando ocurre la situación problemática.

El λ asociado a un z múltiple es fácil de calcular. Como z debe ser también raíz de $P_3'(z)$:

$$(7) \quad 3\lambda = [3cz^2 + 2(b-g)z + (a-f)] + (b+2g)z + (2a+f) = qz + m$$

Si $P_3(z)$ tiene una raíz z_t triple ($\Leftrightarrow D_z=R=0 \Leftrightarrow R=V=0$) el autovalor asociado al $z_t = \frac{g-b}{3c}$ es:

$$\lambda_{z_t} \equiv \frac{1}{3} [qz_t + m] = \frac{3cm - (b-g)q}{9c} \equiv \frac{1}{9c} n_{z_t}$$

Hemos caracterizado una primera situación en la que no basta considerar la aproximación [H2]:

$$\text{Existe } z \text{ triple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow R=V=n_{z_t}=0, \\ \text{si } R = (b-g)^2 - 3c(a-f), \quad V = -(b-g)(a-f) - 9ce, \quad n_{z_t} = 3cm - (b-g)q$$

[En esta situación se pueden despejar fácilmente a , f y e en función de b , g y c :

$$a = \frac{1}{9c} (2b+g)(b-g), \quad f = -\frac{1}{9c} (b-4g)(b-g), \quad e = -\frac{1}{27c^2} (b-g)^3]$$

Nos planteamos lo mismo con z_m múltiple en general. Utilizando la expresión de z_m de 3.3:

$$z_m = z_t + \frac{[S/2]^{1/3}}{3c} \rightarrow \lambda_{z_m} \equiv \frac{n_{z_t} + q[S/2]^{1/3}}{9c}$$

Que sea $\lambda_{z_m}=0$ equivale a que sea cero $n_{z_m} \equiv \frac{1}{27c} [2n_{z_t}^3 + q^3 S]$. Desarrollando la expresión:

Teorema 3.4

$$\text{Existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_z = n_{z_m} = 0, \\ \text{si } n_{z_m} = -(b-g)(2ag - ab - bf)q^2 - 2(b-g)qm^2c + 2m^3c^2 - q^3ce$$

Busquemos caracterizaciones equivalentes, pero más manejables y fáciles de recordar. Si existe un z múltiple asociado a $\lambda=0$, la igualdad (7) se convierte en $qz + m = 0$. Así, en ese caso, el z satisface uno de los dos sistemas equivalentes:

$$[z_m \lambda = 0] \quad \begin{cases} a + bz + cz^2 = 0 \\ e + fz + gz^2 = 0 \\ qz + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-f) + 2(b-g)z + 3cz^2 = 0 \\ -3e + 2(a-f)z + (b-g)z^2 = 0 \\ qz + m = 0 \end{cases}$$

Por tanto, si $q \neq 0$, $z = -\frac{m}{q}$ está asociado a $\lambda=0$. Así, si $q \neq 0$ y se satisface $[z_m \lambda = 0]$ entonces:

$$A \equiv aq^2 - bmq + cm^2 = \frac{1}{3} [(a-f)q^2 - 2(b-g)qm + 3cm^2] = (2ag - ab - fb)(b+2g) + c(2a+f)^2 = 0$$

$$B \equiv eq^2 - fmq + gm^2 = \frac{1}{3} [3eq^2 + 2(a-f)qm - (b-g)m^2] = e(b+2g)^2 + (2ag - fb - fg)(2a+f) = 0$$

Y si es $q=0$, debe ser también $m=0$ y, desde luego, es cierto que $A=B=0$. En conclusión:

Teorema 3.5

Si existe z múltiple asociado a $\lambda=0 \Rightarrow A=B=0$, con $A = aq^2 - bmq + cm^2$, $B = eq^2 - fmq + gm^2$

Sería interesante que la implicación opuesta al teorema fuera cierta. Lo será si $q \neq 0$ ó si $m \neq 0$, pero no si ambos se anulan. Como es fácil comprobar:

$$n_{zm} = [2cm - (b-g)q]A - cqB \rightarrow A = B = 0 \Rightarrow n_{zm} = 0$$

Algo más complicado es ver si D_z también se hace cero. Si $A=B=0$, $q \neq 0$ y $m \neq 0$ se tiene:

$$(8) \quad 3c = 2(b-g)\frac{q}{m} - (a-f)\left(\frac{q}{m}\right)^2, \quad 3e = (b-g)\left(\frac{m}{q}\right)^2 - 2(a-f)\frac{m}{q}$$

$$\rightarrow R = \frac{H^2}{m^2}, \quad V = \frac{-2H^2}{mq}, \quad W = \frac{H^2}{m^2}, \quad \text{con } H = m(b-g) - q(a-f) \rightarrow D_z = 0$$

Si $q \neq 0$ y $m=0$, $A=B=0 \Rightarrow a=f=e=0$ y es claro que se anula el discriminante.

Y si $m \neq 0$ y $q=0$, $A=B=0 \Rightarrow b=g=c=0 \Rightarrow D_z=0$. Aunque en este caso no es válido el teorema 3.4, deducido con $c \neq 0$, sigue existiendo un vector propio vertical ($x=0$) asociado a $\lambda_\infty=0$.

Sin embargo, si $q=m=0$ (es decir, si [H2] es exacto), cumpliéndose $A=B=n_{zm}=0$ no tiene que existir un z múltiple con $\lambda=0$, pues no tiene por qué anularse el discriminante D_z :

$$D_z = 27[3g^2a^2 - 4ca^3 - 4g^3e + 6agce - c^2e^2] = 27s_\lambda$$

Resumiendo lo anterior tenemos:

Teorema 3.6

Si $q^2 + m^2 \neq 0$, existe vector propio múltiple asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow A=B=0$
 Si $q=m=0$, existe vector propio múltiple asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow D_z=0$

[Las caracterizaciones que estamos probando se podrían encontrar cambiando los papeles de x e y en el sistema [H2], es decir, intercambiando $a \leftrightarrow g$, $b \leftrightarrow f$, $e \leftrightarrow c$. No varían con esos cambios las expresiones de los V , D_z y s_λ , mientras que se transforman uno en otro: $q \leftrightarrow m$, $R \leftrightarrow W$, $A \leftrightarrow B$. Estas simetrías están claras en los todos teoremas menos en el 3.4].

En los dos casos del teorema 3.6 las igualdades de la derecha permiten expresar unos coeficientes en términos de otros y describir con facilidad los λ y los z :

Si $A=B=0$ y $q, m \neq 0$ [si no es mucho más fácil], se tiene (8), el $z_m = -m/q$ está asociado a $\lambda=0$.

$$[\text{Además hay un } z_s = \frac{m[fg-gm]}{q[fm-qa]} \text{ asociado a } \lambda_{zs} = \frac{[(b+g)m-qa][(2b+g)m-3aq]}{q[fm-qa]}]$$

Y si $q=m=0$, $D_z=0$ y $c \neq 0$ [si $c=0$ es más fácil] podemos despejar $b=-2g$, $f=-2a$ y además:

$$e = \frac{1}{c^2} [g(3ac-2g^2) \pm 2(g^2-ac)^{3/2}] , \quad z_m = \frac{1}{c} [g \pm 2(g^2-ac)^{1/2}]$$

Comprobemos ahora que los resultados vistos son ciertos también en el caso sencillo $c=0$. Entonces las ecuaciones de vectores propios y autovalores pasarán a ser de segundo grado:

$$P_2(z) = (b-g)z^2 + (a-f)z - e, \quad \text{con discriminante } D_2 = (a-f)^2 + 4e(b-g)$$

$$P_2(\lambda) = (b-g)\lambda^2 + r_{2\lambda}\lambda + s_{2\lambda} = [b-g]\lambda^2 + [2ag-ab-fb]\lambda + [afb-a^2g-b^2e]$$

y existe además otro vector propio $x=0$ (asociado a $\lambda_\infty=g$) que no está recogido por $P_2(z)=0$. Por lo tanto se tienen los siguientes resultados que concuerdan con el teorema 3.3:

$$\lambda=0 \text{ es autovalor} \Leftrightarrow g s_{2\lambda} = 0$$

$$\text{Existe vector propio múltiple} \Leftrightarrow (b-g) D_2 = 0$$

Si $b \neq g$, el vector propio múltiple posible es $z_m = \frac{f-a}{2(b-g)}$ asociado a $\lambda_{zm} = -\frac{r_{2\lambda}}{2(b-g)}$

Por tanto:

$$\text{Existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_2 = r_{2\lambda} = 0$$

Se comprueba que:

$$A = qr_{2\lambda}, \quad B = \frac{1}{4(b-g)} [q^2 D_2 - 9r_{2\lambda}^2] - \frac{m}{3} r_{2\lambda}$$

Por tanto, $D_2 = r_{2\lambda} = 0 \Rightarrow A = B = 0$. También está claro que: si $q \neq 0$, $A = B = 0 \Rightarrow D_2 = r_{2\lambda} = 0$.

Si $q=0$ y $m \neq 0$, $B = -\frac{1}{3}(b-g)m^2 \neq 0$, $r_{2\lambda} = -\frac{2}{3}(b-g)m \neq 0$ y no existe z doble asociado a $\lambda=0$.

Y si $m=q=0$ ($\Rightarrow b, g \neq 0, r_{2\lambda} = 0$), existe z doble asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow D_2 = 3a^2 - 4ge = 0 \Leftrightarrow D_2 = 0$.

Si $b=g$ se tiene:

$$\text{Existe vector propio múltiple } x=0 \text{ asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow g=0$$

Ahora $A = 3g^2(a-f)$, $B = g[9ge - 2(a-f)(2a+f)]$ y está claro que $g=0 \Rightarrow A=B=0$.

Si $A=B=0$ y el sistema es exacto ($\Leftrightarrow g=0$), siempre hay múltiple con $\lambda=0$ y siempre es $D_2=0$.

Si $q=0$, siempre es $A=B=0$ y siempre es $g=0$.

Y si $q \neq 0$ ($\Leftrightarrow g \neq 0$), $A=B=0 \Rightarrow a=f, e=0 \Rightarrow P_3(z)=0$, caso en que el teorema 3.2 no decide.

Resumiendo: si $P_3(z) \neq 0$, los teoremas 3.3, 3.5 y 3.6 son ciertos tanto si $c \neq 0$ como si $c=0$.

[Esto no ocurre para el 3.4: si $c=0, b=g \neq 0$ siendo siempre $n_{zm} = D_2 = 0$ el $x=0$ múltiple no está asociado a $\lambda=0$].

Observemos que si hay z múltiple con $\lambda=0$ debe ser $r_\lambda = s_\lambda = 0$ (aunque esto no sea suficiente, pues el $\lambda=0$ podría provenir de z distintos). Que $s_\lambda = 0$ se deduce del primer sistema de $[zm\lambda 0]$, ya que s_λ es precisamente la resultante de las primeras dos ecuaciones. Si el sistema es exacto, siempre es $r_\lambda = 0$. Si no lo es y $q \neq 0$, la anulación del r_λ se deduce de la igualdad $qr_\lambda = gA - cB$. Y si $q=0, m \neq 0$ ($b=g=c=0$) es evidente que $r_\lambda = 0$.

Si el z asociado a $\lambda=0$ es triple debe ser también $q_\lambda = 0$. Esto se deduce de $q_\lambda = -\frac{1}{3}[R + n_{zt}]$.

Veamos qué relación existe entre el discriminante D_λ de $P_3(\lambda)$ y el D_z . Está claro que si hay z múltiple, el λ asociado también es raíz múltiple de $P_3(\lambda)$. Por tanto D_λ ha de ser múltiplo de D_z . Obviamente, la comprobación a mano de esto es casi imposible (D_λ es un polinomio de orden 10 en los coeficientes del sistema). Acudiendo al Maple se comprueba que:

$$(9) \quad D_\lambda = \Sigma^2 D_z, \text{ siendo } \Sigma = bg^2 + g(a-f)c - c^2e = gF + cE$$

¿Que significado tiene el Σ ? Podría existir un λ doble asociado a z distintos. Para que λ no determine de forma única a z debe ser $E - g\lambda = F + c\lambda = 0$, lo que implica $\Sigma = 0$. Reconstruyamos (9) sin ordenador. Sea $c \neq 0$ (si no sería más sencillo al tratarse de polinomios de orden dos). Expresando los coeficientes de $P_3(\lambda)$ en función de Σ y de F se obtiene tras algún cálculo:

$$P_3(\lambda) = c\lambda^3 + [3F-r]\lambda^2 + \frac{1}{c}[3F^2-2rF+q\Sigma]\lambda + \frac{1}{c^2}[F^3-rF^2+qF\Sigma-\Sigma^2], \text{ con } r \equiv c(a-f)+2bg+g^2$$

Esta expresión de $P_3(\lambda)$ sugiere el cambio: $\lambda = \frac{\mu-F}{c} \rightarrow P_3(\mu) \equiv \mu^3 - r\mu^2 + q\Sigma\mu - \Sigma^2$

$P_3(z)$ se puede expresar en términos de r , q y Σ : $z = \frac{y+g}{c} \rightarrow P_3(y) \equiv y^3 + qy^2 + ry + \Sigma$

Vimos que estos cambios dejan casi invariante el discriminante (y R y S). Las fórmulas (6) dan:

$$D_z = \frac{1}{c^2} D_y = \frac{1}{3c^2} [4R_y W_y - V_y^2], \quad D_\lambda = \frac{1}{c^2} D_\mu = \frac{1}{3c^2} [4R_\mu W_\mu - V_\mu^2]$$

y la igualdad (9) se sigue inmediatamente de las expresiones:

$$R_y \equiv q^2 - 3r = R, \quad V_y \equiv 9\Sigma - qr, \quad W_y \equiv r^2 - 3q\Sigma \\ R_\mu = R_\lambda \equiv r^2 - 3q\Sigma = W_y, \quad V_\mu \equiv -9\Sigma^2 - qr\Sigma = -\Sigma V_y, \quad W_\mu \equiv q^2 \Sigma^2 - 3\Sigma^2 r = \Sigma^2 R,$$

Relacionado con lo anterior: el autovalor múltiple λ_m que existe si $D_\lambda = 0$ no tiene por qué provenir de un z_m múltiple. Así, en general, pueden no coincidir las expresiones de λ_{zm} y λ_m . Sí deben hacerlo cuando $D_z = 0$. Análogamente, λ_{zt} y un autovalor triple λ_t deben coincidir si $D_z = R = 0$. En efecto, de las expresiones de 3.3 para z_d y λ_d cuando $R, R_\lambda \neq 0$, se deduce:

$$\lambda_{zd} = \frac{2n_{zt}R + qS}{18cR}, \quad \lambda_d = -\frac{q\lambda}{3c} + \frac{S_\lambda}{6cR_\lambda} = \frac{n_{zt}}{9c} + \frac{cD_z}{6R_\lambda} + \frac{q}{18c} \frac{[S(R+q^2) - 4qR^2]}{[R(R+q^2) - qS]} \Rightarrow \lambda_d - \lambda_{zd} = \frac{cD_z}{6R_\lambda} - \frac{cq^2 D_z}{6RR_\lambda} \\ \lambda_t = -\frac{q\lambda}{3c} = \frac{n_{zt} + R}{9c} \Rightarrow \lambda_t - \lambda_{zt} = \frac{R}{9c}$$

Acabemos la teoría de la sección comparando con lo que ocurre cuando $n=1$:

$$[H1] \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = ex + fy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + bz = \lambda \\ e + fz = \lambda z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_2(z) \equiv bz^2 + (a-f)z - e = 0 \\ P_2(\lambda) \equiv \lambda^2 - r_\lambda \lambda + s_\lambda = \lambda^2 - [a+f]\lambda + af - be = 0 \end{cases}$$

Los resultados equivalentes al teorema 3.3 son: $\lambda=0$ es autovalor $\Leftrightarrow s_\lambda = af - be = 0$
Existe z doble $\Leftrightarrow D_z = D_\lambda = (a-f)^2 + 4be = 0$

El z doble es $z_d = \frac{f-a}{2b}$ ($b \neq 0$) con $\lambda_{zd} = \frac{a+f}{2} = \lambda_d$ (ó $x=0$ si $b=a-f=0$ y $e \neq 0$ con $\lambda_\infty = a=f$).

Y el teorema 3.6 adopta la forma:

$$\text{existe } z_d \text{ asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_z = a+f=0 \Leftrightarrow r_\lambda = s_\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ es doble} \Leftrightarrow f=-a, be=-a^2$$

Ejemplo 3. Sea [s1] $\begin{cases} x' = 3x^2 - 4xy + y^2 + P(x,y) \\ y' = ex^2 - 6xy + 2y^2 + Q(x,y) \end{cases}$

¿Para qué valores de e no bastarían utilizar el teorema 3.2 para analizar la estructura del origen del sistema, si P y Q incluyen términos de orden 3 y mayores? Como hemos venido diciendo esto ocurrirá si existe algún z múltiple asociado a $\lambda=0$.

Puesto que $m=q=0$, el teorema 3.3 nos asegura que esta situación se dará si y sólo si se anula el discriminante del polinomio

$$P_3(z) = z^3 - 6z^2 + 9z - e$$

Calculamos este discriminante a partir de su expresión en términos de:

$$R = 9, S = 27(2-e) \quad \rightarrow \quad D_3 = \frac{1}{27} [4R^3 - S^2] = 27e(4-e)$$

Así pues, si $e \neq 0$ y $e \neq 4$ nos bastaría el teorema 3.2 para precisar la estructura local de [s1]. Para esos valores tendremos que acudir a las técnicas del capítulo 5 para concluir el análisis.

Utilicemos este ejemplo para ilustrar otros resultados vistos. La situación del teorema 3.2 que más esfuerzo costaba analizar era el caso de z simple asociado a un $\lambda=0$ (habría que calcular algún término del desarrollo de la variedad centro). Hemos visto que si $m=q=0$ esto es equivalente a que el discriminante se anule. De hecho la ecuación de autovalores es:

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + e(4-e)$$

Si no existen autovalores nulos, como los términos de orden superior a dos no son necesarios en los cálculos del teorema 3.2, la estructura del origen coincide con la de la aproximación homogénea (que, de hecho, utilizando el teorema, se ve que es un punto con dos sectores hiperbólicos si $e < 0$ ó si $e > 4$ y un punto rodeado de seis sectores hiperbólicos si $e \in (0, 4)$; por ser un sistema exacto la aproximación homogénea no podía tener atractores y por ser $n=2$ no era un centro, con lo que no le quedaban muchas posibilidades).

Era fácil calcular las raíces de $P_3(z)$ si eran dobles (triple no puede tener por ser $R \neq 0$), es decir, cuando $D_3=0$. Las fórmulas de 3.3 nos dan:

$$z_d = 3 - \frac{e}{2} \quad (\text{ó } z_m = 2 + [1 - e/2]^{1/3}), \quad z_s = e \quad \rightarrow \quad z_d=3, z_s=0 \text{ si } e=0 \text{ y } z_d=1, z_s=4 \text{ si } e=4$$

Las fórmulas exactas de 3.3 son complicadas de usar si las raíces son distintas. Por ejemplo, si $e=2$, por ser el discriminante positivo hay tres raíces reales dadas por la fórmula trigonométrica:

$$S=0 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow z_{1,2,3} = \frac{1}{3} [6 + \cos \frac{\pi + 4k\pi}{6}] = 2, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$$

[Para este valor de e hay un autovalor doble ($\lambda=2$) como debía, pues se anula $\Sigma=2-e$.

El otro, asociado a $z=2$, es $\lambda=-1$]

O para $e=54$ en que la inmediata única raíz real $z=6$ (con $\lambda=15$) viene dada por la expresión:

$$z_r = 2 + [26 + 15\sqrt{3}]^{1/3} + [26 - 15\sqrt{3}]^{1/3}$$

Ejemplo 4. [s2] $\begin{cases} x' = y^2 - x^2 + P(x, y) \\ y' = 2y^2 + fxy + ex^2 + Q(x, y) \end{cases}$ P, Q con términos de orden 3 y mayores.

Hagamos un análisis similar al ejemplo anterior. Como $q=4$, existe z múltiple asociado a $\lambda=0$ si y sólo si se verifica que $A=B=0$. Como $A = (f+2)(f-6)$ y $B = 16e - 2f^2 + 8$ esto sucede si:

$$f=-2, e=0 \quad \text{ó} \quad f=6, e=4$$

En los demás casos basta el teorema 3.2 para precisar la estructura del origen de [s2].

Sin los resultados de esta sección el trabajo sería mucho más largo. Para ver cuando existe un z múltiple debemos calcular el discriminante de:

$$\begin{aligned} P_3(z) &= z^3 - 2z^2 - (f+1)z - e \rightarrow R=7+3f, S=-18f-27e-34 \\ &\rightarrow D_3 = 4f^3 + 16f^2 + 20f + 8 - 68e - 27e^2 \end{aligned}$$

Y para que haya un $\lambda=0$ debe anularse el término independiente de la ecuación de autovalores:

$$E=-2-e, F=-f \rightarrow s_\lambda = F^2 - E^2 = (f+2+e)(f-2-e)$$

Imponiendo $D_3=s_\lambda=0$ obtenemos 4 pares de valores para (f,e) :

$$\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right), (-2, 0), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{4}\right), (6, 4).$$

De los que sabemos que sólo el segundo y el cuarto nos dan situaciones problemáticas. De hecho los z (fáciles de calcular por la multiplicidad) y los λ respectivos son en cada caso:

$$\begin{aligned} z = 1, -\frac{1}{2} \text{ doble} &\rightarrow \lambda = 0, -\frac{3}{4} & z = 0, 1 \text{ doble} &\rightarrow \lambda = -1, 0 \\ z = -1, \frac{3}{2} \text{ doble} &\rightarrow \lambda = 0, \frac{5}{4} & z = 4, -1 \text{ doble} &\rightarrow \lambda = 15, 0 \end{aligned}$$

¿En qué casos dos autovalores $\lambda=0$? Cuando sea $s_\lambda=0$ y $r_\lambda=f^2-2f-8-4e=0$.

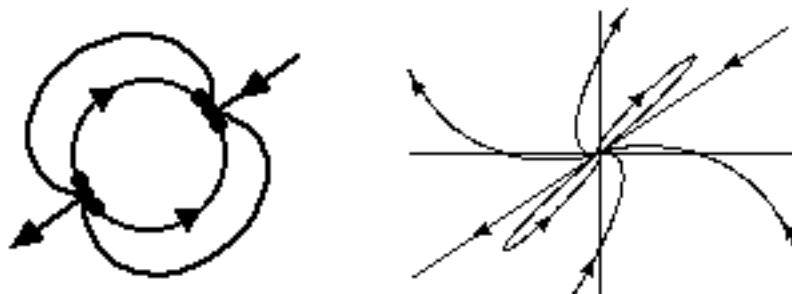
Esto sucede, desde luego, si $f=-2, e=0$ ó $f=6, e=4$, pero también si $f=0, e=-2$.

[El sistema homogéneo es entonces el trivial $x'=y^2-x^2; y'=2[y^2-x^2]$ de órbitas rectas]

Este caso ha de corresponder a que sea $\Sigma=0$. En efecto $\Sigma = 2F+E = -2f-2-e$.

¿Existe algún z triple? Debe ser $R=D_3=0 \rightarrow f=-\frac{7}{3}, e=\frac{8}{27} \rightarrow z=\frac{2}{3}$ triple $\rightarrow \lambda=-\frac{5}{9}$.

Dibujemos este sistema que es el único de los casos citados en que basta mirar la aproximación homogénea. El esquema del teorema 3.2 y el dibujo aproximado son los de abajo:



3.5 Polinomios de cuarto grado.

Analicemos ahora el polinomio $P_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s$, con $m, s \neq 0$.

Si z es raíz múltiple de P_4 satisface:

$$\begin{cases} mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0 \\ 4mz^3 + 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (10) \begin{cases} pz^3 + 2qz^2 + 3rz + 4s = 0 \\ 4mz^3 + 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases}$$

El sistema tiene solución si y sólo si se anula el discriminante:

$$D_4 \equiv \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 4m & 3p & 2q & r & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 3p & 2q & r & 0 \\ 0 & 0 & 4m & 3p & 2q & r \\ p & 2q & 3r & 4s & 0 & 0 \\ 0 & p & 2q & 3r & 4s & 0 \\ 0 & 0 & p & 2q & 3r & 4s \end{vmatrix} =$$

$$= 4Lq^4 - 4Nq^3 + (K^2 - 20LK - 8L^2)q^2 + 18(2L+K)Nq - 27N^2 + 4L^3 - 12L^2K + 12LK^2 - 4K^3$$

siendo:

$$L \equiv 4ms, \quad K \equiv pr, \quad N \equiv mr^2 + p^2s$$

Busquemos expresiones mejores para D_4 . No es difícil comprobar que si llamamos:

$$Q \equiv 3p^2 - 8mq, \quad V \equiv 6mr - pq, \quad T \equiv K - 4L, \quad U \equiv q^2 - L - 2K, \quad W \equiv 6ps - qr, \quad P \equiv 3r^2 - 8qs$$

$$V_2 \equiv \frac{1}{2} [UQ - V^2] = 16m^2qs - 6p^2ms - 18m^2r^2 - 3p^3r + 14mpqr - 4mq^3 + p^2q^2$$

$$T_V \equiv \frac{1}{2} [QW - TV] = 9p^3s + 48m^2rs - 32mpqs - p^2qr - 3mpr^2 + 4mq^2r$$

$$T_2 \equiv \frac{1}{8} [QP - T^2] = \frac{1}{2} [VW - TU] = K^2 + KL - 2L^2 + 2Lq^2 - 3qN$$

se tiene que: $(10) \Rightarrow \begin{cases} Qz^2 - 2Vz + T = 0 \\ Vz^2 - 2Uz + W = 0 \end{cases} \Rightarrow (11) \begin{cases} 2V_2z - T_V = 0 \\ T_Vz - 2T_2 = 0 \end{cases}$

El discriminante D_4 estará relacionado con los coeficientes de (11). En efecto, se tiene que:

$$D_4 = \frac{1}{Q} [4V_2T_2 - T_V^2], \quad \text{si } Q \neq 0$$

Otras expresiones nos aparecerán en el proceso de cálculo de las raíces que iniciamos ahora. Intentemos descomponer $P_4(z)$ en producto de dos polinomios de segundo grado:

$$mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = m(z^2 + Az + C)(z^2 + Bz + D)$$

Tenemos que:

$$p = m(A+B), \quad q = m(AB+C+D), \quad r = m(AD+BC), \quad s = mCD$$

Y llamemos:

$$Z \equiv m(C+D), \quad X \equiv mAB, \quad Z+X = q$$

Está claro que si podemos hallar Z ó X , bastaría resolver ecuaciones de segundo grado para calcular las cuatro raíces. Observemos que:

$$L = 4m^2CD, \quad K = m^2[A^2D+B^2C+AB(C+D)], \quad N = m^2[(A^2D+B^2C)(C+D)+4ABCD]$$

Por tanto se tiene que: $KZ-N = m^3AB(C-D)^2 = X(Z^2-L)$

y concluimos que Z y X han de satisfacer, respectivamente, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_3(Z) &\equiv Z^3 - qZ^2 + K_L Z - N_L = 0, \quad \text{con } K_L \equiv K-L, \quad N_L \equiv N-qL \\ P_3(X) &\equiv X^3 - 2qX^2 + q_L X - q_N = 0, \quad \text{con } q_L \equiv q^2+K-L, \quad q_N \equiv qK-N \end{aligned}$$

Si llamamos:

$$Y \equiv 2Z-X = 2q-3X = 3Z-q = m[2(C+D)-AB]$$

Esta nueva variable satisface una ecuación más sencilla:

$$\begin{aligned} P_3(Y) &\equiv Y^3 - 3RY - S = 0, \quad \text{con} \\ R &\equiv q^2 - 3K + 3L = q^2 - 3K_L = 4q^2 - 3q_L = U-T, \\ S &\equiv 2q^3 - 9qK - 18qL + 27N = 2q^3 - 9qK_L + 27N_L = 18qq_L - 16q^3 - 27q_N \end{aligned}$$

Resuelta cualquiera de las tres ecuaciones de tercer orden (las tres soluciones de cada una corresponden a las tres formas diferentes de agrupar en parejas las cuatro raíces del polinomio inicial), podemos calcular A , B , C y D y, por tanto, las raíces. Está claro que existirán z múltiples si y sólo si existen Z ó X ó Y múltiples con lo que el discriminante respectivo D_{3Z} , D_{3X} , D_{3Y} , de estos polinomios de tercer orden han de coincidir (salvo constante multiplicativa) con el D_4 . En efecto, se cumple que:

$$D_4 = D_{3Z} = D_{3X} = \frac{1}{27^2} D_{3Y} = \frac{1}{27} [4R^3 - S^2]$$

Los libros suelen atacar el cálculo de las raíces haciendo primero desaparecer el término cúbico del polinomio mediante un cambio de variable.

En concreto, si hacemos $z = \frac{x-p}{4m}$ en $P_4(z)$ y multiplicamos por $256m^3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} P_4(x) &\equiv x^4 - 2Qx^2 + 8Fx + G = 0, \quad \text{con} \\ F &\equiv p^3 - 4mpq + 8m^2r, \quad G \equiv 256m^3s - 64m^2pr + 16mp^2q - 3p^4 \end{aligned}$$

De aquí:

$$D_4 = \frac{1}{2^{16}m^6} [Q^4G - 2Q^2G^2 + G^3 + 8Q^3F^2 - 72QF^2G - 432F^4] = \frac{1}{2^{24}m^6} D_{4x}$$

Escribamos antes de seguir otra serie de relaciones entre los objetos definidos:

$$(12) \quad F = \frac{1}{3} [pQ+4mV] \quad , \quad G = \frac{1}{3} [64m^2R-Q^2]$$

$$S = \frac{1}{64m^3} [48m^2QR+27F^2-Q^3] = \frac{1}{256m^3} [108F^2+9QG-Q^3]$$

$$V_2 = \frac{1}{3} [RQ-2mS] = \frac{1}{128m^2} [Q^3-QG-36F^2] = \frac{1}{96m^2} [Q^3-27F^2-16m^2QR]$$

$$T_V = \frac{1}{3} [pS+2VR] = \frac{1}{2m} [RF-pV_2] \quad , \quad T_2 = \frac{1}{3} [2R^2+3TR-qS]$$

Y observemos que algunos de ellos son casi invariantes ante cambios de la forma $z = M+td^k$. En concreto, si $P_4(t) \equiv d^j P_4(M+td^{-k})$ entonces los nuevos m, Q, R, S, F, G, V_2 y D_4 son:

$$m_t = d^{j-4k} m \quad , \quad Q_t = d^{2j-6k} Q \quad , \quad R_t = d^{2j-4k} R \quad , \quad S_t = d^{3j-6k} S \quad ,$$

$$F_t = d^{3j-9k} F \quad , \quad G_t = d^{4j-12k} G \quad , \quad V_{2t} = d^{4j-10k} V_2 \quad , \quad D_{4t} = d^{6j-12k} D_4$$

Hallemos las expresiones de los z múltiples que existen si se anula el discriminante. La primera ecuación de (11) determina de forma única un z doble (real) si el coeficiente de z no se anula:

$$D_4=0, V_2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad z_d = \frac{T_V}{2V_2} \text{ y dos raíces simples}$$

Para el resto de los casos nos será más fácil utilizar la ecuación en x . Un x doble satisface:

$$(13) \quad \begin{cases} x^4 - 2Qx^2 + 8Fx + G = 0 \\ x^3 - Qx + 2F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Qx^2 - 6Fx - G = 0 \\ 6Fx^2 + (G - Q^2)x + 2FQ = 0 \end{cases} \Rightarrow (Q^3 - QG - 36F^2)x - 2F(Q^2 + 3G) = 0$$

$$\text{Así: } D_4=0, V_2 \neq 0 (\Rightarrow R > 0) \rightarrow x_d = \frac{2F(Q^2 + 3G)}{Q^3 - QG - 36F^2} = \frac{FR}{V_2} \rightarrow z_d = -\frac{p}{4m} + \frac{FR}{4mV_2} = \frac{T_V}{2V_2} \text{ , de nuevo.}$$

$$\text{Y se puede ver que las otras dos raíces (simples) vienen dadas por: } z_{s\pm} = -\frac{p}{4m} - \frac{FR}{4mV_2} \pm \frac{\sqrt{V_2}}{\sqrt{R}}$$

Si $D_4=V_2=0$ y $Q \neq 0$, debe ser $T_V=0$ y de (12) deducimos que entonces $RF=0$.

Esto nos lleva a los siguientes subcasos:

Si $R=0$ ($\Rightarrow S=0, 3G=-Q^2 \neq 0, 27F^2=Q^3 \neq 0$) $\rightarrow x_t = \frac{3F}{Q}$ es raíz triple, pues es fácil ver que satisface (13) y que anula también la segunda de derivada de $P_4(x)$: $3x^2 - Q = 0$.

De aquí deducimos que $z_t = -\frac{p}{4m} + \frac{3F}{4mQ} = \frac{V}{Q}$ es raíz triple de $P_4(z)$.

La raíz simple restante es: $x_s = -\frac{9F}{Q} \rightarrow z_s = -\frac{p}{m} - \frac{3V}{Q}$

Si $F=0 \Leftrightarrow R \neq 0$ ($\Rightarrow S \neq 0, G=Q^2 \neq 0$) $\rightarrow x_{d\pm} = \pm\sqrt{Q}$ son raíces dobles (reales o complejas), pues anulan tanto $x^4 - 2Qx^2 + G = 0$ como $x^3 - Qx = 0$.

Las raíces dobles (reales o complejas) $P_4(z)$ son entonces: $z_{d\pm} = \frac{-p \pm \sqrt{Q}}{4m}$.

En fin, si $D_4=V_2=Q=0 \Leftrightarrow R=V=Q=0$ ($\Rightarrow F=G=S=0$) $\rightarrow x_c=0$ y $z_c = -\frac{p}{4m}$ son cúdruples.

Podemos deducir las mismas fórmulas para las raíces múltiples (sin entrar en el detalle de los cálculos) partiendo de que, si las raíces de $P_4(z)$ son z_1, z_2, z_3, z_4 , se cumple que:

$$p = -m(z_1 + z_2 + z_3 + z_4), \quad q = m(z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4)$$

$$r = -m(z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4), \quad q = mz_1z_2z_3z_4$$

Se prueba que entonces:

$$(14) \quad D_4 = m^6(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_1 - z_4)^2(z_2 - z_3)^2(z_2 - z_4)^2(z_3 - z_4)^2$$

Esto corrobora que $D_4=0$ si y sólo si existe alguna raíz múltiple de P_4 .

En el caso de que sea $z_3=z_4=z_d$, se comprueba que:

$$p = -m(z_1 + z_2 + 2z_d), \quad R = m^2(z_1 - z_d)^2(z_2 - z_d)^2, \quad F = -m^3(z_1 + z_2 - 2z_d)(z_1 - z_2)^2,$$

$$V_2 = m^4(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_d)^2(z_2 - z_d)^2, \quad T_V = 2m^4z_d(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_d)^2(z_2 - z_d)^2, \quad D_4=0$$

Si $z_2=z_3=z_4=z_t$ se cumple:

$$Q = 3m^2(z_1 - z_t)^2, \quad V = 3m^2z_t(z_1 - z_t)^2, \quad F = -m^3(z_1 - z_t)^3, \quad R=V_2=D_4=0$$

Si $z_1=z_2=z_{d+}, z_3=z_4=z_{d-}$ es:

$$p = -2m(z_{d+} + z_{d-}), \quad R = m^2(z_{d+} - z_{d-})^4, \quad Q = 4m^2(z_{d+} - z_{d-})^2, \quad F=V_2=D_4=0$$

Por último, si $z_1=z_2=z_3=z_4=z_c$ se tiene que:

$$p = -4mz_c, \quad R=Q=V=F=V_2=D_4=0$$

El discriminante, además de indicar la presencia de raíces múltiples, informa, si es no nulo, del número de raíces reales o complejas del polinomio. Si no hay raíces múltiples, sólo quedan tres posibilidades: ó 4 raíces reales, ó 2 reales y 2 complejas (conjugadas), ó 4 raíces complejas. En el primer caso (14) muestra que $D_4 > 0$. Si hay 2 ó 4 complejas se tiene, respectivamente:

$$z_3, z_4 = \alpha \pm \beta i \quad \rightarrow \quad D_4 = -4m^6[(z_1 - \alpha)^2 + \beta^2]^2[(z_2 - \alpha)^2 + \beta^2]^2[z_1 - z_2]^2 < 0$$

$$z_3, z_4 = \alpha \pm \beta i, \quad z_1, z_2 = \gamma \pm \delta i \quad \rightarrow \quad D_4 = 16m^6\beta^2\gamma^2[(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2]^2[(\alpha - \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2]^2 > 0$$

$D_4 < 0$ caracteriza, pues, el caso 2+2, pero es más complicado distinguir entre los dos restantes. Como el discriminante de $P_4''(z) = 12mz^2 + 6pz + 2q$ es $12Q$, el hecho de que $Q > 0$ es una condición necesaria para que existan 4 raíces reales (si P_4 no tiene puntos de inflexión esto es imposible). Para obtener una condición necesaria y suficiente acudimos al método de Sturm que relaciona el número de raíces en un intervalo con el número de cambios de signo de una secuencia de polinomios en los extremos del intervalo (ver, por ejemplo, Uspensky ([2])). Supuesto que D_4, V_2 y Q son no nulos podemos, con algunos cálculos, construir dicha secuencia:

$$mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s, \quad 4mz^3 + 3pz^2 + qz + r, \quad Qz^2 - 2Vz + T, \quad 2V_2z - T_V, \quad Q^2D_4$$

Nos interesa el signo de cada uno de estos polinomios en más y menos infinito ordenados así:

$$\begin{array}{cccccc} -\infty & m & -m & Q & -V_2 & D_4 \\ \infty & m & m & Q & V_2 & D_4 \end{array}$$

La diferencia entre el número de cambios de signo en la fila superior y el número de cambios de los de la inferior proporcionará el número de raíces reales. Suponemos sin pérdida de generalidad que $m>0$. Para que puedan existir 4 reales la fila superior debe tener 4 cambios y la inferior ninguno. Es decir, si $D_4, V_2, Q>0$:

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & \\ + & + & + & + & + & + \end{array}$$

existen 4 raíces reales. Y no hay más posibilidades. Las otras tres posibles con $D_4>0$:

$$\begin{array}{cccccc} + & - & - & - & + & \\ + & + & - & + & + & \\ + & + & - & - & + & \\ + & + & + & + & - & \end{array}$$

nos dan, como era previsible, 4 complejas (si $D_4<0$ se tienen tres casos 2+2 y uno imposible). Si fuese $V_2=0$ ó $Q=0$ podríamos construir las correspondientes secuencias, que resultan ser de cuatro polinomios o menos, con lo que nunca podemos tener 4 cambios de signo.

En el caso de que $D_4=0, V_2 \neq 0$, podemos volver a ver que el signo de V_2 informa sobre el carácter de las raíces simples. Si z_1, z_2 son simples está claro que $R, V_2>0$. Además, si:

$$z_1, z_2 = \alpha \pm \beta i \quad \rightarrow \quad R = m^2[(z_0 - \alpha)^2 + \beta^2]^2 > 0, \quad V_2 = -4m^4\beta^2[(z_0 - \alpha)^2 + \beta^2]^2 < 0$$

Así pues, resumiendo resultados anteriores:

- $D_4, V_2, Q > 0 \rightarrow$ 4 raíces reales distintas
- $D_4 < 0 \rightarrow$ 2 raíces reales distintas y 2 complejas
- $D_4 > 0$ y $V_2 \leq 0$ ó $Q \leq 0 \rightarrow$ 4 raíces complejas distintas
- $D_4 = 0$ y $V_2 > 0 \rightarrow$ 1 raíz doble real y 2 simples reales
- $D_4 = 0$ y $V_2 < 0 \rightarrow$ 1 raíz doble real y 2 simples complejas
- $D_4 = V_2 = 0, Q \neq 0$ y $R = 0 \rightarrow$ 1 raíz triple real y 1 simple real
- $D_4 = V_2 = 0, Q > 0$ y $R \neq 0 \rightarrow$ 2 raíces dobles reales
- $D_4 = V_2 = 0, Q < 0$ y $R \neq 0 \rightarrow$ 2 raíces dobles complejas
- $D_4 = V_2 = Q = 0 \rightarrow$ 1 raíz cuádruple real

[Podríamos escribir parte de la clasificación anterior en términos de objetos más sencillos, pues:

$$\begin{array}{l} V_2 = R = 0 \Leftrightarrow R = S = 0 \Rightarrow D_4 = 0 \quad , \quad D_4 = V_2 = 0 \Leftrightarrow V_2 = T_V = 0 \Leftrightarrow V_2 = F = 0 \text{ si } R \neq 0 \\ V_2 = Q = 0 \Leftrightarrow Q = F = 0 \Leftrightarrow Q = V = 0 \Leftrightarrow Q = S = 0 \quad \rightarrow \quad D_4 = V_2 = Q = 0 \Leftrightarrow Q = V = R = 0 \end{array}$$

]

Ejemplo 5. Factoricemos y hallemos las raíces de los siguientes polinomios, siguiendo esta sección (los coeficientes están preparados para que salgan números sencillos):

$$P_4(z) = z^4 - 10z^3 + 35z^2 - 50z + 24 \rightarrow D_4=144, V_2=40, Q=20 \rightarrow 4 \text{ raíces reales}$$

$$P_3(Z) = Z^3 - 35Z^2 + 404Z - 1540 \rightarrow Z = 14, 11, 10 = C+D$$

[estas últimas raíces son, en general, las complicadas; se podrían utilizar las fórmulas de 3.3, o ver si el polinomio es uno de los casos que analizaremos en 4.4 (así sucede: será "F=0")]

$$C+D=14, CD=s=24 \rightarrow C=2, D=12 \rightarrow 12A+2B=r=-50, A+B=p=-10 \rightarrow A=-3, B=-7$$

$$P_4(z) = [z^2 - 3z + 2][z^2 - 7z + 12] = [z-1][z-2][z-3][z-4].$$

(de $Z=11$ obtendríamos $[z^2 - 4z + 3][z^2 - 6z + 8] = [z-1][z-3][z-2][z-4]$ y de $Z=10, [z^2 - 5z + 4][z^2 - 5z + 6]$)

(se podría haber resuelto $X^3 - 70X^2 + 1629X - 12600 = 0, X=AB$ ó $Y^3 - 39Y - 70 = 0, Y=3(C+D) - q=2q-3X$)

$$P_4(z) = z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z + 2 \rightarrow D_4=-400 \rightarrow 2 \text{ raíces reales y 2 complejas.}$$

$$P_3(X) = X^3 - 6X^2 + 10X \text{ (caso "q}_N=0" \text{ de 4.4)} \rightarrow X = 0, 3+i, 3-i = AB$$

$$AB=0, A+B=3 \rightarrow A=0, B=3 \rightarrow 3C=3, CD=2 \rightarrow C=1, D=2$$

$$P_4(z) = [z^2 + 1][z^2 + 3z + 2] \rightarrow z = -2, -1, i, -i$$

(de los otros valores (no aconsejables) de X obtendríamos factorizaciones complejas)

$$P_4(z) = z^4 + 12z^2 - 64z + 132 \rightarrow D_4=764411904, V_2=-55296, Q=-96 \rightarrow 4 \text{ complejas.}$$

$$P_3(Y) = Y^3 - 5184Y \text{ (caso "S=0" de 4.4)} \rightarrow Y = 72, 0, -72 = 3(C+D) - 12$$

$$C+D=28, CD=132 \rightarrow C=6, D=22 \rightarrow 22A+6B=-64, A+B=0 \rightarrow A=-4, B=4$$

$$P_4(z) = [z^2 - 4z + 6][z^2 + 4z + 22] \rightarrow z = 2 \pm \sqrt{2}i, -2 \pm 3\sqrt{2}i$$

(si no se toma el mayor valor de Y los polinomios de segundo orden son complejos)

Ejemplo 6. $P_4(z) = z^4 + z^3 + qz^2 + z + 1$

$$D_4=(q+4)q(4q-9)^2, V_2=(q+3)(q-1)(9-4q), Q=3-8q, R=q^2+9, F=9-4q \rightarrow$$

Si $q < -4$ ($Q, V_2, D_4 > 0$) hay 4 raíces reales distintas

$$\text{Si } q = -4 \text{ (} D_4=0, V_2 > 0 \text{) , hay } z_d = -\frac{p}{4m} + \frac{FR}{4mV_2} = -\frac{1}{4} + \frac{25 \cdot 25}{4 \cdot 125} = 1 \text{ doble y además } z = -\frac{1}{2} [3 \pm \sqrt{5}]$$

Si $-4 < q < 0$ ($D_4 < 0$) , 2 reales distintas y 2 complejas

$$\text{Si } q = 0 \text{ (} D_4=0, V_2 < 0 \text{) , real doble } = -\frac{1}{4} + \frac{9 \cdot 9}{4 \cdot [-27]} = -1 \text{ y dos complejas } z = \frac{1}{2} [1 \pm i\sqrt{3}]$$

Si $0 < q < \frac{9}{4}$ las 4 raíces son complejas y distintas ($D_4 > 0$, si $q \leq \frac{3}{8}, V_2 < 0$ y si $q \geq \frac{3}{8}, Q \leq 0$)

$$\text{Si } q = \frac{9}{4} \text{ (} D_4=V_2=0, Q < 0, R \neq 0 \text{) , raíz doble compleja: } z_{d\pm} = \frac{-p \pm \sqrt{Q}}{4m} = \frac{1}{4} [-1 \pm i\sqrt{15}]$$

Si $q > \frac{9}{4}$ ($D_4 > 0, Q < 0$) , vuelve a haber 4 complejas distintas.

3.6 La aproximación homogénea para $n=3$.

Estudiamos en esta sección el sistema:

$$[H3] \quad \begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$$

que a diferencia del [H2] si puede poseer centros y focos (a su estudio está destinado el capítulo 4). Otra diferencia esencial es el hecho de que el origen sí puede ser un solución estable de [H3]. Trataremos aquí los problemas asociados a la presencia de vectores propios múltiples y autovalores cero, de forma análoga a como lo hicimos en la sección 3.4 para $n=2$. Los autovalores y vectores propios de [H3] vienen dados por:

$$[z\lambda] \quad \begin{cases} a+bz+cz^2+dz^3 = \lambda \\ e+fz+gz^2+hz^3 = \lambda z \end{cases}$$

La ecuación de los **vectores propios** es este caso:

$$P_4(z) = dz^4 + (c-h)z^3 + (b-g)z^2 + (a-f)z - e = 0$$

y la de los **autovalores** nos la proporciona la resultante en z de $[z\lambda]$, es decir:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & d & 0 & 0 \\ e & f-\lambda & g & h & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & b & c & d & 0 \\ 0 & e & f-\lambda & g & h & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f-\lambda & g & h \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollándolo se obtiene la ecuación para los λ (bastante menos manejable que la de $n=2$):

$$\begin{aligned} P_4(\lambda) \equiv d^2\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s_\lambda \equiv d^2\lambda^4 + [-ad^2 - 3fd^2 + 2hbd + cgd - 3hgd - c^2h + 2ch^2 - h^3] \lambda^3 + \\ + [3afd^2 + 3f^2d^2 - 2ahbd - 4fhbd + 6ahgd + 3fhgd - acgd - 2fcgd - 4ach^2 - 2fch^2 + ac^2h + 2fc^2h + 3ah^3 + \\ + ched - 3h^2ed + bg^2d - g^3d - chbg + chg^2 + h^2b^2 - h^2bg - bed^2 - 3ged^2] \lambda^2 + \\ + [-3af^2d^2 - f^3d^2 - 3a^2hgd - 3a^2h^3 + 2a^2ch^2 + 4afhbd - 6afhgd + 4afch^2 - 2afc^2h + 2afcgd + f^2cgd + 2f^2hbd - f^2c^2h + \\ + 3aged^2 + 3fged^2 + 2fbed^2 - ached - fched + 6ah^2ed + 2ag^3d - abg^2d - fbg^2d + achbg - 2achg^2 - ce^2d^2 - 3he^2d^2 - \\ - ah^2b^2 + 2ah^2bg + fchbg - fh^2b^2 - 2hb^2ed + hbged - cbged - 2cg^2ed - 3ch^2be + c^2hbe + 2c^2hge] \lambda + \\ + [af^3d^2 + 3a^2fhgd - af^2cgd - 2af^2hbd + a^3h^3 - 2a^2fch^2 + af^2c^2h - 3afged^2 - f^2bed^2 - 3a^2h^2ed + afched - a^2g^3d + \\ + afbg^2d + a^2chg^2 - a^2h^2bg - afchbg + afh^2b^2 + 3ahe^2d^2 + fce^2d^2 + 2acg^2ed - ahbged + fcbged + 2fhb^2ed - \\ - 2ac^2hge - fc^2hbe + 3ach^2be + chb^2ge - h^2b^3e - b^2g^2ed + c^3he^2 - c^2ge^2d - 3chbe^2d + 2bge^2d^2 - e^3d^3] = 0 \end{aligned}$$

Hay z_m múltiples si y sólo si se anula el discriminante D_z de $P_4(z)$ de expresión desarrollada:

$$D_z = 4(c-h)^2(b-g)^3e - 16(b-g)^4de - 27(c-h)^4e^2 + 144(c-h)^2(b-g)de^2 - 128(b-g)^2d^2e^2 - 256d^3e^3 + \\ + [80(b-g)^2de - 18(c-h)^2(b-g)e - 192d^2e^2](c-h)(a-f) + \\ + [(c-h)^2(b-g)^2 - 4(b-g)^3d + 6(c-h)^2de - 144(b-g)d^2e](a-f)^2 + [18(b-g)d - 4(c-h)^2](c-h)(a-f)^3 - 27d^2(a-f)^4$$

En la sección anterior vimos formas de escribirlo de forma más compacta. Llamando:

$$K = (c-h)(a-f) , \quad L = -4de , \quad N = d(a-f)^2 - (c-h)^2e \\ R = (b-g)^2 - 3K + 3L , \quad S = 2(b-g)^3 - 9(b-g)K - 18(b-g)L + 27N \\ Q = 3(c-h)^2 - 8(b-g)d , \quad V = 6d(a-f) - (c-h)(b-g) , \quad T = K - 4L , \quad F = \frac{1}{3} [(c-h)Q + 4dV] \\ V_2 = \frac{1}{3} [RQ - 2dS] , \quad T_V = \frac{1}{3} [(c-h)S + 2VR] , \quad T_2 = \frac{1}{9} [2R^2 + 3TR - (b-g)S]$$

podemos poner:

$$D_z = \frac{1}{27} [4R^3 - S^2] = \frac{1}{Q} [4V_2T_2 - T_V^2]$$

Escribamos mejor el s_λ (informa de la presencia de $\lambda=0$). Dicho s_λ es la resultante del sistema:

$$\begin{cases} a+bz+cz^2+dz^3 = 0 \\ e+fz+gz^2+hz^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H+Dz+Jz^2 = 0 \\ E+Cz+Hz^2 = 0 \end{cases}$$

donde hemos eliminado las potencias en z^3 y z^0 (suponiendo que $z \neq 0$) y llamado:

$$H=ah-de , \quad D=bh-df , \quad J=ch-dg , \quad E=af-be , \quad C=ag-ce$$

La resolvente del último sistema (de orden 8 en los coeficientes del sistema):

$$r_2 = H [2HEJ + HCD - H^3 - C^2J - D^2E] + EJ [CD - EJ]$$

resulta ser múltiplo de H, puesto que $CD = EJ + HI$, siendo $I = bg - cf$ (la cruz que faltaba).

El s_λ es precisamente el r_2/H cambiado de signo:

$$s_\lambda = E[D^2 - JH - JI] + C[JC - DH] + H[H^2 - JE] = \begin{vmatrix} H & D & J \\ C & H+I & D \\ E & C & H \end{vmatrix}$$

Observemos que se satisfacen las siguientes relaciones entre los binomios definidos:

$$\begin{array}{llll} bH = aD + dE & cH = aJ + dC & cD = bJ + dI & bC = aI + cE \\ fH = eD + hE & gH = eJ + hC & gD = fJ + hI & fC = eI + gE \end{array}$$

Se puede ver que también el r_λ se escribe de forma compacta en función de estos binomios:

$$r_\lambda = - (m[D^2 - JH - JI] + 2n[JC - DH] + p[H^2 - JE])$$

donde hemos llamado:

$$m \equiv 3a + f , \quad n \equiv b + g , \quad p \equiv c + 3h$$

Como $3\lambda = [4dz^3 + 3(c-h)z^2 + 2(b-g)z + (a-f)] + pz^2 + 2nz + m$ y el corchete se anula si z es raíz múltiple de $P_4(z)$, el λ_{z_m} asociado a un z_m múltiple se puede calcular utilizando:

$$\lambda_{z_m} = \frac{1}{4} [m + 2nz_m + pz_m^2]$$

Hallemos expresiones de los λ asociados a las distintas posibilidades de z múltiples, vistas en 3.5. Suponemos que $d \neq 0$ (que el polinomio es realmente de orden 4 y no 3).

Si existe raíz cuádruple $z_c = -\frac{c-h}{4d}$ ($\Leftrightarrow Q=V=R=0 \Rightarrow 3(c-h)^2=8(b-g)d$) el λ asociado es:

$$\lambda_{zc} \equiv \frac{16md^2 - 8n(c-h)d + p(c-h)^2}{64d^2} = \frac{n_{zc}}{12d}$$

con

$$n_{zc} \equiv \frac{1}{2} [6md - 3n(c-h) + p(b-g)] = 3(3a+f)d - (cb+2cg-3hb)$$

Si hay raíz triple $z_t = \frac{V}{Q}$ ($\Leftrightarrow R=S=0, Q \neq 0 \Rightarrow V^2=QT, 12de=(b-g)^2-3(c-h)(a-f)$) está asociada a:

$$\lambda_{zt} \equiv \frac{mQ^2 + 2nQV + pV^2}{4Q^2} = \frac{n_{zt}}{2Q}$$

siendo:

$$n_{zt} \equiv \frac{1}{2} [mQ + 2nV + pT] = (c-h)(5ca+cf-3ha-3hf) - (c-h)(b-g)(b+g) + 2(9ag-3ab-fg-5fb)d + 8(c+3h)de$$

[También podemos dar una expresión que no contenga el coeficiente e :

$$n_{zt2} = 3n_{zt} + 2pR = 9(c-h)(ca+cf-3ha+hf) + (b-g)(9hb-cb-3hg-5cg) + 6(9ag-3ab-fg-5fb)d]$$

El autovalor asociado a una raíz doble $z_d = \frac{TV}{2V_2}$ ($\Leftrightarrow D_z=0, V_2 \neq 0 \Rightarrow T_V^2 = 4V_2T_2$) es:

$$\lambda_{zd} \equiv \frac{4mV_2^2 + 4nV_2TV + pTV^2}{16V_2^2} = \frac{n_{zd}}{2V_2}, \quad \text{con} \quad n_{zd} \equiv \frac{1}{2} [mV_2 + nTV + pT_2]$$

es decir:

$$\begin{aligned} n_{zd} = & 2(c-h)^2(a-f)(3ha-2ca-cf) + (c-h)^2(b-g)(ab+fb-2ag) + 3(c-h)^2(3hb-cb-2cg)e + \\ & + (a-f)(18cab-21cag-24hab+27hag+10cfb-7cfg-4hfb+hfg)d + 4(b-g)^2(2ag-ab-fb)d + \\ & + (c-h)(7ca+5cf-15ha+3hf)de + 4(b-g)(3cb-7hb+5cg-hg)de - 9(3a+f)(a-f)^2d^2 - \\ & - 16(3ab-fb-2fg)d^2e - 16(c+3h)d^2e^2 \end{aligned}$$

Queda por ver el caso de dos raíces dobles. En esta sección nos interesa sólo si son reales:

$$F=V_2=0, Q>0, R \neq 0 \quad (\Rightarrow (c-h)^3 + 8(a-f)d^2 = 4(c-h)(b-g)d) \Leftrightarrow \text{existen } z_{d\pm} = -\frac{c-h}{4d} \pm \frac{\sqrt{Q}}{4d}$$

$$\text{asociadas a:} \quad \lambda_{zd\pm} \equiv \frac{8md^2 - 4n(c-h)d + 2p(c-h)^2 - 4p(b-g)d \pm (4nd - p(c-h))\sqrt{Q}}{32d^2}$$

De todo lo anterior tenemos:

- | | |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (15) | $\lambda=0$ es autovalor $\Leftrightarrow s_\lambda = 0$ |
| (16) | Existe z múltiple $\Leftrightarrow D_z = 0$ |
| (17) | Existe z cuádruple asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow Q=V=R=n_{zc}=0$ |
| (18) | Existe z triple asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow R=S=n_{zt}=0, Q \neq 0$ |
| (19) | Existe z doble real asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow D_z=n_{zd}=0, V_2 \neq 0$
ó si $F=V_2=0, Q>0, R \neq 0$ y $\lambda_{zd+}=0$ ó $\lambda_{zd-}=0$ |

Intentamos, como hicimos para $n=2$, buscar caracterizaciones más manejables. Si existe un z múltiple asociado a $\lambda=0$ debe satisfacerse aquí:

$$[zm\lambda 0] \begin{cases} a+bz+cz^2+dz^3 = 0 \\ e+fz+gz^2+hz^3 = 0 \\ m+2nz+pz^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-f)+2(b-g)z+3(c-h)z^2+dz^3 = 0 \\ -3e+2(a-f)z+(b-g)z^2+(c-h)z^3 = 0 \\ m+2nz+pz^2 = 0 \end{cases}$$

y por tanto deben anularse la resultante A de las ecuaciones primera y tercera y la resultante B de la segunda y la tercera del primer sistema (o del segundo, ya que las resultantes respectivas resultan ser las mismas salvo en un factor 16). Calculando estas resultantes:

$$A \equiv (c+3h)(2ac+fc-3ah)^2 - (c+3h)(cb+2cg-3hb)(ab+fb-2ag) - \\ -2(3a+f)(3cab+2cfb+cfg+3hfb-9hag)d + 4(b+g)^2(ab+fb-2ag)d + (3a+f)^3d^2$$

$$B \equiv (3a+f)(2hf+cf-3ha)^2 - (3a+f)(fg+2fb-3ag)(hg+cg-2hb) - \\ -2(c+3h)(3fhg+2fcg+fcg+3acg-9ahb)e + 4(b+g)^2(hg+cg-2hb)e + (c+3h)^3e^2$$

se tiene que:

$$(20) \quad \text{Si existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Rightarrow A = B = 0$$

Podemos escribir de forma más resumida las expresiones de A y B. Llamando:

$$\begin{aligned} a_c &\equiv 2ac+fc-3ah = \frac{1}{4} [3(c-h)m-(a-f)p] & , & & h_f &\equiv 2hf+cf-3ha = \frac{1}{4} [(c-h)m-3(a-f)p] \\ a_b &\equiv ab+fb-2ag = \frac{1}{2} [(b-g)m-(a-f)n] & , & & h_g &\equiv hg+cg-2hb = \frac{1}{2} [(c-h)n-(b-g)p] \\ c_b &\equiv cb+2cg-3hb = \frac{1}{2} [3(c-h)n-(b-g)p] & , & & f_g &\equiv fg+2fb-3ag = \frac{1}{2} [(b-g)m-3(a-f)n] \end{aligned}$$

se puede poner:

$$\begin{aligned} A &= a_c^2 p - c_b a_b p - 2a_b m p d - 2a_c m n d + 4a_b n^2 d + m^3 d^2 \\ B &= h_f^2 m - f_g h_g m - 2h_g m p e - 2h_f p n e + 4h_g n^2 e + p^3 e^2 \end{aligned}$$

[Aquí también hay simetrías ligadas al cambio de papeles de x e y en [H3]. Intercambiando $a \leftrightarrow h$, $b \leftrightarrow g$, $c \leftrightarrow f$, $e \leftrightarrow d$, quedan invariantes $K, L, R, T, T_2, D_z, H, I, n$ y s_λ , cambian simplemente de signo N y S y se convierten el uno en el otro: $D \leftrightarrow C, J \leftrightarrow E, m \leftrightarrow p, a_c \leftrightarrow h_f, a_b \leftrightarrow h_g, c_b \leftrightarrow f_g$ y $A \leftrightarrow B$].

¿Bastará que A y B se anulen para que exista (en general) z múltiple asociada a $\lambda=0$? Esto es lo que sucedía para $n=2$, pero, por desgracia, las cosas no son tan sencillas para $n=3$. Para construir un contraejemplo resolvemos $A=0$ y $B=0$ en d y e respectivamente. Utilizando:

$$2na_c = mc_b + pa_b \quad , \quad 2nh_f = mh_g + pf_g$$

y suponiendo que $m, p \neq 0$, se puede ver que:

$$\begin{aligned} A=0 &\rightarrow d_{\pm} \equiv \frac{1}{m^3} [n \pm \sqrt{n^2 - mp}] [a_c m - (n \pm \sqrt{n^2 - mp}) a_b] \\ B=0 &\rightarrow e_{\pm} \equiv \frac{1}{p^3} [n \pm \sqrt{n^2 - mp}] [h_f p - (n \pm \sqrt{n^2 - mp}) h_g] \end{aligned}$$

Fijamos, por ejemplo, unos valores de los coeficientes restantes que hacen sencillos d_{\pm} y e_{\pm} :

$$a=-1, f=4, b=0, g=2, c=12, h=-3 \rightarrow m=1, n=2, p=3 \rightarrow d_{\pm} = 11, 9 ; e_{\pm} = 1, -1$$

Con los 6 valores fijos y $d=11, e=-1$ ó $d=9, e=1$ se cumple $A=B=n_{zd}=D_z=0$ (y en ambos casos existen z dobles con $\lambda=0$, que son $z_d=-1/3$ en el primer caso y $z_d=-1$ en el segundo).

Pero escogiendo d y e de las otras dos formas posibles, siendo $A=B=0$ se tiene:

$$d = 11, e=1 \rightarrow n_{zd}=-274, D_z=40396, \quad d=9, e=-1 \rightarrow n_{zd}=21222, D_z=265356$$

con lo que no existen z múltiples y no se da un resultado como el teorema 3.6.

Con un ordenador potente se confirma que lo ocurrido en el ejemplo es general: si $m, p \neq 0$ y descomponemos A y B en el producto de sus factores en d :

$$A = m^3[d-d_+][d-d_-] \equiv m^3 A_+ A_-, \quad B = p^3[e-e_+][e-e_-] \equiv p^3 B_+ B_-$$

se cumple que $A_+ = B_- = 0 \Rightarrow n_{zd} = D_z = 0$ y que $A_- = B_+ = 0 \Rightarrow n_{zd} = D_z = 0$

Pero estas caracterizaciones, escritas en términos de raíces, son menos manejables que las iniciales (aunque se puede ver que incluyen también los casos de raíces triples y cuádruples).

Sí se conserva un resultado similar al de $n=2$ para los sistemas exactos. Si es $m=n=p=0$ (o sea, si $f=-3a, g=-b, c=-3h$), siendo una identidad la tercera ecuación de $[zm\lambda 0]$, el hecho de que exista z múltiple con $\lambda=0$ equivale a que se satisfagan las dos primeras ecuaciones (de cualquiera de los sistemas, pues pasan a ser equivalentes). En general, la resolvente de las dos primeras ecuaciones del primero es s_{λ} y la de las dos del segundo es D_z . Se cumple, pues:

$$(21) \quad \text{Si } m=n=p=0, \text{ existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_z=0 \Leftrightarrow s_{\lambda}=0$$

Pasemos a ver la relación entre el discriminante D_{λ} de $P_4(\lambda)$ y el D_z . Como para $n=2$, el primero ha de ser múltiplo del segundo. Ahora las cosas se complican pues D_{λ} es de orden 24 y D_z de orden 6 en los coeficientes del sistema y esto agota la memoria de los ordenadores normales. Buscamos escribir $D_{\lambda} = \Sigma^2 D_z$. El Σ debe reflejar la posibilidad de que existan z_1 y z_2 distintos asociados al mismo λ . Si esto ocurre deben satisfacerse las cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} a+bz_i+cz_i^2+dz_i^3 = \lambda \\ e+fz_i+gz_i^2+hz_i^3 = \lambda z_i \end{cases} \text{ para } i=1, 2$$

Operando con este sistema y llamando $z_1+z_2 \equiv [+]$ y $z_1 z_2 \equiv [.]$ se obtiene:

$$\begin{cases} b+c[+]+d[+]^2-d[.] = 0 \\ f+g[+]+h[+]^2-h[.] = \lambda \\ a-c[.] - d[+][.] = \lambda \\ e-g[.] - h[+][.] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D+J[+] = -\lambda d \\ H-J[.] = \lambda h \end{cases} \Rightarrow dH+hD+hJ[+] = dJ[.]$$

Así

$$J[+] [d[+]+(c-h)] = dH+hD-bJ = h^2 b - chb + bgd + h(a-f)d - d^2 e \equiv \Gamma$$

$$\frac{J}{[.]} (d[.]^2 - e) = dH+hD-gJ = \Gamma + (b-g)J = h^2 b - chg + g^2 d + h(a-f)d - d^2 e \equiv \Omega$$

Por otra parte, podemos descomponer : $P_4(z) = d(z^2 - []z + []) (z^2 + []z + \frac{c-h}{d}) z - \frac{e}{d[]}$

Según 3.5, las variables $X = - [] [d[] + (c-h)]$ y $Z = d[] - \frac{e}{[]}$ satisfacen $P_3(X)=0$ y $P_3(Z)=0$.

De esto deducimos:

$$0 = \Gamma^3 + 2(b-g)J\Gamma^2 + q_L J^2 \Gamma + q_N J^3 \equiv \Sigma$$

$$0 = \Omega^3 - (b-g)J\Omega^2 + K_L J^2 \Omega - N_L J^3 = \Sigma$$

Este Σ es un buen candidato a satisfacer $D_\lambda = \Sigma^2 D_Z$ ya que es de orden 9 como debía:

$$\begin{aligned} \Sigma = & h^6 b^3 - c h^5 b^3 + 2c^2 h^4 b^2 g - 2c h^5 b^2 g - c^3 h^3 b g^2 + c^2 h^4 b g^2 + h^4 b^3 g d - 4c h^3 b^2 g^2 d + 2h^4 b^2 g^2 d + 3c^2 h^2 b g^3 d - \\ & - 2c h^3 b g^3 d + c^5 h^3 e - 2c^4 h^4 e + c^3 h^5 e - 4c^3 h^3 b d e + 4c^2 h^4 b d e - 3c^4 h^2 g d e + 6c^3 h^3 g d e - 3c^2 h^4 g d e + \\ & + 2c h^3 b^2 d^2 e - 3h^4 b^2 d^2 e + 10c^2 h^2 b g d^2 e - 4c h^3 b g d^2 e + 3c^3 h g^2 d^2 e - 7c^2 h^2 g^2 d^2 e + 3c h^3 g^2 d^2 e + \\ & + 2h^2 b^2 g^3 d^2 - 3c h b g^4 d^2 + h^2 b g^4 d^2 + g^5 b d^3 - 2h^2 b^2 g d^3 e - 8c h b g^2 d^3 e - c^2 g^3 d^3 e + 4c h g^3 d^3 e - h^2 g^3 d^3 e - \\ & - 4c^2 h^2 d^3 e^2 - c h b d^4 e^2 + 3h^2 b d^4 e^2 + 6c h g d^4 e^2 + 2b g^3 d^4 e - g^4 d^4 e + b g d^5 e^2 - 2g^2 d^5 e^2 - d^6 e^3 + \\ & + [c^3 h^4 b - c^2 h^5 b - c^4 h^3 g + c^3 h^4 g - 2c h^4 b^2 d + 3h^5 b^2 d - 2c h^4 b g d + 3c^3 h^2 g^2 d - 2c^2 h^3 g^2 d + \\ & + 2h^3 b^2 g d^2 - 3c h^2 b g^2 d^2 + 3h^3 b g^2 d^2 - 3c^2 h g^3 d^2 + c h^2 g^3 d^2 - c^3 h^2 d^2 e + 5c^2 h^3 d^2 e + 2h b g^3 d^3 + c g^4 d^3 - \\ & - c g^2 d^4 e - 2h b g d^4 e + h g^2 d^4 e + 3h d^5 e^2 + 2c h^2 b d^3 e - 6h^3 b d^3 e + 2c^2 h g d^3 e - 6c h^2 g d^3 e] (a-f) \\ & + [-c^2 h^4 d - c h^3 b d^2 + 3h^4 b d^2 + c^2 h^2 g d^2 + h^2 b g d^3 - 2c h g^2 d^3 + h^2 g^2 d^3 - 3h^2 d^4 e + g^3 d^4] (a-f)^2 + h^3 d^3 (a-f)^3 \end{aligned}$$

Además se observa que el término de mayor orden en d y e es $-d^6 e^3$, siendo $-256d^3 e^3$ el de D_Z y, como es fácil ver, $-256d^{15} e^9$ el que aparecería en la expresión de D_λ .

Otra expresión para el Σ la podemos encontrar utilizando la variable $Y=2Z-X$ de la sección 3.5. De allí deducimos que si

$$\Pi \equiv JY = 3dH + 3hD - (b+2g)J = -h(cb+2cg-3hb) + g(b+2g)d + 3h(a-f)d - 3d^2 e$$

debe cumplirse:

$$0 = \Pi^3 - 3RJ^2\Pi - SJ^3 = 27\Sigma$$

Observemos que tanto en el D_Z como en el Σ los coeficientes a y f aparecen sólo en la forma $(a-f)$, con lo que lo mismo tiene que suceder en el D_λ . Esto nos permitiría reducir a 7 el número de coeficientes involucrados en las cuentas, si intentásemos hallar directamente el D_λ . Para hacerlo, lo mejor sería trabajar utilizando la expresión del discriminante en función de R_λ y S_λ (de definición natural y extensa expresión), pues se ve que ambos son también funciones de $(a-f)$, mientras que $T_{V\lambda}$, por ejemplo, no lo es. Utilizando el Maple, un ordenador rápido y suficientes megas de memoria se puede probar entonces la conjetura:

$$(22) \quad D_\lambda = \Sigma^2 D_Z$$

Pero, como hicimos para $n=2$, vamos a comprobar (22) por caminos que se podrían recorrer con papel y bolígrafo (o al menos con un ordenador modesto):

Haciendo en $P_4(z)$ el cambio $z = \frac{y+h}{d}$ se obtiene el polinomio $P_4(y) \equiv y^4 + py^3 + qy^2 + ry + s$, con
 $p = c+3h$, $q = 3h(c+h) + (b-g)d$, $r = h(3c+h) + 2h(b-g)d + (a-f)d^2$, $s = ch^3 + h^2(b-g)d + h(a-f)d^2 - d^3e$

El discriminante D_y de $P_4(y)$ (vimos en 3.5 que será casi el D_z) se puede, por ejemplo, escribir en función de los también casi invariantes R_y y S_y :

$$R_y \equiv q^2 - 3pr + 12s = d^2R, \quad S_y \equiv 2q^3 - 9qpr - 18qs + 27r^2 + 27p^2s = d^3S \rightarrow D_y = d^6D_z$$

El Σ se podrá, entonces, expresar en función de J , R_y , S_y y Π . En efecto, se tiene:

$$d^3\Sigma = \frac{1}{27} [(d\Pi)^3 - 3R_y J^2 (d\Pi) - S_y J^3], \quad \text{si } d\Pi = 3s - qJ + 3J^2$$

Ahora, como para $n=2$, intentamos escribir $P_4(\lambda)$ con otro cambio de variable en función de los coeficientes de $P_4(y)$ (aquí también aparecerá el J). La siguiente forma de escribir el p_λ :

$$p_\lambda = 4dD + 8hJ - r - pJ$$

Sugiere hacer: $\lambda = \frac{\mu - dD - 2hJ}{d^2} \rightarrow P_4(\mu) \equiv \mu^4 + p_\mu \mu^3 + q_\mu \mu^2 + r_\mu \mu + s_\mu$, siendo:

$$\begin{aligned} p_\mu &= -r - pJ \\ q_\mu &= qs + (pr - 4s)J + qJ^2 \\ r_\mu &= -ps^2 - (pq - 3r)sJ - (qr - 3ps)J^2 - rJ^3 \\ s_\mu &= s^3 + (p^2 - 2q)s^2J + (2s - 2pr + q^2)sJ^2 + (r^2 - 2qs)J^3 + sJ^4 \end{aligned}$$

El discriminante D_μ de $P_4(\mu)$ se puede escribir en la forma: $D_\mu = \frac{1}{27} [4R_\mu^3 - S_\mu^2]$, siendo:

$$R_\mu \equiv q_\mu^2 - 3p_\mu r_\mu, \quad S_\mu \equiv 2q_\mu^3 - 9q_\mu p_\mu r_\mu - 18q_\mu s_\mu + 27r_\mu^2 + 27p_\mu^2 s_\mu$$

Y sabemos que R_μ , S_μ y D_μ son casi los R_λ , S_λ y D_λ . Más precisamente, se tiene:

$$R_\mu = d^4 R_\lambda, \quad S_\mu = d^6 S_\lambda, \quad D_\mu = d^{12} D_\lambda$$

Como se puede escribir tanto el Σ como el D_y en función de J , $d\Pi$, R_y y S_y , es de esperar (si se ha de satisfacer (22)) que también pueda hacerse lo mismo con el R_μ y el S_μ . Se tiene:

$$\begin{aligned} R_\mu &= \frac{1}{9} [R_y (d\Pi)^2 + S_y (d\Pi)J + R_y^2 J^2] \\ S_\mu &= \frac{1}{27} [S_y (d\Pi)^3 + 6R_y^2 (d\Pi)^2 J + 3R_y S_y (d\Pi)J^2 + (S_y^2 - 2R_y^3)J^3] \end{aligned}$$

Deducimos unas igualdades nada visibles a partir de las largas expresiones iniciales de R_λ y S_λ :

$$R_\lambda = \frac{1}{9} [R\Pi^2 + S\Pi J + R^2 J^2], \quad S_\lambda = \frac{1}{27} [S\Pi^3 + 6R^2 \Pi^2 J + 3RS\Pi J^2 + (S^2 - 2R^3)J^3]$$

y que hacen ya sencillo comprobar el resultado (22), es decir, comprobar:

$$\begin{aligned} &4[R\Pi^2 + S\Pi J + R^2 J^2]^3 - [S\Pi^3 + 6R^2 \Pi^2 J + 3RS\Pi J^2 + (S^2 - 2R^3)J^3]^2 = \\ &= [\Pi^3 - 3RJ^2\Pi - SJ^3]^2 [4R^3 - S^2] \end{aligned}$$

Ejemplo 7. [s7] $\begin{cases} x' = y^3 + 3xy^2 + 2x^2y - 2x^3 \\ y' = y^3 + 2xy^2 + ex^3 \end{cases}$

Veamos para qué valores de e podemos precisar con el teorema 3.2 la estructura del origen de [s7] (y del sistema perturbado con términos de orden mayor que 3) . Como:

$$m=-6, n=4, p=6, a_c=-6, a_b=4, c_b=12 \rightarrow A=-32 \neq 0$$

concluimos que no hay z múltiple asociado a $\lambda=0$ para ningún valor de e .

El único problema es que haya centro o foco. Esto ocurre si $e < -11/16 = -0.6875 \equiv e^*$ pues:

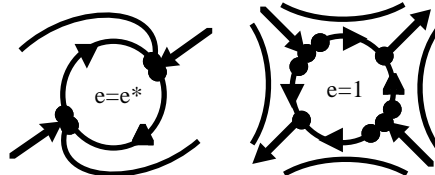
$$P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 2z - e \rightarrow Q=12, V_2=24(e-1), D_2=-16(16e+11)(e-1)^2, R=12(1-e)$$

Por ahora no sabemos precisar su estabilidad para esos valores.

[con el capítulo 4 se podría ver que es centro si $e=-1$, foco estable si $-1 < e < e^*$ e inestable si $e < -1$: será $I_0=3456(1+e)(1-e)$ lo que implicará que sólo podrá ser centro si $e=-1$ y de hecho lo será: el $P_4(z)$ se puede factorizar por ser fácilmente calculable la Z de 3.5]

¿Cómo es el mapa de fases local de [s5] para $e \geq e^*$?

Si $e=e^*$ ($D_z=0, V_2 < 0$) , hay dos z complejas y una doble real: $z_d=1/2 \rightarrow \lambda=-1/8$.



Si $e=1$ ($D_z=V_2=R=0, Q \neq 0$) , una triple real $z_t=-1 \rightarrow \lambda=-2$ y otra simple $z_s=1 \rightarrow \lambda=4$.

Para los demás valores hay siempre dos reales distintas y dos complejas ($D_z < 0$) .

Como

$$s_\lambda = -e^3 - 7e^2 - 16e - 8 = 0$$

sólo tiene una raíz real ($e^{**} \approx -0.6854$) , por ser menor que cero el discriminante del polinomio cúbico, sólo para $e=e^{**}$ existe un autovalor (simple) $\lambda=0$ y sólo en ese caso habría que hallar términos de la variedad centro y no bastarían para analizar el punto los términos de orden 3 . En los demás se mantiene la estructura de la aproximación homogénea.

Puesto que sólo si $e=e^{**}$ pueden los autovalores cambiar de signo, para $e^* < e < e^{**}$ siguen siendo negativos los λ asociados a los dos z reales y por tanto hay un nodo estable.

Por la misma razón, para $e > e^{**}$ ($e \neq 1$) hay un λ positivo y otro negativo como para $e=1$. Además la orientación de la circunferencia dada por el signo del $\Delta(x,y)$ del teorema 3.2 será en todo caso similar a la de $e=1$ (es decir, la z asociada al λ positivo será mayor que la asociada al negativo). Hay, pues, para $e > e^{**}$ un punto silla.

[que conste que existen sistemas homogéneos de orden 3 con un λ positivo y otro negativo que no son sillas sino puntos con 4 sectores elípticos (como por ejemplo $x' = y^3 - 2x^2y ; y' = x^3 - 2xy^2$)]

Ejemplo 8. Sea ahora [s8] $\begin{cases} x' = y^3 + 3xy^2 - 2x^3 \\ y' = y^3 + ex^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 2z - e$ como en [s5].

Sin embargo en este ejemplo nos aparecen situaciones complicadas. Se tiene que:

$$A=0, B=216(e-1)(e+1) \rightarrow \text{si } e = 1, -1 \text{ pueden haber } z \text{ m\u00faltiples asociados a } \lambda=0$$

Para $e=-1$ hay centro o foco (se puede ver que centro). Para $e=1$:

$$P_4(z) = [z+1]^3[z-1], z=-1 \text{ triple asociado a } \lambda=-1+3-2=0.$$

[a lo mismo nos hubiera llevado el an\u00e1lisis de las ra\u00edces de $P_4(z)$ y el c\u00e1lculo de $n_{z1}=48(1-e)$]

Por tanto, si $e=1$ no basta el teorema 3.2 para analizar el origen de [s8].

\u00bfPara qu\u00e9 otros valores hay z m\u00faltiples? Para $e=e^*$. Ahora al $z_d=1/2$ est\u00e1 asociado $\lambda=-9/8$.

\u00bfCu\u00e1ndo existe alg\u00fan $\lambda=0$? Resulta ser

$$s_\lambda = (1-e)(e^2 - 20e - 8).$$

As\u00ed que la aproximaci\u00f3n homog\u00e9nea tiene una recta de puntos cr\u00edticos tambi\u00e9n para $e=10 \pm 6\sqrt{3}$ ($\approx 20.39, -0.39$) y si le a\u00f1adimos t\u00e9rminos de mayor orden, es preciso calcular t\u00e9rminos de la variedad centro para completar el an\u00e1lisis.

Por todo lo anterior, la estructura del origen es la misma (y no depende de t\u00e9rminos de orden superior) en cada una de los siguientes intervalos:

$$\text{i) } e^* < e < 10 - 6\sqrt{3}, \text{ ii) } 10 - 6\sqrt{3} < e < 1, \text{ iii) } 1 < e < 10 + 6\sqrt{3}, \text{ iv) } e > 10 + 6\sqrt{3}.$$

Elijamos un e de cada regi\u00f3n para ver c\u00f3mo es (en todos los casos existen dos z reales):

Para i) los λ seguir\u00e1n siendo negativos como para $e=e^*$ y tendremos un nodo estable.

En ii) elegimos $e=0 \rightarrow z_1=0 (\lambda=-2)$ y $z_2 \approx 0.84 (\lambda \approx 0.7)$ + orientaci\u00f3n \rightarrow silla.

Para iii) si $e=4 \rightarrow z_1=-2 (\lambda=2)$ y $z_2=2^{1/3} (\lambda=108^{1/3}) \rightarrow$ nodo inestable.

Para iv) si $e=28 \rightarrow z_1=2 (\lambda=2)$ y $z_2 \approx 2.9 (\lambda \approx -1.2)$ + orientaci\u00f3n \rightarrow silla.

3.7 Ideas sobre estabilidad.

La estabilidad de un punto crítico elemental es bien fácil de determinar: si la parte real de los dos autovalores es negativa el punto es asintóticamente estable y si existe algún autovalor con parte real mayor que cero es inestable. En las secciones anteriores hemos hablado de los 'autovalores' de las aproximaciones homogéneas de orden 2 y 3. La intención de ésta es ver si se puede generalizar algo de las ideas de los sistemas lineales a estos de mayor orden.

Primero tratamos el caso $n=2$. Es decir, estudiemos la estabilidad del sistema:

$$[S2] \quad \begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 + A(x,y) \\ y' = ex^2 + fxy + gy^2 + B(x,y) \end{cases}, \text{ A y B de orden mayor que 2}$$

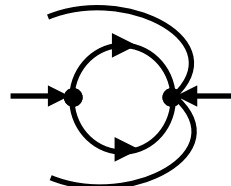
Llamemos [H2] a su aproximación homogénea. Suponemos que $c \neq 0$ (o sea que $x=0$ no es invariante) para simplificar las discusiones. No se pierde generalidad pues un cambio de variable lineal giraría $x=0$. Puesto que $x' = \lambda x^2 + \dots$, con $\lambda \neq 0$ siempre se aleja por la izquierda o por la derecha del origen, el primer resultado es inmediato:

Si existe algún autovalor real de [H2] distinto de 0 el origen de [S2] es inestable

Por tanto, para que un sistema del tipo [S2] pueda ser estable o asintóticamente estable deben ser 0 todos sus autovalores reales. La forma más fácil de dar un [S2] asintóticamente estable es a partir de un [H2] que tenga un solo z real asociado a $\lambda=0$.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x' = y^2 - x^3 \\ y' = -xy \end{cases} \rightarrow \Delta(x,y) = -y(y^2 + x^2) \rightarrow y=0 \text{ simple} \rightarrow \lambda=0$$



Orientando la variedad centro: $y=0 \rightarrow x' = -x^3$

Con lo que el esquema del punto es el de la derecha:

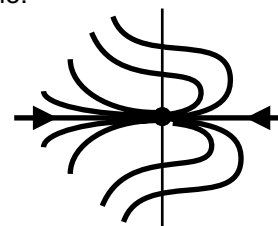
Otra posibilidad más complicada es que existan tres z asociados a $\lambda=0$. Esto sólo puede ocurrir si hay z múltiples, pues es imposible que $a+bx+cx^2$ se anule para tres z distintos (es decir, [H2] sólo puede tener dos rectas de puntos críticos). De otra forma: imponiendo que en la ecuación de autovalores se anulen los coeficientes de λ^2 y λ y el término independiente se obtienen dos únicas posibilidades de expresar a , f y e en función de los demás:

$$a = -\frac{g[b+g]}{c}, f = \frac{bg}{c}, e = -\frac{g^2[b+g]}{c^2} \quad \text{ó} \quad a = \frac{[b-g][2b+g]}{9c}, f = -\frac{[b-g][b-4g]}{9c}, e = -\frac{[b-g]^3}{27c^2}$$

con un z doble y uno simple en el primer caso y con uno triple en el segundo (asociados todos a $\lambda=0$). En general, habría que esperar a la siguiente sección para tratar un [S2] de estos, pero podemos dar un ejemplo integrable con el origen asintóticamente estable:

$$\begin{cases} x' = y^2 - x^3 \\ y' = -3x^2 y \end{cases} \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{3y} - \frac{y}{3x^2}. \text{ Ecuación de Bernouilli de solución:}$$

$$x = [Cy - y^2]^{1/3}$$



El dibujo aproximado de su mapa de fases es el de la derecha:

Pasemos ya a considerar el caso $n=3$:

$$[S3] \quad \begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + A(x,y) \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 + B(x,y) \end{cases}, \text{ A y B de orden mayor que 3}$$

donde suponemos que $d \neq 0$. Ahora se pueden ya presentar situaciones más parecidas a las de $n=1$: es posible que la aproximación homogénea [H3] sea asintóticamente estable y pueden aparecer centros y focos. Pero también van a ser muchas las diferencias (la complicación del análisis entre ellas). Nos limitamos a tratar de analizar cuando [H3] es asintóticamente estable, lo que, según todo lo visto hasta ahora, nos garantiza lo mismo para el sistema [S3] (veremos en el próximo capítulo que esto es cierto también en el caso de los focos). No puede entonces existir ningún $\lambda=0$ (no puede haber rectas de puntos críticos en [H3]). [H3] podía tener 4, 2 ó 0 vectores propios reales (y el mismo número de autovalores). En los dos primeros casos la estabilidad estaba ligada a las de $x' = \lambda x^3 + \dots$ [en el tercero, la estabilidad dependerá del signo de una integral I , que definiremos en 4.1]. Así que se tiene el siguiente resultado que permite estudiar la estabilidad de [S3] directamente a partir de la ecuación de autovalores de [H3]:

Teorema 3.7

Si [H3] posee λ reales y todos esos λ reales son negativos, el origen de [S3] es asintóticamente estable.

Tal vez podría pensarse que existiese, como en el caso lineal, una relación entre la parte real de los autovalores complejos y la estabilidad. Pero esto es falso tanto en el caso de los focos como en el de 2 reales + 2 complejos , como muestran los siguientes contraejemplos:

$$\begin{cases} x' = -x^3 - y^3 \\ y' = -3x^2y + 4xy^2 - 3y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 2z = z(z-1)(z^2 - 2z + 2) \rightarrow \begin{cases} z=0 \rightarrow \lambda = -1 \\ z=1 \rightarrow \lambda = -2 \end{cases}$$

El origen es asintóticamente estable y, sin embargo, los λ complejos son con $Re \lambda > 0$:

$$z=1+i \rightarrow \lambda=1-2i, \quad z=1-i \rightarrow \lambda=1+2i$$

Los autovalores los podíamos haber calculado a partir de su ecuación, encontrada en 5.4:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 11\lambda + 10 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

Los signos de los λ reales podríamos hallarlos de otra forma más larga (pero generalizable): hallando para $P_4(\lambda)$ la secuencia de polinomios de Sturm, citados en 5.3, y evaluándolos en $-\infty$, 0 e ∞ . Hallando los Q, T, V_2, T_v y D_4 allí citados se obtiene:

$-\infty$	m	-m	Q	$-V_2$	D_4	\rightarrow	1	-1	-5	1960	-173056
0	s	r	T	$-T_v$	D_4	\rightarrow	10	11	-149	-4720	-173056
∞	m	m	Q	V_2	D_4	\rightarrow	1	1	-5	-1960	-173056

Por tanto hay 2 autovalores reales negativos y no hay ningún autovalor real positivo.

$$\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = m^2x^3 + 2x^2y + 2mxy^2 - y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = (z^2+m)^2; \text{ si } m>0, z = \pm i\sqrt{m} \rightarrow \lambda = 2 + m \pm i\sqrt{m}$$

Este será el ejemplo 1 de 4.1. Allí veremos que el origen es un foco estable para $m > 2$. En cambio, la $\operatorname{Re} \lambda > 0$ para todo $m > 0$. Para $m < 0$ (cuatro z reales) el signo de $\lambda = 2 + m \pm \sqrt{-m}$ sí nos da la estabilidad: es asintóticamente estable si $m < -4$. Otra forma de ver lo último sería hallar el signo de las raíces reales de:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 4(m+2)\lambda^3 + 2(m^3+3m^2+12m+12)\lambda^2 - 4(m+1)(m+2)(m^2+4)\lambda + (m+1)^2(m^2+4)^2$$

El objetivo ideal que podríamos plantearnos sería encontrar una caracterización, a ser posible algebraica, de la estabilidad del origen de [H3] en términos de sus coeficientes. Pero veremos que no se puede expresar la integral I del caso complejo de forma sencilla. Y el análisis de los casos reales también se hace muy complicado: aunque la distinción entre cuando hay 4 ó cuando hay 2 raíces reales no es demasiado larga (basta considerar la ecuación de vectores propios y utilizar la clasificación de 3.5) sí lo es precisar en cada caso si los 4 o los 2 autovalores existentes son todos negativos o no. En teoría esto se puede afirmar sin más que aplicar el método de Sturm a la ecuación de los λ .

Pero si el $P_4(\lambda)$ ya tiene unos coeficientes m, p, q, r , s bastante gordos (respectivamente, de orden 2, 3, 4, 5, 6 en términos de los coeficientes de [H3]) lo son mucho más los Q, T, V_2, T_V y D_4 de los polinomios de Sturm (de orden 6, 8, 14, 15 y 24, aunque el resultado (22) de 3.6 permita hallar en vez del D_4 , el discriminante de orden 6 de la ecuación en z).

Conclusiones más modestas sobre estabilidad sí se podrían dar utilizando los resultados clásicos del estudio de polinomios. Por ejemplo, de la ley de Descartes de los signos se sigue:

Si $P_4(\lambda)$ tiene raíces reales y todos sus coeficientes son positivos \Rightarrow el origen es AE.

[esto (y el hecho de que el discriminante de $P_4(z)$ era negativo) bastaba para garantizar la estabilidad asintótica del primero de los dos ejemplos analizados]

O del simple teorema de Bolzano para funciones continuas:

$$s_\lambda < 0 \Rightarrow \text{el origen es inestable.}$$

[También en el caso de autovalores todos complejos, se podrían enunciar, a la vista de la expresión que daremos de la I , condiciones suficientes de estabilidad. Por ejemplo:

Si no hay λ reales, $d(c+3h) > 0$, $d(3a+f) > 0$ y $(b+g)^2 \leq (c+3h)(3a+f) \Rightarrow$ el origen es AE].