

4. ¿Centros o focos?

Dado el sistema analítico:

$$[S] \begin{cases} x' = A^n(x,y) + A^{n+1}(x,y) + \dots \\ y' = B^n(x,y) + B^{n+1}(x,y) + \dots \end{cases}$$

abordaremos en este capítulo uno de los casos en que no basta el teorema 3.2 para precisar su estructura local: cuando son complejos todos los 'autovalores' de la aproximación homogénea (necesariamente n ha de ser impar). En ese caso sabemos que no hay órbitas que pasen por el origen con pendiente definida y el punto es un centro o un foco.

Analizaremos en la sección 4.1 cuándo la aproximación homogénea [H] posee un centro, un foco estable o un foco inestable. Veremos que esto dependerá del signo de la integral:

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}(z)}{P_{n+1}(z)} dz, \text{ con } P_{n+1}(z) = B^n - zA^n \Big|_{(1,z)}, \quad E_{n-1}(z) = A^n_x + B^n_y \Big|_{(1,z)}$$

con $P_{n+1}(z)$ sin raíces reales (cuando sea $I=0$ habrá un centro). En 4.2 avanzaremos en el problema de determinar analíticamente el signo de integrales de la forma I para $n=3$ (problema nada trivial) y aplicaremos los resultados en 4.3 al estudio de sistemas concretos.

Para determinar el signo de I para $n=3$ comenzaremos hallando su valor en términos de las raíces de los polinomios de tercer grado que aparecieron en la sección 3.5. Luego trataremos varios casos de P_4 factorizables para los que se puede dar una expresión algebraica de I en términos de los coeficientes, detallando al tiempo cuando P_4 sólo posee raíces complejas. Deduiremos a continuación una condición necesaria para la anulación de I : debe anularse un polinomio I_0 de orden 6 en los coeficientes de E_2 y P_4 .

Estudiaremos después lo que sucede al añadir a [H] términos de mayor orden: los focos se conservarán, pero los centros pueden convertirse en focos. Primero repasaremos en 4.4 los muy estudiados centros elementales (su estabilidad la determinan los llamados valores focales o constantes de Lyapunov I_n (polinomios en términos de los coeficientes del sistema); para que el sistema no lineal tenga un centro deben anularse todas las I_n). Luego trataremos los no elementales en 4.5, con más detalle los de aproximación cúbica. Para estos centros cúbicos (es decir, con $I=0$) perturbados la siguiente condición que da su inestabilización será una integral J mucho más complicada que la I (la J vendría a ser la siguiente 'constante de Lyapunov'):

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q_8}{P_4^{5/2}} + \frac{Q_{12}}{P_4^{7/2}} \right] E dz, \text{ con } E(z) = \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{P_4} \right],$$

$$Q_8(z) = B^3 A^5 - A^3 B^5 \Big|_{(1,z)}, \quad Q_{12}(z) = [B^4 - zA^4][A^3 B^4 - B^3 A^4] \Big|_{(1,z)}.$$

Esta J (evidentemente no calculable en general) la conseguiremos reducir a otra similar con el numerador de grado 2 que, en ocasiones, tendrá signo definido. Si esto es así, habríamos probado algebraicamente que el centro se ha convertido en foco.

La primera prueba (con errores; ver [31]) de que en un sistema analítico no pueden existir centro-focos por no poder acumularse los ciclos límites se encuentra en [1].

Que la distinción entre centro y foco homogéneo depende de una integral se puede ver ya en [3]. En [6], [26] y [35] se utiliza una integral similar a la I que hemos definido pero el numerador de su integrando es A^n . Considerar dicha I (utilizada en [32] y [38]), simplifica aun más los cálculos al tener el numerador de un grado inferior (lo que la hace estrictamente convergente; además deja claro que se anula, como debe, si el sistema es exacto).

No parece existir ningún resultado similar al teorema 4.2 ni a las demás técnicas de distinción entre centros y focos (expuestas en [38]). En [32] se dan condiciones algebraicas de estabilidad de focos cúbicos (y de mayor orden), pero a partir de la suposición de que el polinomio del denominador de I ya está factorizado, con lo que se evita la principal dificultad.

Hay muchas referencias sobre los centros lineales perturbados de 4.4. Esta sección no deduce resultados nuevos, aunque sí presenta, de forma simplificada, detallada y fácilmente reproducible con ordenadores modestos, el cálculo de los primeros valores focales. El I_3 está calculado, por ejemplo, en el capítulo IX de [8] (por la vía aquí seguida, pero sin detalles) o en el 3 de [13] (de modo totalmente diferente). Nuestras integraciones por partes para abreviar el cálculo de los siguientes valores focales son similares a las de [12] o [21]. Un camino alternativo, basado en desarrollos en serie de funciones de Lyapunov, está descrito en [3], [10] o [15]. No conocemos expresiones tan reducidas como la nuestra para I_5 en el caso general.

Se han calculado muchas más veces las I_n para sistemas concretos, con el fin de obtener condiciones algebraicas necesarias y suficientes para la existencia de centros y avanzar en el principal problema abierto en la teoría de sistemas polinomiales planos, el llamado problema 16 de Hilbert sobre el máximo número de ciclos límites de un sistema polinomial de grado n , no resuelto siquiera para $n=2$ (ver [22] o [30]). Un buen artículo de resumen sobre la integrabilidad de los sistemas cuadráticos $x' = y + ax^2 + bxy + cy^2$; $y' = -x + ex^2 + fxy + gy^2$ (sobre los que hay más de 800 publicaciones) es [27] que indica los errores de alguna referencia anterior (la clásica y muy citada [4] o [16]), además de probar condiciones de centro, como las nuestras, en términos de los coeficientes del sistema inicial (y no del habitual con $e+g=0$ al que se lleva mediante un cambio de variable). Se dan condiciones de centro bastante compactas en términos de la forma compleja de estos sistemas en [29]. Para los centros perturbados con polinomios cúbicos se puede ver [33] que se basa en [5]. Sistemas con términos cuadráticos y cúbicos se tratan en [23], [28] u [34], con términos de orden cuatro en [21] y [35], de orden cinco en [37] ...

Hay muchos menos resultados sobre los centros y focos homogéneos perturbados de 4.5. Que un foco se conserva está probado en [35]. Integrales (en polares) en la línea de la J del teorema 4.4 (presentada en [38]) aparecen en [3], [9], [18], [19], [25] o [28], pero casi nada se dice sobre la determinación efectiva de su signo, ni se realizan nuestras reducciones. Y los sistemas con focos no elementales analizados son mucho más fáciles que los nuestros (por ejemplo, es $P_4 \equiv 1$ en [28]). En relación con este tema es importante tener en cuenta el artículo [7] que prueba a través de un contraejemplo que, en general, el problema de distinguir entre centros y focos de este tipo de sistemas es, a diferencia de lo que ocurre con los lineales, algebraicamente irresoluble. Hay reflexiones sobre esta idea en [14], [20], [24] o [25].

Un breve y buen repaso de la poligonal de Newton (que se utilizará en este y, sobre todo, en el siguiente capítulo) se puede leer en el capítulo 2 del [11]. Libros de geometría que tratan este tema (y que también exponen resultados sobre polinomios) son [2] y [17].

Referencias del capítulo 4

- [1] H. Dulac. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France **51** [1923].
- [2] R. J. Walker. Algebraic curves. Princeton University Press [1950].
- [3] V. V. Nemytskii - V. V. Stepanov. Qualitative theory of differential equations.
Princeton University Press [1960].
- [4] N. N. Bautin. On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients
from an equilibrium point of focus or center type. Amer. Math.Soc.Transl.Ser.I **5** [1962], 396-413.
- [5] K. S. Sibirsky. On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point.
Differential Equations **1** [1965], 36-47.
- [6] J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans \mathbb{R}^2 .
Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV **79** [1968], 35-69.
- [7] Yu. S. Il'yashenko. Algebraic insolvability and almost algebraic solvability of the
center-focus problem. Funct. Anal. Appl. **6** [1972], 197-202.
- [8] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Theory of bifurcations
of dynamical systems on a plane. Wiley [1973].
- [9] N. G. Lloyd. A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems.
J. London Math. Soc. (2) **20** [1979], 277-286.
- [10] S. Songling. A method of constructing cycles without contact around a weak focus.
J. of Diff. Eq. **41** [1981], 301-312.
- [11] S. N. Chow - J. K. Hale. Methods of bifurcation theory. Springer-Verlag [1982].
- [12] N. G. Lloyd. Small amplitude limit cycles of polynomial differential equations.
Lecture Notes in Mathematics **1032** [1982], 346-357.
- [13] J. Guckenheimer - P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and
bifurcations of vector fields. Springer-Verlag [1983].
- [14] V. I. Arnold. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.
Springer-Verlag [1983].
- [15] T. R. Blows - N. G. Lloyd. The number of limit cycles of certain polynomial differential
equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** [1984], 215-239.
- [16] Ye Yanqian. Theory of limit cycles. Trans. Math. Monographs, 66. AMS. [1986].
- [17] E. Brieskorn - H. Knörrer. Plane algebraic curves. Birkhäuser. [1986].
- [18] C. Chicone - J. Sotomayor. On a class of complete polynomial vector fields in the plane.
J. of Diff. Eq. **61** [1986], 398-418.
- [19] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Some theorems on the existence, uniqueness and
nonexistence of limit cycles for quadratic systems. J. of Diff. Eq. **67** [1987], 372-399.
- [20] Yu. S. Il'yashenko. Algebraically and analytically solvable problems in theory of
ordinary differential equations. J. Soviet Math. **47** [1987], 2570-2584.
- [21] M. A. M. Alwash - N. G. Lloyd. Non-autonomous equations related to polynomial
two-dimensional systems. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **105** [1987], 129-152.
- [22] N. G. Lloyd. Limit cycles of polynomial systems. LMS Lect. Notes Series **127** [1988], 192-234.
- [23] N. G. Lloyd - T. R. Blows - M. C. Kalenge. Some cubic systems with several limit cycles.
Nonlinearity **1** [1988], 653-669.
- [24] V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations.
Encyclopaedia of Math. Sci., vol 1. Springer- Verlag [1989].
- [25] A. D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer- Verlag [1989].

- [26] A. Cima - J.Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. *J. of Math. Anal. and Appl.* **147** [1990], 420-448.
- [27] D. Schlomiuk - J. Guckenheimer - R. Rand. Integrability of plane quadratic vector fields. *Expo. Math.* **8** [1990], 3-25.
- [28] T. R. Blows - C. Rousseau. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields. *J. of Diff. Eq.* **104** [1993], 215-242.
- [29] H. Zoladek. Quadratic Systems with Center and Their Perturbations. *J. of Diff. Eq.* **109** [1994], 223-273.
- [30] F. Dumortier - P. Roussarie - C. Rousseau. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields. *J. of Diff. Eq.* **110** [1994], 86-133.
- [31] Yu. S. Il'yashenko - S. Yakovenko. Concerning the Hilbert 16th problem. *AMS Translations, Series 2, vol 165* [1995].
- [32] C. B. Collins. Algebraic conditions for a center or a focus in some simple systems of arbitrary degree. *J. of Math. Anal. and Appl.* **195** [1995], 719-735.
- [33] C. Rousseau - D. Schlomiuk. Cubic vector fields symmetric with respect to a center. *J. of Diff. Eq.* **123** [1995], 193-223.
- [34] A. S. Shubé. The structure of the integrating factor of a cubic system with a singular point of center type. *Differential Equations* **32** [1996], 726-729.
- [35] J. Llibre - J. S. Pérez del Río - J. A. Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity. *J. of Diff. Eq.* **125** [1996], 490-520.
- [36] J. Chavarriga - J. Giné. Integrability of a linear center perturbed by a fourth degree homogeneous polynomial. *Publicacions Matemàtiques* **40** [1996], 21-39.
- [37] J. Chavarriga - J. Giné. Integrability of a linear center perturbed by a fifth degree homogeneous polynomial. *Publicacions Matemàtiques* **41** [1997], 335-356.
- [38] J.I.Aranda. Centros y focos degenerados de sistemas analíticos planos. *Actas XV CEDYA* [1997] (aún no publicadas).

4.1 Sistemas homogéneos.

Consideremos primero el sistema analítico homogéneo

$$[H] \begin{cases} x' = A^n(x,y) = a_{n0}x^n + \dots + a_{0n}y^n \\ y' = B^n(x,y) = b_{n0}x^n + \dots + b_{0n}y^n \end{cases}$$

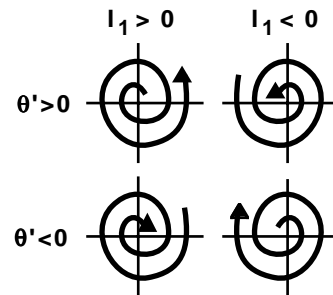
Escrito en polares [$c=\cos\theta$, $s=\text{sen}\theta$, como en el capítulo 3], adopta la forma:

$$[P] \begin{cases} r' = [cA^n(c,s) + sB^n(c,s)]r^n \equiv M_n(\theta) r^n \\ \theta' = [cB^n(c,s) - sA^n(c,s)]r^{n-1} \equiv m_n(\theta) r^{n-1} \end{cases} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{M_n(\theta)}{m_n(\theta)} r$$

Supondremos que el denominador $m_n(\theta) = b_{n0}c^{n+1} + \dots - a_{0n}s^{n+1}$ no se anula para ningún θ (por tanto, debe ser el producto $b_{n0} \cdot a_{0n} < 0$). Entonces sabemos por el capítulo 3 que no existen variedades que lleguen al origen con pendiente definida y por tanto [H] tiene un centro o un foco en el origen. Recordemos que para que m_n no tenga raíces reales es necesario que n sea impar. Como M_n y m_n son entonces π -periódicas, está claro que la r de las órbitas tenderá a infinito con θ , será función periódica de θ o tenderá hacia 0 al tender θ hacia infinito, según sea mayor, igual o menor que cero, respectivamente, la integral:

$$I_1 \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{M_n(\theta)}{m_n(\theta)} d\theta$$

[H] tendrá entonces un centro en el segundo caso y un foco en los otros dos. Para precisar la estabilidad del foco no basta precisar el signo de la integral. Es necesario conocer, además, el signo de $m_n(\theta)$, o lo que es lo mismo, el signo de b_{n0} o el de a_{0n} (si $a_{0n} > 0$, θ decrece con t , y crece si $a_{0n} < 0$):



Hagamos algunas operaciones para facilitar el cálculo de la integral. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} m_n &= -csB^n_x + c^2B^n_y + s^2A^n_x - csA^n_y - B^n_s - A^n_c = \\ &= A^n_x + B^n_y - c(cA^n_x + sA^n_y) - A^n_c - s(cB^n_x + sB^n_y) - B^n_s = A^n_x + B^n_y - (n+1)M_n \end{aligned}$$

puesto que para cualquier polinomio homogéneo $P(x,y)$ de grado n se cumple que:

$$xP_x(x,y) + yP_y(x,y) = nP(x,y)$$

Por tanto, si llamamos $E_{n-1}(x,y) \equiv A^n_x(x,y) + B^n_y(x,y)$, se tiene:

$$I_1 = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c,s)}{m_n} d\theta - \frac{1}{n+1} [\ln|m_n|]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c,s)}{m_n} d\theta$$

Olvidamos la constante positiva, hacemos el cambio de variable $z = \tan \theta$ en esta última integral, utilizamos para su denominador la notación del capítulo anterior y definimos:

$$I \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c,s)}{m_n(\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}(1,z)}{P_{n+1}(z)} dz, \quad P_{n+1}(z) = B^n(1,z) - zA^n(1,z)$$

[Si no hay ninguna órbita de [H] que llegue al origen con pendiente definida es $P_{n+1}(z) \neq 0 \forall z$].

Recopilando lo anterior se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.1

Supongamos que $P_{n+1}(z) \neq 0 \forall z$. Entonces:

Si la integral $I=0$, el origen de [H] es un centro.

Si $I \cdot a_{0n} > 0$, el origen de [H] es un foco estable.

Si $I \cdot a_{0n} < 0$, el origen de [H] es un foco inestable.

[Si el sistema es exacto se tiene $I=0$ y el origen es un centro, como debía ocurrir].

Veamos la forma particular que adopta el teorema para los dos casos más sencillos: $n=1$ y $n=3$.

Si $n=1$, el sistema es lineal:
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = ex + fy \end{cases}$$

y se tiene:

$$P_2(z) = -bz^2 + (f-a)z + e, \quad E_0 \equiv a+f.$$

Para que tenga centro o foco debe ser $P_2(z) \neq 0 \forall z \Leftrightarrow (f-a)^2 + 4be < 0$ [$\Rightarrow be < 0$]. Como

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a+f}{-bz^2 + (f-a)z + e} dz = -\text{sg}(b) \frac{2\pi(a+f)}{\sqrt{-(f-a)^2 - 4be}} \rightarrow \text{sg}[I \cdot b] = -\text{sg}[a+f]$$

y por tanto:

si $a+f=0$ el origen es un centro,
 si $a+f < 0$ el origen es un foco estable
 si $a+f > 0$ el origen es un foco inestable

(Resultado inmediato a partir de los autovalores del sistema: $\lambda = \frac{1}{2} [f+a \pm \sqrt{(f-a)^2 + 4be}]$).

Si $n=3$, nuestro sistema es [H3] $\begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$

Para que tenga centro o foco debe ser:

$$P_4(z) = -dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e \neq 0 \quad \forall z \quad (\Rightarrow de < 0).$$

Ahora

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c+3h)z^2 + (2b+2g)z + (3a+f)}{-dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e} dz$$

es la integral que informa sobre la estabilidad. Para calcular I necesitamos factorizar el denominador. Esto, en teoría, se puede hacer ya que, como vimos en 3.5, existen fórmulas para el cálculo de las raíces de un polinomio de cuarto orden. Pero son poco útiles en la práctica. En la sección siguiente abordaremos el problema de precisar con detalle cuándo el denominador no tiene raíces reales y el problema general de determinar el signo de I . Pero por ahora, nos limitamos a hallar directamente I en dos casos en los que la descomposición del denominador es especialmente sencilla.

Primero, supongamos que $P_4(z) = -d[z^2 + Az + C]^2$, siendo $4C - A^2 > 0$.

Debe ser entonces:

$$h-c = -2dA, \quad g-b = -d(A^2 + 2C), \quad f-a = -2dAC, \quad e = -dC^2$$

Por tanto:

$$A = \frac{c-h}{2d}, \quad C = \frac{1}{8d^2} [4d(b-g) - (c-h)^2] \rightarrow 4C - A^2 = \frac{1}{4d^2} [8d(b-g) - 3(c-h)^2]$$

y han de satisfacerse las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$f = a - \frac{c-h}{8d^2} [4d(b-g) - (c-h)^2], \quad e = -\frac{1}{64d^3} [4d(b-g) - (c-h)^2]^2 \quad (1)$$

Es fácil de calcular una integral de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2z^2 + a_1z + a_0}{[z^2 + Az + C]^2} dz = 2\pi \frac{2a_2C + 2a_0 - a_1A}{[4C - A^2]^{3/2}} \quad (2)$$

De lo anterior se deduce que:

$$I = -\operatorname{sg}(d) 16\pi \frac{8d^2a + d(5bh - 3gh - bc - gc) - h(c-h)^2}{[8d(b-g) - 3(c-h)^2]^{3/2}}$$

Así pues, si $8d(b-g) > 3(c-h)^2$ y los coeficientes del sistema satisfacen las relaciones (1), concluimos que el origen de [H3] es del tipo esquematizado a continuación:

$$\begin{array}{l} \boxed{8d^2a + d(5bh - 3gh - bc - gc) - h(c-h)^2} < 0 \rightarrow \text{foco E} \\ & = 0 \rightarrow \text{centro} \\ & > 0 \rightarrow \text{foco I} \end{array}$$

Otro caso fácilmente resoluble aparece si $\mathbf{a=f}$ y $\mathbf{c=h}$, entonces:

$$P_4(z) = -dz^4 + (g-b)z^2 + e = 0 \rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{g-b}{d} \pm \sqrt{\left[\frac{b-g}{d} \right]^2 + 4 \frac{e}{d}} \right]$$

Las cuatro raíces de $P_4(z)$ han de ser complejas. Esto puede darse en dos casos que conducen a las dos posibles factorizaciones diferentes del polinomio bicuadrado P_4 :

Si $\frac{b-g}{d} > 2\sqrt{-\frac{e}{d}} \equiv 2S$, el corchete es real y negativo y hay cuatro raíces imaginarias puras. Así:

$$P_4(z) = -d[z^2+C][z^2+D], \quad C, D > 0$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{[z^2+C][z^2+D]} dz = \pi \frac{a_0 + a_2 \sqrt{CD}}{\sqrt{CD}[\sqrt{C} + \sqrt{D}]} \quad (3)$$

y se tiene que

$$\sqrt{CD} = S, \quad C+D = \frac{b-g}{d} \rightarrow \sqrt{C} + \sqrt{D} = \sqrt{\frac{b-g}{d} + 2S}$$

deducimos que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4cz^2 + 2(b+g)z + 4a}{-d[z^2+C][z^2+D]} dz = -4\pi \frac{a+cS}{dS\sqrt{\frac{b-g}{d} + 2S}} \quad (4)$$

Así pues,

$$\text{sg}[d \cdot I] = -\text{sg}[a + cS]$$

Si $-2S < \frac{b-g}{d} < 2S$, z^2 es complejo, las raíces de P_4 tienen parte real y entonces:

$$P_4(z) = -d[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C], \quad 4C - A^2 = \frac{b-g}{d} + 2S > 0, \quad C = S$$

Ahora:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C]} dz = \pi \frac{a_0 + a_2 C}{C\sqrt{4C - A^2}} \quad (5)$$

y obtenemos para I exactamente la misma expresión (4) que en el subcaso anterior.

Si $\frac{b-g}{d} = 2S$, es $P_4(z) = -d[z^2 + C]^2$, $C > 0$ y el valor de $I = -2\pi \frac{a+cS}{dS^{3/2}}$ está recogido en (4).

Y, por último, si $\frac{b-g}{d} \leq -2S$, el denominador $P_4(z)$ posee raíces reales.

Resumiendo, en el caso de que sea

$$a=f, \quad c=h \quad \text{y} \quad \frac{b-g}{d} > -2\sqrt{-\frac{e}{d}}$$

deducimos del teorema 4.1 que el origen del sistema [H3] tiene la siguiente estabilidad:

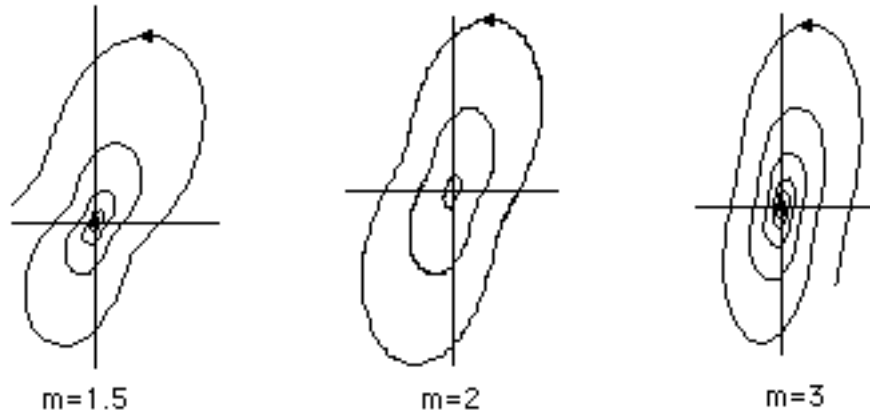
$c\sqrt{ e } + a\sqrt{ d }$	$< 0 \rightarrow$ foco E
	$= 0 \rightarrow$ centro
	$> 0 \rightarrow$ foco I

Ejemplo 1.
$$\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = m^2x^3 + 2x^2y + 2mxy^2 - y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 2mz^2 + m^2 = [z^2 + m]^2$$

Este sistema posee un centro o un foco si $m > 0$. Para precisar su estabilidad podemos acudir a las fórmulas de los dos casos analizados. De cualquiera de ellas deducimos que:

$$0 < m < 2 \rightarrow \text{foco I} \quad m = 2 \rightarrow \text{centro} \quad m > 2 \rightarrow \text{foco E}$$

Integrando gráficamente con el ordenador para los tres valores de m indicados abajo:



Ejemplo 2.
$$\begin{cases} x' = -x^4y + ax^3y^2 - y^5 \\ y' = 3x^5 + 6x^4y + 2x^3y^2 + ax^2y^3 \end{cases} \rightarrow P_6(z) = z^6 + 3[z+1]^2 > 0 \text{ para todo } z.$$

Tenemos que $a_{05} = -1 < 0$ y que $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_4(1,z)}{P_6(z)} dz = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{az^2+1}{P_6(z)} dz.$

Por el teorema 4.1 está claro que si $a \geq 0$ el origen es un foco inestable. Pero para discutir lo que sucede si $a < 0$, al no disponer de una expresión exacta de I (que es lo habitual), tenemos que evaluar numéricamente las integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{P_6(z)} dz \approx 1.7456, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P_6(z)} dz \approx 1.0857$$

El cambio de estabilidad (el centro) se da, pues, aproximadamente para $a \approx -1.615$.

4.2 Cálculo de la integral I para n=3 .

En la sección 4.1 vimos que, si no existen variedades que lleguen al origen, la distinción entre centros y focos de un sistema con aproximación homogénea de tercer orden se reducía al cálculo de una integral de la forma

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2(z)}{P_4(z)} dz$$

siendo E_2 un polinomio de segundo grado y P_4 uno de cuarto sin raíces reales. Denotaremos:

$$E_2(z) \equiv a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad \text{y} \quad P_4(z) \equiv m z^4 + p z^3 + q z^2 + r z + s$$

y usaremos la notación introducida en la sección 3.5 para el estudio del $P_4(z)$. Allí vimos que dicho polinomio tenía cuatro raíces complejas si $D_4 > 0$ y $V_2 \leq 0$ ó $Q \leq 0$ o bien si $D_4 = V_2 = 0$, $Q < 0$ y $R \neq 0$ ($\Leftrightarrow F = V_2 = 0$, $Q < 0$ y en ese caso las raíces eran dobles). Una condición necesaria para que esto suceda es que sea $ms > 0$. Suponemos desde ahora que ambos coeficientes son positivos: $m, s > 0$. El valor de I sería fácil de hallar si tuviésemos factorizado el denominador:

$$P_4(z) = m[z^2 + Az + C][z^2 + Bz + D] = m[z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2][z^2 - (z_3 + z_4)z + z_3 z_4]$$

Damos los siguientes nombres a las partes reales e imaginarias, a los módulos y a los argumentos de las parejas de raíces complejas conjugadas z_1, z_2 y z_3, z_4 :

$$z_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{4C - A^2} \equiv \alpha \pm i\beta \equiv r_1 [\cos \theta_1 \pm i \operatorname{sen} \theta_1] , \quad 4C > A^2 , \quad \beta > 0 , \quad \theta_1 \in (0, \pi)$$

$$z_{3,4} = -\frac{B}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{4D - B^2} \equiv \gamma \pm i\delta \equiv r_2 [\cos \theta_2 \pm i \operatorname{sen} \theta_2] , \quad 4D > B^2 , \quad \delta > 0 , \quad \theta_2 \in (0, \pi)$$

Teóricamente, utilizando las técnicas de la sección 3.5, podríamos llegar a calcular A, B, C, D y las raíces, pero obtendríamos una expresión nada manejable para I . Lo primero que vamos a hacer será escribir I en función de las raíces de los polinomios de tercer grado que nos surgieron en el cálculo de las raíces de los polinomios de cuarto grado. A partir de ahí podremos expresar I en función de los coeficientes de los polinomios del integrando en varios casos particulares. Recordemos que:

$$Z = m[C + D] = m[\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2] , \quad X = m[AB] = m[4\alpha\gamma] ,$$

$$Y = m[2(C + D) - AB] = 2m[(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2 + \delta^2]$$

satisficían, respectivamente, las ecuaciones:

$$Z^3 - qZ^2 + K_L Z - N_L = 0 , \quad X^3 - 2qX^2 + q_L X - q_N = 0 , \quad Y^3 - 3RY - S = 0$$

A partir de cada una de ellas podíamos calcular las otras:

$$X + Z = q , \quad X = \frac{2q - Y}{3} , \quad Z = \frac{q + Y}{3}$$

Puesto que los discriminantes de los polinomios de tercer orden son positivos (al serlo D_4), sus raíces son reales. $Z \equiv Z_1$, $X \equiv X_1$ e $Y \equiv Y_1$ serán las descritas arriba y las otras tres parejas $Z_{2,3}$, $X_{2,3}$ e $Y_{2,3}$ aparecerán al agrupar de forma diferente las raíces de $P_4(z)$:

$$\begin{aligned} [z-(\alpha+i\beta)] [z-(\gamma+i\delta)] &= z^2 - [\alpha+\gamma+i(\beta+\delta)] z + [\alpha\gamma - \beta\delta + i(\beta\gamma + \alpha\delta)] \\ [z-(\alpha-i\beta)] [z-(\gamma-i\delta)] &= z^2 - [\alpha+\gamma-i(\beta+\delta)] z + [\alpha\gamma - \beta\delta - i(\beta\gamma + \alpha\delta)] \\ [z-(\alpha+i\beta)] [z-(\gamma-i\delta)] &= z^2 - [\alpha+\gamma+i(\beta-\delta)] z + [\alpha\gamma + \beta\delta + i(\beta\gamma - \alpha\delta)] \\ [z-(\alpha-i\beta)] [z-(\gamma+i\delta)] &= z^2 - [\alpha+\gamma-i(\beta-\delta)] z + [\alpha\gamma + \beta\delta - i(\beta\gamma - \alpha\delta)] \end{aligned}$$

Así pues las otras raíces, si llamamos $E \equiv \sqrt{4C-A^2}\sqrt{4D-B^2} = 4\beta\delta$, son:

$$\begin{aligned} Z_3 &\equiv m[2\alpha\gamma - 2\beta\delta] = \frac{m}{2} [AB - E] < Z_2 \equiv m[2\alpha\gamma + 2\beta\delta] = \frac{m}{2} [AB + E] \leq Z_1 \\ X_3 &\equiv m[(\alpha+\gamma)^2 + (\beta+\delta)^2] = \frac{m}{2} [2(C+D) + AB + E] > X_2 \equiv m[(\alpha+\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2] = \frac{m}{2} [2(C+D) + AB - E] \geq X_1 \\ Y_3 &\equiv m[-6\beta\delta - (\alpha-\gamma)^2 - \beta^2 - \delta^2] < Y_2 \equiv m[6\beta\delta - (\alpha-\gamma)^2 - \beta^2 - \delta^2] \leq Y_1 \end{aligned}$$

satisfaciéndose:

$$\begin{aligned} Z_2 - Z_3 &= X_3 - X_2 = \frac{1}{3} [Y_2 - Y_3] = m[4\beta\delta] = mE > 0 \\ Z_1 - Z_3 &= X_3 - X_1 = \frac{1}{3} [Y_1 - Y_3] = m[(\alpha-\gamma)^2 + (\beta+\delta)^2] = \frac{m}{2} [2(C+D) - AB + E] > 0 \\ Z_1 - Z_2 &= X_2 - X_1 = \frac{1}{3} [Y_1 - Y_2] = m[(\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2] \geq 0 \quad (=0 \text{ si raíces dobles}) \end{aligned}$$

Otras relaciones que utilizaremos y que se comprueban sin dificultad son:

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_2 + Z_3, \quad X_2 = Z_1 + Z_3, \quad X_3 = Z_1 + Z_2, \quad q = Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad 2q = X_1 + X_2 + X_3 \\ K - L &= Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3, \quad Z_1 Z_2 = K - L - Z_3 X_3 \\ Y_1 + Y_2 &= -Y_3, \quad Y_1 Y_2 = Y_3^2 - 3R, \quad (Y_1 - Y_3)(Y_2 - Y_3) = 3(Y_3^2 - R), \quad (Y_2 - Y_3)^2 = 3(4R - Y_1^2) \end{aligned}$$

Pasemos ya al cálculo de la integral. Si tuviésemos factorizado $P_4(z)$, podríamos hallar I utilizando, por ejemplo, integración por residuos. Tras unas pocas cuentas se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{m} \left[\frac{E_2(z_1)}{[z_1 - z_2][z_1 - z_3][z_1 - z_4]} + \frac{E_2(z_2)}{[z_3 - z_1][z_3 - z_2][z_3 - z_4]} \right] = \\ &= \frac{2\pi i}{m} \left[\frac{a_2 [z_1 z_2 (z_3 - z_4) + (z_1 - z_2) z_3 z_4] + a_0 [z_1 - z_2 + z_3 - z_4] + a_1 [z_1 z_3 - z_2 z_4]}{[z_1 - z_2][z_3 - z_4]|z_1 - z_4|^2} \right] = \\ &= \frac{\pi}{m} \frac{a_2 [(\alpha^2 + \beta^2)\delta + (\gamma^2 + \delta^2)\beta] + a_0 [\delta + \beta] + 2a_1 [\alpha\delta + \beta\gamma]}{\beta\gamma [(\alpha - \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2]} = \\ &= \frac{\pi}{m} \frac{a_2 r_1 r_2 [r_1 \sin\theta_2 + r_2 \sin\theta_1] + a_0 [r_2 \sin\theta_2 + r_1 \sin\theta_1] + 2a_1 r_1 r_2 [\sin(\theta_1 + \theta_2)]}{r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)]} \rightarrow \end{aligned}$$

$$I = \frac{2\pi}{m} \frac{2a_2 [C\sqrt{4D-B^2} + D\sqrt{4C-A^2}] + 2a_0 [\sqrt{4D-B^2} + \sqrt{4C-A^2}] - a_1 [A\sqrt{4D-B^2} + B\sqrt{4C-A^2}]}{\sqrt{4D-B^2} \sqrt{4C-A^2} [2(C+D) - AB + \sqrt{4D-B^2} \sqrt{4C-A^2}]} \quad (6)$$

Observemos que, puesto que los denominadores de las fracciones largas son positivos, para determinar el signo de I bastaría determinar el signo de sus numeradores. Observemos también que dichos denominadores los tenemos ya expresados en función de las X , las Z o las Y . Veamos que el numerador también se pueden escribir en función de dichas variables y de los coeficientes de P_4 . Esto se puede hacer de varias formas. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\Delta_0^2 &\equiv \left[\sqrt{4D-B^2} + \sqrt{4C-A^2} \right]^2 = 4(C+D)+2AB+2E - (A+B)^2 \\ \Delta_2^2 &\equiv \left[C\sqrt{4D-B^2} + D\sqrt{4C-A^2} \right]^2 = 2CD[2(C+D)+AB+E] - (AD+BC)^2 \\ \Delta_1^2 &\equiv \left[A\sqrt{4D-B^2} + B\sqrt{4C-A^2} \right]^2 = 4(A+B)(AD+BC) - 2AB[2(C+D)+AB-E]\end{aligned}$$

deducimos:

$$\begin{aligned}m^2 \Delta_0^2 &= 4mX_3 - p^2 = 4mZ_3 + 4mq - p^2 = \frac{1}{3} [8mq - 3p^2 - 4mY_3] \\ m^2 \Delta_2^2 &= 4sX_3 - r^2 = 4sZ_3 + 4qs - r^2 = \frac{1}{3} [8qs - 3r^2 - 4sY_3] \\ m^2 \Delta_1^2 &= 4[K - X_1X_2] = 4[L - Z_3^2] = \frac{4}{9} [9L - (q+Y_3)^2]\end{aligned}$$

Los corchetes Δ_0 y Δ_2 son positivos. Por tanto:

$$\Delta_0 = \frac{1}{m} \sqrt{4mX_3 - p^2}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{m} \sqrt{4sX_3 - r^2}$$

El tercero, sin embargo, no tiene signo definido, pero puesto que:

$$\text{sg } \Delta_1 = -\text{sg} [\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] = -\text{sg} [\text{cos}\theta_1 + \text{cos}\theta_2] = \text{sg} [A\sqrt{D} + B\sqrt{C}]$$

y como

$$m^{3/2} [A\sqrt{D} + B\sqrt{C}] [\sqrt{D} + \sqrt{C}] = m^{3/2} [(A+B)\sqrt{CD} + (AC+BD)] = [p\sqrt{s} + r\sqrt{m}]$$

deducimos que

$$\Delta_1 = \frac{\text{sg}[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}]}{m} \sqrt{K - X_1X_2}$$

Hemos encontrado, pues, una primera expresión de I en función de las X :

$$I = 2\pi \frac{a_2 \sqrt{4sX_3 - r^2} + a_0 \sqrt{4mX_3 - p^2} - \text{sg}[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}] a_1 \sqrt{K - X_1X_2}}{[X_3 - X_2][X_3 - X_1]} \quad (7)$$

Podemos también expresarla utilizando exclusivamente del Y_3 (la menor de las raíces), cuya expresión en función de los coeficientes del $P_4(z)$ conocemos desde la sección 3.3:

$$I = 2\pi \frac{a_2 \sqrt{3\sqrt{-P-4sY_3}} + a_0 \sqrt{3\sqrt{-Q-4mY_3}} - \text{sg}[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}] a_1 \sqrt{9L - (q+Y_3)^2}}{Y_3^2 - R} \quad (8)$$

$$\text{con } Y_3 = 2\sqrt{R} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3}, \text{ siendo } \phi = \arccos \frac{S}{2R^{3/2}}$$

Otras expresiones pueden deducirse del hecho de que también los productos de unos corchetes del numerador por los otros pueden también expresarse en función de las X, Y o Z:

$$\Delta_0 \Delta_2 = 8CD - (A+B)(AD+BC) + (C+D)(AB+E)$$

$$\Delta_0 \Delta_1 = 4(AD+BC) - (A+B)(AB-E)$$

$$\Delta_2 \Delta_1 = 4CD(A+B) - (AD+BC)(AB-E)$$

Por tanto:

$$m^2 \Delta_0 \Delta_2 = 2L - K + 2Z_1 Z_2 = K - 2qZ_3 - Z_3^2 = \frac{1}{9} [2Y_3^2 - 2qY_3 - 4q^2 + 9K]$$

$$m^2 \Delta_0 \Delta_1 = 4mr - 2pZ_3 = \frac{2}{3} [6mr - pq - pY_3]$$

$$m^2 \Delta_2 \Delta_1 = 4ps - 2rZ_3 = \frac{2}{3} [6ps - qr - rY_3]$$

Así, multiplicando el numerador y el denominador de (6) por Δ_0 obtenemos:

$$I = 2\pi \frac{a_2 [2L - K + 2Z_1 Z_2] + a_0 [4mZ_3 + 4mq - p^2] - a_1 [2mr - pZ_3]}{[Z_3 - Z_2] [Z_3 - Z_1] \sqrt{4mZ_3 + 4mq - p^2}} = \quad (9)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{a_2 [2Y_3^2 - 2qY_3 - 4q^2 + 9K] + 3a_0 [-Q - 4mY_3] - 3a_1 [V - pY_3]}{[Y_3^2 - R] \sqrt{-Q - 4mY_3}} \quad (10)$$

Podríamos obtener fórmulas análogas multiplicando por Δ_2 . Y, por último, en el caso de que sea $\Delta_1 \neq 0$ (es decir si $p\sqrt{s+r}\sqrt{m} \neq 0$), podemos multiplicar también arriba y abajo por dicho corchete para obtener una nueva expresión (en función sólo del Z_3):

$$I = \text{sg}[p\sqrt{s+r}\sqrt{m}] 2\pi \frac{a_2 [2ps - rZ_3] + a_0 [2mr - pZ_3] - a_1 [L - Z_3^2]}{[3Z_3^2 - 2qZ_3 + K - L] \sqrt{L - Z_3^2}} = \quad (11)$$

$$= \text{sg}[p\sqrt{s+r}\sqrt{m}] 2\pi \frac{3a_2 [W - rY_3] + 3a_0 [V - pY_3] - a_1 [9L - (q + Y_3)^2]}{[Y_3^2 - R] \sqrt{9L - (q + Y_3)^2}} \quad (12)$$

A partir de ahora deduciremos fórmulas para casos particulares en los que las ecuaciones de tercer orden son resolubles. En primer lugar, vamos a volver a hallar el valor de I en los dos casos sencillos analizados ya en la sección 4.1: si existen raíces complejas dobles y si $p=r=0$.

De 3.5 sabemos que hay raíces dobles si $F=V_2=0$ (si $Q<0$ son complejas, si $Q>0$ reales y si $Q=0$ hay raíz cuádruple). Otra caracterización de esta situación se obtiene definiendo:

$$M \equiv mr^2 - p^2s$$

y observando que:

$$p^2V_2 = 2mQM - (rQ + qV)F \quad (13)$$

pues entonces:

$$\text{si } p \neq 0, \text{ hay raíces complejas dobles} \Leftrightarrow Q < 0 \text{ y } M = F = 0 \quad (14)$$

[si $p=0$, las complejas dobles aparecen si además $r=0$ y $q=\sqrt{L}$]

Sea $F = V_2 = 0 = p^3 - 4mpq + 8m^2r = 16m^2qs - 6p^2ms - 18m^2r^2 - 3p^3r + 14mpqr + p^2q^2 - 4mq^3$

$$\Leftrightarrow r = \frac{p}{8m^2} [4mq - p^2], \quad s = \frac{1}{64m^3} [4mq - p^2]^2 \Leftrightarrow \text{raíces dobles.}$$

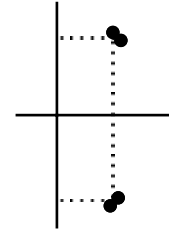
[y si $p \neq 0$, si y sólo si $M = F = 0$]

Las raíces de $P_4(z)$ son **complejas** $\Leftrightarrow Q < 0 \Leftrightarrow 8mq > 3p^2$

Haciendo $B=A$ y $D=C$ en (6) obtenemos (si $m=1$) de nuevo (2):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{m[z^2 + Az + C]^2} dz = \frac{2\pi}{m} \frac{2a_2 C + 2a_0 - a_1 A}{[4C - A^2]^{3/2}} \rightarrow I = 4\pi \frac{[4mq - p^2]a_2 + 8m^2 a_0 - 2mpa_1}{[-Q]^{3/2}} \quad (15)$$

puesto que $A = p/2m$, $C = \sqrt{s/m} = [4mq - p^2]/8m^2$



Si ahora es $p = r = 0$, entonces $D_4 = 4L[q^2 - L]^2$, $V_2 = 4mq[L - q^2]$, $Q = -8mq$. Así:

$$q > \sqrt{L} \rightarrow D_4 > 0, V_2 < 0; \quad q = \sqrt{L} \rightarrow D_4 = V_2 = 0, Q < 0; \quad 0 \leq q < \sqrt{L} \rightarrow D_4 > 0, Q \leq 0; \\ -\sqrt{L} < q \leq 0 \rightarrow D_4 > 0, V_2 \leq 0; \quad q = -\sqrt{L} \rightarrow D_4 = V_2 = 0, Q > 0; \quad q < -\sqrt{L} \rightarrow D_4, V_2, Q > 0$$

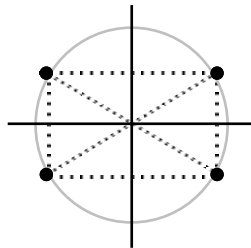
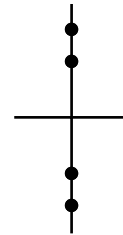
En los cuatro primeros casos hay raíces complejas (dobles si $q = \sqrt{L}$). Así pues:

$$\text{Si } p = r = 0 \text{ las raíces son complejas } \Leftrightarrow q > -\sqrt{L} \Leftrightarrow \begin{cases} s > q^2/4m, \text{ si } q \leq 0 \\ s > 0, \text{ si } q \geq 0 \end{cases}$$

Las dos posibles factorizaciones del $P_4(z)$ nos llevan a las fórmulas vistas en 4.1.

Haciendo $A=B=0$ en (6) obtenemos (3) cuando $m=1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{m[z^2 + C][z^2 + D]} dz = \frac{2\pi}{m} \frac{4a_2[C\sqrt{D} + D\sqrt{C}] + 4a_0[\sqrt{D} + \sqrt{C}]}{4\sqrt{D}\sqrt{C} 2[C + D + 2\sqrt{D}\sqrt{C}]} = \frac{\pi}{m} \frac{a_0 + a_2\sqrt{CD}}{\sqrt{CD}[\sqrt{C} + \sqrt{D}]}$$

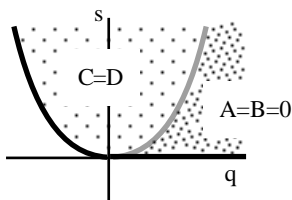


Y si $B=-A$ y $D=C$ aparece (5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{m[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C]} dz = \frac{\pi}{m} \frac{a_0 + a_2 C}{C\sqrt{4C - A^2}}$$

El valor de I lo podemos deducir de las fórmulas anteriores o a partir, por ejemplo, de (7). La ecuación para las X es ahora:

$$X^3 - 2qX^2 + (q^2 - L)X = 0 \rightarrow X_{1,2} = 0 \text{ ó } q - \sqrt{L}, \quad X_3 = q + \sqrt{L} \rightarrow I = 2\pi \frac{a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m}}{\sqrt{L}\sqrt{q + \sqrt{L}}} \quad (16)$$



[Las cuatro raíces están en el eje imaginario cuando $A=B=0$, o lo que es lo mismo, si la menor de las X es 0. Esto ocurre cuando $q \geq \sqrt{L}$, es decir, si $0 < s < q^2/4m$, $q > 0$. Si $-\sqrt{L} < q \leq \sqrt{L}$ (si $s > q^2/4m$) estaremos en el otro caso: las z se sitúan sobre una circunferencia. Si $q = \sqrt{L}$ hay dos raíces imaginarias dobles].

Consideremos otras situaciones en las que podemos dar una expresión algebraica de la integral I. La caracterización (14) de las raíces dobles sugiere estudiar las dos siguientes.

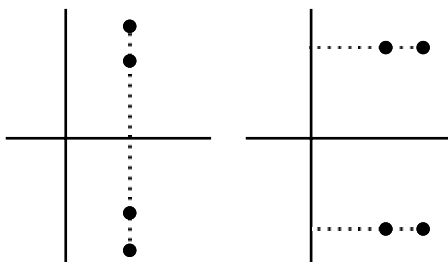
En 3.5 vimos que haciendo $z = \frac{x-p}{4m}$ en $P_4(z)$ se llegaba a $P_4(x) = x^4 - 2Qx^2 + 8Fx + G = 0$.

Si $\mathbf{F = 0}$ $= p^3 - 4mpq + 8m^2r \Leftrightarrow r = \frac{p}{8m^2} [4mq - p^2]$, es inmediato comprobar que entonces:

$$G = 256m^3s - 16mp^2q + 5p^4, \quad G - Q^2 = 256m^3s - 4[4mq - p^2]^2, \quad p^2[G - Q^2] = -256m^3M$$

Como las raíces de $P_4(z)$ son complejas si lo son las de $P_4(x)$, deducimos del caso $p=r=0$:

$$\text{Las } z \text{ son complejas} \Leftrightarrow \begin{cases} G > Q^2, & \text{si } Q \geq 0 \\ G > 0, & \text{si } Q \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s > \frac{1}{4m} [q - \frac{p^2}{4m}]^2, & \text{si } q \leq q_Q \\ s > \frac{p^2}{4m^2} [q - \frac{5p^2}{16m}], & \text{si } q \geq q_Q \end{cases}, \quad q_Q = \frac{3p^2}{8m}$$



Las raíces de $P_4(z)$ [traslaciones de las de $P_4(x)$] tienen iguales, o bien las partes reales (si $0 < G < Q^2$, $Q < 0$) o bien las imaginarias (si $G > Q^2$).

(si escribimos p, q, r en función de A, B, C, D se llega a las mismas dos posibilidades, pues se tiene:

$$F = m^3 [B-A] [(4C-A^2) - (4D-B^2)]$$

Para calcular I basta hacer explícitamente el cambio $z = \frac{x-p}{4m}$ y utilizar la fórmula (16). Se obtiene:

$$I = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2x^2 + [4ma_1 - 2pa_2]x + [16m^2a_0 - 4ma_1 + p^2a_2]}{x^4 - 2Qx^2 + G} dx = 2\sqrt{2\pi} \frac{a_2[\sqrt{G+p^2}] + 16a_0m^2 - 4a_1mp}{\sqrt{G} \sqrt{\sqrt{G}-Q}} \quad (17)$$

Podemos obtener (17) por un camino más largo, pero que permite relacionar este caso con el siguiente ($M=0$). Si fuese $p=0$, sería también $r=0$, caso conocido. Sea $p \neq 0$ y definamos:

$$f \equiv \frac{F}{p} = p^2 + 8m^2 \frac{r}{p} - 4mq, \quad h \equiv Q - 2f = p^2 - 16m^2 \frac{r}{p}$$

En estos términos se tiene que si $f=0$ las z son complejas si:

$$\begin{cases} M < 0, & \text{si } h \geq 0 \\ G > 0, & \text{si } h \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s > m[\frac{r}{p}]^2, & \text{si } h \geq 0 \\ s > \frac{pr}{16m^2} [2 - \frac{p^2}{16m}], & \text{si } h \leq 0 \end{cases}$$

Se ve sin dificultad que las raíces de $P_3(Z)$ son:

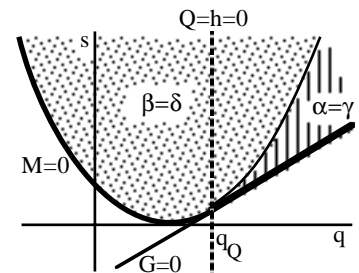
$$Z_0 = 2m \frac{r}{p}, \quad Z_{\pm} = \frac{1}{8m} [p^2 \pm \sqrt{G}] \Rightarrow Z_0 - Z_- = \frac{1}{8m} [\sqrt{G} - h]$$

Así, la menor de las Z es Z_- tanto si $h < 0$, como si $h \leq 0$ y $M < 0$ (pues $G = h^2 - 256m^3M/p^2$).

(si $h < 0$ y $M=0$, $Z_0 = Z_+ > Z_-$ y volvemos a comprobar que hay raíces dobles complejas).

Se podría calcular (17), por ejemplo, a partir de (10). Usaríamos que $Y_3 = 3Z_3 - q = \frac{1}{8m} [Q - 3\sqrt{G}]$,

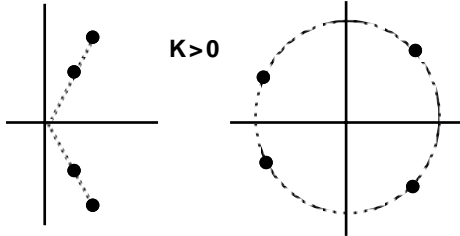
y otras identidades que se deducen de (3-12) como $V = -\frac{pQ}{4m}$, $R = \frac{1}{64m^2} [Q^2 + 3G]$.



Sea $M = 0 = mr^2 - p^2s$. Busquemos primero la geometría de las raíces. Se comprueba que:

$$M = m^3[C-D][B^2C - A^2D], \quad r\sqrt{m \pm p}\sqrt{s} = m^{3/2}[\sqrt{C} \pm \sqrt{D}][B\sqrt{C} \pm A\sqrt{D}]$$

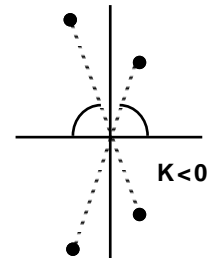
Por tanto, $r\sqrt{m+p}\sqrt{s} = 0$ ($M=0, K<0$) $\Leftrightarrow \frac{A}{\sqrt{C}} = -\frac{B}{\sqrt{D}} \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 = \pi \rightarrow$



$r\sqrt{m} = p\sqrt{s}$ ($M=0, K<0$) \Leftrightarrow

$$C=D \text{ ó } \frac{A}{\sqrt{C}} = \frac{B}{\sqrt{D}} \Leftrightarrow$$

$$\leftarrow r_1=r_2 \text{ ó } \theta_1=\theta_2$$



¿Cuándo las z son complejas? Sean las f y h de antes. Se tiene: $Q = 2f+h, V = \frac{f-h}{4m}$.

Supongamos que $p \neq 0$ ($\Leftrightarrow r \neq 0$) y despejemos $s = m(r/p)^2$. Sustituyendo se llega a:

$$V_2 = fV_M, \quad V_M = q^2 + 2m\frac{r}{p}q - 3pr; \quad D_4 = \left(\frac{r}{p}\right)^2 D_M, \quad D_M = [q + 2m\frac{r}{p}]^2 - 4pr = \left(\frac{V}{p}\right)^2 - \frac{4r}{p}f$$

Las raíces de $P_3(X)$ son:

$$X_0 = q - 2m\frac{r}{p}, \quad X_{\pm} = \frac{1}{2}[q + 2m\frac{r}{p} \pm \sqrt{D_M}] \rightarrow X_0 - X_{\pm} = \frac{1}{2}[-\frac{V}{p} - \sqrt{D_M}]$$

Y las de $P_3(Z)$:

$$Z_0 = 2m\frac{r}{p}, \quad Z_{\pm} = \frac{1}{2}[q - 2m\frac{r}{p} \pm \sqrt{D_M}] \rightarrow Z_{\pm} - Z_0 = \frac{1}{2}[-\frac{V}{p} \pm \sqrt{D_M}]$$

Si $K < 0$ ($\Rightarrow p\sqrt{s} + r\sqrt{m} = 0, 2m\frac{r}{p} = -\sqrt{L}$) es $h > 0, D_M > 0, D_4 \geq 0$ ($= 0$ si $f = 0$).

Comprobemos que las z son complejas $\Leftrightarrow f < 0 \Leftrightarrow q > \frac{p^2}{4m} - \sqrt{L}$:

Si $f > 0 \rightarrow Q > 0, V_M = q^2 + (2m\frac{r}{p})^2 - \frac{5}{2}pr - \frac{r}{2p}f > 0, V_2 > 0, D_4 > 0 \rightarrow$ las cuatro z son reales.

Si $f = 0$ se tiene que $Q > 0, V_2 = D_4 = 0$. Raíces reales y dobles.

Sea $f < 0$. Si fuese $Q \leq 0$, todas las z serían complejas.

Si $Q > 0 \rightarrow V_M = q^2 - \frac{9}{4}pr - \frac{r}{4p}Q > 0 \rightarrow V_2 < 0, D_4 > 0$ y todas complejas.

Para calcular I podemos usar (7). Se tiene que: $\sqrt{4sX_3 - r^2} = -\frac{r}{p}\sqrt{4mX_3 - p^2}$.

Si $f < 0 \rightarrow \frac{V}{p} < 0 \rightarrow X_3 = X_0 > X_+ > X_-$. Entonces $4mX_3 - p^2 = -f$ y $[X_0 - X_+][X_0 - X_-] = \frac{r}{p}f$.

Así pues:

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{-f}} [a_2 - a_0 \frac{p}{r}] \tag{18}$$

Podemos dar una expresión válida también si $p=r=0$. Como $-\frac{p}{r} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{s}}$ y $-f = 4m[q + \sqrt{L} - \frac{p^2}{4m}]$

$$I = 2\pi \frac{a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m}}{\sqrt{L}\sqrt{\sigma}}, \text{ siendo } \sigma = q + \sqrt{L} - \frac{p^2}{4m} \tag{19}$$

Sea ahora $\boxed{K > 0}$ ($\Rightarrow p\sqrt{s}=r\sqrt{m} \neq 0$, $\sqrt{L}=2m\frac{r}{p}$, $h=\frac{2m}{\sqrt{L}}[K-4L]$, $-f=4m[q-\sqrt{L}-\frac{p^2}{4m}]$).

La situación es más complicada. Probemos que las cuatro z son **complejas** si y sólo si:

$$\begin{cases} q > \frac{p^2}{4m} + \sqrt{L} \text{ (f<0), si } K \geq 4L \text{ (h} \geq 0) \\ q > 2\sqrt{K-\sqrt{L}} \text{, si } K \leq 4L \text{ (h} \leq 0) \end{cases}$$

Recordamos que $Q=2f+h$. Además es $V_M = \left(\frac{V}{p}\right)^2 + \frac{r}{2p}[h-7f] \rightarrow V_M - D_M = \frac{r}{2p}[f+h]$.

Sea $h \geq 0$: si $f > 0 \Rightarrow Q > 0$; si además $D_M < 0$, es $D_4 < 0$ y hay raíces reales.
si $D_M \geq 0$ entonces $D_4 \geq 0$, $V_M > 0$, $V_2 > 0$ y reales.
si $f = 0 \Rightarrow D_4 = V_2 = 0$ y como $Q \geq 0$ hay z reales.
si $f < 0 \Rightarrow D_M > 0 \Rightarrow D_4 > 0$, $V_M > 0$, $V_2 < 0$ y todas son complejas.

Ahora supongamos $h < 0 \Leftrightarrow 4m\sqrt{K} > p^2$. Resolviendo Q, f, V, V_M y D_M en q se tiene que:

$$\begin{aligned} Q=0 &\Leftrightarrow q = q_Q \equiv \frac{3p^2}{8m}; & F=0 &\Leftrightarrow q = q_f \equiv \frac{p^2}{4m} + 2m\frac{r}{p}; & V=0 &\Leftrightarrow q = q_V \equiv 6m\frac{r}{p} \\ V_M=0 &\Leftrightarrow q = q_{V_{\pm}} \equiv -m\frac{r}{p} \pm \sqrt{(mr/p)^2 + 3K}; & D_M=0 &\Leftrightarrow q = q_{D_{\pm}} \equiv \pm 2\sqrt{K} - 2m\frac{r}{p} \end{aligned}$$

Se comprueba que si $h < 0$: $q_{D-} < q_{V-} < 0 < q_Q < q_{V+} < q_f < q_V$ y $q_{D+} < q_{V+}$. Y además:

Si $q > q_f$, $Q < 0$, $f < 0$, $D_M > 0$, $D_4 > 0 \rightarrow$ complejas
Si $q = q_f$, $f = 0$, $V_2 = D_4 = 0$, $Q < 0 \rightarrow$ complejas y dobles ($M=F=0$)
Si $q_{D+} < q < q_f$, $f > 0$, $D_4 > 0$ y ó Q ó V_2 son $\leq 0 \rightarrow$ complejas
En los demás casos ó $D_4 < 0$ ó $D_4 = 0$ y $V_2 \neq 0$ ó $D_4, V_2, Q > 0$ y las z son reales.

Por tanto son complejas si $q > q_{D+}$. Reescribiendo h , q_f y q_{D+} en función de K y L se llega al resultado. Y se ve que en los distintos casos con z complejas las Z están ordenadas así:

Si $f < 0$: $Z_+ > Z_0 > Z_- = Z_3$; si $f = 0, h < 0$: $Z_+ = Z_0 > Z_- = Z_3$; si $f > 0, h < 0$: $Z_0 > Z_+ > Z_- = Z_3$
(cuando $C=D \Leftrightarrow r_1=r_2$ debe ser $Z=Z_1=2m\frac{r}{p}$; esto ocurre si $f \geq 0$; si $f \leq 0$, se tendrá $\theta_1=\theta_2$)

El valor de I lo podemos deducir de (11):

$$I = \text{sg}[p]2\pi \frac{[a_2 r + a_0 p][2m\frac{r}{p} - Z_3] - a_1[4m^2(\frac{r}{p})^2 - Z_3^2]}{[Z_1 - Z_3][Z_2 - Z_3] \sqrt{4m^2(\frac{r}{p})^2 - Z_3^2}} = \text{sg}[p]2\pi \frac{a_2 r + a_0 p - a_1[Z_0 + Z_-]}{\sqrt{D_M} \sqrt{Z_0 - Z_-} \sqrt{Z_0 + Z_-}} \quad (20)$$

Y tras unas cuantas cuentas se puede dar una expresión válida también cuando $p=r=0$:

$$I = \pi\sqrt{2} \frac{[a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m}][q + \sqrt{L} + \sqrt{\omega}] - 2a_1 p\sqrt{s}}{\sqrt{\omega} \sqrt{L} \sqrt{q + \sqrt{L} - \frac{K}{\sqrt{L}} + \sqrt{\omega}}}, \text{ siendo } \omega = (q + \sqrt{L})^2 - 4K \quad (21)$$

Antes de seguir con los demás casos particulares vamos a dar algún resultado general. Una condición necesaria para que las raíces de $P_4(z)$ sean complejas es que sea su discriminante $D_4 > 0$. Miremos este D_4 como un polinomio de tercer grado en s :

$$D_4(s) \equiv p_s s^3 + q_s s^2 + r_s s + s_s = 256m^3 s^3 - (128m^2 q^2 - 144mp^2 q + 27p^4 + 192m^2 pr) s^2 + 2(8mq^4 - 2p^2 q^3 + 72m^2 r^2 q + 9p^3 r q - 40mprq^2 - 3mp^2 r^2) s - r^2(4mq^3 - p^2 q^2 - 18mprq + 27m^2 r^2 + 4p^3 r)$$

Con el ordenador es fácil comprobar que este polinomio tiene por discriminante:

$$D_{3s} = -16F^2 H^3, \text{ con } H \equiv 32mq^3 - 9p^2 q^2 - 108mprq + 27r(4m^2 r + p^3) = \frac{27F^2 - Q^3}{16m^2} = 4mS - 3QR$$

Si es $F \neq 0$, el signo de H nos dirá si $D_4(s)$ tiene 3, 2 ó 1 raíces reales. Probemos que:

Si $F \neq 0$, las raíces de $P_4(z)$ son todas complejas $\Leftrightarrow s > s_M$, siendo s_M la raíz mayor de $D_4(s)$

Como $F \neq 0$ no puede haber raíces dobles complejas. Así si $D_4 \leq 0$ hay raíces reales.

Si es $Q \leq 0 \Rightarrow H > 0$ sólo hay una raíz real (s_M) de D_4 . Si $s > s_M$ es $D_4 > 0$, $Q \leq 0$ y son complejas.

Si $Q, H > 0$ y $s > s_M \Rightarrow \frac{4R^3 - S^2}{27} = D_4 > 0 \Rightarrow R \geq 0 \Rightarrow [\text{por (3-12)}] V_2 = \frac{-H - 16m^2 QR}{96m^2} < 0$. Complejas.

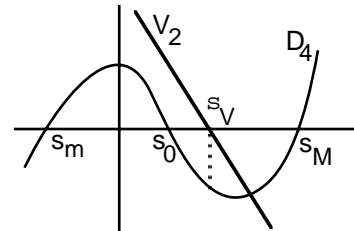
Si $Q > 0, H = 0 \Rightarrow V_2 = -\frac{QR}{6}$, $S = \frac{3QR}{4m}$, $D_4 = \frac{R^2}{27} [R - \frac{9Q^2}{16m^2}]$. Así D_4 tiene una raíz simple s_M y una doble $s_d < s_M$. Si $s > s_M \Rightarrow D_4 > 0 \Rightarrow R \geq 0 \Rightarrow V_2 \leq 0$ y complejas. Si $s \leq s_M$ es $D_4 \leq 0$.

En fin, si $Q > 0, H < 0$ hay tres raíces reales de D_4 : $s_M > s_0 > s_m$.

Si s_V es la única raíz de $V_2 = 0$ se puede comprobar que:

$$D_4(s_V) = -\frac{H^2 F^2}{4m^2 Q^3} < 0, \quad D_4'(s_V) = \frac{9HF^2}{mQ^2} < 0$$

La posición relativa de V_2 y D_4 es la de la derecha, y por tanto, sólo son complejas las z si $s > s_M$ (si $s \in (s_m, s_0)$ hay cuatro reales).



Podemos deducir la expresión general del s_M a partir de las fórmulas de 3.3:

$$s_M = \begin{cases} \frac{1}{768m^3} [(S_s + 8d_s^{3/2})^{1/3} + (S_s - 8d_s^{3/2})^{1/3} - q_s], & \text{si } H \geq 0 \\ \frac{1}{768m^3} [2\sqrt{R_s} \cos(\frac{1}{3} \arccos \frac{S_s}{R_s^{3/2}}) - q_s], & \text{si } H \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{donde } R_s = Q[8(27F^2) + Q^3], \quad S_s = 8(27F^2)^2 + 20(27F^2)Q^3 - Q^6, \quad d_s = 3F^{2/3}[(27F^2) - Q^3].$$

Para q grande la expresión del s_M es la primera ($H > 0$). Si q es muy negativo ($H < 0$) la segunda (y $D_4(s)$ tiene 3 raíces reales) ¿Y en general? El discriminante de H respecto a q resulta ser:

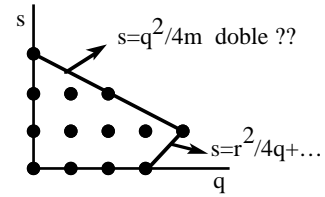
$$D_{3q} = 4r(27ph)^3$$

Así, si $Kh < 0$ hay un único cero q_H de $H(q)$, con lo que hay sólo una raíz real de $D_4(s)$ para $q > q_H$, una doble y una simple si $q = q_H$ y tres raíces si $q < q_H$. Si $Kh > 0$, $H(q)$ tiene tres ceros $q_1 < q_2 < q_3$ y $D_4(s)$ tiene un único cero para $q \in (q_1, q_2)$ y $q > q_3$. No es difícil ver que q_F , único cero de F , está situado respecto de los de H de la siguiente forma: si $K < 0$ ($\Rightarrow h > 0$) es $q_F < q_H$; si $K > 0, h < 0$ es $q_H < q_F$; y si $K, h > 0$ se tiene que $q_1 < 0 < q_2 < q_F < q_3$. Los casos $h = 0, p = 0$ y $r = 0$ son más fáciles de tratar por la presencia de raíces dobles (si $r = 0$ además es $s = 0$ raíz de D_4).

Viendo s_M como función de q , ¿qué aspecto tiene $s_M(q)$?

Para hallar su forma asintótica podemos utilizar la poligonal de Newton del D_4 considerado función de q y s . Los términos de D_4 en negrita son los relevantes para este estudio. Para q grande, la única raíz de $D_4=0$ es entonces de la forma:

$$s_M(q) = [r^2/4]/q + o(1/q).$$



El otro segmento exterior, por la duplicidad, aún no nos aporta información.

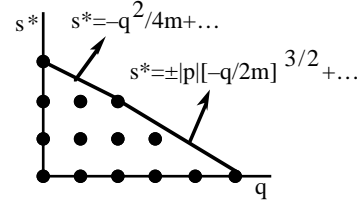
Pero haciendo $s=s^*+q^2/4m$, se obtiene el nuevo polinomio:

$$D_4(q,s^*) = 8q^2(8m^3s^{*2}+p^2q^3)/m+256m^3s^{*3}+...$$

Y su poligonal permite concluir que para $-q$ grande se tiene:

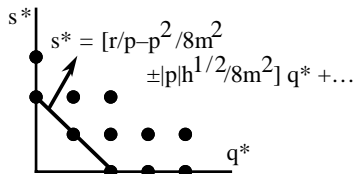
$$s_M(q) = q^2/4m + |p|[-q/2m]^{3/2} + o([-q]^{3/2})$$

(además es $s_0 = q^2/4m - |p|[-q/2m]^{3/2} + ...$, $s_m = r^2/4q + ...$)



Analicemos, si $p \neq 0$, la forma de $D_4=0$ cerca del $(q_0, s_0) \equiv (\frac{p^2}{4m} + 2m\frac{r}{p}, m\frac{r^2}{p^2})$ en el que $F=M=0$.

El (q_0, s_0) es un punto singular de la gráfica de $D_4=0$ porque anula también las derivadas de D_4 respecto a q y s . Trasladamos al origen haciendo: $q=q^*+q_0$, $s=s^*+s_0 \rightarrow$



$$D_4(q^*, s^*) = h^2(s^{*2} + [p^2/4m^2 - 2r/p]q^*s^* + (r/p)^2q^{*2}) + ...$$

Por tanto, (q_0, s_0) es un punto aislado de la gráfica si $h < 0$.

Si $h > 0$, $D_4=0$ consiste en dos curvas que se cortan en (q_0, s_0) con las tangentes distintas dadas por la poligonal.

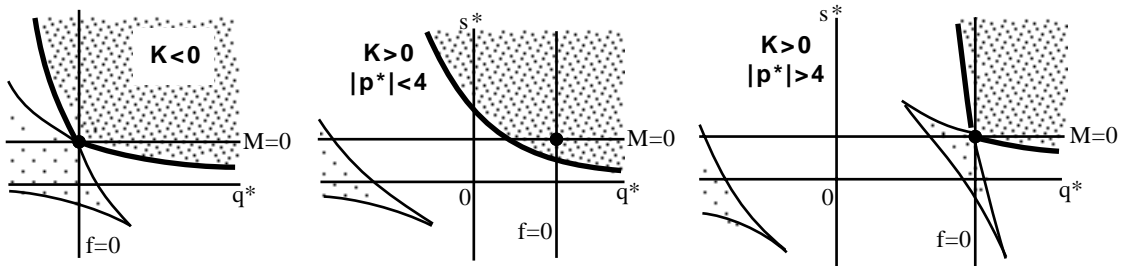
[si $h=0$, se puede ver que $D_4=0$ es una curva derivable].

Para hacer dibujos globales de $D_4=0$ simplificamos $P_4(z)$ haciendo (si $p, r \neq 0$) los cambios de variable $z=y\sqrt{r/p}$ si $K > 0$, $z=y\sqrt{-r/p}$ si $K < 0$ que lo convierten en polinomios de la forma:

$$P_{4M}(y) = y^4 + p^*y^3 + q^*y^2 + p^*y + s^* \text{ si } K > 0, \quad P_{4m}(y) = y^4 + p^*y^3 + q^*y^2 - p^*y + s^* \text{ si } K < 0$$

[es $p^*=p\sqrt{p/r/m}$, $q^*=pq/mr$ si $K > 0$, $p^*=p\sqrt{-p/r/m}$, $q^*=-pq/mr$ si $K < 0$ y $s^*=p^2s/mr^2$ en los dos casos]

Para ambos polinomios los $K^*=\pm p^{*2}$, $f^*=p^{*2} \pm 8 - 4q^*$ ($K >, < 0$), $h^*=p^{*2} \pm 16$ ($K <, > 0$) y $M^*=1-s^*$ tienen el mismo signo que los K , f , h y M iniciales. Las zonas del plano q^*s^* en que las y sean complejas describen así donde lo son las z . De lo visto hasta ahora se deduce que estas zonas son, en esencia, las del dibujo de abajo en trama más densa (en las menos densas las cuatro raíces son reales y hay dos reales y dos complejas en el resto), limitadas por la o las curvas (en trazo grueso) que forman el $s^*_M(q^*)$. Las curvas de trazo fino son las otras ramas de $D_4=0$ (sus puntos singulares saldrían de $H^*=0$). En el punto con $f=M=0$ hay raíces dobles.



Volvamos a hallar I en casos factorizables. La forma de las ecuaciones en Z , X e Y nos lleva a considerar, respectivamente, los tres últimos:

$$\boxed{N_L = 0} = mr^2 + p^2s - 4msq \Rightarrow q = \frac{N}{L} \geq 0 \Rightarrow F = \frac{mr}{s} [2L - K]. \text{ Comprobemos que:}$$

todas las z son **complejas** $\Leftrightarrow K_L \neq 0$.

Llamemos $\Psi \equiv q^2 - 4K_L$. Se satisface: $L^2\Psi = N^2 - 4L^2(K-L)^2 = M^2 + L(2L-K)^2 \geq 0$.

Como $R = q^2 - 3K_L$, $S = 2q^3 - 9qK_L$ deducimos que:

$$D_4 = \frac{1}{27} [4R^3 - S^2] = K_L^2\Psi \Rightarrow D_4 \geq 0$$

Si $K_L = 0 \Leftrightarrow pr = 4ms \neq 0 \Rightarrow F = 4m^2r \neq 0$ y las raíces múltiples son reales.

Si $\Psi = 0 \Leftrightarrow M = 0, K = 2L \Rightarrow F = M = 0, p^2 = 2mq \neq 0 (\Rightarrow Q < 0)$. Raíces dobles complejas (y $K_L < 0$).

Si $r = 0 \Rightarrow 4mq = p^2$. Si $p = 0$ es $q = 0$. Si $p \neq 0$ es $F = 0, h > 0, M < 0$. Complejas y $K_L < 0$.

Si $r \neq 0 \Rightarrow s = mr^2 / [4mq - p^2]$ con $q > p^2 / 4m$, describe una curva continua en el primer cuadrante del plano qs . Esta curva, formada por puntos con $D_4 \geq 0$, ha de estar dentro de cualquiera de las regiones de z complejas del dibujo de la página anterior. Sólo tocará s_M (si $K > 0$) en el punto de z reales en que sea $K_L = 0$. En los demás puntos serán, pues, complejas.

Obtendremos dos expresiones para I dependiendo del signo de K_L . Las raíces de $P_3(Z)$ son

$$Z_0 = 0 \text{ y } Z_{\pm} = \frac{1}{2} [q \pm \sqrt{\Psi}]$$

Si $K_L > 0$, la menor de las tres raíces (Z_3) es 0 y como $sg[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}] = sg(p)$ deducimos de (11):

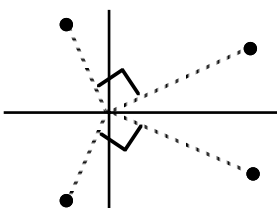
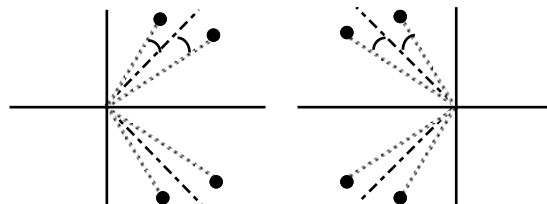
$$I = sg(p) 4\pi \frac{a_2ps + a_0mr - 2a_1ms}{\sqrt{L} K_L} \tag{22}$$

Si $K_L < 0$, la menor es Z_- y se obtiene a partir de (9):

$$I = 2\pi \frac{2a_2[2L-K] + 2a_0[2m\sqrt{\Psi} + 2mq - p^2] - a_1[p\sqrt{\Psi} - pq + 4mr]}{\sqrt{\Psi} [\sqrt{\Psi} - q] \sqrt{2m\sqrt{\Psi} + 2mq - p^2}} \tag{23}$$

¿Cómo están situadas las z en el plano complejo? Poniendo $p = m[A+B]$, $q = m[AB+C+D]$, $r = m[AD+BC]$, $s = m[CD]$, $A = -2r_1 \cos \theta_1$, $B = -2r_2 \cos \theta_2$, $C = r_1^2$, $D = r_2^2$ y factorizando:

$$\begin{aligned} 0 = N_L &= m^3[C+D][A^2D+B^2C-4CD] = \\ &= 4m^3r_1^2r_2^2[r_1^2+r_2^2][\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1] \\ \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

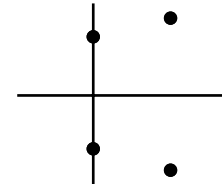


Como $Z_3 = m[2\alpha\gamma - 2\beta\delta] = 2mr_1r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$, las primeras dos situaciones se darán cuando sea $Z_3 = 0$, lo que sucede, como hemos visto, cuando es $K_L > 0$ (estarán a la izquierda o a la derecha dependiendo del signo de p). Cuando $K_L < 0$, se dará la tercera, $\theta_1 - \theta_2 = \pm\pi/2$, dibujada a la izquierda.

$q_N = 0 = mr^2 + p^2s - prq$. Si $p=0 \Leftrightarrow r=0$ y el valor de I nos lo da la fórmula (16). Sea $p, r \neq 0$.

Despejando s y sustituyendo en $P_4(z)$:

$$s = \frac{r}{p} [q - m \frac{r}{p}] \Rightarrow P_4(z) = m[z^2 + \frac{r}{p}] [z^2 + \frac{p}{m}z + \frac{q}{m} - \frac{r}{p}]$$



Las raíces del primer corchete son complejas si y sólo si $K > 0$.

El discriminante del otro es $D_2 = \frac{p}{m^2r} [K - L]$.

Concluimos que, cuando $K \neq 0$, las cuatro raíces de $P_4(z)$ son **complejas** $\Leftrightarrow 0 < K < L$.

Para el cálculo de I podemos basarnos en la expresión (6), pues conocemos

$$A=0, C = \frac{r}{p}, B = \frac{p}{m}, D = \frac{q}{m} - \frac{r}{p} = \frac{ps}{mr}, 4D - A^2 = \frac{p}{m^2r} [L - K]$$

Tras unas pocas cuentas, y llamando $\Sigma = -K_L$, se llega a:

$$I = \text{sg}(p) \pi \frac{a_2[2ps+r\sqrt{\Sigma}] + a_0[2mr+p\sqrt{\Sigma}] - a_1K}{\sqrt{\Sigma} [q+\sqrt{\Sigma}] \sqrt{K}} = \pi \frac{a_2 \frac{r}{p} [2q-2m \frac{r}{p} + \sqrt{\Sigma}] + a_0 [2m \frac{r}{p} + \sqrt{\Sigma}] - a_1r}{\sqrt{\Sigma} [q+\sqrt{\Sigma}] \sqrt{r/p}} \tag{24}$$

$S = 0 = 2q^3 - 9qK - 18qL + 27N$. Se deduce de las fórmulas (3-12) que entonces:

$$D_4 = \frac{4}{27} R^3, V_2 = \frac{1}{3} RQ, m^2QR = \frac{1}{48} [Q^3 - 27F^2]$$

Por tanto, si $Q < 0$, todas las raíces de $P_4(z)$ son **complejas**. Si $Q > 0$ hay raíces reales.

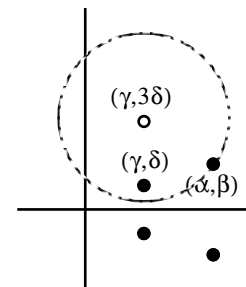
Y si también $Q=0 \Rightarrow q = \frac{3p^2}{8m}, r = \frac{p^3}{16m^2} \Rightarrow R = \frac{3}{4} [4L - K]$ y las z son complejas si $4L > K$.

Como las raíces de $P_3(Y)$ son:

$$Y_1 = \sqrt{3R} \geq Y_2 = 0 \geq Y_3 = -\sqrt{3R}$$

concluimos a partir de (10) que:

$$(25) \quad I = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{a_2[2q\sqrt{3R} + 6R - 4q^2 + 9K] + 3a_0[4m\sqrt{3R} - Q] - 3a_1[p\sqrt{3R} + V]}{R \sqrt{4m\sqrt{3R} - Q}}$$



La geometría de las raíces es menos clara. Se comprueba que

$$S = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \gamma)^2 + \beta^2 - 6\beta\delta + \delta^2 = 0$$

Y así la raíz (α, β) se halla sobre la circunferencia de centro $(\gamma, 3\delta)$ y radio $2\sqrt{2\delta}$ (o viceversa). [Si $R=0$ también es fácil resolver la ecuación en Y , pero hay raíces reales por ser $D_4 \leq 0$].

Una vez analizados los casos particulares prometidos, vamos a resumir los valores hallados de I . Como sabemos, lo que nos interesará para analizar centros y focos será únicamente su signo (es decir, el del numerador de las fórmulas que hemos ido obteniendo). En las páginas anteriores ha quedado precisado en cada caso cuando las z eran complejas. Tenemos pues:

(26) Sean $P_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s$ sin raíces reales, $E_2(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ e $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2(z)}{P_4(z)} dz$.

Entonces:

$$\text{Si } F=0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}(a_2[\sqrt{G+p^2}] + 16a_0m^2 - 4a_1mp)$$

$$\text{Si } M=0, K \leq 0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}(a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m})$$

$$\text{Si } M=0, K \geq 0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}([a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m}][q + \sqrt{L} + \sqrt{\omega}] - 2a_1p\sqrt{s}), \omega = (q + \sqrt{L})^2 - 4K$$

$$\text{Si } N_L=0, K_L > 0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}(p) \text{sg}(a_2ps + a_0mr - 2a_1ms)$$

$$\text{Si } N_L=0, K_L < 0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}(2a_2[2L-K] + 2a_0[2m\sqrt{\psi} + 2mq - p^2] - a_1[p\sqrt{\psi} - pq + 4mr]), \psi = q^2 - 4K_L$$

$$\text{Si } q_N=0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}(p) \text{sg}(a_2[2ps + r\sqrt{\Sigma}] + a_0[2mr + p\sqrt{\Sigma}] - a_1K), \Sigma = -K_L$$

$$\text{Si } S=0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}(a_2[2q\sqrt{3R+6R-4q^2+9K}] + 3a_0[4m\sqrt{3R-Q}] - 3a_1[p\sqrt{3R+V}])$$

En estos casos podemos ver cuándo la integral se hace cero. Aunque no estemos en ninguno de ellos, disponemos de fórmulas (trascendentes) como la (8) para el cálculo de I . Vamos a acabar la teoría de esta sección probando la siguiente condición general (por desgracia, únicamente necesaria) para la anulación de I :

(27) Si $F \neq 0, I = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv sp^2(6a_0a_2a_1+a_1^3)+(rK+2rL-4spq)(a_2a_1^2+a_2^2a_0)+(4sq^2-r^2q-2sK-4sL)a_2^2a_1+(r^3+8s^2p-4rsq)a_2^3- \\ &-mr^2(6a_0a_2a_1+a_1^3)-(pK+2pL-4mrq)(a_0a_1^2+a_0^2a_2)-(4mq^2-p^2q-2mK-4mL)a_0^2a_1-(p^3+8m^2r-4mpq)a_0^3 = \\ &= [ra_2-pa_0][ra_2+pa_0]^2 - q(ra_2+pa_0)a_1 + pra_1^2 + \\ &+ [4qa_0^2(ra_2+pa_0)+2ra_0(pa_0-3ra_2)a_1 - a_1(2qa_0-ra_1)^2]m - \\ &- [4qa_2^2(ra_2+pa_0)+2pa_2(ra_2-3pa_0)a_1 - a_1(2qa_2-pa_1)^2]s + \\ &+ 8[ra_2-pa_0][a_2a_0+a_1^2]ms + 8pa_2^3s^2 - 8ra_0^3m^2 + 16a_0^2a_1m^2s - 16a_2^2a_1s^2m = 0 \end{aligned}$$

En efecto, partamos, por ejemplo, de (9). Si $I=0$ debe anularse su numerador cuando Z_3 sea la menor de las raíces de $P_3(Z)$. Así pues, Z_3 es raíz común de este polinomio y del:

$$R_2(Z) = 2a_2Z^2 + [pa_1 - 2qa_2 - 4ma_0]Z + [Ka_2 + (4mq - p^2)a_0 - 2mra_1] \quad (28)$$

Debe anularse la resultante en Z de ambos polinomios. Calculándola y factorizándola (mejor con el ordenador), se obtiene que esa resultante es el producto $F \cdot I_0$ y de ahí el resultado.

[Se llega a la misma expresión del I_0 , suponiendo que $M \neq 0$ y partiendo del numerador de (11); la condición $F \neq 0$ (ó $M \neq 0$) no causa problemas, pues en ese caso sabemos calcular I ; que I_0 se anule no implica, desde luego, que lo haga I , pues el R_2 puede ser anulado por otras raíces de $P_3(Z)$; era esperable la simetría con que aparecen en I_0 las parejas $r-p$, $m-s$ y a_0-a_2]

Es claro que si $P_3(Z)$ es factorizable (como en los casos de arriba) también lo será I_0 . Sin embargo, precisamente entonces no es necesario hallar I_0 . Pero, aunque no podamos hallar I (sin fórmulas trascendentes), el conocimiento de I_0 nos puede garantizar que $I \neq 0$.

Ejemplo 3. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 \rightarrow F=0, M=-4, N_L=-12, q_N=0, S=-162.$

Puesto que $M < 0$ (o bien porque $0 < K=4 < L=8$) las z son complejas.

Podemos hallar I a través de (17) ó (24). Sustituyendo en ellas $\sqrt{G} = 20, \sqrt{\Sigma} = 2$:

$$I = 2\sqrt{2}\pi \frac{a_2[20+4] + 16a_0 - 4a_1^2}{20\sqrt{20+12}} = \pi \frac{a_2[6-2+2] + a_0[2+2] - a_1^2}{2[3+2]\sqrt{1}} = \frac{\pi}{5} [3a_2 + 2a_0 - a_1^2]$$

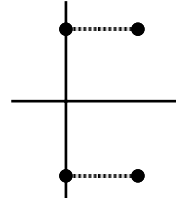
Factorizar $P_4(z)$ es inmediato por ser $q_N=0$: $P_4(z) = [z^2+1][z^2+2z+2].$

Más largo sería resolver $P_4(x) = x^4 + 24x^2 + 400 = 0$ y hacer $z = x/4 - 1/2$,

o resolver $P_3(Z) = Z^3 - 3Z^2 - 4Z + 12 \rightarrow Z_1=C+D=3, Z_2=2, Z_3=-2$

y calcular A, B, C y D (sabiendo que $A+B=2$ ó $AD+BC=2$ ó $CD=2$)

Las z son las del dibujo de la derecha ($\alpha=0, \beta=\delta=1, \gamma=1$):

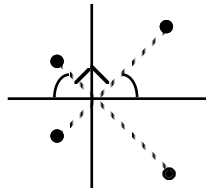


Ejemplo 4. $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 8z + 16 \rightarrow F=72, M=0, N_L=0, q_N=-160, S=1456.$

Como $K=-16 < 0, f=-36 < 0$ (o porque $K_L=-80 \neq 0$) todas las z son complejas.

Para el cálculo de I podemos usar la fórmula (18) [ó la (19)] y la (23). $\sqrt{-f}=6, \sqrt{\Psi}=18.$

$$I = \frac{2\pi}{6} [a_2 + a_0 \frac{2}{8}] = 2\pi \frac{2a_2 [2.64+16] + 2a_0 [2(18+2)-4] - a_1 [4.8-2(18-2)]}{18[18-2]\sqrt{2(18+2)-4}} = \frac{\pi}{12} [4a_2 + a_0]$$



Las raíces de $P_3(Z)$ son $Z=C+D=10$ ($Z_2=0, Z_3=-8$) y $CD=s=16.$

Por tanto $C=2, D=8$. Así $8A+2B=r=8, A+B=p=-2 \rightarrow A=2, B=-4$:

$$P_4(z) = [z^2 + 2z + 2][z^2 - 4z + 8] \rightarrow z_{1,2} = -1 \pm i, z_{3,4} = 2 \pm 2i$$

[como $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ debía ser $\alpha = \beta, \gamma = -\delta$]

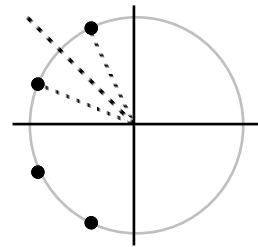
Ejemplo 5. $P_4(z) = z^4 + 6z^3 + 18z^2 + 36z + 36 \rightarrow F=72, M=0, N_L=0, q_N=1296, S=0.$

Las z son complejas: $K=216 > 0, h=-60 < 0, q=18 > 12\sqrt{6}-12, K_L=72 \neq 0, Q=-36 < 0.$

Utilizamos (21) [ó (20)], (22) y (25). $\sqrt{\omega}=6, \sqrt{3R}=18.$

$$I = \pi\sqrt{2} \frac{[a_2 6 + a_0] 36 - 2a_1 36}{6.12\sqrt{18}} = +4\pi \frac{a_2 6.36 + a_0 36 - 2a_1 36}{12.72} =$$

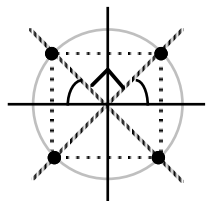
$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{a_2 72.36 + 3a_0 3.36 - 3a_1 6.36}{3.36\sqrt{3.36}} = \frac{\pi}{6} [6a_2 + a_0 - 2a_1]$$



Con $Z=C+D=12$ se llega a $P_4(z) = [z^2 + (3+\sqrt{3})z + 6][z^2 + (3-\sqrt{3})z + 6]$

[Si factorizamos I_0 tenemos: $I_0 = 72[6a_2 - a_0][6a_2 + a_0 - 2a_1][6a_2 + a_0 - 3a_1]$. Si son no nulos los tres corchetes debe ser $I \neq 0$, pero si alguno es cero no sabemos (sin calcularla) si I se anula o no (como no tienen el mismo signo los coeficientes de a_0 y a_2 , el primer corchete no puede ser el numerador de I , pero no sabríamos si lo es el segundo o el tercero)].

Ejemplo 6. $P_4(z) = z^4 + 4 \rightarrow F=M=N_L=q_N=S=0, z_{1,2}=-1 \pm i, z_{3,4}=1 \pm i$ (complejas).



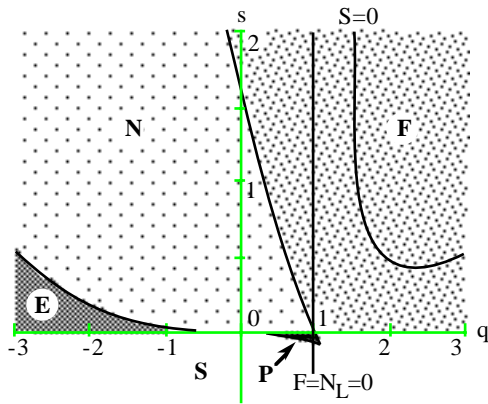
Usando (16), (17), (19), (21), (23) o (25) $\rightarrow I = \frac{\pi}{4} [2a_2 + a_0]$

Se tiene, como debía ser:

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}, (\alpha - \gamma)^2 + \beta^2 - 6\beta\delta + \delta^2 = 0, \beta = \delta, \theta_1 + \theta_2 = \pi \text{ y } r_1 = r_2$$

Ejemplo 7. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + qz^2 + s$ [todo P_4 con $r=0, p \neq 0$ toma esa forma haciendo $z = \frac{py}{2m}$]

$$D_4 = 16s[16s^2 - (8q^2 - 36q + 27)s + q^4 - q^3] = 0 \text{ si } s=0 \text{ ó } s = \frac{1}{32} (8q^2 - 36q + 27 \pm [9 - 8q]^{3/2}) \equiv s_{\pm}$$



Así, las z son complejas si $s > 0$ para $q \geq 1$ y si $s > s_+$ para $q \leq 1$ [región **F** del dibujo; en **E** y **P** hay 4 reales y 2+2 en **N** y **S**]. Además:

$$f = 4(1-q), \quad N_L = 4s(1-q), \\ q_N = M = -4s, \quad S = 2(q^3 - 36qs + 54s)$$

Por tanto, si $q=1$ podemos calcular I (para $s > 0$) a partir de las fórmulas (17) ó (23). Obtenemos:

$$I = \sqrt{2} \pi \frac{a_2[r_6+1] + 4a_0 - 2a_1}{r_6 \sqrt{r_6 - 1}}, \text{ con } r_6 = \sqrt{16s+1}$$

Si $s \equiv s_S = \frac{q^3}{18[2q-3]}$, utilizando (25) obtenemos tras algunas simplificaciones que para $q > \frac{3}{2}$:

$$I = 3\sqrt{2}r_2 \pi \frac{a_2q^2 + 3a_0r_2[r_8 - r_2] - a_1qr_2[r_8 - 2r_2]}{q^2r_8^2\sqrt{r_8 - 2r_2}}, \text{ siendo } r_2 = \sqrt{2q-3}, \quad r_8 = \sqrt{8q-9}$$

Para los demás valores de q y s debemos calcular I mediante las fórmulas más generales en términos de raíces de ecuaciones de tercer orden. Así, por ejemplo, podríamos utilizar (11):

$$I = 2\pi \frac{a_2[4s] + a_0[-2Z_3] - a_1[4s - Z_3^2]}{[3Z_3^2 - 2qZ_3 - 4s] \sqrt{4s - Z_3^2}} \tag{29}$$

siendo Z_3 la menor de las raíces de $Z^3 - qZ^2 - 4sZ + 4s(q-1)$, que podría calcularse así:

$$Z_3 = \frac{1}{3} \left[q + 2\sqrt{R} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3} \right], \quad \phi = \arccos \left[\frac{q^3 - 36qs + 54s}{R^{3/2}} \right], \quad R = q^2 + 12s$$

Además de esta fórmula trascendente disponemos de la condición algebraica (27): para que sea $I=0$ es necesario que se anule:

$$I_0 = 4[4a_2^2(a_2 - a_1)s^2 + (a_1[qa_2 - a_1]^2 + a_0[4a_0a_1 - 4a_0a_2 - 4a_1^2 + 6a_2a_1 - 2qa_2^2])s - a_0^2(q-1)(qa_1 - 2a_0)]$$

Hallemos un valor exacto de I en un punto de **F** que no esté ni sobre $q=1$ ni sobre $s=s_S$. Por ejemplo, sea $q=0, s=2$. Para esos valores $P_3(z)$ e I_0 resultan ser factorizables:

$$P_3(z) = [Z-2][Z^2 - 2Z - 4], \quad I_0 = -8[2a_2 + a_0 - a_1][a_1^2 - 3a_0a_1 + 2a_2a_1 + a_0^2 + 2a_2a_0 - 4a_2^2]^2$$

Como la Z menor es $Z_3 = -2 \left[= \frac{4\sqrt{6}}{3} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3}, \phi = \arccos \frac{3\sqrt{6}}{8} (!) \right]$, deducimos de (29) que:

$$I = \pi[2a_2 + a_0 - a_1]$$

La anulaci3n del factor de primer orden del I_0 equivale, en este caso, a la anulaci3n de I .

4.3 Centros y focos homogéneos para $n=3$.

Con las técnicas de la sección anterior, podemos atacar el problema de distinguir entre centro y foco, continuando el análisis iniciado en la 4.1 para los casos más sencillos. En esa sección vimos que, en el caso de no existir variedades que llegasen al origen, el sistema

$$[H3] \begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$$

tenía un foco estable, un centro o un foco inestable dependiendo de que el producto $d \cdot l$, con

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c+3h)z^2 + (2b+2g)z + (3a+f)}{-dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e} dz \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2(z)}{P_4(z)} dz$$

fuese mayor, igual o menor que cero. Supondremos que $d < 0$, para adecuarnos a lo supuesto en 4.2 (si no fuese así, se cambiaría el signo de los coeficientes y el sentido de las órbitas), con lo que $l < 0$ implicará la estabilidad asintótica del foco. Resumamos algunos resultados de 4.2:

Teorema 4.2

Sean

$$m = -d, \quad p = h - c, \quad q = g - b, \quad r = f - a, \quad a_2 = c + 3h, \quad a_1 = 2(b + g), \quad a_0 = 3a + f$$

$$L = 4ms, \quad K = pr, \quad N = mr^2 + p^2s, \quad K_L = K - L, \quad N_L = N - qL, \quad R = q^2 - 3K_L, \quad S = 2q^3 - 9qK_L + 27N_L$$

$$Q = 3p^2 - 8mq, \quad F = p^3 - 4mpq + 8m^2r, \quad V_2 = \frac{1}{3}[RQ - 2mS], \quad D_4 = \frac{1}{27}[4R^3 - S^2], \quad G = \frac{1}{3}[64m^2R - Q^2]$$

Supongamos que o bien $D_4 > 0$ y $V_2 \leq 0$ ó $Q \leq 0$ o bien $F = V_2 = 0$ y $Q < 0$, y sea Z_3 la menor de las raíces de $P_3(Z) = Z^3 - qZ^2 + K_L Z - N_L$. Entonces las raíces de $P_4(z)$ son complejas y además:

$$\text{si } p\sqrt{s} + r\sqrt{m} = 0 \Rightarrow \text{sg}(l) = \text{sg}(a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m})$$

$$\text{si } p\sqrt{s} + r\sqrt{m} \neq 0 \Rightarrow \text{sg}(l) = \text{sg}(p\sqrt{s} + r\sqrt{m}) \text{sg}(a_1 Z_3^2 - [ra_2 + pa_0]Z_3 + 2pa_2s + 2ra_0m - a_1L)$$

$$\text{si } F = 0 \Rightarrow \text{sg}(l) = \text{sg}(a_2[\sqrt{G} + p^2] + 16a_0m^2 - 4a_1mp)$$

$$\begin{aligned} \text{si } F \neq 0, \quad l = 0 \Rightarrow l_0 = & (fc + ac + fh - 3ah)(4[fh - ac]^2 - [b + g][abc + fbc + abh - 3fbh + fgc + fgh + agh - 3agc]) \\ & + 2([f^2hg + f^2cg + 3a^2cg + 3a^2hg - 8fahg + f^2cb - 2facb - 2fahb + 3f^2hb + 3a^2hb - 3a^2cb]a_0 + [bf + ba - 2ag]^2a_1)d \\ & + 2([c^2ab + c^2fb + 3h^2ab + 3h^2fb - 8cahb + c^2fg - 2cahg - 2cfhg + 3c^2ag + 3h^2ag - 3h^2fg]a_2 + [2hb - gc - hg]^2a_1)e \\ & - (f - a)a_0^3d^2 - (c - h)a_2^3e^2 - 2(fc + fh + ac - 3ah)(a_2a_0 + a_1^2)ed + 2a_2^2a_1e^2d + 2a_0^2a_1ed^2 = 0 \end{aligned}$$

Además de lo recogido en el teorema, en 4.2 hemos obtenido el valor de l en función de los coeficientes en otra serie de casos y hemos caracterizado las raíces complejas en términos de la mayor de las raíces del discriminante, visto como función de s . Analicemos una serie de ejemplos, que serán cada vez más complicados porque iremos introduciendo parámetros en el sistema. Estos ejemplos servirán también para repasar los resultados de 3.6 sobre la existencia de autovalores cero asociados a vectores propios múltiples.

Ejemplo 8. $\begin{cases} x' = 5x^3 + 6x^2y + xy^2 - y^3 \\ y' = 8x^3 + 5x^2y + 9xy^2 + 5y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 8.$

F, M, N_L, q_N, S ≠ 0, pero Q=24, V₂=-348, D₄=53888, I₀=171856 : hay un foco en el origen. Como el discriminante de E₂ es negativo y a₀=20 el foco es inestable.

Ejemplo 9. $\begin{cases} x' = -3xy^2 - y^3 \\ y' = 36x^3 + 36x^2y + 18xy^2 + 3y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 6z^3 + 18z^2 + 36z + 36.$

En el ejemplo 5 de la sección anterior calculamos el valor de $I = \frac{\pi}{6} [6a_2 + a_0 - 2a_1]$.

Como a₂=6, a₀=36 y a₁=36, deducimos que I=0 y, por tanto, el sistema posee un centro.

Ejemplo 10. $\begin{cases} x' = ax^3 + 2xy^2 - y^3 \\ y' = 16x^3 + (8+a)x^2y + 2xy^2 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 8z + 16$, para todo a.

Es el polinomio analizado en el ejemplo 4 de 4.2. De allí: $I = \frac{\pi}{12} [4a_2 + a_0] = \frac{\pi}{3} [4+a]$

Hay un foco estable, centro o foco inestable según sea a < -4, a = -4 ó a > -4.

Ejemplo 11. $\begin{cases} x' = -x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \\ y' = sx^3 + 4x^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = 2z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + s.$

¿Cuándo sus raíces son complejas? Se tiene que:

F = 0, M=16(2-s), N_L=32(1-s), q_N=16(4-s), S=432(1-s)

Q=h=-48, V₂ = 192(s-2), D₄ = 256(8s-7)(s-2)², G=256(8s-7)

Así, si s <, =, > 7/8, P₄(z) tiene respectivamente dos raíces complejas y dos reales, una real doble y dos complejas o cuatro raíces complejas. Primero, calculemos la I para este último caso. A partir de la expresión (21), siendo a₂=0, a₁=8, a₀=4, obtenemos:

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{a_2[\sqrt{8s-7}+1]+4a_0-2a_1}{\sqrt{8s-7} \sqrt{3+\sqrt{8s-7}}} = 0 \Rightarrow \text{centro en el origen si } s > 7/8.$$

[Para s=1 la expresión de I la podríamos obtener también a partir de (22) ó (25); para s=2, de (15), (20) o (21); para s=4, de (24), como hicimos (salvo un factor 2), en el ejemplo 3 de 4.2].

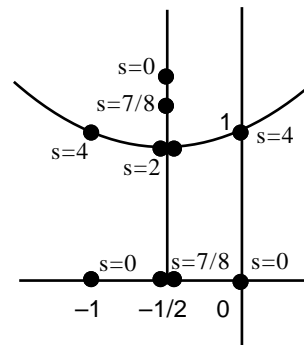
El hecho de que sea F=0 para todo s, nos permite además, utilizando lo visto en 4.2, factorizar P₄(z) = 2[z²+Az+C][z²+Bz+D] y hallar exactamente sus raíces:

Conocemos las raíces de P₃(Z) : Z₀ = 4 y Z_± = 1 ± √(8s-7).

Las z del semiplano superior tendrán iguales las partes reales cuando sea M < 0; es decir, si s ≥ 2. A partir de la Z = 2[C+D], se pueden calcular los C, D, A y B y las z. En concreto, hagámoslo para s ≤ 2, y así tendremos las z reales para s ≤ 7/8.

Ahora, A=B=-1/2, C+D=2 y CD=s/2. Por tanto, si s ≤ 2:

$$P_4(z) = 2[z^2 + z + 1 + \sqrt{1-s/2}] [z^2 + z + 1 - \sqrt{1-s/2}]$$



Estudiemos la estructura del origen cuando no haya centro. El λ asociado a un z real es

$$\lambda = -z - 3z^2 - 2z^3 = -z(z+1)(2z+1)$$

Con esto y el dibujo anterior tendríamos el signo de los λ , pero repasemos los resultados de 3.6. La ecuación para los autovalores es en este caso:

$$P_4(\lambda) = 4\lambda^4 + 4(38-11s)\lambda^2 + s^2(8s-7) \rightarrow \text{existe } \lambda=0 \text{ si } s=0 \text{ y si } s=\frac{7}{8}$$

Por otra parte, los A y B introducidos en esa sección resultan ser $A=0$ y $B=64(8s-7)$. Sólo pueden existir z múltiples con $\lambda=0$ si $s=7/8$, como de hecho sucede:

$$s = \frac{7}{8} \rightarrow P_4(z) = \frac{1}{8}(2z+1)^2(4z^2+4z+7) \rightarrow z = -\frac{1}{2} \text{ doble asociado a } \lambda=0$$

En ese caso debe existir un factor común a los segundos miembros del sistema:

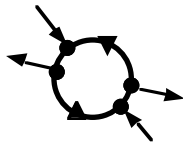
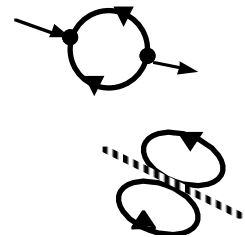
$$\begin{cases} x' = -y(x+y)(x+2y) \\ y' = \frac{1}{8}(7x^2+18xy+4y^2)(x+2y) \end{cases}$$

El análisis de este sistema se reduce, pues, al de:

$$\begin{cases} x' = -y(x+y) \\ y' = (7x^2+18xy+4y^2)/8 \end{cases} \rightarrow P_3(z) = \frac{1}{8}(2z+1)(4z^2+4z+7)$$

Al $z=-1/2$ está asociado un $\lambda > 0$ y su estructura es la de la arriba.

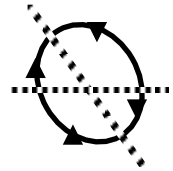
Para el sistema inicial basta incluir la recta de puntos críticos y cambiar el sentido de las órbitas en $x+2y < 0$ (dibujo de abajo).



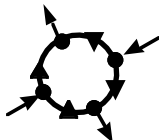
Sea ahora $0 < s < \frac{7}{8}$. Las dos z reales cumplen $-1 < z_1 < -1/2 < z_2 < 0$. Por tanto, sus λ asociados tienen los signos: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. La orientación dada por $P_4(z)$ da lugar a cuatro sectores elípticos.

Si $s=0 \rightarrow P_4(z) = 2z(z+1)(z^2+z+2) \rightarrow z=0, -1$ asociadas a $\lambda = 0$. Así

$$\begin{cases} x' = -y(x+y)(x+2y) \\ y' = y(x+y)(4x+y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -x-2y \\ y' = 4x+y \end{cases} \rightarrow \text{centro}$$

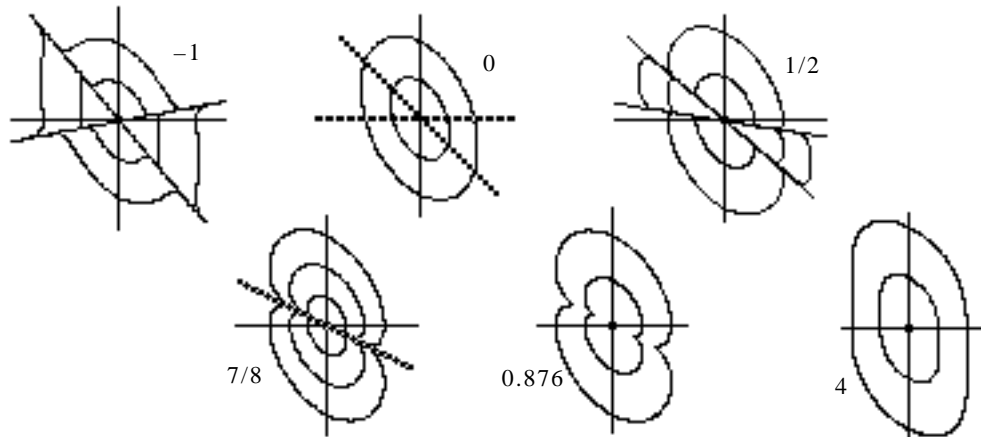


Incluyendo las rectas de puntos críticos y el cambio de orientaciones:



Si $s < 0$, las dos reales: $z_1 < -1 < 0 < z_2 \rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Como $P_4(z)$ es negativo entre las dos raíces hay un punto silla.

Integrando numéricamente se identifican las estructuras anteriores:



Ejemplo 12. $\begin{cases} x' = -y^3 \\ y' = s x^3 + qxy^2 + 2y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 2z^3 + qz^2 + s.$

Este polinomio fue analizado en el ejemplo 7 de 4.2. Las z eran complejas en la región F allí descrita. La integral I para el sistema ($a_2=6$, $a_0=0$, $a_1=2q$) es, según (29):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6z^2 + 2qz}{P_4(z)} dz = 4\pi \frac{12s - 4qs + qZ_3^2}{[3Z_3^2 - 2qZ_3 - 4s] \sqrt{4s - Z_3^2}} \quad (30)$$

Es fácil comprobar que si $F=N_L=0$ o si $S=0$ es $I>0$. ¿Y en los demás puntos de F ? Como:

$$I_0 = 128s[q^3 - 9qs + 27s]$$

sólo puede haber un centro si $s = s_0 \equiv \frac{q^3}{9[q-3]}$, $q>3$. Entonces el numerador de (30) es:

$$q \left[Z_3^2 - \frac{4}{9}q^2 \right] = q \left[Z_3 - \frac{2q}{3} \right] \left[Z_3 + \frac{2q}{3} \right]$$

y además el $P_3(Z)$ es factorizable:

$$P_3(Z) = \left[Z - \frac{2q}{3} \right] \left[Z^2 - \frac{q}{3}Z - \frac{2q^2[q-1]}{3[q-3]} \right] \rightarrow Z_3 = \frac{q}{6} [1 - r_5], \text{ con } r_5 = \sqrt{\frac{25q-27}{q-3}}$$

Como $Z_3 \neq \pm 2q/3$ para todo $q>3$ deducimos que para ningún (q,s) es $I=0$: no hay centro. Así pues, en todo F hay un foco del mismo tipo: inestable.

[tras alguna simplificación se llega a la expresión: $I = \frac{6\sqrt{2}\pi}{r_5} \sqrt{r_5-5} > 0$, si $s=s_0$, $q>3$]

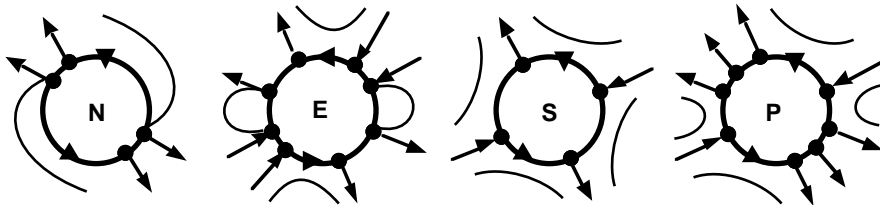
Analicemos ahora los mapas de fases en las demás regiones del dibujo de la página 74 (los casos genéricos con z reales). La estructura del punto crítico puede modificarse sólo por la aparición o desaparición de rectas invariantes (es decir, sobre $s=0$ y las otras curvas con $D_4=0$) o cuando algún autovalor cambie de signo. Como $\lambda=z^3$, esto último sólo pueden ocurrir al cruzar $s=0$. En cada región la estructura es, pues, la misma. Basta analizar el sistema en un (q,s) situado en cada una de ellas:

N: (0,1) $\rightarrow P_4(z) = [z+1][z^3+z^2-z+1] \rightarrow z_1 \approx -1.8, z_2 = -1$

E: (-11,12) $\rightarrow P_4(z) = [z+1][z-2][z^2+3z-6] \rightarrow z_1 \approx -4.4, z_2 = -1, z_3 = 1.4, z_4 = 2$

S: (1,-4) $\rightarrow P_4(z) = [z+2][z-1][z^2+3z-6] \rightarrow z_1 = -2, z_2 = 1$

P: (1,-1/16) $\rightarrow P_4(z) = [8z^2+4z-1][8z^2+12z+3]/64 \rightarrow z_1 \approx -1.2, z_2 \approx -0.7, z_3 \approx -0.3, z_4 \approx 0.2$



Los puntos de **N** corresponden, pues, a nodos inestables, los de **E** a puntos con dos sectores elípticos y dos hiperbólicos (separados por sectores parabólicos), los de **S** a sillas y los de **P** a puntos con cuatro sectores hiperbólicos (y dos parabólicos).

Ejemplo 13. $\begin{cases} x' = cxy^2 - 2y^3 \\ y' = 6x^3 + rx^2y + cy^3 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} P_4(z) &= 2z^4 + rz + 6, Q=0, V_2 = -72r^2, \\ D_4 &= -108(r+8)(r-8)(r^2+64) \end{aligned}$

Hay, por tanto, cuatro z complejas si $-8 < r < 8$ y dos reales y dos complejas para los demás valores de r . Las z reales serán dobles cuando sea $r = \pm 8$.

A diferencia del caso anterior no podemos calcular la I salvo si $r=0$, ya que:

$$N_L = 2r^2, q_N = -2r^2, S = 54r^2, F = 32r, M = 2r^2$$

[en ese caso sencillo resulta ser $I = \pi 2^{1/2} 3^{-1/4} c$, lo que da inmediatamente la estabilidad].

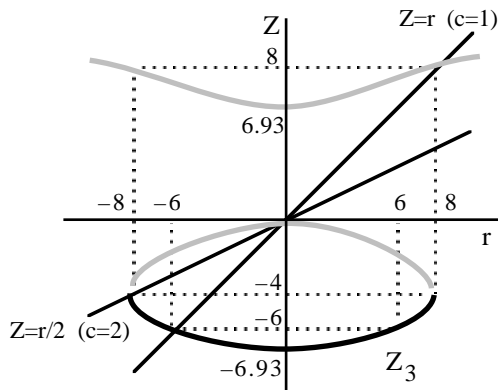
Para ver si para algún valor de r puede haber un centro hallamos

$$I_0 = -32r^2(r^2 - 2c^3r - 48c^2)$$

Tal vez si $r = c^3 \pm c\sqrt{c^4 + 48}$ lo haya. Lo podemos precisar por otro camino. De 4.2 sabemos que el signo de I coincide con el numerador de (9) [es decir, con (28)] que resulta ser:

$$R_2(Z_3) = 8Z_3(cZ_3 - r)$$

con Z_3 la menor de las raíces de $P(Z) = Z^3 - 48Z - 2r^2$, que representamos despejando la r :



Se tiene entonces que cuando $c \in (-2, 2)$ habrá un centro para el $r \in (-8, 8)$ intersección de la recta $Z=r/c$ con la rama de la curva del dibujo en trazo continuo (ese r vendrá dado por uno de los dos signos de $r = c^3 \pm c\sqrt{c^4 + 48}$).

Podemos deducir también la estabilidad de los focos a partir del dibujo. Por ejemplo, si $c=1$, se tiene que hay un foco estable si $-8 < r < -6$, un centro si $r=-6$ y un foco inestable si $-6 < r < 8$. Para $|c| \geq 2$ sólo hay focos (estable o inestable dependiendo del signo de c).

Para analizar el resto de los r utilizamos los resultados de 3.6. Obtenemos en este caso:

$$P_4(\lambda) = 4\lambda^4 - 12r\lambda^3 + 12(r^2 + 2c^2)\lambda^2 - (4r^3 + c^3r^2 - 12c^2r + 576c)\lambda + 36(4cr + 48 + c^4)$$

$$A = 4r^2(r + c^3), B = 9c^2(256c + r^3)$$

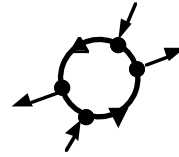
Existirán, por tanto, autovalores $\lambda=0$ si $r = -[48 + c^4]/4c$ que podrán estar asociados a z dobles cuando sea $A=B=0$, es decir si (c,r) es $(0,0)$, $(2,-8)$ ó $(-2,8)$.

La estructura del punto crítico puede modificarse sólo si $D_4=0$ (aparición o desaparición de rectas invariantes), si $s_\lambda=0$ (cambio de signo de algún λ) o si $I_0=0$ (el foco puede pasar de ser estable a ser inestable). El plano cr queda así dividido por estas curvas en regiones correspondientes a retratos de fase que son equivalentes. Basta analizar el origen para valores de c y r pertenecientes a las regiones del semiplano $r > 0$ (las del $r < 0$ son similares, pues al cambiar $y \rightarrow -y$, $c \rightarrow -c$, $r \rightarrow -r$ resulta el mismo sistema con el sentido de las órbitas opuesto). Analizaremos sólo el caso $c=1$. Los demás serían parecidos.

Sea $c=1$. Ya hemos visto lo que ocurre si $-8 < r < 8$. A partir de $\lambda = z^2(1-2z)$ y del dibujo de las gráficas de $2z^4+6$ y las rectas $-rz$ (tangentes en $z=1$ si $r=-8$) podemos deducir:

Si $r < -\frac{49}{4}$, las dos z reales distintas cumplen $z_1 < \frac{1}{2} < z_2 \rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

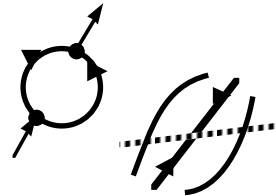
Como además el signo de $P_4(z)$ es positivo en $z=0$ se tiene un punto silla:



Si $r = -\frac{49}{4} \rightarrow P_4(z) = \frac{1}{4}(2z-1)(4z^3+2z^2+z-24) \rightarrow z_1 = \frac{1}{2} < z_2$ asociadas a $\lambda_1=0, \lambda_2 < 0$.

$$\begin{cases} x' = y^2(x-2y) \\ y' = \frac{1}{4}(x-2y)(24x^2-xy-2y^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = y^2 \\ y' = \frac{1}{4}(24x^2-xy-2y^2) \end{cases}$$

$$\rightarrow P_3(z) = -\frac{1}{4}(4z^3+2z^2+z-24).$$

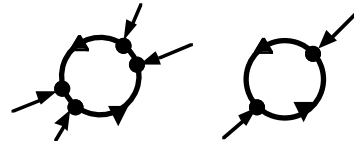


Su estructura es la de la izquierda y la del inicial la de la derecha.

Si $-\frac{49}{4} < r < -8 \rightarrow \frac{1}{2} < z_1 < 1 < z_2 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$

$r = -8 \rightarrow P_4(z) = 2(z-1)^2(z^2+2z+3) \rightarrow z=1$ con $\lambda=-1$

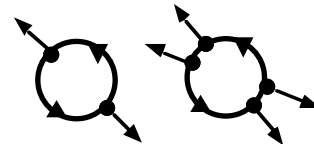
Ambos son nodos estables.



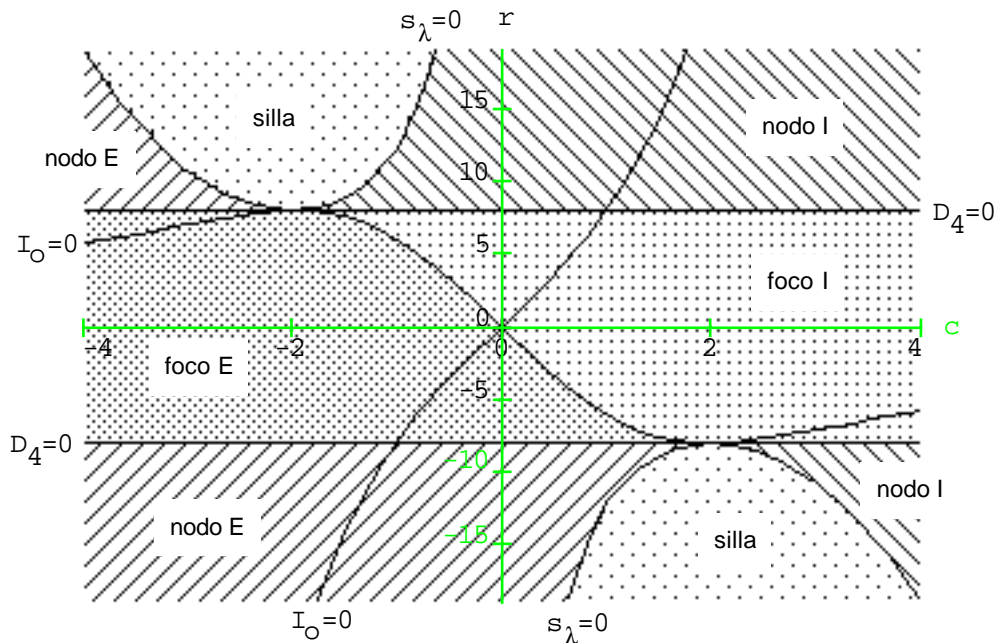
$r=8 \rightarrow P_4(z) = 2(z+1)^2(z^2-2z+3) \rightarrow z=-1$ doble con $\lambda=3$

$r > 8 \rightarrow z_1, z_2 < 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$

Los dos son nodos inestables.



Tratando análogamente el resto de los casos se llega a la siguiente clasificación:



4.4 Inestabilización de centros elementales.

Consideremos ahora un sistema para el que el origen $\mathbf{0}$ sea un punto elemental cuya aproximación lineal tenga autovalores imaginarios puros. Este sistema, con cambios lineales y salvo un factor constante de los segundos miembros, se podrá escribir:

$$[S] \begin{cases} x' = y + A_2(x,y) + A_3(x,y) + \dots = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots \\ y' = -x + B_2(x,y) + B_3(x,y) + \dots = -x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + \dots \end{cases}$$

Como se sabe, $\mathbf{0}$ se trata de un centro, un foco estable o un foco inestable del sistema no lineal [S]. Escribiendo [S] en polares se tiene [$C = \cos \theta$, $S = \sin \theta$]:

$$[P] \begin{cases} r' = [CA_2(C,S) + SB_2(C,S)]r^2 + [CA_3(C,S) + SB_3(C,S)]r^3 + \dots \equiv M_2r^2 + M_3r^3 + \dots \\ \theta' = -1 + [CB_2(C,S) - SA_2(C,S)]r + [CB_3(C,S) - SA_3(C,S)]r^2 + \dots \equiv -1 + m_2r + m_3r^2 + \dots \end{cases}$$

Desarrollando en serie de potencias de r la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema en polares obtenemos:

$$\begin{aligned} [e] \quad \frac{dr}{d\theta} &\equiv R_2(\theta) r^2 + R_3(\theta) r^3 + R_4(\theta) r^4 + R_5(\theta) r^5 + R_6(\theta) r^6 + R_7(\theta) r^7 + \dots = \\ &= - \frac{M_2r^2 + M_3r^3 + M_4r^4 + \dots}{1 - [m_2r + m_3r^2 + \dots]} = - (M_2r^2 + M_3r^3 + M_4r^4 + \dots) (1 + m_2r + [m_3 + m_2^2]r^2 + \dots) = \\ &= - M_2r^2 - [M_3 + M_2m_2] r^3 - [M_4 + M_2m_3 + m_2M_3 + M_2m_2^2] r^4 - \\ &\quad - [M_5 + m_2M_4 + M_2m_4 + M_3m_3 + 2M_2m_2m_3 + m_2^2M_3 + M_2m_2^3] r^5 - \\ &\quad - [M_6 + m_2M_5 + M_2m_5 + M_3m_4 + m_3M_4 + m_2^2M_4 + 2M_2m_2m_4 + M_2m_3^2 + 2m_2M_3m_3 + \\ &\quad \quad + 3M_2m_2^2m_3 + m_2^3M_3 + M_2m_2^4] r^6 - \\ &\quad - [M_7 + m_2M_6 + M_2m_6 + M_3m_5 + m_3M_5 + M_4m_4 + \\ &\quad \quad + m_2^2M_5 + 2M_2m_2m_5 + 2M_2m_3m_4 + 2m_2M_3m_4 + 2m_2m_3M_4 + M_3m_3^2 + \\ &\quad \quad + m_2^3M_4 + 3m_2^2M_3m_3 + 3M_2m_2m_3^2 + 3M_2m_2^2m_4 + \\ &\quad \quad + m_2^4M_3 + 4M_2m_2^3m_3 + M_2m_2^5] r^7 - \dots \end{aligned}$$

La solución $r(\theta)$ con $r(0)=r_0$ de [e] será una función analítica de r_0 , que se anula si $r_0=0$:

$$r(\theta) \equiv u_1(\theta) r_0 + u_2(\theta) r_0^2 + u_3(\theta) r_0^3 + \dots$$

Haciendo $\theta=0$:

$$r_0 \equiv u_1(0) r_0 + u_2(0) r_0^2 + u_3(0) r_0^3 + \dots$$

Por tanto:

$$u_1(0) = 1, \quad u_k(0) = 0 \text{ si } k > 1.$$

Llevando la expresión de $r(\theta)$ a [e] obtenemos:

$$u_1' r_0 + u_2' r_0^2 + u_3' r_0^3 + \dots = u_1^2 R_2 r_0^2 + [2u_1 u_2 R_2 + u_1^3 R_3] r_0^3 + \dots$$

Igualando potencias: $u_1' = 0$, que junto al dato inicial $u_1(0) = 1$ nos lleva a que $u_1(\theta) = 1$.

Además:

$$u_2' = R_2$$

$$u_3' = 2u_2 R_2 + R_3$$

$$u_4' = [2u_3 + u_2^2] R_2 + 3u_2 R_3 + R_4$$

$$u_5' = 2[u_4 + u_3 u_2] R_2 + 3[u_2^2 + u_3] R_3 + 4u_2 R_4 + R_5$$

$$u_6' = [2u_5 + 2u_4 u_2 + u_3^2] R_2 + [3u_4 + 6u_3 u_2 + u_2^3] R_3 + 2[2u_3 + 3u_2^2] R_4 + 5u_2 R_5 + R_6$$

$$u_7' = 2[u_6 + u_5 u_2 + u_4 u_3] R_2 + 3[u_5 + 2u_4 u_2 + u_3^2 + u_3 u_2^2] R_3 + 4[u_4 + 3u_3 u_2 + u_2^3] R_4 + 5[u_3 + 2u_2^2] R_5 + 6u_2 R_6 + R_7$$

Este sistema, unido al dato $u_k(0) = 0$ nos permitiría ir calculando sucesivamente los $u_k(\theta)$:

$$u_2(\theta) = \int_0^\theta R_2, \quad u_3(\theta) = \int_0^\theta [2u_2 R_2 + R_3], \quad u_4(\theta) = \int_0^\theta [(2u_3 + u_2^2) R_2 + 3u_2 R_3 + R_4], \dots$$

El hecho de que $\mathbf{0}$ sea centro o foco dependerá de que, cerca de $\mathbf{0}$, el valor de la $r(\theta)$ en $\theta=2\pi$ sea igual o distinto que el valor para el inicial $\theta=0$. En concreto, como θ decrece con t cerca de $\mathbf{0}$, será foco estable si $r(2\pi) > r(0)$ e inestable si la desigualdad es la opuesta. Nos interesa, pues, hallar el signo de:

$$r(2\pi) - r(0) = u_2(2\pi) r_0^2 + u_3(2\pi) r_0^3 + u_4(2\pi) r_0^4 + \dots$$

Este signo, para r_0 pequeño, nos lo proporcionará el primer término no nulo del último desarrollo ($\mathbf{0}$ será un centro si y sólo si todos los $u_k(2\pi)=0$). Veamos como calcular los primeros $u_k(2\pi)$, usualmente llamados valores focales o coeficientes de Lyapunov, con el menor número de cuentas posibles. Como M_k y m_k son polinomios homogéneos en C y S de grado $k+1$, los R_k resultan ser sumas de polinomios homogéneos de paridad opuesta a la de k . Está claro entonces que $u_2(2\pi)=0$. Para el u_3 , tenemos que

$$2 \int_0^\theta u_2 R_2 = u_2^2 \rightarrow u_3 = u_2^2 + S_3, \text{ siendo } S_3 \equiv \int_0^\theta R_3.$$

Los términos de R_3 que contengan potencias impares de S ó C tendrán promedio 0. Así:

$$u_3(2\pi) = S_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} [-a_{30} C^4 - (b_{21} + a_{12}) C^2 S^2 - b_{03} S^4 - a_{20} b_{20} C^6 + (2a_{20} a_{11} - 2b_{20} b_{11} - a_{11} b_{11} - a_{02} b_{20} - a_{20} b_{02} + a_{20} b_{20}) C^4 S^2 + (2a_{11} a_{02} - 2b_{11} b_{02} + a_{11} b_{11} + a_{02} b_{20} + a_{20} b_{02} - a_{02} b_{02}) C^2 S^4 + a_{02} b_{02} S^6] d\theta$$

La integral entre 0 y 2π de C^4 , $C^2 S^2$, S^4 , C^6 , $C^4 S^2$, $C^2 S^4$, S^6

vale, respectivamente, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$

Sustituyendo en la expresión de $S_3(2\pi)$, dividiendo por $\pi/4$ y cambiando el signo del resultado para que el signo menos esté asociado a la estabilidad, concluimos que:

El origen de [S] es foco estable o inestable si, respectivamente, es menor o mayor que cero la expresión:

$$I_3 \equiv 3a_{30} + b_{21} + a_{12} + 3b_{03} + 2a_{20}b_{20} - 2a_{02}b_{02} + b_{11}b_{02} - a_{11}a_{02} + b_{11}b_{20} - a_{11}a_{20}$$

El I_3 debe anularse (y así lo hace) si, por ejemplo, las órbitas son simétricas respecto a alguno de los ejes ($\Rightarrow a_{20}=a_{02}=a_{30}=a_{12}=b_{11}=b_{21}=b_{03}=0$ ó $a_{11}=a_{30}=a_{12}=b_{20}=b_{02}=b_{21}=b_{03}=0$) o si el sistema es exacto ($\Rightarrow 3a_{30}+b_{21}=0$, $a_{12}+3b_{03}=0$, $2a_{20}+b_{11}=0$, $a_{11}+2b_{02}=0$). Podemos dar una expresión de I_3 más reducida, que nos será más útil en el futuro, escribiéndola en función de estos últimos binomios y de otros importantes en el estudio de los sistemas cuadráticos:

$$I_3 = e_{20} + e_{02} + Ae_{10} - Be_{01}, \text{ siendo } e_{kj} = (k+1)a_{k+1,j} + (j+1)b_{k,j+1}, A = a_{20} + a_{02}, B = b_{20} + b_{02}$$

En el caso de ser $I_3=0$ (o sea, si $S_3(2\pi)=0$) habrá que hallar el siguiente $u_k(2\pi)$ no nulo.

Se podría demostrar en general que el primer $u_k(2\pi) \neq 0$ es siempre impar (véase, por ejemplo, el A-L-G-M) pero nos interesa ir poco a poco. Comprobemos que, de hecho, si $u_3(2\pi)=0$ se cumple también que $u_4(2\pi)=0$. Como $u_3 = u_2^2 + S_3$:

$$u_4 = \int_0^\theta [(2S_3 + 3u_2^2)R_2 + 3u_2R_3 + R_4] = u_2^3 + \int_0^\theta [2S_3R_2 + 3u_2R_3 + R_4]$$

Integrando por partes:

$$\int_0^\theta S_3R_2 = S_3u_2 - \int_0^\theta u_2R_3 \rightarrow u_4 = 2S_3u_2 + u_2^3 + \int_0^\theta [R_4 + u_2R_3]$$

Demos un nombre a esta última integral: $S_4 \equiv \int_0^\theta [R_4 + u_2R_3]$

Puesto que R_4 es impar en C y S, su promedio es cero. Por tanto,

$$u_4(2\pi) = S_4(2\pi) = \int_0^{2\pi} u_2R_3.$$

El R_3 es par en C y S. Por otra parte, el u_2 contendrá las potencias impares de la integración de R_2 y además la constante K_2 obtenida al evaluar la primitiva en $\theta=0$. En concreto:

$$u_2 \equiv \frac{1}{3} [U_2 - K_2] = \frac{1}{3} [(a_{11} + b_{20} + 2b_{02})C^3 - 3a_{20}C^2S + 3b_{02}CS^2 - (2a_{20} + a_{02} + b_{11})S^3 - (2a_{20} + a_{02} + b_{11})]$$

Como la integral de U_2R_3 es 0 por su imparidad y la de K_2R_3 lo es al estar suponiendo que $I_3=0$, hemos probado que $u_4(2\pi)=0$.

Se trata entonces de calcular el $u_5(2\pi)$. Comencemos escribiendo u_5' en función de S_3 y S_4 , en vez de u_3 y u_4 :

$$u_5' = 2[S_4+3S_3u_2+2u_2^3]R_2 + 3[S_3+2u_2^2]R_3 + 4u_2R_4 + R_5$$

Utilizando que

$$\int_0^\theta 4u_2^3R_2 = u_2^4, \quad \int_0^\theta 2S_3R_3 = S_3^2$$

e integrando por partes de nuevo:

$$\int_0^\theta S_4R_2 = S_4u_2 - \int_0^\theta [u_2^2R_3+u_2R_4], \quad \int_0^\theta 2S_3u_2R_2 = S_3u_2^2 - \int_0^\theta u_2^2R_3$$

obtenemos:

$$u_5 = 2S_4u_2 + \frac{3}{2}S_3^2 + 3S_3u_2^2 + u_2^4 + S_5, \quad \text{con } S_5 \equiv \int_0^\theta [u_2^2R_3+2u_2R_4+R_5]$$

Por tanto:

$$u_5(2\pi) = S_5(2\pi) = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} [U_2^2R_3+6U_2R_4+9R_5] \equiv \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} Q_5$$

ya que U_2R_3 y R_4 son impares y la integral de R_3 es nula por estar suponiendo que $I_3=0$.
Reescribamos el Q_5 de forma más compacta para reducir al máximo los cálculos finales.
Sustituyendo los R_k y agrupando las potencias del mismo orden se llega a:

$$Q_5 = -9M_5 - (6U_2M_4+9M_2m_4+9m_2M_4+9M_3m_3) \\ - (U_2M_3+3m_2M_3+6M_2m_3)(U_2+3m_2) - M_2m_2(U_2+3m_2)^2$$

(los sumandos son polinomios homogéneos en C y S de orden, respectivo, 6, 8, 10 y 12).

O bien, llamando,

$$N \equiv U_2+3m_2 = (a_{11}+4b_{20}+2b_{02})C^3 + (3b_{11}-6a_{20})C^2S - (3a_{11}-6b_{02})CS^2 - (2a_{20}+4a_{02}+b_{11})S^3$$

concluimos que:

$$Q_5 = -9M_5 - 9M_3m_3 - (6NM_4+9M_2m_4-9m_2M_4) - (NM_3+6M_2m_3)N - M_2m_2N^2$$

Para hallar su integral entre 0 y 2π (para lo que será muy útil el ordenador), tal vez lo más sencillo sea sustituir C^2 por $1-S^2$ (obteniendo potencias 1, CS , S^2 , ..., CS^{11} , S^{12}), hacer $C=0$ y después sustituir S^2 , S^4 , S^6 , S^8 , S^{10} , S^{12} por sus promedios respectivos: $1/2$, $3/8$, $5/16$, $35/128$, $63/256$, $231/1024$ (como se ve, la única primitiva que ha sido necesario calcular explícitamente hasta ahora ha sido la de R_2). Haciendo esto en cada uno de los sumandos de la última expresión de Q_5 , multiplicando el resultado por 64 y reescribiéndolo en función de los e_{kj} , del A y del B se obtiene, respectivamente:

$$c_5 \equiv -36 [3e_{40}+e_{22}+3e_{04}]$$

$$c_{33} \equiv 9(a_{03}-a_{21}-3b_{12}-5b_{30})e_{20}-9(b_{30}-b_{12}-3a_{21}-5a_{03})e_{02} + 36 [a_{30}-b_{03}] e_{11}$$

$$c_{24} \equiv 12 [(A+2a_{20})e_{21}-(B+2b_{02})e_{12}+(5A-2a_{20}+2e_{10})e_{03}-(5B-2b_{02}+2e_{01})e_{30} \\ +(3a_{40}+a_{22}+3a_{04})e_{01}-(3b_{40}+b_{22}+3b_{04})e_{10}]$$

$$\begin{aligned}
c_7 \equiv & - (e_{10}^2 + 13e_{01}^2 + 35e_{10}A - 13e_{01}B - 20a_{20}e_{10} - 68b_{02}e_{01} \\
& + 70A^2 + 10B^2 - 80a_{20}A + 16b_{02}B + 64a_{20}^2 + 64b_{02}^2) e_{02} \\
& - (e_{01}^2 + 13e_{10}^2 + 35e_{01}B - 13e_{10}A - 20b_{02}e_{01} - 68a_{20}e_{10} \\
& + 70B^2 + 10A^2 - 80b_{02}B + 16a_{20}A + 64b_{02}^2 + 64a_{20}^2) e_{20} \\
& + (-9a_{21} + 9a_{03} - 39b_{12} - 105b_{30})e_{10}B + (-9b_{12} + 9b_{30} - 39a_{21} - 105a_{03})e_{01}A \\
& + 12 [(4a_{20}B + 4b_{02}A + AB) e_{11} + (3b_{03} - a_{30})e_{01}^2 - 2(b_{30} + a_{03})e_{10}e_{01} + (3a_{30} - b_{03})e_{10}^2 \\
& + (b_{02}a_{21} - b_{02}b_{12} + 3b_{02}a_{03} + 4a_{20}b_{03} + 5b_{02}b_{30} - 12a_{20}a_{30} - 3a_{30}A + 5b_{03}A) e_{10} \\
& + (a_{20}b_{12} - a_{20}a_{21} + 3a_{20}b_{30} + 4b_{02}a_{30} + 5a_{20}a_{03} - 12b_{02}b_{03} - 3b_{03}B + 5a_{30}B) e_{01}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_8 \equiv & (e_{10}^2 + 13e_{01}^2 + 35e_{10}A - 13e_{01}B - 56a_{20}e_{10} - 92b_{02}e_{01} \\
& + 70A^2 + 10B^2 - 140a_{20}A + 40b_{02}B + 160a_{20}^2 + 160b_{02}^2) e_{01}A \\
& - (e_{01}^2 + 13e_{10}^2 + 35e_{01}B - 13e_{10}A - 56b_{02}e_{01} - 92a_{20}e_{10} \\
& + 70B^2 + 10A^2 - 140b_{02}B + 40a_{20}A + 160b_{02}^2 + 160a_{20}^2) e_{10}B \\
& + 12 [b_{02}e_{10}^2A - a_{20}e_{01}^2B + 5a_{20}e_{01}B^2 - 5b_{02}e_{10}A^2]
\end{aligned}$$

Así pues, el signo de $u_5(2\pi)$ coincide con el signo de $l_{51} \equiv c_5 + c_{24} + c_{33} + c_7 + c_8$.

Hallemos una expresión más reducida de $u_5(2\pi)$ (y cambiemos otra vez el signo para que, como antes, el menos esté asociado a estabilidad). Al ser $l_3=0$ podemos sumar cualquier múltiplo de l_3 para anular el mayor número de términos (no son modificables aquellos de l_{51} que están entre corchetes). Una buena posibilidad es definir:

$$l_5 \equiv -\frac{1}{12} [l_{51} + l_3 (9b_{30} - 9a_{03} - 9b_{12} + 9a_{21} + 13e_{10}^2 + 13e_{01}^2 - 25e_{10}A - 25e_{01}B - 92a_{20}e_{10} - 92b_{02}e_{01} + 70A^2 + 70B^2 + 40a_{20}A + 40b_{02}B + 160b_{02}^2 + 160a_{20}^2)]$$

Entonces resulta ser:

$$\begin{aligned}
l_5 = & 3e_{40} + e_{22} + 3e_{04} \\
& + 3 [(b_{12} + b_{30})e_{20} - (a_{21} + a_{03})e_{02} - (a_{30} - b_{03})e_{11}] \\
& - (A + 2a_{20})e_{21} + (B + 2b_{02})e_{12} - (5A - 2a_{20} + 2e_{10})e_{03} + (5B - 2b_{02} + 2e_{01})e_{30} \\
& - (3a_{40} + a_{22} + 3a_{04})e_{01} + (3b_{40} + b_{22} + 3b_{04})e_{10} \\
& - (e_{10}^2 - 5e_{10}A - e_{01}B - 6a_{20}e_{10} - 2b_{02}e_{01} + 5B^2 + 10a_{20}A + 2b_{02}B + 8a_{20}^2 + 8b_{02}^2) e_{02} \\
& - (e_{01}^2 - 5e_{01}B - e_{10}A - 6b_{02}e_{01} - 2a_{20}e_{10} + 5A^2 + 10b_{02}B + 2a_{20}A + 8b_{02}^2 + 8a_{20}^2) e_{20} \\
& - (4a_{20}B + 4b_{02}A + AB) e_{11} - (3b_{03} - a_{30})e_{01}^2 + 2(b_{30} + a_{03})e_{10}e_{01} - (3a_{30} - b_{03})e_{10}^2 \\
& - (b_{02}a_{21} - b_{02}b_{12} + 3b_{02}a_{03} + 4a_{20}b_{03} + 5b_{02}b_{30} - 12a_{20}a_{30} - 3a_{30}A + 5b_{03}A - 4b_{12}B - 8b_{30}B) e_{10} \\
& - (a_{20}b_{12} - a_{20}a_{21} + 3a_{20}b_{30} + 4b_{02}a_{30} + 5a_{20}a_{03} - 12b_{02}b_{03} - 3b_{03}B + 5a_{30}B - 4a_{21}A - 8a_{03}A) e_{01} \\
& + B [5B - e_{01}] [e_{10}(e_{01} - 3b_{02}) + (A - a_{20})e_{01}] - A [5A - e_{10}] [e_{01}(e_{10} - 3a_{20}) + (B - b_{02})e_{10}]
\end{aligned}$$

Concluimos que:

Si $l_3=0$, $l_5<0$ el origen es un foco estable y si $l_3=0$, $l_5>0$ es foco inestable

Si también el l_5 fuese cero habría que hallar el l_7 (lo calcularemos hasta el final en situaciones más particulares), ... Sólo se tendría un centro en el caso de que se anulasen los infinitos l_k . Como ocurría con el l_3 , una buena prueba de que no se han cometido errores en las cuentas es la anulación del l_5 para los sistemas exactos (aquellos con los $e_{kj}=0$) o simétricos. Es fácil ver que así sucede. Otra propiedad del l_5 es que debería ser invariante al intercambiar los papeles de x e y ($a_{kj} \leftrightarrow b_{jk}$, $e_{kj} \leftrightarrow e_{jk}$, $A \leftrightarrow B$). Está escrito de forma que esto quede claro.

Antes de seguir, veamos la forma particular que adoptan l_3 e l_5 en el caso particular de que el sistema proceda de una ecuación, es decir, si todos los $a_{kj}=0$:

$$l_{3e} = 3b_{03} + b_{21} + b_{11}B$$

$$l_{5e} = 3(b_{41} + b_{23} + 5b_{05}) + 3(b_{30}b_{21} + b_{21}b_{12} + 2b_{12}b_{03}) \\ + 3b_{11}b_{40} + 2b_{02}b_{31} + b_{11}b_{22} + 6b_{02}b_{13} - 5b_{11}b_{04} + b_{11}b_{02}b_{12} - b_{11}b_{02}b_{30} - 2b_{11}^2b_{03} \\ + (5b_{31} + 3b_{13} + 6b_{02}b_{03} + 8b_{11}b_{30} + 4b_{11}b_{12} + 2b_{11}b_{02}^2) B - 5(b_{11}b_{02} + 3b_{03}) B^2$$

Supongamos ahora que $l_3=l_5=0$.

Para comprobar que $u_6(2\pi)=0$ reescribimos u_6' en función de los S_k anteriores:

$$u_6' = [2S_5 + 6S_4u_2 + 4S_3^2 + 12S_3u_2^2 + 5u_2^4]R_2 + [3S_4 + 12S_3u_2 + 10u_2^3]R_3 \\ + [4u_3 + 10u_2^2]R_4 + 5u_2R_5 + R_6$$

y utilizamos que:

$$\int_0^\theta S_5R_2 = S_5u_2 - \int_0^\theta (u_2^3R_3 + 2u_2^2R_4 + u_2R_5) \\ \int_0^\theta 2S_4u_2R_2 = S_4u_2^2 - \int_0^\theta (u_2^3R_3 + u_2^2R_4), \quad \int_0^\theta 3S_3u_2^2R_2 = S_3u_2^3 - \int_0^\theta u_2^3R_3 \\ \int_0^\theta S_3^2R_2 = S_3^2u_2 - \int_0^\theta 2S_3u_2R_3, \quad \int_0^\theta [u_2R_3 + R_4]S_3 = S_4S_3 - \int_0^\theta S_4R_3$$

De ello obtenemos:

$$u_6 = 2S_5u_2 + 4S_4S_3 + 3S_4u_2^2 + 4S_3^2u_2 + 4S_3u_2^3 + u_2^5 + \int_0^\theta (u_2^3R_3 + 3u_2^2R_4 + 3u_2R_5 + R_6 - S_4R_3)$$

Que $u_6(2\pi)=0$ se deduce entonces sin dificultad de la última integral, que denotaremos S_6 . Basta utilizar la paridad de los R_k , que u_2 y S_4 son polinomios impares más una constante y el hecho de estar suponiendo que los promedios de R_3 y $[u_2^2R_3 + 2u_2R_4 + R_5]$ son cero.

Pasemos a buscar la integral más sencilla posible que nos proporcione el $u_7(2\pi)$. Si para el cálculo del I_3 no necesitamos calcular ninguna primitiva (bastó sustituir promedios de potencias pares) y para el I_5 necesitamos integrar simplemente el R_2 , vamos a ver que a pesar de la larga expresión inicial de u_7' sólo necesitamos conocer u_2 y S_3 .

Primero reescribimos como siempre u_7' :

$$\begin{aligned} u_7' = & 2[S_6+3S_5u_2+5S_4S_3+6S_4u_2^2+\frac{15}{2}S_3^2u_2+10S_3u_2^3+3u_2^5]R_2 + \\ & +3[S_5+4S_4u_2+\frac{5}{2}S_3^2+10S_3u_2^2+5u_2^4]R_3 + \\ & +4[S_4+5S_3u_2+5u_2^3]R_4 + 5[S_3+3u_2^2]R_5 + 6u_2R_6 + R_7 \end{aligned}$$

Hacemos ahora desaparecer los primeros sumandos integrando por partes:

$$\int_0^\theta S_6R_2 = S_6u_2 - \int_0^\theta ([u_2^4 - S_4u_2]R_3 + 3u_2^3R_4 + 3u_2^2R_5 + u_2R_6)$$

$$\int_0^\theta 2S_5u_2R_2 = S_5u_2^2 - \int_0^\theta (u_2^4R_3 + 2u_2^3R_4 + u_2^2R_5)$$

$$\int_0^\theta S_4S_3R_2 = S_4S_3u_2 - \int_0^\theta ([S_4u_2 + S_3u_2^2]R_3 + S_3u_2R_4)$$

$$\int_0^\theta 3S_4u_2^2R_2 = S_4u_2^3 - \int_0^\theta (u_2^4R_3 + u_2^3R_4)$$

$$\int_0^\theta 4S_3u_2^3R_2 = S_3u_2^4 - \int_0^\theta u_2^4R_3$$

$$\int_0^\theta 2S_3^2u_2R_2 = S_3^2u_2^2 - \int_0^\theta 2S_3u_2^2R_3$$

$$\int_0^\theta 2(u_2S_3 + R_4)S_4 = S_4^2$$

$$\int_0^\theta S_5R_3 = S_5S_3 - \int_0^\theta (S_3u_2^2R_3 + 2S_3u_2R_4 + S_3R_5)$$

Así llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} u_7(2\pi) = & 2S_6u_2+3S_5S_3+3S_5u_2^2+2S_4^2+10S_4S_3u_2+4S_4u_2^3+\frac{5}{2}S_3^3+\frac{15}{2}S_3^2u_2^2+5S_3u_2^4+u_2^6 \Big]_0^{2\pi} + \\ & + \int_0^{2\pi} ([u_2^4R_3 + 4u_2^3R_4 + 6u_2^2R_5 + 4u_2R_6 + R_7] + 2S_3[u_2^2R_3 + 2u_2R_4 + R_5]) \end{aligned}$$

Como hicimos con el I_5 veamos que los valores en cero de las primitivas de R_2 y R_3 no son relevantes. Ya escribimos $u_2 = [U_2 - K_2]/3$ y pongamos $S_3 = U_3 - K_3$, con las K_j constantes, la U_2 polinomio impar y la U_3 par. Mirando las paridades y utilizando

$$\int_0^{2\pi} R_3 = \int_0^{2\pi} U_3R_3 = \int_0^{2\pi} [U_2^2R_3 + 6U_2R_4 + 9R_5] = 0$$

concluimos que:

$$u_7(2\pi) = \frac{1}{81} \int_0^{2\pi} ([U_2^4R_3 + 12U_2^3R_4 + 54U_2^2R_5 + 108U_2R_6 + 81R_7] + 18U_3[U_2^2R_3 + 6U_2R_4 + 9R_5])$$

Para el cálculo de esta integral de este polinomio de grado 18 procederíamos como hicimos con el I_5 : tras sustituir C^2 por $1-S^2$, haríamos $C=0$ y sustituiríamos $S^2, S^4, S^6, S^8, S^{10}, S^{12}, S^{14}, S^{16}, S^{18}$ por sus promedios respectivos: $1/2, 3/8, 5/16, 35/128, 63/256, 231/1024, 429/2048, 6435/32768, 12155/65536$. La expresión final para el sistema general [S] sería monstruosamente larga. Nos limitaremos a calcularla en dos casos particulares: si en el sistema la parte no lineal sólo contiene términos cúbicos o sólo contiene términos cuadráticos. Estos son los sistemas que tratamos a continuación.

$$\text{Sea } [S_3] \begin{cases} x' = y + A_3(x,y) = y + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = -x + B_3(x,y) = -x + ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$$

y llamemos $e_{20}=3a+f \equiv m$, $e_{11}=2b+2g \equiv n$, $e_{02}=c+3h \equiv p$. Los valores focales ya calculados son:

$$I_3 = m+p$$

$$I_5 = 3 [(e+g)m - (d+b)p - (a-h)n]$$

y la ecuación [e] se reduce a:

$$\frac{dr}{d\theta} = R_3(\theta) r^3 + R_5(\theta) r^5 + R_7(\theta) r^7 + \dots = -M_3 r^3 - M_3 m_3 r^5 - M_3 m_3^2 r^7 - \dots$$

Como $u_2=0$, tenemos que:

$$u_7(2\pi) = \int_0^{2\pi} (R_7 + 2U_3 R_5) = - \int_0^{2\pi} (m_3 + 2U_3) M_3 m_3$$

Calculando una primitiva adecuada de $R_3=-M_3$ y utilizando que $I_3=0$ se llega a la expresión:

$$U_3 = \frac{1}{4} [(b+e)C^4 - (d+g)S^4 + 4hS^3C - 4aC^3S]$$

Operando como se dijo se halla $u_7(2\pi)$, que, salvo constante (positiva) multiplicativa, se puede escribir en términos de a, b, d, e, g, h, m, n y p en la forma:

$$I_{71} = 2(35ae+35hd-15ad-15he+9ag+9hb-5ab-5hg)n$$

$$+ 2(-7d^2+5de-42e^2+2bd+9gd-21be-22ge+b^2-bg-4g^2-84a^2+80ah-44h^2)m$$

$$+ 2(-7e^2+5de-42d^2+2ge+9be-21gd-22bd+g^2-bg-4b^2-84h^2+80ah-44a^2)p$$

$$+ 2(35a-17h)m^2 + 2(35h-17a)p^2 + 4(a+h)pm - (m+p)(7m^2-10mp+7p^2)$$

Que simplificamos sumando múltiplos adecuados de I_3 e I_5 (y cambiamos su signo):

$$I_7 \equiv -\frac{1}{8} \left(I_{71} + \left[\frac{70}{3}(e-d) + 6(b-g) \right] I_5 + \right.$$

$$+ [7m^2-10mp+7p^2 - 2(35a-17h)m - 2(35h-17a)p + 14(e^2+d^2) +$$

$$+ 60de - 4(11b-15g)d - 4(11g-15b)e - 10(b-g)^2 + 168(a^2+h^2) - 160ah] I_3 \left. \right)$$

Obtenemos por fin:

$$I_7 = 4(a+h)mp + (5bd-gd+b^2-10h^2)m + (5ge-be+g^2-10a^2)p - (5ad+5he+ab+hg)n$$

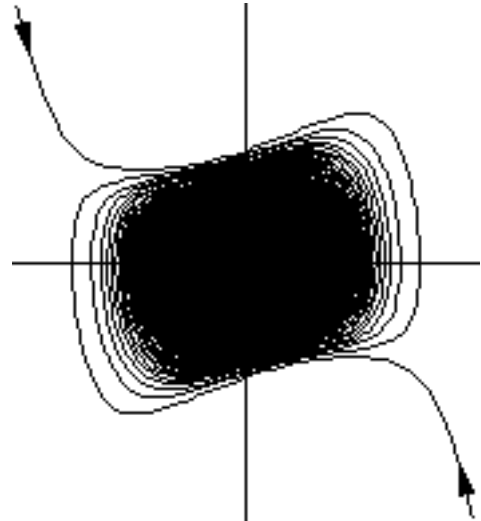
(observemos que el I_7 también se anula cuando el sistema es exacto o simétrico y que resta invariante al cambiar $a \leftrightarrow h, b \leftrightarrow g, d \leftrightarrow e, m \leftrightarrow p$).

Veamos un ejemplo de este ejemplo: la ecuación

$$x'' = -x + ex^3 - 3hx^2y - 3exy^2 + hy^3$$

Entonces $I_3=I_5=0$ e $I_7=-6h(e^2+h^2)$.

Así, para cualquier e , si $h < 0$ hay un foco inestable en el origen y si $h > 0$ uno estable (y si $h=0$ hay un centro: la ecuación es simétrica). El hecho de que sean los términos en r_0^7 los que marquen la estabilidad sugiere que las órbitas saldrán o entrarán con muy poca decisión del origen. Por ejemplo, integrando gráficamente para $h=1, e=-1$ (el único punto crítico será el foco estable del origen) se obtiene el oscuro dibujo de la derecha.



Sea ahora $[S_2] \begin{cases} x' = y + A_2(x,y) = y + ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = -x + B_2(x,y) = -x + ex^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$ y sean $m \equiv 2a+f, q \equiv b+2g$.

La ecuación [e] y los coeficientes I_3 e I_5 son entonces ($A=a+c, B=e+g$ ya definidos) :

$$\frac{dr}{dt} = -M_2 r^2 - M_2 m_2 r^3 - M_2 m_2^2 r^4 - M_2 m_2^3 r^5 - M_2 m_2^4 r^6 - M_2 m_2^5 r^7 - \dots$$

$$I_3 = mB - qA$$

$$I_5 = B [5B - q] [m(q - 3g) + (A - a)q] - A [5A - m] [q(m - 3a) + (B - g)m]$$

Por tanto:

$$u_7(2\pi) = -\frac{1}{81} \int_0^{2\pi} ([U_2 + 3m_2]^4 + 18U_3 [U_2 + 3m_2]^2) M_2 m_2 = -\frac{1}{81} \int_0^{2\pi} (N^2 + 18U_3) N^2 M_2 m_2$$

Una buena expresión de U_3 es:

$$U_3 = \frac{1}{12} [(f^2 + af - 2a^2 + [b+2g]e + 2e^2) C^6 + (b^2 + bg - 2g^2 + [2a+f]c + 2c^2) S^6 + (3f^2 - 3af - 3[b-2g]e) C^4 S^2 + (3b^2 - 3bg - 3[f-2a]c) C^2 S^4 + 4(ab - ag + fg - bf - [b+2g]c - [2a+f]e - ce) C^3 S^3 - 12ae C^5 S - 12gc CS^5]$$

Sustituyendo los promedios adecuados en la integral y sustituyendo c, e, b y f por $A-a, B-g, q-2g, m-2a$ se llega, salvo constante positiva, a la larga expresión siguiente para $u_7(2\pi)$:

$$\begin{aligned}
I_{71} = & - [m(4a-m)(18304a^3-17808a^2m+5828am^2-645m^3) \\
& +9024a^3q^2+64ma^2q^2-62464ma^2qg+146432ma^2g^2 \\
& -2432am^2q^2+39008am^2qg-89536am^2g^2+474m^3q^2-6128m^3qg+14176m^3g^2 \\
& +696aq^4-51mq^4-5088aq^3g-1232mq^3g+9024aq^2g^2+16832mq^2g^2-62464mqg^3+73216mg^4] B \\
& + [q(4g-q)(18304g^3-17808qg^2+5828q^2g-645q^3) \\
& +9024m^2g^3+64m^2qg^2-62464maqg^2+146432a^2qg^2 \\
& -2432m^2q^2g+39008maq^2g-89536a^2q^2g+474m^2q^3-6128maq^3+14176a^2q^3 \\
& +696m^4g-51m^4q-5088m^3ag-1232m^3aq+9024m^2a^2g+16832m^2a^2q-62464ma^3q+73216a^4q] A \\
& - 8 [6720mg^3+15584aqg^2-7088mqg^2-9004aq^2g+2662mq^2g-349mq^3+1396aq^3 \\
& +15584a^3q+6720ma^2g-11016ma^2q+2432m^2aq-3156m^2ag+366m^3g-163m^3q] A^2 \\
& + 8 [6720a^3q+15584ma^2g-7088ma^2q-9004m^2ag+2662m^2aq-349m^3q+1396m^3g \\
& +15584mg^3+6720aqg^2-11016mqg^2+2432mq^2g-3156aq^2g+366aq^3-163mq^3] B^2 \\
& - 16 [(gm-qa)(261mq-830gm-830qa+2288ag) \\
& +58q^4-593q^3g+2022q^2g^2-2288qg^3-58m^4+593m^3a-2022m^2a^2+2288ma^3] BA \\
& + 2 [4337q^3-30020q^2g+53488qg^2+3265m^2q-1260m^2g-33960maq+13440mag+74640a^2q] A^3 \\
& - 2 [4337m^3-30020m^2a+53488ma^2+3265mq^2-1260aq^2-33960mqg+13440aqg+74640mg^2] B^3 \\
& + 2 [541q^3-4116q^2g+7440qg^2+301m^2q+1924m^2g-4552maq-5440mag+13168a^2q] AB^2 \\
& - 2 [541m^3-4116m^2a+7440ma^2+301mq^2+1924aq^2-4552mqg-5440aqg+13168mg^2] A^2B \\
& - 88 [210mg-229mq+916aq] A^4 + 88 [210aq-229mq+916mg] B^4 - 6800 [mg-aq] A^2B^2 \\
& + 16 [269m^2-1055ma+107qg-53q^2] AB^3 - 16 [269q^2-1055qg+107ma-53m^2] A^3B \\
& + 1969qAB^4 + 1610qA^3B^2 + 20449qA^5 - 1969mBA^4 - 1610mB^3A^2 - 20449mB^5
\end{aligned}$$

Pero sumando múltiplos de I_3 e I_5 para anular los términos en A y B de ordenes más altos:

$$\begin{aligned}
I_7 \equiv & - \frac{25}{1728} [I_{71} + (20449[A^4+B^4] + 20090A^2B^2 + 88[19m-286a]A^3 + 88[19q-286g]B^3 \\
& - 80[100q-211g]A^2B - 80[100m-211a]B^2A - 16/5 [2267mq-7460gm-7460aq+21800ag]AB \\
& + 2[2005m^2-16740am+34320a^2+4337q^2-30020qg+53488g^2]A^2 \\
& + 2[2005q^2-16740qg+34320g^2+4337m^2-30020am+53488a^2]B^2 \\
& - 8/5 [1015m^3-9110am^2+25860a^2m-22880a^3 \\
& +862mq^2-841aq^2-8437mgq+12400agq+17300mg^2-22880ag^2]A \\
& - 8/5 [1015q^3-9110qg^2+25860g^2q-22880g^3 \\
& +862qm^2-841gm^2-8437qam+12400gam+17300gm^2-22880ga^2]B \\
& + (m-4a)(645m^3-5828am^2+17808a^2m-18304a^3)+(q-4g)(645q^3-5828qg^2+17808g^2q-18304g^3) \\
& + 14176a^2q^2+14176g^2m^2-89536a^2qg-89536g^2am \\
& -8216amq^2-8216gqm^2+1170m^2q+54272amgq+146432a^2g^2) I_3 + \\
& + (3696[A^2+B^2] + 168/5 [37m-160a]A + 168/5 [37q-160g]B \\
& + 24/25 [869(m^2+q^2)-6380(am+bq)+11200(a^2+g^2)]) I_5]
\end{aligned}$$

se acaba obteniendo para el I_7 una expresión factorizable sorprendentemente sencilla:

$$I_7 = [qB[m(q-3g)+(A-a)q] - mA[q(m-3a)+(B-g)m]] [(5a-2m)(5a-m)+(5g-2q)(5g-q)] \equiv G_7 F_7$$

(que se anula si hay simetría o exactitud y es invariante al permutar coeficientes como debía)

Veamos que conclusiones podemos sacar de los tres coeficientes obtenidos. En primer lugar consideremos el caso de la ecuación:

$$x'' = -x + ex^2 + fxy + gy^2$$

Sustituyendo se obtiene:

$$I_3 = fB, \quad I_5 = (2g-5B)gfB, \quad I_7 = -2g^2fB(2f^2+3g^2)$$

Por tanto, si $I_3 = fB = f(g+e) < 0$ en el origen hay un foco estable y habrá uno estable si ese producto es mayor que cero. Pero ¿qué ocurre cuando se anula? También se hacen cero el I_5 y el I_7 . Esto no prueba, desde luego, que haya un centro en el origen. Deberían ser cero todos los I_k . Pero vamos a comprobar que de hecho lo hay en todos los casos:

Si $f=0$, las órbitas son simétricas respecto al eje $y=0$.

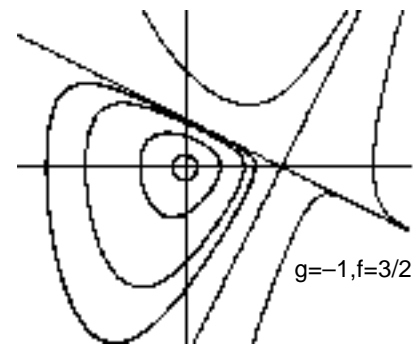
Si $g=e=0$, lo son respecto a $x=0$.

Más difícil es probar la conservación del centro si $e=-g \neq 0$: [ef] $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - gx^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$

Entonces hay también un punto silla en $(-1/g, 0)$ de autovalores:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2g} [f \pm \sqrt{f^2 + 4g^2}] \quad (\text{raíces de } g\lambda^2 + f\lambda - g = 0)$$

La integración numérica para $g=-1$, $f=3/2$ ($\lambda_{\pm} = 2, -1/2$) sugiere que además de conservarse el centro parecen no deformarse las separatrices del punto silla. Esto es fácil de comprobar en general: el campo sobre las rectas $y = \lambda_{\pm}(x+1/g)$ está contenido en ellas. Tal vez un cambio lineal de variables que lleve estas rectas a los ejes convierta [ef] en un sistema más sencillo.



En efecto, haciendo $\begin{cases} p = x + \lambda_+ y + 1/g \\ n = x + \lambda_- y + 1/g \end{cases}$ (y utilizando que $\lambda_+ \lambda_- = -1$, $\lambda_+ + \lambda_- = -f/g$)

nuestro sistema se transforma en el sistema integrable: $\begin{cases} p' = \lambda_+ p(1-gn) \\ n' = \lambda_- n(1-gp) \end{cases}$.

Así, una integral primera del sistema [ef] es:

$$|x + \lambda_+ y + 1/g|^{\lambda_+} |x + \lambda_- y + 1/g|^{-\lambda_-} \exp[g(\lambda_- - \lambda_+)x] = K.$$

Volvamos al sistema general $[S_2]$. Como en el caso particular de la ecuación, es conocido (se deduce del teorema de la base de Hilbert) que para que tenga un centro en el origen basta que se anulen un número finito de I_k (tres, como probó Bautin en 1952). Aunque no podamos completar la discusión con los cálculos hechos hasta ahora, vamos a obtener una expresión compacta de las únicas relaciones entre coeficientes para las que se tiene el centro.

Supongamos que $I_3=0$ y, por ahora, que $q \neq 0$. Debe ser entonces $A = \frac{mB}{q}$.

Llevando este valor de A a las expresiones de I_5 y G_7 y factorizando el resultado se tiene:

$$I_{5A} = \frac{1}{q^2} B [5B-q] H \quad , \quad G_{7A} = \frac{1}{q} B H$$

donde podemos escoger:

$$H = q^2(qm-3gm+aq-aq) - m^2(mq-3aq+Bm-gm)$$

Si $I_{5A} \neq 0$, el origen sería un foco. Estudiemos lo que sucedería si cada factor suyo se anulase:

i) Sea $H=0$, y supongamos que también: $m \neq 0$, $m \neq q$, $m \neq -q$.

Utilizando que $qA=mB$ es fácil despejar los coeficientes e y c :

$$e = e_H \equiv \frac{q}{m} \frac{q[qm-2gm-aq]+[3a-m]m^2}{m^2-q^2} \rightarrow c = c_H \equiv \frac{m}{q} \frac{m[mq-2aq-gm]+[3g-q]q^2}{q^2-m^2}$$

Si $e=e_H$, $c=c_H$, tanto $I_5 = I_7 = 0$, con lo que 0 podría ser un centro. Demostremos que lo es viendo que entonces $[S_2]$ es simétrico respecto de una recta de la forma $y = kx$. Hagamos un cambio en $[S_2]$ que lleve esta recta y su perpendicular $y = -x/k$ a los ejes. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x = kp+n \\ y = kn-p \end{cases} \text{ convierte } [S_2] \text{ en } [S_2^*] \quad \begin{cases} p' = n + \frac{1}{k^2+1}[Up^2+Vpn+Cn^2] \\ n' = -p + \frac{1}{k^2+1}[Ep^2+Fpn+Gn^2] \end{cases} \text{ donde:}$$

$$U = ak^3 - (b+e)k^2 + (c+f)k - g, \quad G = gk^3 + (c+f)k^2 + (b+e)k + a,$$

$$C = ck^3 - (g-b)k^2 + (a-f)k - e, \quad E = ek^3 + (a-f)k^2 + (b-g)k + c,$$

$$F = fk^3 - (2g-b-2e)k^2 + (2a-f-2c)k - b, \quad V = bk^3 + (2a-f-2c)k^2 + (2g-b-2e)k + f$$

Si $U=C=F=0$ ó bien si $V=E=G=0$, $[S_2^*]$ es simétrico respecto a algún eje. Como se tiene que:

$$F+2U = (k^2+1)(mk-q), \quad U+C = (k^2+1)(Ak-B), \quad V+2G = (k^2+1)(qk+m), \quad G+E = (k^2+1)(Bk+A)$$

podemos concluir que el sistema inicial es **simétrico** respecto a alguna recta $y=mx$ si existe algún m para el que se satisfaga alguno de los dos tríos de condiciones siguientes:

$$\text{o bien} \quad mk-q = Ak-B = ck^3 - (g-b)k^2 + (a-f)k - e = 0 \quad [c1]$$

$$\text{o bien} \quad qk+m = Bk+A = ek^3 + (a-f)k^2 + (b-g)k + c = 0 \quad [c2]$$

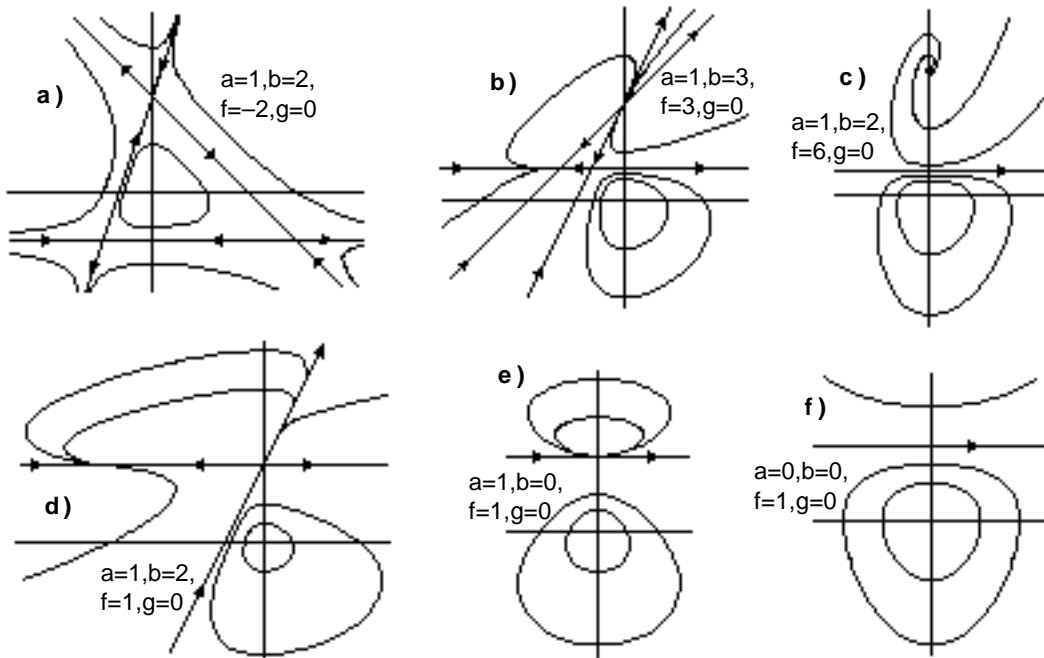
Si $e=e_H$, $c=c_H$, $k=q/m$ se cumple $[c1]$ y si $e=e_H$, $c=c_H$, $k=-m/q$ se cumple $[c2]$.

[observemos que la anulación de los binomios lineales en k de $[c1]$ o $[c2]$ implica que una condición necesaria para la simetría es que sea $qA-mB = I_3 = 0$]

ii) Anulemos otro factor de I_{5c} : Sea $\mathbf{B=0}$ ($e=-g$) [y, por tanto, $\mathbf{A=0}$ ($c=-a$)].

El sistema es [Sii] $\begin{cases} x' = y + ax^2 + bxy - ay^2 \\ y' = -x - gx^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$. Se tiene que $I_3=I_5=I_7=0$.

Puede tratarse de un centro (si $a=b=0$ ya vimos que lo es). La integración numérica para varios valores de a, b, f y g muestra la presencia de rectas invariantes, pero también aparecen atractores y, en general, no hay simetría. Por ejemplo, para los valores indicados se tiene:



Probemos que salvo en el caso trivial $a=b=f=g=0$ existen 1, 2 ó 3 rectas invariantes de [Sii]. La recta $F \equiv Mx+Ny-1=0$ es una órbita del sistema si y sólo si M y N satisfacen las relaciones:

$$aM-gN-MN=0, \quad M^2+bM+fN-N^2=0$$

pues entonces se cumple que $\dot{F} = F \cdot G$, siendo $G \equiv Nx-My$.

En el caso de que sea $g=0$ hay recta invariante horizontal $fy=1$ (si $f \neq 0$) y además 2, 1 ó 0 de la forma $Mx+ay=1$, donde M es solución de $M^2+bM+fa-a^2=0$ (salvo si $a=b=0$).

Si $a=0$ se tiene $-bx=1$ y además $-gx+Ny=1$ con $N^2-fN+bg-g^2=0$.

Si $a, g \neq 0$, no hay rectas invariantes paralelas a los ejes ($M, N \neq 0$). Llamando $k=M/N$ es fácil ver que hay 3, 2 ó 1 valores válidos para M y N dados por:

$$M=ak-g, \quad N=a-g/k, \quad \text{siendo } k \text{ las raíces de } ak^3+(b-g)k^2+(f-a)k+g=0.$$

Conociendo las rectas invariantes sería posible dar, en todos los casos, una integral primera de [Sii] regular en un entorno del origen, con lo que siempre hay un centro en ese punto:

Si existen tres F_k distintas, existen α_k tales que $\sum \alpha_k G_k=0$. Una integral es entonces:

$$H = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} F_3^{\alpha_3}, \quad \text{pues } \dot{H} = H [\sum \alpha_k G_k] = 0$$

[se puede ver que esta H es válida y acaba siendo real aunque dos de las F sean complejas].

Por ejemplo, para los **a)**, **b)** y **c)** de antes se hallan así, respectivamente, las H siguientes:

$$H = [y-3x-1][y+x-1]^3 [2y+1]^2, \quad H = [y-2x-1]^3 [y-x-1]^{-6} [3y-1],$$

$$H = \frac{[y^2-2xy+5x^2-2y+2x-1]^3}{6y-1} \exp\left(\frac{3}{2} \arctan \frac{4x[y-x-1]}{[y-3x-1][y+x-1]}\right)$$

En el caso de que existan rectas dobles [como en **d)**] o triples [**e)**] o que una o dos rectas se vayan al infinito [como en la ecuación o el ejemplo **f)**] las H contienen términos logarítmicos. Por ejemplo, para los **d)**, **e)** y **f)** se tienen las siguientes integrales primeras:

$$H = \log \frac{[y-1]^5}{y-2x-1} - 2 \frac{2y+x}{y-1}, \quad H = 2 \log[y-1] + \frac{x^2-2y+2}{[y-1]^2}, \quad H = 2 \log[y-1] + 2y - x^2$$

Las dos últimas se calculan fácilmente a partir del sistema. La de **d)** se puede obtener hallando la H(f) del sistema con a=1, b=2, g=0 (en general con tres rectas invariantes), derivando esta H con respecto a f y sustituyendo el resultado en f=1. Para sistemas generales de estos tipos se trabajaría como aquí, tras tal vez un giro adecuado para hacer la g=0.

El último factor de I_{5c} sí nos permite asegurar que no basta la anulación de los primeros dos coeficientes para tener un centro:

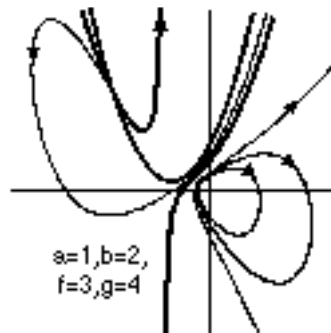
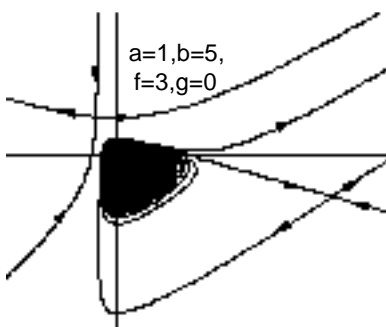
iii) Sea $5B=q$ ($e = \frac{1}{5}[b-3g]$) [$\Rightarrow 5A=m$ ($c = \frac{1}{5}[f-3a]$)].

Siendo $I_3=I_5=0$, el I_7 puede no ser cero:

$$I_7 = \frac{1}{5} F_7 H = \frac{1}{25} F_7 (q^2[6qm-15gm-5aq]-m^2[6ma-15aq-5gm])$$

Esto ocurre, por ejemplo, si a=1, b=5, c=0, e=1, f=3, g=0 [B=1, q=5, A=1, m=5, $I_7=2500$ y hay un foco inestable (dibujo de la izquierda)]. Pero la anulación de F_7 sí implica que todos los demás I_k se anulan, pues se puede probar que entonces el sistema posee curvas invariantes $P_2=0$ y $P_3=0$ (de segundo y tercer orden, respectivamente) y que una integral primera es de la forma $H = P_2^3 P_3^{-2}$. Así, para a=1, b=2, c=0, e=-2, f=3, g=4 [B=2, q=10, A=1, m=5, $F_7=0$] las curvas invariantes (de trazo grueso en el dibujo de la derecha) son $P_2 = 5x^2 + 4x + 1 - 2y = 0$ y $P_3 = 10x^3 + 12x^2 - 6xy + 6x - 3y + 1 = 0$. Para ellas se tiene que:

$$\dot{P}_2 = 2(x+2y)P_2, \quad \dot{P}_3 = 3(x+2y)P_3 \rightarrow \dot{H} = 0$$



Nos quedan por analizar los casos en que se anulan los denominadores que han ido saliendo en la discusión anterior.

Sea $q=0$, entonces $l_3 = mB$, así que si $l_3=0$ o bien es $m=0$ o bien $B=0$.

Si $q=m=0$, el sistema es **exacto** y desde luego hay un centro en el origen.

Este es el caso **iv)** y último en que hay un centro.

Si fuese $q=B=0$, sería $l_5 = gmA(5A-m)$.

Así, si $l_3=l_5=0$ aparecen situaciones ya analizadas:

si $g=0=e=b$, es $H=0$ [caso i)]: las órbitas son simétricas respecto al eje y ,

si $m=0$ hay exactitud [iv)], si $A=0$ estamos en el caso ii) y si $5A-m=0$ en el iii).

Si $m=0$, el resultado es totalmente análogo.

Si $q=m$, se tiene que $l_3 = m(B-A)$. Si $l_3=0$ el sistema es exacto ó $B=A$.

Sustituyendo si se da lo último: $l_5 = mA(5A-m)(a-g)$.

$l_3=l_5=0$ da, a parte de los evidentes casos ii), iii) y iv), la relación: $g=a$, $e=c$, $f=b$.

Para ella es también $l_7=0$, como debe, pues hay simetría respecto de la recta $y=-x$.

Se anula H y estamos en el caso i).

Si $q=-m$, $l_3=l_5=0$ implica ii), iii), iv) y $g=-a$, $e=-c$, $f=-b$: simetría respecto de $y=x$.

4.5 Centros y focos no homogéneos y no elementales.

Consideremos ahora un sistema para el que la aproximación homogénea posea un centro o un foco. Es decir, sea:

$$[S] \quad \begin{cases} x' = A^n(x,y) + A^{n+1}(x,y) + \dots = a_{n0}x^n + \dots + a_{0n}y^n + a_{n+1,0}x^{n+1} + \dots \\ y' = B^n(x,y) + B^{n+1}(x,y) + \dots = b_{n0}x^n + \dots + b_{0n}y^n + b_{n+1,0}x^{n+1} + \dots \end{cases}$$

con n impar y con:

$$P_{n+1}(z) = B^n(1,z) - zA^n(1,z) \neq 0 \quad \forall z$$

Suponemos para fijar ideas que $a_{0n} < 0$, sin perder generalidad (si no cambiamos de signo los segundos términos e invertimos el sentido de las órbitas). Para saber si $\mathbf{0}$ se trata de un centro, un foco estable o un foco inestable de [S] intentamos seguir los pasos de la sección anterior. Pero pronto veremos que aparecen muchas más dificultades. Escribimos [S] en polares:

$$[P] \quad \begin{cases} r' = M_n r^n + M_{n+1} r^{n+1} + \dots, & M_k = CA^k(C,S) + SB^k(C,S) \\ \theta' = m_n r^{n-1} + m_{n+1} r^n + \dots, & m_k = CB^k(C,S) - SA^k(C,S) \end{cases}$$

y desarrollamos la ecuación de las órbitas de este sistema (lo que es posible cerca de $r=0$ por estar suponiendo que la función continua $m_n(C,S) > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$):

$$[e] \quad \frac{dr}{d\theta} \equiv R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + \dots = \frac{M_n r + M_{n+1} r^2 + M_{n+2} r^3 + \dots}{m_n + m_{n+1} r + m_{n+2} r^2 + \dots} =$$

$$= \frac{M_n}{m_n} r + \frac{m_n M_{n+1} - M_n m_{n+1}}{m_n^2} r^2 + \left[\frac{m_n M_{n+2} - M_n m_{n+2}}{m_n^2} + \frac{m_{n+1} [M_n m_{n+1} - m_n M_{n+1}]}{m_n^3} \right] r^3 + \dots$$

Desarrollamos la solución analítica $r(\theta)$ con $r(0)=r_0$ de [e]:

$$r(\theta) \equiv u_1(\theta) r_0 + u_2(\theta) r_0^2 + u_3(\theta) r_0^3 + \dots$$

Hacemos $\theta=0$ para deducir los datos iniciales para las $u_k(\theta)$:

$$r_0 \equiv u_1(0) r_0 + u_2(0) r_0^2 + u_3(0) r_0^3 + \dots \rightarrow u_1(0) = 1, \quad u_k(0) = 0 \text{ si } k > 1$$

Sustituyendo $r(\theta)$ en [e] se obtiene el siguiente sistema recursivo para el cálculo de los $u_k(\theta)$:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 R_1, & u_1(0) &= 1 \\ u_2' &= u_2 R_1 + u_1^2 R_2, & u_2(0) &= 0 \\ u_3' &= u_3 R_1 + 2u_1 u_2 R_2 + u_1^3 R_3, & u_3(0) &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

El u_1 resulta ser mucho más complicado que la sencilla constante del caso no degenerado:

$$u_1(\theta) = e^{S_1(\theta)}, \text{ con } S_1(\theta) \equiv \int_0^\theta R_1$$

Resolviendo las siguientes ecuaciones lineales:

$$u_2(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta u_1 R_2$$

$$u_3(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta [u_1^2 R_3 + 2u_2 R_2]$$

.....

vamos obteniendo los u_k en términos de primitivas, que, por desgracia, no se pueden calcular elementalmente. Para ver si $\mathbf{0}$ es centro o foco debemos hallar, para r_0 pequeño, el signo de:

$$r(2\pi) - r(0) = [u_1(2\pi) - 1] r_0 + u_2(2\pi) r_0^2 + u_3(2\pi) r_0^3 + \dots$$

Este signo nos lo daría $S_1(2\pi)$, si fuese menor o mayor que cero. Como θ crece con t cerca de $\mathbf{0}$, y a la vista de los cálculos de 4.1, podemos obtener la siguiente primera conclusión:

Teorema 4.3

$$\text{Sea } I = \frac{n+1}{2} \int_0^{2\pi} R_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}(1,z)}{P_{n+1}(z)} dz, \text{ con } E_{n-1} = A^n x + B^n y.$$

Entonces: si $I < 0$ el origen de [S] es un foco estable y si $I > 0$ es un foco inestable.

[el sistema se comporta como la aproximación homogénea si la estabilidad es fuerte]

En lo que sigue suponemos que $I = 0$ (que en la aproximación homogénea hay un centro).

Nuestro objetivo es hallar el signo de $u_2(2\pi) = \int_0^{2\pi} u_1 R_2$, $u_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} [u_1^2 R_3 + 2u_2 R_2]$, ...

Como era de esperar $u_2(2\pi) = 0$. En efecto, R_1 es π -periódica de promedio 0, con lo que son π -periódicas también S_1 y u_1 . Además, por las paridades de M_k y m_k es $R_2(\theta + \pi) = -R_2(\theta)$. Por tanto:

$$\int_0^{2\pi} u_1 R_2 = \int_{-\pi}^0 + \int_0^\pi = -\int_0^\pi + \int_0^\pi = 0$$

Veamos cuánto podemos avanzar en el cálculo de $u_3(2\pi)$. Aunque es fácil generalizar muchos pasos, vamos a centrarnos desde ahora en el caso $n=3$. En primer lugar:

$$\int_0^{2\pi} 2u_2 R_2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2u_1 R_2 \left[\int_0^\theta u_1 R_2 \right] d\theta = \left[\int_0^\theta u_1 R_2 \right]^2 \Big|_0^{2\pi} = 0 \rightarrow u_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} u_1^2 R_3$$

Recordando 4.1:

$$S_1(\theta) = -\frac{1}{4} \ln(m_3) + \frac{1}{4} \int_0^\theta \frac{E_2}{m_3} \rightarrow u_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} R_3 m_3^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{E_2}{m_3}\right] d\theta$$

Por otra parte:

$$m_k M_j - M_k m_j = [B^k A^j - A^k B^j][C^2 + S^2]$$

Por tanto:

$$u_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{B^3 A^5 - A^3 B^5}{m_3^{5/2}} + \frac{m_4 [A^3 B^4 - B^3 A^4]}{m_3^{7/2}} \right] \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{E_2}{m_3} \right] d\theta$$

Pasando a cartesianas con el cambio $z = \tan \theta$ y teniendo en cuenta que los numeradores y denominadores son pares en C y S (de orden menor en dos unidades los primeros) acabamos obteniendo el siguiente teorema:

Teorema 4.4

$$\text{Sea } I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2}{P_4} = 0 \text{ y sea } J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q_8}{P_4^{5/2}} + \frac{Q_{12}}{P_4^{7/2}} \right] E dz, \text{ con}$$

$$E(z) = \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{P_4} \right], \quad Q_8(z) = B^3 A^5 - A^3 B^5 \Big|_{(1,z)}, \quad Q_{12}(z) = [B^4 - z A^4][A^3 B^4 - B^3 A^4] \Big|_{(1,z)}.$$

Entonces: si $J < 0$ el origen de $[S]$ para $n=3$ es un foco estable y si $J > 0$ es un foco inestable.

Esta expresión de J no deja claro que debe anularse en el caso de que $[S]$ sea exacto. Pero:

$$\frac{d}{dz} P_{k+1} = E_{k-1} - (k+1)A^k, \quad A^k P_{j+1} - A^j P_{k+1} = A^k B^j - A^j B^k \rightarrow$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{P_6}{P_4^{5/2}} E \right] = \frac{R_8}{P_4^{5/2}} E - \frac{6Q_8}{P_4^{5/2}} E, \quad \frac{d}{dz} \left[\frac{P_5^2}{P_4^{5/2}} E \right] = \frac{10Q_{12}}{P_4^{7/2}} E - \frac{2R_{12}}{P_4^{7/2}} E$$

siendo

$$R_8 = P_4 E_4 - P_6 E_2, \quad R_{12} = P_5 [P_5 E_2 - P_4 E_3]$$

De esto obtenemos una expresión alternativa para la J :

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{R_8}{6P_4^{5/2}} + \frac{R_{12}}{5P_4^{7/2}} \right] E dz$$

La primitiva que figura en la exponencial es calculable si podemos factorizar P_4 . Pero, aunque consigamos hacerlo, es imposible en general hallar analíticamente la mucho más complicada J . Lo que vamos a hacer es, restando integrales de valor cero, reducir su cálculo al de otras similares en las que los numeradores serán polinomios de grado dos que, en ocasiones, tendrán signo definido. En ese caso habremos conseguido precisar algebraicamente el signo de J y la estabilidad del foco.

Para abreviar, a partir de ahora llamaremos $P_4 = P$, supondremos $a_{03} = -1$ y denotaremos los coeficientes de los términos cúbicos A^3 y B^3 por:

$$A^3(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 - y^3, \quad B^3(x,y) = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3$$

Como se tiene que:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{z^n E}{p^{k+1/2}} \right] = \frac{E}{p^{k+3/2}} \left[(n-4k-2)z^{n+3} + ([n-3k]h+[3k+2-n]c)z^{n+2} + ([n-2k]g+[2k+2-n]b)z^{n+1} + ([n-k]f+[k+2-n]a)z^n + nez^{n-1} \right]$$

la integral del segundo miembro de $-\infty$ a $+\infty$ se anula si $n=0, \dots, 4k+2$. Cada $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{n+3} E}{p^{k+3/2}} dz$, con $n=0, \dots, 4k+1$, queda en función de otra similar en que el numerador es de un grado menor.

Así, si en el numerador hay inicialmente un polinomio Q_{4k+4} (como los de J), eliminando de forma sucesiva el coeficiente de mayor orden, se acaba teniendo un polinomio R_2 de segundo grado en el numerador:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{4k+4}}{p^{k+3/2}} Edz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2}{p^{k+3/2}} Edz$$

Si se tiene la suerte de que R_2 tiene signo definido, queda precisado algebraicamente el signo de la integral inicial. Aunque el R_2 corte el eje z , aun se puede salvar la situación. En efecto:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{z^{4k+2} E}{p^{k+1/2}} \right] = \frac{E}{p^{k+3/2}} \left[([k+2]h-kc)z^{4k+4} + \dots \right], \quad \frac{d}{dz} \left[\frac{z^{4k+1} E}{p^{k+1/2}} \right] = \frac{E}{p^{k+3/2}} \left[-z^{4k+4} + \dots \right]$$

y de aquí:

$$0 = \left[\left(z^{4k+2} + ([k+2]h-kc)z^{4k+1} \right) \frac{E}{p^{k+1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{4k+3} E}{p^{k+3/2}} dz$$

Reduciendo el orden de Q_7 como antes acabamos hallando un polinomio $N_2 = n_2 z^2 + n_1 z + n_0$, con los n_k dependientes exclusivamente de los coeficientes de A^3 y B^3 , y tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2 E}{p^{k+3/2}} dz = 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{4k+4}}{p^{k+3/2}} Edz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2 + mN_2}{p^{k+3/2}} Edz \quad \forall m$$

Por tanto, si para algún valor de la constante m es $M_2 = R_2 + mN_2 \neq 0 \quad \forall z$ (o que es lo mismo, si es negativo su discriminante o si las raíces de R_2 y N_2 no están intercaladas), el signo de la integral con el Q_{4k+4} será el de este polinomio M_2 . En el peor de los casos, eligiendo un m adecuado podremos suprimir el término lineal o el cuadrático de R_2 , con lo que la integral se reduce al cálculo (numérico) de sólo dos de las tres integrales siguientes J_0 , J_1 ó J_2 :

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^{k+3/2}} dz, \quad J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zE}{p^{k+3/2}} dz, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 E}{p^{k+3/2}} dz$$

A la J del teorema 4.4 se le pueden aplicar las reducciones anteriores con $k=2$ (pues $Q_8/P^{5/2}$ es también un $Q^*_{12}/P^{7/2}$). Si los términos de orden 4 son nulos, las reducciones son con $k=1$, lo que simplifica los cálculos. Pero incluso en este caso las expresiones generales del R_2 y del N_2 son tan largas que no merece la pena reproducirlas. Se puede probar que se llega a la misma expresión reducida de la J partiendo de los Q_8 y Q_{12} o partiendo de los R_8 y R_{12} .

Desarrollamos los cálculos hasta el final en el ejemplo siguiente (continuación del ejemplo 1 de 4.1). Otros ejemplos aparecerán en capítulos posteriores.

Ejemplo 14.
$$\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + 2x^2y + 4xy^2 - y^3 - qx^4 - sy^4 \end{cases}, P_4 = [z^2 + 2]^2 \equiv p(z)^2, E_2 = 8 + 8z - 4z^2.$$

Además del centro o foco del origen tiene, si $q+s \neq 0$, una silla en $(9/[q+s], 9/[q+s])$. Si $q=s=0$, ya vimos en 4.1 que era $l=0$, pero nos conviene volver a hallar l calculando una primitiva:

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2}{p^2} dz = 4 \left[\frac{z-1}{p} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Para analizar origen del no homogéneo habrá que hallar el signo de:

$$J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{12}}{p^7} E dz, \text{ con } Q_{12} = [q+sz]^4 [2-z^2-z^3] \text{ y } E \equiv \exp\left[\frac{2[z-1]}{p}\right]$$

Para reducir J utilizamos que:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{z^n E}{p^5} \right] = \frac{E}{p^7} [(n-10)z^{n+3} - 2z^{n+2} + 4(n-4)z^{n+1} + 4z^n + 4nz^{n-1}]$$

y que la integral entre $-\infty$ e ∞ del segundo miembro es 0 si $n=0 \dots 10$. Haciendo desaparecer los coeficientes de mayor orden del numerador de J (desde, tal vez, 12 hasta 3) se acaba con un polinomio de segundo grado en el numerador. La situación favorable de que este polinomio tenga signo definido se da, por ejemplo, si:

$q=0, s=9 \rightarrow Q_{12} = 81z^8 [2-z^2-z^3]$. Entonces:

$$\frac{Q_{12}}{p^7} E - \frac{d}{dz} \left[\frac{9E}{p^5} \left(\frac{9}{2} z^8 + 18z^6 - \frac{36}{5} z^5 + \frac{252}{5} z^4 - \frac{288}{35} z^3 + \frac{1836}{35} z^2 - \frac{8}{5} z + \frac{6248}{175} \right) \right] = \frac{576}{175} \frac{E}{p^7} R_2$$

con $R_2 = -161z^2 + 432z - 373 \rightarrow J = \frac{576}{175} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2}{p^7} E dz < 0$

pues el discriminante del R_2 es negativo. Hay, por tanto, un foco estable en origen.

[Integrando numéricamente se tiene que $J \approx -3.72$].

Hallamos ahora el N_2 , dependiente sólo de los términos cúbicos, y con integral cero:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{E}{p^5} \left(\frac{1}{2} z^{10} - z^9 + 7z^8 - \frac{32}{3} z^7 + \frac{112}{3} z^6 - \frac{632}{15} z^5 + \frac{4232}{45} z^4 - \frac{22768}{315} z^3 + \frac{34336}{305} z^2 - \frac{17792}{405} z + \frac{6115522}{14175} \right) \right] =$$

$$= \frac{128}{14175} \frac{E}{p^7} N_2, \text{ con } N_2 = 1057z^2 + 666z - 349 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2}{p^7} E dz = 0$$

Aproximadamente, N_2 tiene por raíces -0.97 y 0.34 . Si para otros q y s tiene raíces reales el R_2 pero dentro o fuera del intervalo $[-0.97, 0.34]$, la estabilidad del foco queda precisada algebraicamente, pues existirá un m para el $M_2 = R_2 + mN_2$ tiene signo definido.

Esto sucede, por ejemplo, en el segundo caso que tratamos:

$q=5, s=4 \rightarrow Q_{12} = [5+4z]^4 [2-z^2-z^3] \rightarrow J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{12}}{p^7} E dz = \dots = -\frac{64}{945} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2}{p^7} E dz$

con $R_2 = 4109z^2 - 10818z + 5632$, de raíces reales aproximadas 0.71 y 1.92 . Existe algún m tal que M_2 tiene signo definido (si $m \in [0.79, 16.1]$ aproximadamente). Por ejemplo, si $m=16$, $M_2 = R_2 + 16N_2 = 2835(7007z^2 - 54z + 16) > 0$ para todo z . Foco estable [$J \approx -1.09$].

Lo más desfavorable es que tengamos que utilizar el valor de dos de las integrales:

$$J_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^7} dz \approx 0.00331, \quad J_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zE}{p^7} dz \approx 0.000525, \quad J_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 E}{p^7} dz \approx 0.000762$$

Por ejemplo, no queda con lo anterior precisado el signo de J algebraicamente si:

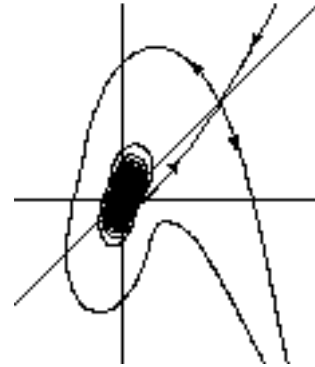
$$q = 9, \quad s = 0 \rightarrow Q_{12} = 81[2-z^2-z^3] \rightarrow \frac{Q_{12}}{p^7} E - \frac{d}{dz} \left[\frac{81}{10} \frac{E}{p^5} \right] = \frac{324}{5} \frac{E}{p^7} [2+2z-z^2]$$

ya que las raíces de R₂ son -0.73 y 2.73.

Tenemos que hallar numéricamente:

$$J = \frac{36}{37} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{203-278z^2}{p^7} Edz \quad \text{ó} \quad J = \frac{324}{1057} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{353+556z}{p^7} Edz$$

Utilizando los valores de arriba de las J_m, tenemos que J ≈ 0.45 y así se tendría un foco inestable en el origen. Esto concuerda con el dibujo aproximado de la derecha (la silla está en (1,1) y sobre y=x las órbitas son verticales).



Una idea que nos permite resolver algebraicamente el problema en el último caso (y que se muestra productiva en otros ejemplos) es considerar el integrando de J también como un cociente de polinomios de orden superior y reducir, con las técnicas descritas, estos polinomios más complicados. Podemos utilizar, por ejemplo, que:

$$\frac{[203-278z^2]p^2}{p^9} E - \frac{d}{dz} \left[\frac{E}{p^7} \left(\frac{278}{11} z^3 - \frac{139}{33} z^2 + \frac{1559}{33} z + \frac{37}{7} \right) \right] = \frac{2}{331} \frac{E}{p^9} R^*_2 \rightarrow J = \frac{24}{2849} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R^*_2}{p^9} Edz$$

siendo $R^*_2 = 42619z^2 - 3282z + 60518$

y como R^{*}₂ es siempre positivo está probada la inestabilidad. No se ha necesitado siquiera hallar un N^{*}₂ de integral cero, cuyo cálculo es aún más largo que el del N₂:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{E}{p^7} \left(-\frac{1}{2} z^{14} + z^{13} + \dots \right) \right] = \frac{256}{42567525} \frac{E}{p^7} N^*_2, \quad \text{con } N^*_2 = 324683z^2 - 525018z + 11182$$

Otra forma (no generalizable) de ver que J > 0 en este caso es escribir $J_m = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^7 \frac{A_n z + B_n}{p^n} Edz$, utilizar que cada sumando para n ≥ 3 se puede escribir en función de los posteriores:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{zE}{p^n} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(n-1)z+2n-3}{6p^{n-1}} + \frac{2n-5}{12p^{n-2}} \right] Edz, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^n} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(2n-5)z+2n}{12p^{n-1}} - \frac{2n-5}{24p^{n-2}} \right] Edz$$

y que además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2z}{p^2} + \frac{4}{p^2} - \frac{1}{p} \right] Edz = \frac{E}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Operando:

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{115}{1296p^2} - \frac{13}{864p} \right] Edz, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{211}{1728p} - \frac{409}{648p^2} \right] Edz \rightarrow J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{753}{4p^2} - \frac{36}{p} \right] Edz$$

Esto no precisa el signo de J. Pero haciendo en la última expresión $z = \sqrt{2} \tan u$, desarrollando la exponencial, quedándonos con las potencias pares y escribiendo todo en función de $c = \cos u$:

$$J = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{753}{16} c^2 - 18 \right] \left[1 - c^2 + \frac{1}{2} (2c^2 - c^4) - \frac{1}{6} (6c^4 - 5c^6) + \frac{1}{24} (4c^4 + 4c^6 - 7c^8) - \dots \right] du$$

Así expresamos J como una serie numérica cuya suma se puede probar que es positiva.