

5. Utilizando la poligonal.

Consideraremos en este capítulo de nuevo el sistema analítico:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + A^p(x,y) + \dots \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + B^p(x,y) + \dots \end{cases}$$

y analizaremos los casos pendientes del teorema 3.2, especialmente el estudio de v_i múltiples con λ_i asociado igual a cero [siendo $y=v_i x$ raíz de $\Delta(x,y) = xB^n(x,y) - yA^n(x,y)$ y $\lambda_i = A(1, v_i)$], generalizando los resultados de dicho teorema.

Comenzaremos en la sección 5.1 estudiando algunos ejemplos de ese tipo ($v_i=0$ en todos ellos) para sugerir las técnicas y las dificultades de los resultados generales que se darán en 5.2. Estos resultados los emplearemos en el estudio de sistemas concretos en 5.3 y acabaremos tratando en 5.4 el caso $\Delta \equiv 0$ (y similares) y los centros y focos que no son analizables con las técnicas del capítulo 4. Demostraremos que con una utilización adecuada de la poligonal de Newton, casi nunca será necesario realizar explícitamente ningún blow-up para precisar la estructura local de estos puntos 'más degenerados' que los del capítulo 3.

Veremos en 5.1 que buscar variedades de [S] cuyo desarrollo comience por términos x^s es equivalente a buscar ramas de esa forma de la curva algebraica $H_s(x,y) \equiv xg - syf = 0$. Esta es la razón que lleva a utilizar de forma natural la poligonal en el análisis de estos sistemas (la s será diferente para cada potencia, es decir, para cada segmento de la poligonal). El primer teorema que probaremos (el 5.1) asegurará que a cada rama simple o múltiple con el nuevo 'autovalor' asociado distinto de cero corresponde una variedad de la misma forma que pasa por el origen.

Mejorando un primer teorema 5.2 (y a la vista de su demostración) establecemos el aún más útil **teorema 5.3** que permitirá analizar el origen con pocos cálculos (y sin cambios de variable): si ningún polinomio asociado a un segmento de la poligonal se anula idénticamente para el s correspondiente, si existe alguna rama real y las asociadas a cada segmento son del tipo de las del teorema 5.1, estas ramas (y tal vez otras asociadas a los vértices) dan todas las variedades que pasen por el origen, y la estructura queda determinado con el flujo sobre ellas, el signo de Δ y, excepcionalmente, el de algún polinomio más. Este resultado generaliza el teorema 3.2 (y el estudio de los puntos elementales): los términos homogéneos se sitúan sobre un segmento de pendiente -1 y las ramas son los 'vectores propios'. El papel de la aproximación homogénea lo cumplen ahora los términos que proporcionan puntos sobre la poligonal y son, si todos los nuevos 'autovalores' son no nulos, los únicos necesarios para fijar la estructura del origen.

Los teoremas son de demostración larga y exigen la realización de sucesivos blow-ups, pero insistimos en que una vez probados hacen, en general, innecesarios los cambios. Sólo dejan por analizar los casos con polinomios idénticamente nulos, las ramas múltiples con 'autovalor' cero y la distinción entre centros y focos. En 5.4 se darán ideas de cómo atacar los dos primeros casos sin cambios de variable y se estudiarán los centros y focos. Para estos se verá que si la poligonal se reduce a un segmento, uno o dos cambios de variable reduce el problema a uno o dos de los estudiados en el capítulo 4.

La explotación intensiva de la poligonal de Newton en la forma presentada aquí para el análisis del origen no se encuentra en la literatura sobre el tema. El clásico [1] (ver las páginas 295-302 de [3]) ya utiliza la poligonal para estudiar las soluciones de $dy/dx=g(x,y)/f(x,y)$, con g y f analíticas que se anulan en el origen. También se utiliza en [5], aunque en un método de estudio de puntos críticos que más bien se basa en la determinación de las curvas $f=0$ y $g=0$. Nuestras primeras ideas sobre el tema se mostraron en [13]. El método local de análisis de [18] (en el que es omnipresente la poligonal) consiste en dividir un entorno del origen en sectores (asociados a cada segmento y cada vértice), en utilizar formas normales para el estudio de las órbitas en cada uno de ellos y en 'pegar' las órbitas de cada sector. Su ejemplo erróneo citado en la introducción es $x'=4y^2+xy-2x^2$; $y'=y^2+2xy+2x^3$, al que asigna dos sectores parabólicos y dos hiperbólicos, pero el teorema 3.2 ya asegura que consiste en seis sectores hiperbólicos.

Más próximo a nuestras ideas es el trabajo de Berezovskaya recogido en el libro [21]: "The main topological part of plane vector fields with fixed Newton diagram". En él caracteriza los sistemas 'no degenerados' para los que bastan los términos sobre la poligonal (su 'parte principal') para fijar la estructura (descarta entonces la posibilidad de 'autovalores cero' recogida por nuestros teoremas). Su método de análisis (mucho más complicado que el nuestro) simplifica el de [18] realizando en cada sector blow-ups de la forma $x=x, y=x^S v$ (no parece detectar las dificultades que citaremos en la página 123). Tal vez existan más detalles en su preprint de 1978 ("A complicated stationary point of a system on the plane: structure of a neighborhood and index"), uno de cuyos teoremas se reproduce en la página 88 de [17]. El artículo [20] también caracteriza cuando basta considerar la 'parte principal'. Para el análisis de los sistemas asociados a cada segmento sustituye los blow-ups sucesivos por un único cambio a las coordenadas quasi-polares introducidas por Lyapunov ([2]). Como aplicación clasifica, como nosotros en el ejemplo 17, los mapas de fases de las ecuaciones de segundo orden, aunque no reproduce los cálculos y no podemos comparar los métodos (por otros caminos más largos estas ecuaciones habían sido ya estudiadas en [4], [7] o [10]).

Los resultados para el caso $\Delta \equiv 0$ están basados en [7]. Sobre el problema complicado de distinguir centros y focos de los tratados en 5.4 se puede consultar [17] (para una visión global), [18] y sobre todo [22] ya que ataca el caso (para el que 5.4 sólo sugiere sus dificultades) de que haya más de un segmento de la poligonal, 'pegando' las órbitas de los sectores asociados a cada segmento. Su caracterización de los sistemas 'no degenerados' con centro o foco a partir de la poligonal es similar a la nuestra de la página 136 (o de [26]). Sistemas de forma particular con este tipo de centros o focos se estudian en [2], [6], [20], [24] y [25].

El proceso habitual de análisis de los puntos de este capítulo mediante cambios de variable (llamado proceso de desingularización o σ -proceso) precisado por Dumortier en [9] se puede encontrar descrito también en [10], [12], [15], [17], [19], [20] o [23]. [Se podrían dar muchos ejemplos de lo largo que puede resultar este proceso; por citar uno: en las páginas 361–364 de [12] se analiza $x'=y+ax^2+\dots$; $y'=bx^2+\dots$ con tres blow-ups sucesivos; basta una línea para estudiarlo con nuestro teorema 5.3 (expuesto en [16]).

En nuestros estudios no hemos considerado el índice de los puntos críticos, del que otros autores sí obtienen abundante información, como [8], [11] o [14].

Referencias del capítulo 5

- [1] Briot - Bouquet. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'Ecole Polytechnique [1856].
- [2] A. M. Lyapunov. Investigation of one of the singular cases of the theory of stability of motion. *Mathematicheskii Sbornik*, **17** [1893].
- [3] E. L. Ince. Ordinary differential equations. Longman [1927].
- [4] A.F. Andreev. Investigation of the behavior of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point. *Annals of the U. of Leningrad* [1955], 183-207.
- [5] S. Barocio. Singularidades de sistemas diferenciales analíticos en el plano. *Bol. S. Mat. Mexicana* [1959], 1-25.
- [6] A. P. Sadovskii. The center and focus problem. *Differential Equations* **4** [1968], 1034-1037.
- [7] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [8] M. E. Sagalovich. Topological structure of the neighborhood of a critical point of a differential equation. *Diff. Equations* **11** [1975], 1498-1503.
- [9] F. Dumortier. Singularities of vector fields on the plane. *J. of Diff. Eq.* **23** [1977], 53-106.
- [10] D. K. Arrowsmith. The singularity $x(\partial/\partial y)$. *J. of Diff. Eq.* **34** [1979], 153-166.
- [11] M. E. Sagalovich. Classes of local topological structures of an equilibrium state. *Diff. Equations* **15** [1979], 253-255.
- [12] J. Guckenheimer - P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag [1983].
- [13] J.I.Aranda. Métodos simples para el estudio de puntos singulares degenerados. *Actas VII CEDYA* [1984], 11-14.
- [14] B. Coll - J. Llibre. Singularidades sobre el plano real de un sistema analítico de orden dos. *Actas IX CEDYA* [1986], 135-139.
- [15] Yu. S. Il'yashenko. Algebraically and analytically solvable problems in theory of ordinary differential equations. *J. Soviet Math.* **47** [1987], 2570-2584.
- [16] J.I.Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos. *Actas X CEDYA* [1987], 20-25.
- [17] V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations. *Encyclopaedia of Math. Sci.*, vol 1. Springer- Verlag [1989].
- [18] A. D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer- Verlag [1989].
- [19] D. K. Arrowsmith - C. M. Place. An introduction to dynamical systems. Cambridge U.P. [1990].
- [20] M. Brunella - M. Miari. Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra. *J. of Diff. Eq.* **85** [1990], 338-366.
- [21] D. T. Lê - K. Saito - B. Teissier. Singularity theory. World Scientific [1991].
- [22] F. S. Berezovskaya - N. B. Medvedeva. A complicated singular point of "center-focus" type and the Newton diagram. *Selecta Mathematica* **13** [1994], 1-15.
- [23] Yu.S.Il'yashenko - S.Yakovenko. Concerning the Hilbert 16th problem. *AMS Translations, Ser 2, vol 165* [1995].
- [24] A. Cima - A. Gasull - F. Mañosas. Cyclicity of a family of vector fields. *J. of Math. Anal. and Appl.* **196** [1995], 921-937.
- [25] J. Chavarriga - I.García - J. Giné. Integrability of centers perturbed by quasi-homogeneous polynomials. *J. of Math. Anal. and Appl.* **210** [1997], 268-278.
- [26] J.I.Aranda. Centros y focos degenerados de sistemas analíticos planos. *Actas XV CEDYA* [1997] (aún no publicadas).

5.1. Ejemplos introductorios.

Ejemplo 1. $\begin{cases} x' = ax^3 \\ y' = y^2 + x^4 \end{cases} \rightarrow \Delta = xy^2 \rightarrow \begin{matrix} x=0, \lambda=1 \\ y=0 \text{ doble}, \lambda=0 \end{matrix}$



Aunque no sabemos si existen, busquemos variedades horizontales que pasen por el origen probando en la ecuación de las órbitas soluciones de la forma :

$$y = c_s x^s + o(x^s) \text{ con } s > 1 \rightarrow [c_s^2 x^{2s} + \dots] + x^4 = ax^3 [sc_s x^{s-1} + \dots]$$

El valor más pequeño de s para el que c_s puede ser no nulo es $s=2$. Así que:

$$c_2^2 - 2ac_2 + 1 = 0 \rightarrow c_2 = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Si $|a| < 1$ no pueden existir variedades reales que comiencen por términos de orden 2.

Si $a=1$ ($c_2=1$ doble) y $a=-1$ ($c_2=-1$ doble) , las posibles variedades serían, respectivamente, de la forma: $y=x^2+\dots$ e $y=-x^2+\dots$

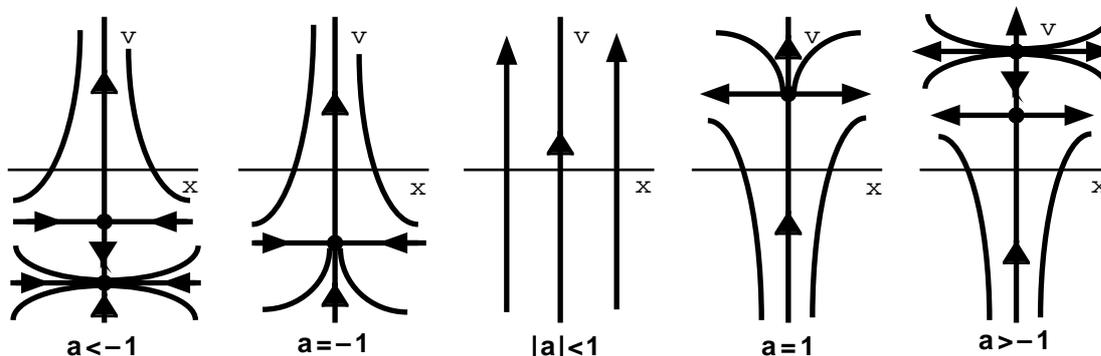
Si $|a| > 1$, tenemos dos posibles comienzos del desarrollo de las variedades horizontales.

El flujo sobre cada una de estas posibles variedades viene gobernado por $x' = ax^3$.

Comprobemos que en los cálculos anteriores reside toda la información necesaria para precisar la estructura local de $\mathbf{0}$. Para ello comenzamos haciendo el cambio $x=x ; y=x^2v$. Obtenemos:

$$\begin{cases} x' = ax^3 \\ v' = x^2(v^2 - 2av + 1) \end{cases} \text{ cuyas órbitas (salvo } x=0) \text{ son iguales a las de } \begin{cases} x' = ax \\ v' = v^2 - 2av + 1 \end{cases}$$

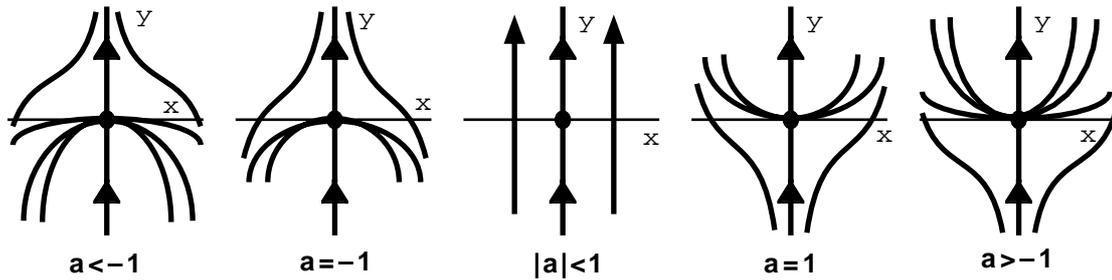
Este sistema tiene 0, 1 ó 2 puntos críticos en $x=0$ dependiendo de que $|a|$ sea menor, igual o mayor que 1. Los diferentes mapas de fases en el plano xv son:



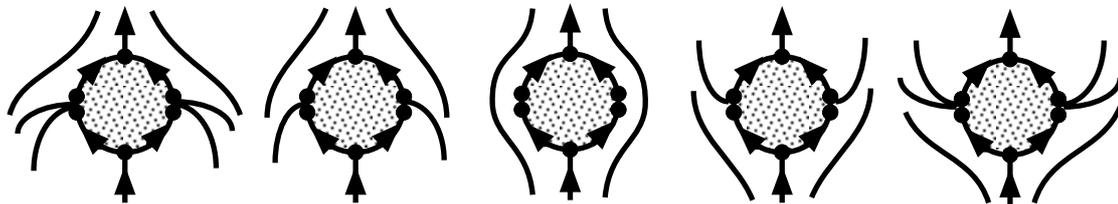
(los dos puntos son elementales si $|a| > 1$ y uno de sus autovalores es 0 y el otro es a si $|a|=1$).

Deshaciendo el cambio comprobamos que existen las variedades previstas [aunque haya infinitas, todas ellas son de la forma buscada $y = c_2 x^2 + o(x^2)$].

Los posibles mapas locales del origen 0 serán los siguientes:



Observemos que al mismo resultado habríamos llegado simplemente reflejando las nuevas variedades descubiertas con su flujo correspondiente en la estructura homogénea:



Como muestra el ejemplo a un punto múltiple con $\lambda=0$ pueden no llegar variedades o llegar más de una con primeros términos $c_s x^s$ diferentes (e incluso, como veremos ya en el ejemplo siguiente, con diferentes s , que pueden ser fraccionarios, lo que complicará los cambios). En general veremos que a cada c_s simple estará asociado siempre un punto simple y por tanto una variedad que llega al origen, lo que no será siempre cierto para un c_s múltiple. También es posible que existan variedades que no sean C^∞ . Por ejemplo, para $a=1$ las órbitas vienen dadas por $y = x^2 + Cx^2/(1-C \ln x)$ y todas estas funciones satisfacen $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=2$. Pero ninguna de ellas (salvo $y=x^2$) posee derivada tercera en $x=0$.

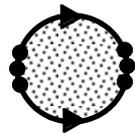
¿Podríamos en los cálculos anteriores haber perdido alguna otra variedad horizontal que no fuese de la forma $y = c_2 x^2 + o(x^2)$? En principio, al deshacer el cambio $y=x^2 v$ sería posible que alguna de las órbitas próximas al eje v 'se doblase' hasta regresar al origen. Para ver que eso no puede suceder hay, por ahora, que avanzar paso a paso, siguiendo el camino conocido de realizar blow-ups sucesivos hasta acabar en puntos elementales o con un único autovalor cero. Haciendo en nuestro sistema $y=xv$ se tiene

$$\begin{cases} x' = ax^2 \\ v' = v^2 - axv + x^2 \end{cases} \rightarrow xB - vA = x[v^2 - 2axv + x^2]$$

Las únicas posibles variedades horizontales del sistema inicial son las posibles órbitas de este último sistema en $x \neq 0$ que lleguen al origen y, según el teorema 3.2, estas sólo lo pueden hacer siendo tangentes a

$$v = [a \pm \sqrt{a^2 - 1}] x$$

lo que nos vuelve a dar las variedades conocidas.

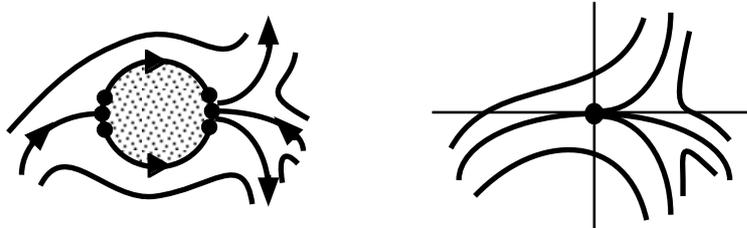
Ejemplo 2. $\begin{cases} x' = y^2 - 2x^3 \\ y' = 3x^2y + x^4 \end{cases} \rightarrow \Delta = -y^3 \rightarrow y=0 \rightarrow \lambda=0 \rightarrow$ 

Probando $y = c_3 x^s + o(x^s)$ obtenemos que el menor s es $s = \frac{3}{2}$ con lo que

$$[3c_{3/2}x^{7/2} + \dots + x^4] - [c_{3/2}^2x^3 + \dots - 2x^3][\frac{3}{2}c_{3/2}x^{1/2} + \dots] = 0 \rightarrow \frac{3}{2}c_{3/2}^3 - 6c_{3/2} = 0$$

Hay tres raíces simples de esta ecuación: $c_{3/2}=0$, $c_{3/2}=-2$, $c_{3/2}=2$, que nos proporcionan tres variedades: $y=0(x^{3/2})$, $y=-2x^{3/2}+o(x^{3/2})$, $y=2x^{3/2}+o(x^{3/2})$, que llevadas a la primera ecuación del sistema nos da para la primera: $x'=-2x^3+o(x^3)$, y para la segunda y tercera variedades: $x'=2x^3+o(x^3)$.

Para precisar más el dibujo calculamos algún término no nulo de la primera variedad. Para ello observamos que $s=2$ también proporciona c_s no triviales. De aquí: $y = -\frac{1}{7}x^2 + \dots$ y por tanto



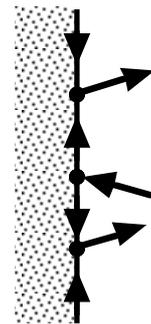
(los sectores entre las tres variedades de la derecha son hiperbólicos y no elípticos como en principio podría también pensarse; más adelante justificaremos porqué se puede asegurar esto sólo con los cálculos anteriores). Haciendo el cambio $y=x^{3/2}v$ obtenemos tras simplificar:

$$\begin{cases} x' = xv^2 - 2x \\ v' = 6v - \frac{3}{2}v^3 + x^{1/2} \end{cases}$$

Los puntos críticos de este sistema en el eje v son: $(0,-2)$, $(0,0)$ y $(0,2)$. Este eje está formado por órbitas orientadas como en el dibujo. Podemos evitar la presencia del término no regular $x^{1/2}$ con un nuevo cambio $x=u^2$ que nos da

$$\begin{cases} u' = -u - \frac{1}{2}uv^2 \\ v' = 6v - \frac{3}{2}v^3 + u \end{cases}$$

Para este sistema los tres puntos son elementales y por tanto hay variedades no verticales que llegan hasta ellos: $v = 0+o(1)$, $v = -2+o(1)$, $v = 2+o(1)$.



Deshaciendo los dos cambios realizados obtenemos de nuevo las variedades previstas en la derecha. Si realizásemos el cambio $y=(-x)^{3/2}v$, $-x=u^2$ (o bien $x=-u^2$, $y=u^3v$ de un tirón) demostraríamos la existencia de una variedad a la izquierda. De nuevo unos blow-up sucesivos (hasta que demos los teoremas de la siguiente sección) podrían despejar las dudas que pudieran quedar sobre la posible pérdida de otras variedades distintas de las detectadas ya que pudieran llegar al origen con pendiente horizontal).

Aunque, como hemos visto, la utilización de series formales ahorra trabajo veamos que aún podemos simplificarlo más.

Observemos que determinar el c_s probando $y = c_s x^s + o(x^s)$ en la ecuación de las órbitas

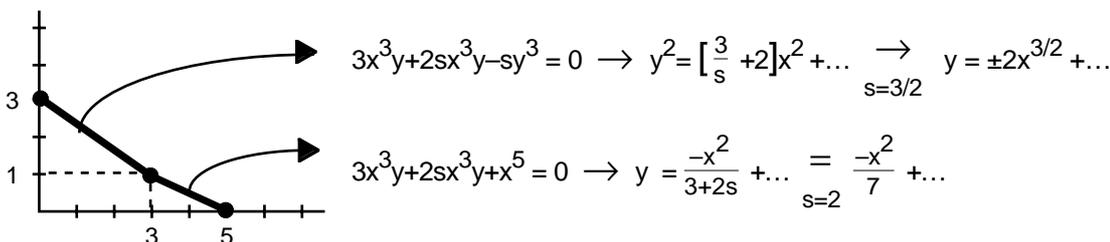
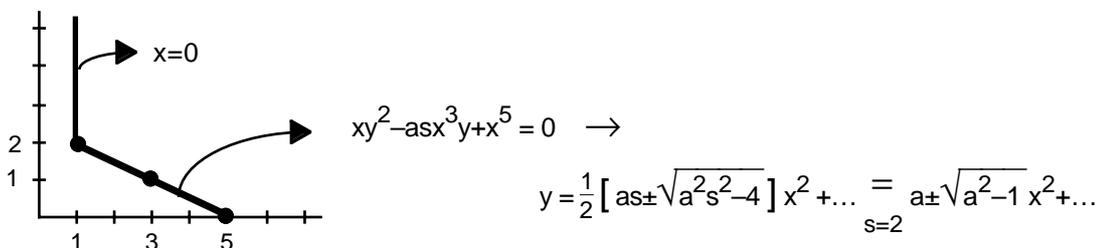
$$g(x,y) - f(x,y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad g(x, c_s x^s + \dots) - f(x, c_s x^s + \dots) [s c_s x^{s-1} + \dots] = 0$$

es equivalente a determinarlo probando ese desarrollo en la ecuación algebraica

$$(1) \quad \boxed{x g(x,y) - s y f(x,y) = 0} \quad \rightarrow \quad x g(x, c_s x^s + \dots) - s f(x, c_s x^s + \dots) [c_s x^s + \dots] = 0$$

(para $s=1$ aparece de nuevo la ecuación $\Delta = xB - yA = 0$).

El problema de determinar las ramas de una curva algebraica es fácilmente atacable a partir de su **poligonal de Newton**. Así, el análisis de la curva (1) en los ejemplos 1 y 2 nos proporciona inmediatamente las variedades ya conocidas:

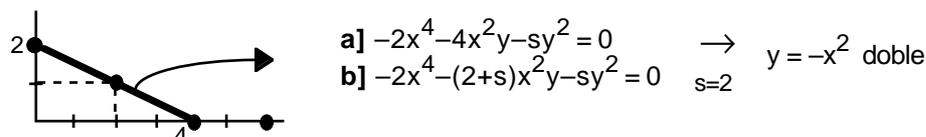
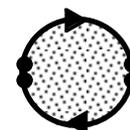


[Observemos que para calcular las variedades al s que aparece en (1) debemos asignarle valores diferentes según sea el segmento que consideremos, pues cada s es la potencia del primer término de la variedad (de la serie) buscada].

Ejemplos 3. a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -4xy - 2x^3 + bx^5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = y + x^2 \\ y' = -2xy - 2x^3 + bx^5 \end{cases}$

Ambos sistemas tienen la misma estructura homogénea: $\Delta = -y^2$, $\lambda = 0 \rightarrow$

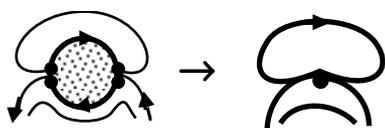
Y proporcionan la misma variedad doble a partir de la poligonal:



Estos casos de ramas $y = c_s x^s + \dots$ múltiples (como ocurría en el capítulo 3 con los v_i múltiples) pueden obligar a proseguir el análisis, pues al hacer $y = x^s v$ (o algún blow-up) podrían aparecer puntos degenerados. En nuestros ejemplos:

$$y = x^2 v \rightarrow \begin{array}{ll} \mathbf{a)} \begin{cases} x' = x \\ v' = -2(v+1)^2 + bx^2 \end{cases} & \mathbf{b)} \begin{cases} x' = x + xv \\ v' = -2(v+1)^2 + bx^2 \end{cases} \\ y = xu \rightarrow \mathbf{a)} \begin{cases} x' = xu \\ u' = -2x^2 - 4xu - u^2 + bx^4 \end{cases} & \mathbf{b)} \begin{cases} x' = x^2 + xu \\ u' = -2x^2 - 3xu - u^2 + bx^4 \end{cases} \end{array}$$

Para el sistema en v el punto $(0, -1)$ es un silla-nodo en el caso **a)** pero no es simple en el **b)**. Para el otro, es $\Delta = -2x(x+u)^2$ en ambos casos, pero mientras al vector propio múltiple $u = -x$ está asociado un autovalor cero en el **b)**, tenemos $x' = -x^2 + \dots$ para el **a)**. Así, cualquiera de los cambios prueba la existencia de la variedad $y = -x^2 + \dots$ para **a)** y precisa su estructura:

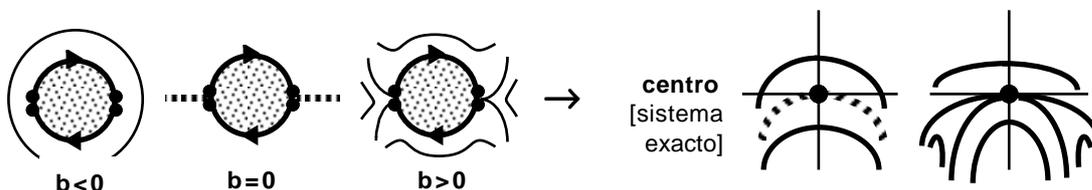


[como se observa, el término bx^5 no es relevante para la estructura local de **a)**].

Sin embargo, para **b)** no sabemos lo que ocurre. Podríamos hacer $z = v + 1$ ó $z = x + u$ y usar las técnicas vistas hasta ahora. Pero más cómodo es hacer directamente $y = -x^2 + w$ que nos lleva a:

$$\begin{cases} x' = w \\ w' = bx^5 \end{cases} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ 6 \end{array} \quad w = \pm \left[\frac{b}{3} x^6 \right]^{1/2}$$

Por tanto, tenemos para este sistema y , deshaciendo el cambio, para el inicial:



Algo tal vez más rápido que el cambio $y = -x^2 + w$ es calcular algún término más del desarrollo de la posible variedad. Llevamos $y = -x^2 + c_s x^s + \dots$, $s > 2$ a la ecuación de las órbitas de **b)**:

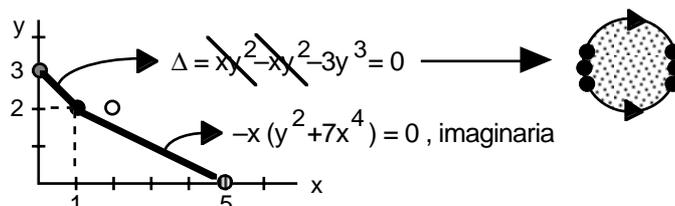
$$-2c_s x^{s+1} + bx^5 + \dots = [-2x + sc_s x^{s-1} + \dots] [c_s x^s + \dots] \rightarrow bx^5 + \dots = sc_s^2 x^{2s-1} + \dots \rightarrow s=3 \rightarrow c_3 = \pm \left[\frac{b}{3} \right]^{1/2} \rightarrow y = -x^2 \pm \left[\frac{b}{3} \right]^{1/2} x^3 + \dots, \text{ si } b > 0$$

La presencia de dos coeficientes distintos para x^3 separa si $b > 0$ dos variedades ya simples, con lo que está garantizada su existencia. Esto, en general, se probaría haciendo los cambios adecuados (aquí $y = -x^2 + w$, $w = x^3 v$ ó, de un tirón, $y = -x^2 + x^3 v$) y el flujo sobre cada variedad, como siempre, se determinaría yendo a la ecuación en x' . Para este sistema **b)** (es exacto) podemos confirmar los resultados calculando explícitamente las órbitas:

$$y = -x^2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{bx^6 + C}$$

Ejemplo 4.
$$\begin{cases} x' = xy + 3y^2 + 5x^2y \\ y' = y^2 + 4xy^2 - 7x^4 \end{cases}$$

En los ejemplos anteriores bastaba analizar la estructura homogénea, localizar las variedades y orientarlas. En éste la poligonal no nos da toda la información necesaria ya que aparecen variedades que no están asociadas a ninguno de sus segmentos. Esta situación se puede dar, como veremos, si los dos términos asociados a un ángulo de la poligonal se anulan para el valor de s correspondiente a uno de los segmentos contiguos. Así ocurre en nuestro caso:

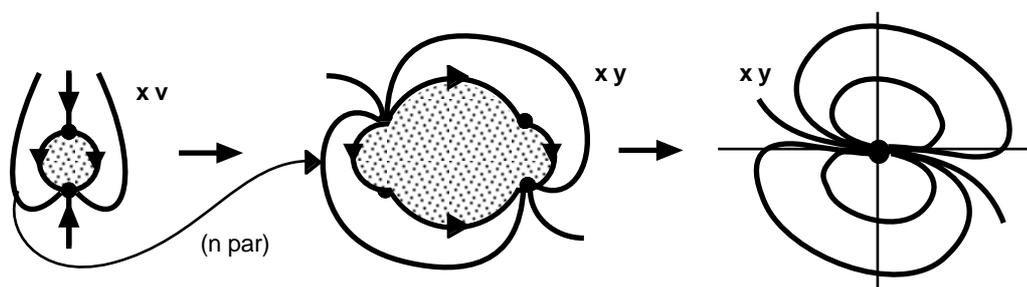


ya no hay suficiente información de lo que sucede cerca del $y=0$ triple. Pero haciendo $y=xv$:

$$\begin{cases} x' = xv + 3xv^2 + 5x^2v \\ v' = -7x^2 - 3v^3 - xv^2 \end{cases}$$

[Observemos que al realizar el blow-up los términos que daban el mismo punto del diagrama lo siguen haciendo, que el segmento de pendiente -1 (asociado a los términos homogéneos) se ha convertido en uno vertical (asociado a $x=0$) y que el de pendiente $-1/2$ (asociado a ramas $y=mx^2+\dots$) ha pasado a tener pendiente -1 (asociado a $v=mx+\dots$ como cabía esperar). Observemos también que los términos cúbicos iniciales, que dan un punto por encima de la poligonal, no influyen en la estructura del origen].

Queda analizado el sistema en xv y de él podemos deducir la estructura del inicial:

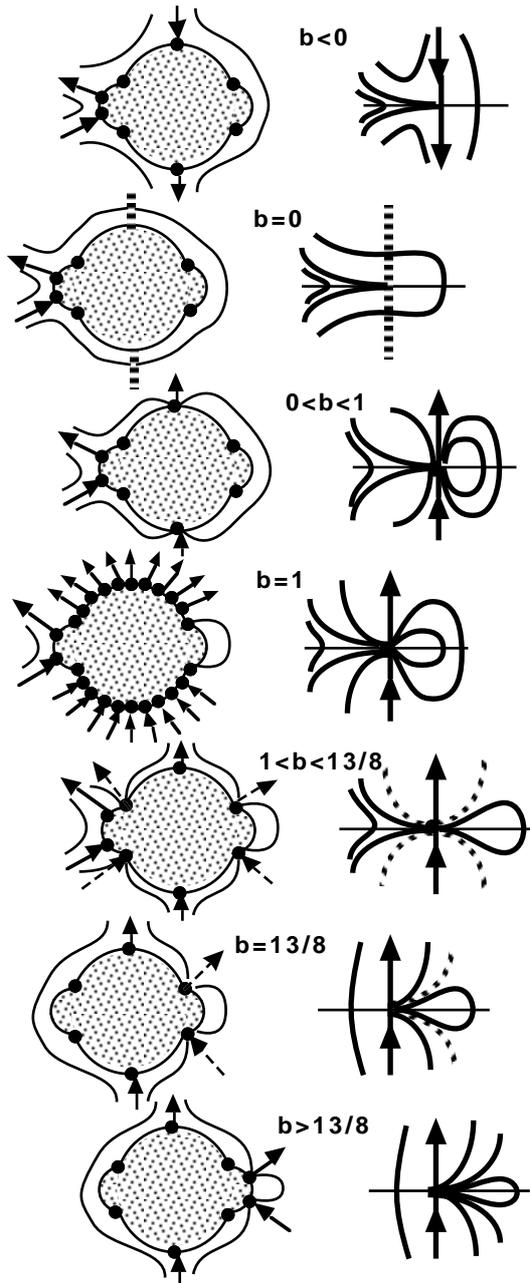


Como veremos en la sección siguiente, en estos casos problemáticos podremos ahorrarnos también la realización del blow-up, aunque necesitaremos precisar el signo de algún polinomio más que el Δ de la aproximación homogénea: la orientación de los dos semicírculos pequeños del segundo dibujo la podemos fijar simplemente a partir del signo de $-x(y^2 + 7x^4)$.

Ejemplo 5. $\begin{cases} x' = xy^7 \\ y' = by^8 - x^{13} \end{cases}$

$\Delta = (b-1)xy^8 \rightarrow x=0 \rightarrow y' = by^8$
 $x \left[\left(b - \frac{13}{8}\right)y^8 - x^{13} \right] \rightarrow y' = \frac{13}{8}y^8 + \dots$

Como veremos, bastará esquematizar el signo de Δ (es decir, de $(b-1)x$) y el de $x[\dots]$ (cerca del eje x lo da $-x^{14}$) y las variedades dadas por la poligonal con su flujo para analizar el punto:



Mientras no demostremos los teoremas de 5.2, para justificar estos esquemas habría que hacer varios blow-ups (veremos que 5) para tener un punto 'poco degenerado' en el origen, y reconstruir entonces las órbitas del sistema inicial. Pero podemos hallar las órbitas (es fácil ver que todo sistema cuyos términos se sitúan sobre un segmento de la poligonal es resoluble (y además es de Bernouilli)):

$$y^8 = Cx^{8b} + \frac{8}{8b-13} x^{13}, \text{ si } b \neq 13/8$$

$$y^8 = x^{8b} [C - 8 \ln|x|], \text{ si } b = 13/8$$

Como se observa, para $b \notin [1, 3/2]$, todas las variedades horizontales que llegan al origen vienen dadas por la poligonal. Además, los cambios de orientación en la circunferencia ampliada se producen sólo en los puntos asociados a dichas variedades. Bastaría, por tanto, orientar simplemente la circunferencia inicial [eso bastó en los ejemplos 1, 2 y 3, que no tenían dos puntos con el mismo signo asociados a un ángulo de la poligonal].

Esto no sucede si $b \in (1, 13/8)$: a un punto de 'empalme' llegan variedades que no son ni $O(x)$ ni $O(|x|^{13/8})$, si los signos de Δ y $x[\dots]$ son diferentes a cada lado de dicho punto. De 5.2 se deducirá que si $b \in (1, 13/8)$ estos puntos de empalme serán siempre nodos (y bastará también el signo de Δ). Sólo habrá que mirar $x[\dots]$ para ver qué tipo de puntos simples son los de empalme cuando 'se vayan' ángulos de la poligonal ($b=1$ ó $13/8$).

[De hecho, para $b=1$, en que se anula todo un segmento de la poligonal, las cosas pueden ser más complicadas y habrá que esperar a 5.3 para saber como analizarlos].

5.2. Resultados generales.

Volvamos al sistema general:

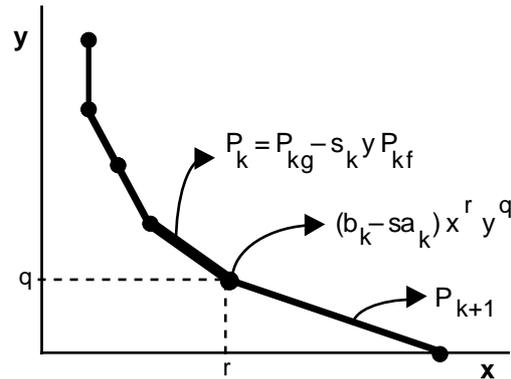
$$[S] \quad \begin{cases} x' = f(x,y) = A(x,y) + A^P(x,y) + \dots \\ y' = g(x,y) = B(x,y) + B^P(x,y) + \dots \end{cases}$$

Consideremos la poligonal de Newton de la curva:

$$H_s(x,y) \equiv xg(x,y) - syf(x,y) = 0$$

Fijándonos en el k-simo segmento de la poligonal anterior (de pendiente $-1/s_k$), llamamos:

$$P_k(x,y) \equiv xP_{kg}(x,y) - s_k y P_{kf}(x,y) = 0$$



a los términos de $H_{s_k}(x,y)$ asociados a cualquiera de los puntos situados sobre ese segmento (que son aquellos que dan ramas de $H_{s_k}=0$ de la forma $y = m_k x^{s_k} + \dots$), siendo, respectivamente, P_{kg} y P_{kf} los términos que provienen de las funciones g y f . Sea $(b_k - s_k a_k) x^r y^q$ el término de H_s perteneciente a los dos segmentos consecutivos de pendientes $-1/s_k$ y $-1/s_{k+1}$, donde $b_k x^{r-1} y^q$ es un término de g y $a_k x^r y^{q-1}$ es un término de f . Suponemos en esta sección que P_k **no se anula idénticamente para ningún** k .

Supongamos que $s_k = \omega/\beta$. Que P_k esté asociado al segmento de pendiente $-1/s_k$ significa que al sustituir y por $m x^{s_k}$ en H_{s_k} los términos no englobados en el P_k son de orden mayor:

$$H_{s_k}(x, m x^{\omega/\beta}) = P_k(x, m x^{\omega/\beta}) + \dots = P_k(1, m) x^{\alpha/\beta} + o(x^{\alpha/\beta})$$

Los primeros términos de las ramas de $H_{s_k}=0$ de la forma $y = m_{ik} x^{s_k}$, $x \geq 0$, ó $y = m_{jk} [-x]^{s_k}$, $x \leq 0$, vendrán dados por las raíces de $P_k(x,y)=0$. El primer teorema precisa cuándo existen variedades de $[S]$ de esa misma forma local:

Teorema 5.1

Si $y = m_{ik} x^{s_k}$, $x \geq 0$, es raíz real simple de $P_k(x,y)=0$ o múltiple con $P_{kf}(1, m_{ik}) \neq 0$ entonces existe una variedad de $[S]$ de la forma $y = m_{ik} x^{s_k} + o(x^{s_k})$, $x \geq 0$. Análogo resultado se tiene para las raíces $y = m_{jk} [-x]^{s_k}$, $x \leq 0$.

[Observemos que, en particular, para $s_k = 1 \equiv s_0$, los polinomios correspondientes son los conocidos $P_0 = xB - yA = \Delta$ y $P_{0f} = A$, que las variedades (válidas para $x \geq 0$ y $x \leq 0$) son los vectores propios del teorema 3.2 y que los $P_{kf}(1, m_{ik})$ ocupan el papel de los λ . Observemos también que el segmento asociado a Δ podría reducirse a un punto].

Demostremos el teorema. Haciendo $y = x^{S_k} v$, $x \geq 0$, el sistema [S] se convierte en

$$\begin{cases} x' = f(x, x^{S_k} v) \\ y' = x^{-S_k} g(x, x^{S_k} v) - s_k x^{-1} v f(x, x^{S_k} v) = x^{-S_k-1} H_{S_k}(x, x^{S_k} v) \end{cases}$$

que tiene las mismas órbitas en $x > 0$ que

$$\begin{cases} x' = x^{-S_k+1-\alpha/\beta} f(x, x^{S_k} v) = x P_{kf}(1, v) + O(x^{1+1/\beta}) \\ y' = x^{-\alpha/\beta} H_{S_k}(x, x^{S_k} v) = P_k(1, v) + O(x^{1/\beta}) \end{cases}$$

Haciendo $x^\beta = u$ (o bien tras hacer directamente en [S] $x = u^\beta$, $y = u^\omega v$) obtenemos el sistema analítico:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{\beta} u P_{kf}(1, v) + O(u^2) \\ v' = P_{kf}(1, v) + O(u) \end{cases}$$

en el que el eje $u=0$ es una órbita o unión de ellas. Los puntos críticos en dicho eje se calculan hallando los ceros de $P_k(1, v)$, y por tanto $(0, m_{ik})$ es uno de ellos, con aproximación lineal

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} P_{kf}(1, m_{ik}) & 0 \\ E & P_k'(1, m_{ik}) \end{pmatrix}$$

Si m_{ik} es raíz simple de $P_k(1, m)=0$, o si no siéndolo $P_{kf}(1, m_{ik}) \neq 0$, el punto $(0, m_{ik})$ es simple (será nodo, silla o silla-nodo) y existe al menos una variedad no vertical que llega al punto de la forma $v = m_{ik} + o(1)$, que, tras deshacer los cambios, nos proporciona una variedad $y = m_{ik} x^{S_k} + o(x^{S_k})$ que llega al origen. La estructura de las órbitas cerca de $(0, m_{ik})$ está determinada por el flujo sobre el eje v y por $P_{kf}(1, m_{ik})$ si no se anula (si es cero y m_{ik} es simple la variedad no vertical es centro y el flujo sobre ella se determina calculando términos de su desarrollo).

Para $x \leq 0$, cambiando x por $-x$ y continuando igual obtendríamos los resultados análogos para las variedades de [S] que llegan al origen desde $x < 0$.

Generalizamos ahora el resto del teorema 3.2 para poder precisar la estructura del origen aun en casos en que $y=0$ ó $x=0$ sean raíces múltiples con $\lambda=0$. Los ejemplos de la sección anterior muestran que surgen complicaciones que no se daban en el caso homogéneo: podían aparecer variedades que llegasen al origen que no fuesen del tipo de las del teorema anterior, no era tan fácil ver lo que ocurría entre dos variedades consecutivas,... También vimos que se podría concluir el análisis a base de realizar blow-ups (método clásico para estos puntos). Pero lo fundamental de los siguientes teoremas es que no harán necesario, casi nunca, realizarlos. Comenzamos con un teorema menos fino (el 5.2) para luego, y a la vista de su demostración, dar el teorema 5.3 en el que se limitarán al máximo los cálculos necesarios para precisar la estructura del origen de estos puntos más degenerados.

Teorema 5.2

Supongamos que $P_k(x,y) \neq 0$ y que todas las raíces reales $y=m_{ik}x^{s_k}$, $y=m_{jk}[-x]^{s_k}$ de $P_k(x,y)=0$, con $m_{ik}, m_{jk} \neq 0$ son simples o con $P_{kf} \neq 0$.

Entonces la estructura local de $\mathbf{0}$ queda determinada por:

- el signo de los P_k
- el flujo sobre cada variedad [dado por $x' = P_{kf}(x, m_{ik}x^{s_k})$ ó $x' = P_{kf}(x, m_{jk}[-x]^{s_k})$ o por más términos de su desarrollo si se anula P_{kf}]

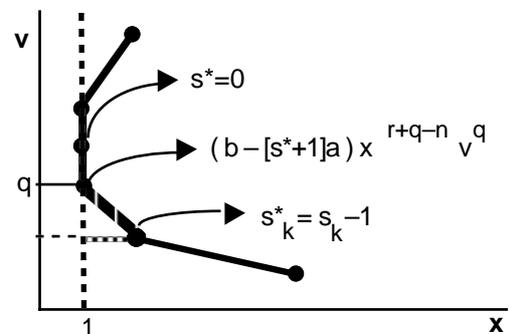
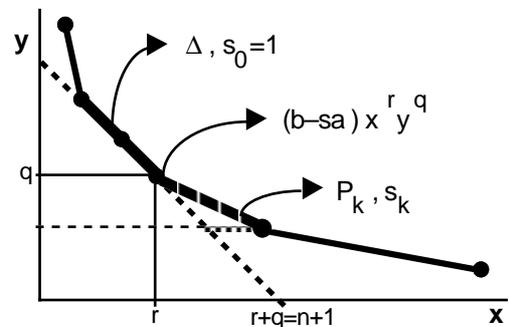
Para demostrar el teorema habrá que realizar [S] diferentes cambios del tipo $y=xv$ (ó $x=uy$). Ya vimos que tras hacer $y=xv$ y dividir por x^{n-1} se llega al sistema:

$$\begin{cases} x' = x^{1-n} f(x,xv) & = xA(1,v) + o(x) \\ v' = x^{-n} [g(x,xv)-vf(x,xv)] & = [B(1,v)-vA(1,v)] + x^{p-n}[B^p(1,v)-vA^p(1,v)] + o(x^{p-n}) \end{cases}$$

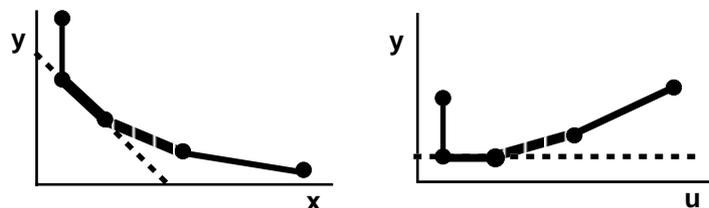
Observemos además que dos términos $ax^r y^{q-1}$ (de f) y $bx^{r-1} y^q$ (de g) que proporcionan un mismo punto $(b-sa)x^r y^q$ del diagrama de Newton asociado a [S] dan lugar tras el blow-up a otro par de términos: $ax^{r+q-n} v^{q-1}$ y $(b-a)x^{r+q-n-1} v^q$ que también van al mismo punto del segundo diagrama: $[b-(s^*+1)a]x^{r+q-n} v^q$, situado a la misma altura que el inicial. La poligonal se transforma en otra poligonal convexa en la que los segmentos de pendiente $-1/s_k$ han pasado a ser de pendiente

$$-\frac{1}{s^*_k} = -\frac{1}{s_k-1}$$

(es decir, como era previsible ya que $y=xv$, las variedades $y=mx^{s_k} + \dots$ dan lugar a otras de la forma $v=m^*x^{s_k-1} + \dots$). En particular, los términos homogéneos de grado n están en el diagrama xv sobre un segmento vertical de $x=1$.



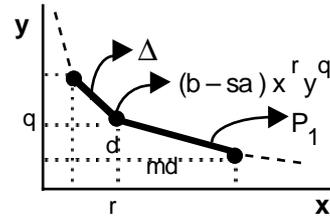
(Cambiando papeles se analiza igual el cambio $x=uy$: ahora se mantiene la primera coordenada y los términos homogéneos se colocan en horizontal)



En la larga demostración del teorema consideraremos varias etapas, empezando por la más sencilla:

a) Supongamos primero que el primer segmento después del de pendiente -1 es de pendiente $-1/m$, con m entero. Sean $ax^r y^{q-1}$, $bx^{r-1} y^q$ los términos que proporcionan el punto común a ambos segmentos, es decir:

$$\Delta = \dots + (b-a) x^r y^q \quad (r+q=n+1) \quad , \quad P_1(x,y) = (b-ma) x^r y^q + \dots$$

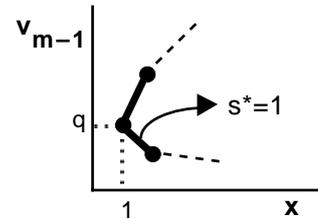


ordenados en potencias decrecientes de y . Realicemos en $[S]$ $m-1$ blow-ups sucesivos $y=xv_1, \dots, v_{m-2}=xv_{m-1}$ (entonces $y=x^j v_j, j=1, \dots, m-1$). Se obtienen los sistemas

$$[S_j] \quad \begin{cases} x' = axv_j^{q-1} + \dots \\ v_j' = (b-ja)v_j^q + \dots \end{cases} \quad \text{para los que} \quad \Delta_j \equiv xB - v_j A = [b-(j+1)a]xv_j^q, \quad j=1, \dots, m-2$$

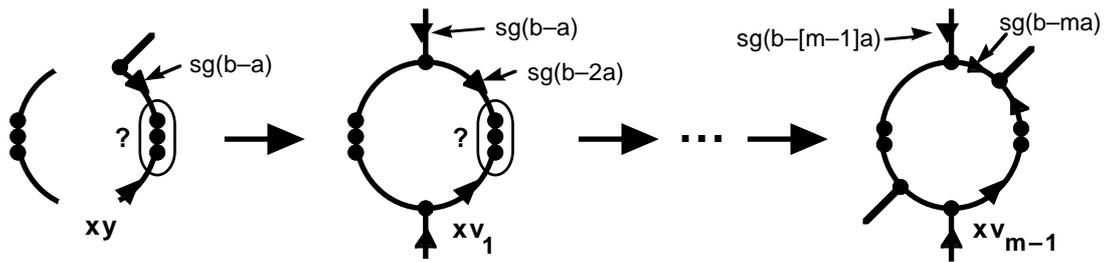
con lo que $x=0$ es variedad simple en todos ellos (si $b \neq (j+1)a$) y el flujo sobre ella viene dado por $(b-ja)v_j^q$ (si $b \neq ja$) [seguimos llamando A y B a los homogéneos de menor orden, que no son los de antes].

Para $j=m-1$ hay un segmento entero de pendiente -1 para el que $\Delta_{m-1} = (b-ma)xv_{m-1}^q + \dots$. Las raíces simples $v_{m-1} = m_j x$ (o con $A(1, m_j) \neq 0$) de este polinomio nos dan las variedades $y = m_j x^m + \dots$ del teorema 5.1. Si aplicando el teorema 3.2 a $[S_{m-1}]$ la estructura de $(x, v_{m-1}) = (0, 0)$ queda determinada, también lo estará la estructura de las órbitas de $[S]$ cerca de $y=0$, como desarrollaremos a continuación. Si

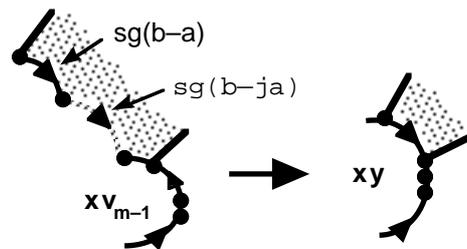


$v_{m-1}=0$ sigue siendo múltiple (de menor multiplicidad que $y=0$ en $[S]$) con $\lambda=0$ habría que repetir el proceso hasta terminar el análisis.

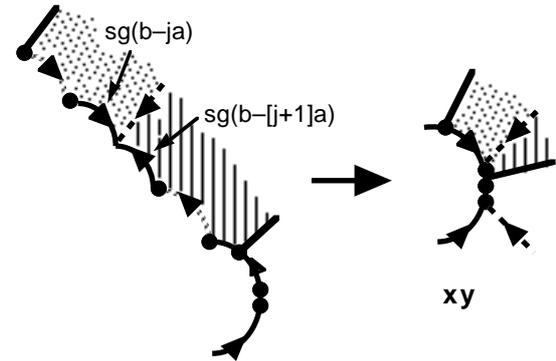
i) Si $b/a \notin [1, m]$ (o si $a=0$) todos los números $(b-a), \dots, (b-ma)$ tienen el mismo signo:



y por tanto, todos los puntos con $x=0$ son sillas y las posibles variedades que lleguen al origen con pendiente cero son al menos $O(x^m)$. Bastará orientar estas $y = m_j x^m + \dots$ y llevarlas a la circunferencia inicial (el flujo vertical entre ellas se deduce del de Δ ; será distinto arriba y abajo si son simples, si múltiples, dependerá de la paridad).

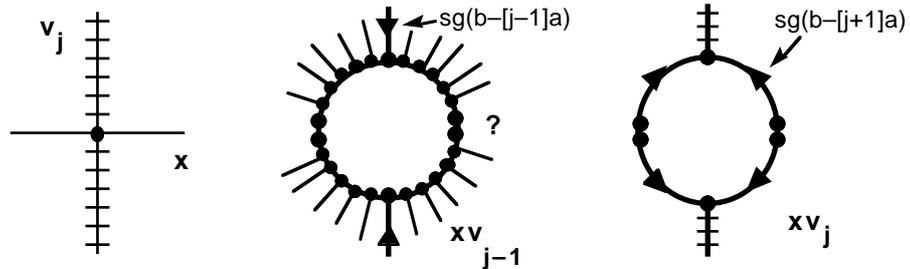


ii) Si $b/a \in (j, j+1)$ con $1 \leq j \leq m-1$, el sistema $[S_j]$ poseerá un nodo asociado a $x=0$ (y para los demás j una silla). Hay variedades $y=O(x^j)$ no asociadas a ningún segmento de la poligonal [haciendo $y=x^{b/a}v$ se puede ver que son del tipo $y=O(x^{b/a})$]. Se vuelve a tener toda la información con sólo el signo de Δ y las variedades $y=O(x^m)$ orientadas si dibujamos además estas variedades asociadas a nodos en los cuatro cuadrantes (basta invertir a partir de ellas los flujos verticales).



iii) Si $b/a = j$, $j=2, \dots, m-1$, es $\Delta_{j-1} \equiv 0$ pero vemos que hay infinitas variedades $y=O(x^j)$:

$$y=x^j v_j \rightarrow \begin{cases} x' = axv_j^{q-1} + O(x^2) \\ v_j' = O(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = av_j^{q-1} + O(x) \\ v_j' = O(1) \end{cases}$$



los puntos de $x=0$ (salvo el origen) no son críticos y las órbitas de este último sistema cortan dicho eje [cada una de ellas es del tipo $v_j=O(1)$]. Toda la información se puede plasmar sólo en la circunferencia, como en el caso anterior (no olvidando las variedades $O(x^j)$ orientadas según indica Δ).

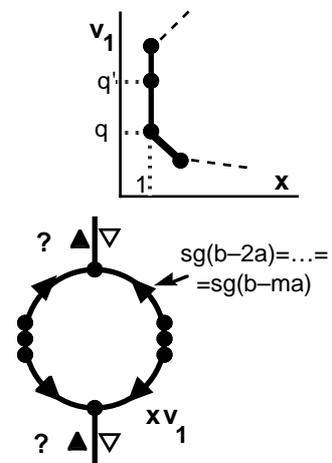
En los dos siguientes casos ('se va' un ángulo de la poligonal) no basta el signo de Δ :

iv) Si $b=a$ entonces:

$$\Delta = \dots + cx^{r'}y^{q'} + 0 \cdot x^r y^q \pm 0 \quad \text{con } r' < r, q' > q, r+q=r'+q'$$

$$\Delta_1 = (b-2a) xv_1^q + \dots$$

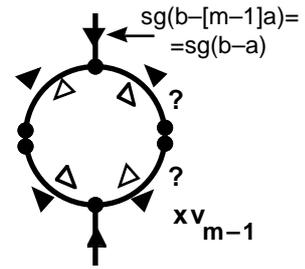
y $x=0$ sigue siendo simple (silla, nodo o silla-nodo), pero ahora la orientación de dicho eje (que depende de c, r', q') no tiene relación con la de la circunferencia (que depende de $b=a$ y q). Es necesario también determinar el $sg\Delta_1$ [= $sg\Delta_{m-1}$]. Los demás puntos de empalme no tienen problema. Son puntos silla y no hay otras variedades hasta las $y=O(x^m)$ que puedan llegar al origen.



v) Si $b = ma$, los puntos de empalme son sillas hasta el último:

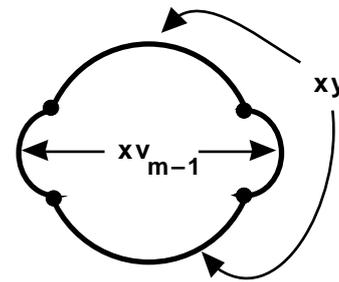
$$\begin{cases} x' = axv_{m-1}^{q-1} + \dots \\ v_{m-1}' = av_{m-1}^q + \dots \end{cases} \rightarrow \Delta_{m-1} = 0.xv_{m-1}^q + cx^{r''}v_{m-1}^{q''} + \dots$$

$r'' > 1, q'' < q, q+1 = r'' + q'', P_1 \neq 0$



$x=0$ es raíz múltiple, pero $B(0,1) \neq 0$, con lo que el punto sigue siendo simple y su estructura queda determinada por la orientación de $x=0$ (que continúa la de Δ) y por c, r'', q'' .

En estos dos últimos casos es necesario precisar el signo de Δ_{m-1} , pero no el de los demás Δ_j . Toda la información se puede esquematizar en la circunferencia inicial ampliada con dos semicircunferencias. Para trabajar en la de la izquierda habría que considerar en principio las paridades de las diferentes potencias, ya que puede haber cambios de cuadrantes y de orientación. Pero veamos que esto se puede suplir con el sencillo análisis del signo de P_1 .



En vez de v_{m-1} consideremos v_m ($v_{m-1} = xv_m$) que nos da los mismos datos más claramente. Haciendo el conocido cambio $y = x^m v_m$ obtenemos:

$$\begin{cases} x' = f(x, x^m v_m) = ax^{r+(q-1)m} v_m^{q-1} + \dots \\ v_m' = x^{-m} g(x, x^m v_m) - mx^{-1} v_m f(x, x^m v_m) = [b-ma] + x^{r+(q-1)m-1} v_m^q + \dots \end{cases}$$

y dividiendo por $x^{r+(q-1)m-1}$ se tiene:

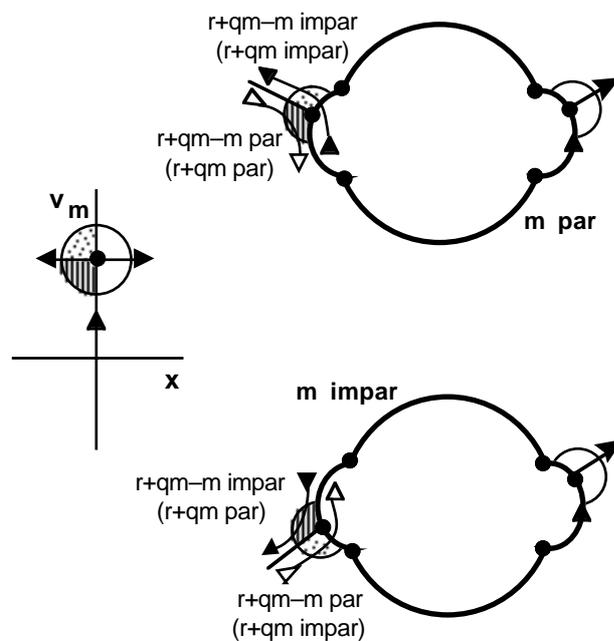
$$\begin{cases} x' = xP_{1f}(1, v_m) + O(x^2) \\ v_m' = P_1(1, v_m) + O(x) \end{cases}$$

Para volver a xy ($y = x^m v_m$):

si m es par los cuadrantes se conservan; si m es impar hay cambio entre segundo y tercer cuadrantes. Si $r+qm-m$ es impar [par] no [si] hay cambio de orientación en las variedades de la izquierda y en la semicircunferencia. Las raíces reales de $P_1(x,y)=0$ nos dan las mismas variedades asociadas a los mismos puntos. El flujo sobre ella también coincide pues lo da:

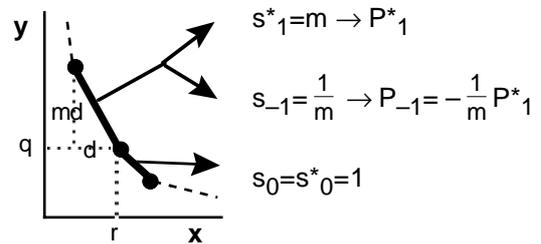
$$P_{1f}(x, m; x^m) = O(x^{r+m(q-1)})$$

Como $P_1(x, cx^m) = P_1(1, c) x^{r+qm}$, la orientación de la semicircunferencia izquierda depende de la misma forma que antes de la paridad de $r+qm$.



b) Si el segmento anterior al de pendiente -1 es de pendiente $-m$, la discusión anterior es válida cambiando los papeles de x e y :

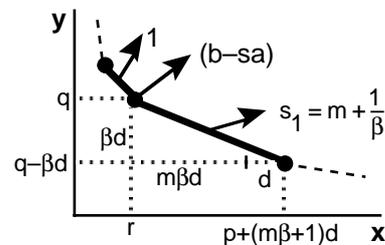
Hay variedades $x=m_i y^m + \dots$ con $P^*_1(m_i, 1)=0$, llamando $P^*_1(x, y)$ a aquellos términos de $H^*_m(x, y) = yf - mxg$ que dan puntos sobre el segmento considerado; otras variedades, no dadas por la poligonal, pueden aparecer cuando $a/b \in [1, m]$; en ocasiones habrá que considerar también el signo de P^*_1 .



[los cálculos anteriores son equivalentes a buscar variedades $y = (\frac{x}{m_i})^{1/m} + \dots$ con $P_{-1}(1, \frac{1}{m_i})=0$, siendo $P_{-1}(x, y)$ términos sobre un segmento de $H_{1/m}(x, y) = xg - \frac{1}{m} yf$, teniendo cuidado si $\frac{b}{a} \in [\frac{1}{m}, 1]$ y considerando a veces el signo de P_{-1}].

c) Sea $s_1 = m + \frac{1}{\beta}$, m, β enteros, $m \geq 1, \beta \geq 2$.

m blow-ups verticales $y = xv_1, \dots, v_{m-1} = xv_m$ ($y = x^m v_m$), transforman el segmento en uno de pendiente $-\beta$. Las orientaciones de las diferentes variedades $x=0$ de los sistemas en xv_j vienen dadas por $b - ja$.



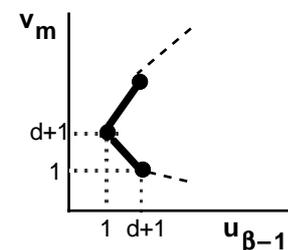
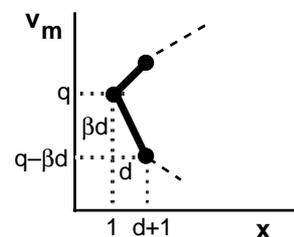
Para
$$\begin{cases} x' = axv_m^{q-1} + \dots \\ v_m' = (b-ma)v_m^q + \dots \end{cases}$$

$x=0$ pasa a ser de multiplicidad igual o mayor que βd (pero menor o igual que q). Hacemos entonces $x = v_m u_1, \dots, v_{\beta-2} = v_m u_{\beta-1}$ ($x = v_m^{\beta-1} u_{\beta-1}$) para llegar a

$$\begin{cases} u_{\beta-1}' = [a - (\beta-1)(b-ma)]u_{\beta-1}v_m^d + \dots \\ v_m' = (b-ma)v_m^{d+1} + \dots \end{cases}$$

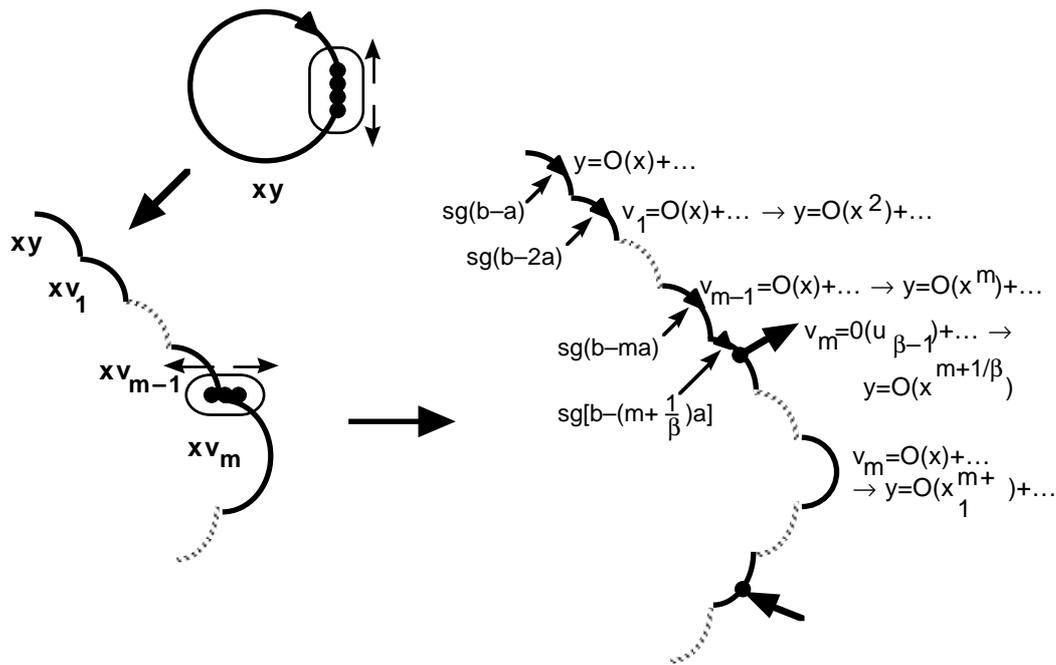
con $u_{\beta-1} B - v_m A = \beta [b - (m+1/\beta)a] u_{\beta-1} v_m^d + \dots$, cuyas raíces reales $v_m = m_i u_{\beta-1} + \dots$ nos proporcionan las ramas de $[S]$ de la forma

$$y^\beta = m_i x^{m\beta+1} + \dots$$



Hagamos ahora un análisis de los puntos de empalme similar al del caso a).

Si se tiene $b/a \notin [1, m+1/\beta]$, $sg(b-a) = \dots = sg(b-ma) = sg[b - (m+1/\beta)a]$, esquematizando los blow-ups anteriores tenemos:



obtenemos que son sillas todos los puntos de empalme entre las xv_j y entre xv_{m-1} y uv_m .

Si $b/a \in (1, m+1/\beta)$ además aparecen otras variedades $y = O(x^{b/a})$ asociadas a nodos.

En ambos casos con el signo de Δ y las variedades orientadas nos basta.

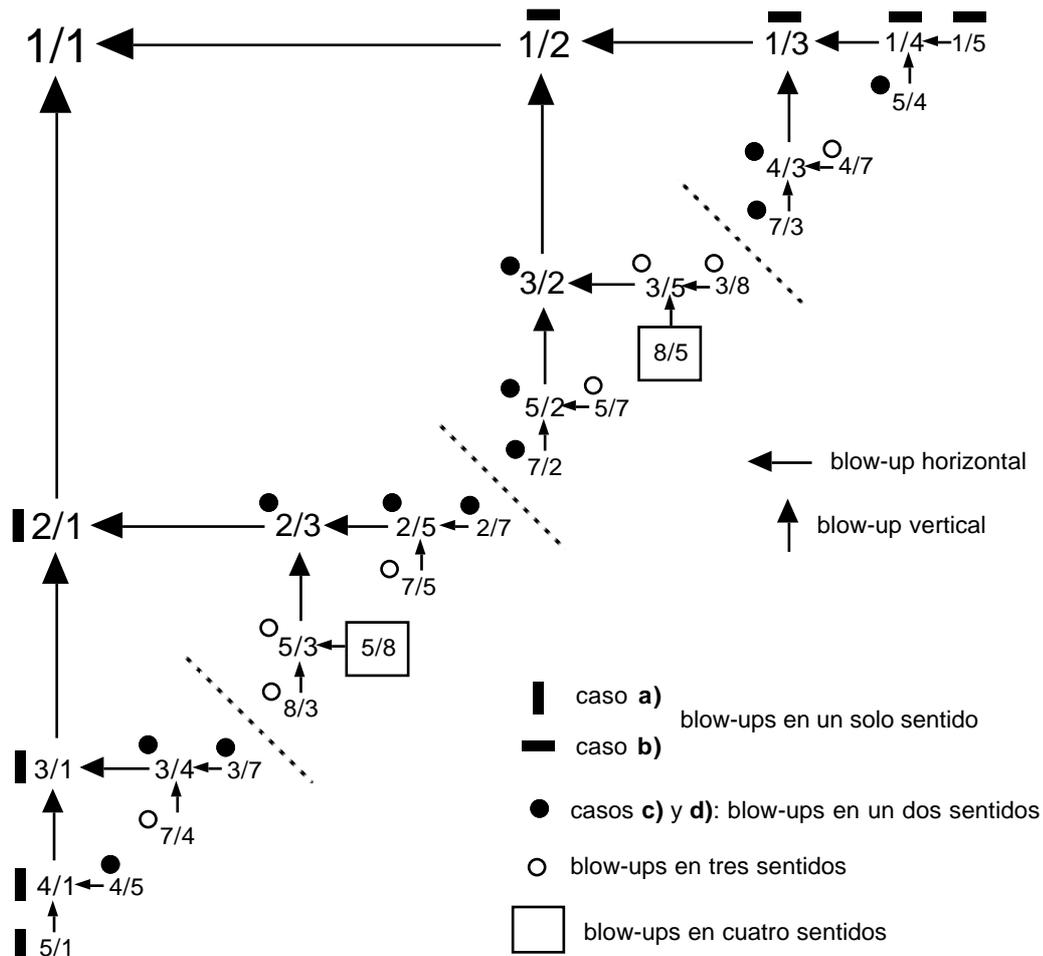
Pero si $b = a$ ó $b = (m+1/\beta)a$, es necesario conocer el signo de P_1 .

Todo se podría justificar con detalle como en el caso **a**).

d) Si $s_{-1} = \frac{1}{m+1/\beta}$, es el caso **c**) si cambiamos los papeles de x e y .

e) Sea $s_1 = \frac{\omega}{\beta}$, $\omega > \beta$ (ó $s_{-1} = \frac{\omega}{\beta}$ con $\omega < \beta$).

Para los casos **a)** y **b)** bastaba, respectivamente, un blow-up vertical de la forma $y=x^j v_j$ (o bien j blow-ups elementales del tipo $y=xv$) o uno horizontal $x=y^k u_k$ para convertir el segmento inicial en otro de pendiente -1 . En los casos **c)** y **d)** había que hacer primero un blow-up en un sentido (o varios elementales) y luego otro en el opuesto. Está claro que, en general, para conducir un segmento de pendiente $-\beta/\omega$ a otro de pendiente -1 bastará un número finito de blow-ups horizontales o verticales, realizados en el orden adecuado. Comencemos precisando los valores de ω/β que exigen un número menor del blow-ups elementales para conseguirlo. Así, basta uno vertical si $s_1=2$; uno horizontal si $s_1=1/2$; dos verticales si $s_1=3$, ... Prosiguiendo el estudio se acaba construyendo el siguiente esquema en el que se indican los blow-ups elementales necesarios para todos los ω/β que exigen un número de ellos menor o igual que 4:



Los que exigirían 5 blow-ups elementales (escritos de abajo a arriba) son los siguientes:

$$\frac{6}{1}, \frac{5}{6}, \frac{9}{5}, \frac{4}{9}, \frac{11}{4}, \frac{7}{11}, \frac{10}{7}, \frac{3}{10}, \frac{11}{3}, \frac{8}{11}, \frac{13}{8}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}, \frac{7}{12}, \frac{9}{7}, \frac{2}{9},$$

$$\frac{9}{2}, \frac{7}{9}, \frac{12}{7}, \frac{5}{12}, \frac{13}{5}, \frac{8}{13}, \frac{11}{8}, \frac{3}{11}, \frac{10}{3}, \frac{7}{10}, \frac{11}{7}, \frac{4}{11}, \frac{9}{4}, \frac{5}{9}, \frac{6}{5}, \frac{1}{6}.$$

Entre ellos, bastan blow-ups (no elementales) en un sentido para: $\frac{6}{1}, \frac{1}{6}$.

En dos sentidos para: $\frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{3}{10}, \frac{2}{9}, \frac{9}{2}, \frac{10}{3}, \frac{9}{4}, \frac{6}{5}$.

En tres: $\frac{9}{5}, \frac{11}{4}, \frac{10}{7}, \frac{11}{3}, \frac{12}{5}, \frac{9}{7}, \frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{3}{11}, \frac{7}{10}, \frac{4}{11}, \frac{5}{9}$.

En cuatro: $\frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{5}{13}, \frac{7}{12}, \frac{12}{7}, \frac{13}{5}, \frac{11}{8}, \frac{11}{7}$.

En cinco: $\frac{13}{8}, \frac{8}{13}$.

A cada pareja de nuevas variables u_i, v_j corresponde una circunferencia (orientada por $u_i B - v_j A$) y las posibles variedades $v_j = O(u_i) + \dots$ nos darían, deshaciendo los cambios, otras $y = O(x^{f_{ij}}) + \dots$ en las variables originales. Como sucedía en los casos **c)** y **d)** algunas de estas r_{ij} son mayores y otras menores que ω/β .

Si expresamos ω/β como una "fracción continua" del tipo presentado en el dibujo, se puede comprobar que el número de blow-ups necesario para llegar al segmento de pendiente -1 es igual al número de signos $+$ que aparecen; que el número de "pisos" de la fracción da el número de sentidos; que los exponentes asociados a los sucesivos segmentos de la poligonal en los que se transforma el segmento inicial se obtienen eliminando unos desde la izquierda hasta llegar a 1; que todos los r_{ij} aparecen eliminando unos desde la derecha.

$$\frac{\omega}{\beta} = 1 + \dots + 1 + \frac{1}{1 + \dots + 1 + \frac{1}{\dots + 1 + \frac{1}{1 + \dots + 1}}}$$

Por ejemplo, escribamos así $\frac{10}{7}$. Se tiene que:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}$$

como hay 5 signos $+$ son necesarios 5 blow-ups, que serán en tres sentidos por tener tres pisos la fracción; los diferentes exponentes asociados a los sucesivos segmentos son:

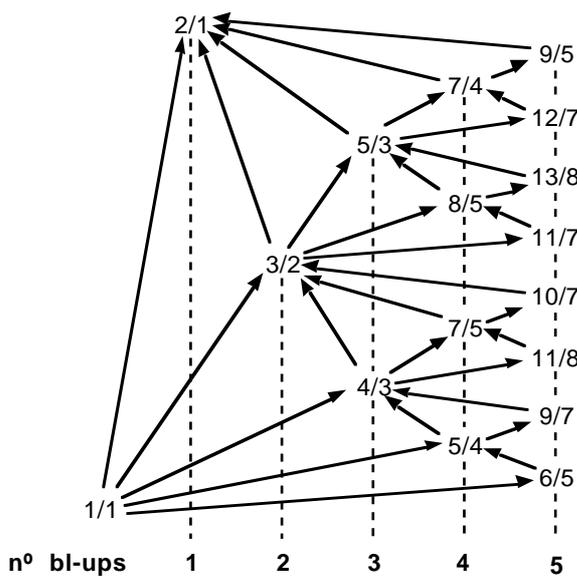
$$\frac{10}{7} ; \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}} = \frac{3}{7} ; \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}} = \frac{3}{4} ; \frac{1}{1 + 1} = \frac{3}{1} ; \frac{1}{1} = \frac{2}{1} ; \frac{1}{1}$$

los correspondientes r_{ij} :

$$\frac{10}{7} ; 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}} = \frac{7}{5} ; 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{4}{3} ; 1 + \frac{1}{1 + 1} = \frac{3}{2} ; 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} ; \frac{1}{1}$$

Ordenando estos r_{ij} : $\frac{1}{1} < \frac{4}{3} < \frac{7}{5} < \frac{10}{7} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}$, se puede observar que cada una de las fracciones centrales se puede obtener a partir de las dos contiguas:

$$\frac{4}{3} = \frac{1+7}{1+5} ; \frac{7}{5} = \frac{4+10}{3+7} ; \frac{10}{7} = \frac{7+3}{5+2} ; \frac{3}{2} = \frac{10+2}{7+1} \quad \left[\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{b_{n-1}+b_{n+1}} \right]$$



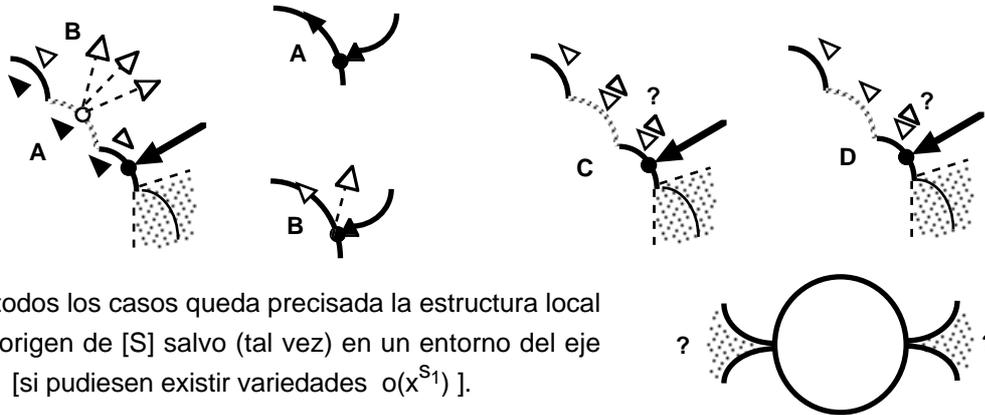
El esquema de la izquierda nos indica para todas las ω/β ($\in [1,2]$ por brevedad) con número de blow-ups menor o igual que 5 todos los r_{ij} que aparecen, ordenados en orden creciente (dado un ω/β se siguen las flechas de pendiente positiva desde $1/1$ hasta llegar a él; luego las de pendiente negativa hasta $2/1$; las fracciones que se han ido encontrando nos dan los r_{ij} ordenados).

Con mayores complicaciones técnicas se podría comprobar que la situación para este caso **e)** es similar a los anteriores:

Si $b/a \notin [1, s_1]$ (**A**) todos los puntos de empalme hasta las variedades $O(x^{s_1})$ son sillas, pues el signo de $b-r_{ij}a$, $r_{ij} \leq s_1$, coincide con el de $b-a$.

Si $b/a \in (1, s_1)$ (**B**) existen las infinitas variedades $O(x^{b/a})$ (en los cuatro cuadrantes).

Si $b=a$ (**C**) ó $b=s_1a$ (**D**) debemos esquematizar también el signo de P_1 .



En todos los casos queda precisada la estructura local del origen de $[S]$ salvo (tal vez) en un entorno del eje $y=0$ [si pudiesen existir variedades $o(x^{s_1})$].

[Observemos que de forma mucho más rápida llegaríamos a precisar la estructura de las órbitas de la forma $y=O(x^{\omega/\beta})$ realizando, en vez de los sucesivos blow-ups, directamente el cambio $x=u^\beta$, $y=u^\omega v$ del teorema 5.1, pero entonces no tendríamos información sobre posibles variedades $O(x^z)$ con $1 < z < \omega/\beta$. Para completar esta información podríamos considerar los sistemas que se obtienen haciendo $y=x^z v_z$ (ó $y=[-x]^z v_z$) para todo $1 < z < \omega/\beta$:

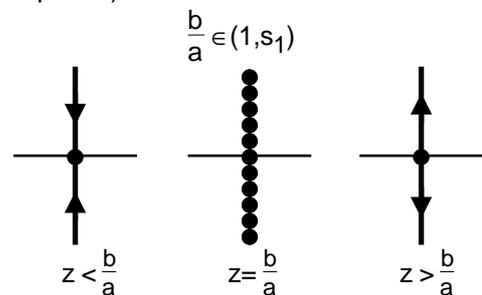
$$\begin{cases} x' = f(x, x^z v_z) \\ v_z' = x^{-z} g(x, x^z v_z) - z x^{-1} v_z f(x, x^z v_z) \end{cases}$$

sistemas que, en general, tendrán exponentes irracionales. Dividiendo por la menor potencia de x ambos segundos miembros (nos la proporcionan los términos derivados de los de coeficientes a y b) se obtiene un sistema (nada regular) para el que $x=0$ es órbita (o unión de ellas). Si $b/a \notin [1, s_1]$, no hay puntos críticos (salvo el origen) en dicho eje, que está orientado para todo z de la misma forma (e igual a la orientación dada por Δ).

Si $b/a \in (1, s_1)$, para $z < b/a$ la situación es la anterior, pero para $z = b/a$, $x=0$ pasa a ser un conjunto de puntos críticos, que desaparecen cuando $z > b/a$ habiendo cambiado la orientación del eje.

Si $b=a$, todos los ejes $x=0$ tienen la misma orientación, pero es independiente de la de $y=xv$.

Si $b=s_1a$, las orientaciones son iguales para todo $z < b/a$, pero no se continúan con las de $y=x^{s_1} v_{s_1}$.



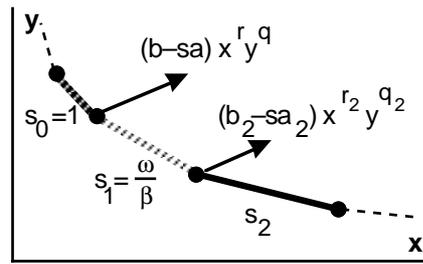
Precisando algo las ideas anteriores se podría dar tal vez una demostración más rápida de lo visto hasta ahora].

f) Si no hemos terminado el análisis con P_1 [ó P_{-1}], es decir, si $y=0$ es raíz múltiple de

$$P_1(x,y) = (b-s_1a)x^r y^q + \dots + (b_2-s_1a_2)x^{r_2} y^{q_2}$$

y $P_{1f}(x,0) \equiv 0$ (debe ser $q_2 \geq 2$). Entonces

$$P_2(x,y) = (b_2-s_2a_2)x^{r_2} y^{q_2} + \dots \text{ con } q_2 \geq 2.$$



Tras hacer $x=u^\beta$, $y=u^{\omega-1}v$ el sistema [S] se convierte en otro [S*] cuya poligonal está formada por segmentos asociados ahora, como es fácil comprobar, a $s^*_k = \beta s_k - \omega + 1$.

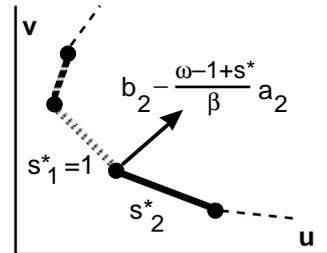
En particular, el segmento de Δ pasa a tener pendiente positiva o ser vertical y el asociado a P_1 se ha convertido en uno de pendiente -1 asociado al polinomio homogéneo:

$$\Delta^* \equiv uB - vA = u [(b-s_1a)v^q + \dots + (b_2-s_1a_2)u^{q-q_2} v^{q_2}]$$

cuyas raíces reales $v = m_{i1}u$ nos dan variedades $y = O(x^{s_1})$.

Al sistema [S*] le podemos aplicar lo visto en apartados anteriores. Los términos que dan lugar al nuevo ángulo son:

$$[S^*] \begin{cases} u' = \dots + \frac{1}{\beta} a_2 u^{q-q_2+1} v^{q_2-1} + \dots \\ v' = \dots + (b_2 - \frac{\omega-1}{\beta} a_2) u^{q-q_2} v^{q_2} + \dots \end{cases}$$



Ahora el papel de P_1 lo cumple el polinomio asociado a $s^*_2 = \beta s_2 - \omega + 1$ que es:

$$P^*_2(u,v) = (b_2-s_2a_2) u^{q-q_2+1} v^{q_2} + \dots$$

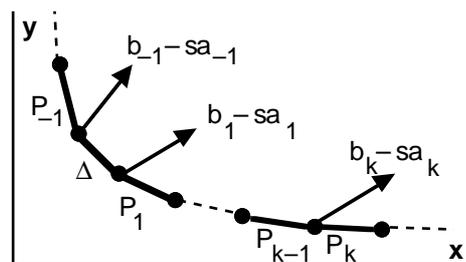
Las raíces reales simples de este polinomio nos dan variedades $y = O(x^{s_2}) + \dots$ de [S]. La orientación de la circunferencia asociada a P_2 lejos de $v=0$ nos la da el signo de $(b_2-s_2a_2)$.

Por lo tanto, si $b_2/a_2 \notin [s_1, s_2]$, conocido el signo de P_1 y orientadas las variedades $O(x^{s_2})$, el análisis [salvo tal vez para $y = o(x^{s_2})$] está acabado. Si $b_2/a_2 \in (s_1, s_2)$, aparecen nuevas variedades. Si $b_2 = s_1 a_2$ ó $b_2 = s_2 a_2$ es necesario además el signo de P_2 .

El estudio anterior de las variedades $O(x^{s_2})$ nos serviría par las $O([-x]^{s_2})$, cambiando x por $-x$. También se haría para P_{-2} si fuera necesario.

Repitiendo el proceso un número finito de veces queda resuelto el análisis local del origen de [S] en las hipótesis del teorema 5.2.

Como hemos visto en el proceso de demostración, para ver cómo son las órbitas entre dos de las variedades dadas por el teorema 5.1 no necesitamos analizar el signo de todos los P_k ya que la orientación vertical que nos proporcionarían hereda (excepto en los casos descritos ligados al valor de los b/a) la dada por el Δ . También nos basta el Δ si estamos en una situación como la B de la página anterior. Podemos, pues, dar un enunciado mejorado del teorema 5.2 (en él, \bullet representa tanto los i, j de dicho teorema como los k y $-k$ del dibujo de la derecha):



Teorema 5.3

Si todos los $P_{\bullet}(x,y) \neq 0$ y todas las raíces reales $y = m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}$ e $y = m_{\bullet\bullet}[-x]^{s_{\bullet}}$ de cada $P_{\bullet}(x,y) = 0$ (con $m_{\bullet\bullet} \neq 0$) son simples o con $P_{\bullet f} \neq 0$ y $b_{\bullet}/a_{\bullet} \neq s_{\bullet}$, $s_{\bullet-1} \neq s_{\bullet+1}$ ($\bullet > 0$ [$\bullet < 0$]) $\forall \bullet$, entonces todas las variedades que llegan al origen son de la forma $y = m_{\bullet\bullet}|x|^{s_{\bullet}+...}$ e $y = O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ para cada b_{\bullet}/a_{\bullet} comprendido entre los s_{\bullet} contiguos. Además, la estructura local de $\mathbf{0}$ queda determinada por:

- el flujo sobre cada variedad
- el signo de Δ y el signo de los P_{\bullet} para los que $b_{\bullet}/a_{\bullet} = s_{\bullet}$ ó $s_{\bullet-1} \neq s_{\bullet+1}$ ($\bullet > 0$ [$\bullet < 0$])

[el flujo sobre $y = m_{\bullet\bullet}|x|^{s_{\bullet}+...}$ vendrá dado por $x' = P_{\bullet f}(x, m_{\bullet\bullet}|x|^{s_{\bullet}})$ [ó $y' = P_{\bullet g}(|y/m_{\bullet\bullet}|^{1/s_{\bullet}}, y)$]; sobre las $y = O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ nos la proporciona el hecho de que están asociadas a nodos].

Repasemos como utilizar este teorema (y el 3.2) en la práctica para analizar la estructura del origen si éste no es simple. Dado el sistema [S], comenzaremos escribiendo Δ , hallando sus raíces, representando los puntos asociados a cada una de ellas sobre una circunferencia y orientando ésta a partir del signo de Δ . Si Δ no tuviese raíces reales, para distinguir entre centro y foco acudiríamos a las técnicas del capítulo 4 (y también a las del 5 si fuese $n=3$). Si existen raíces reales $y=mx$ de Δ y todas son simples o con $A(1,m) \neq 0$, el teorema 3.2 basta para concluir el análisis (tras calcular, tal vez, algún término más del desarrollo de las posibles variedades simples con $A(1,m)=0$).

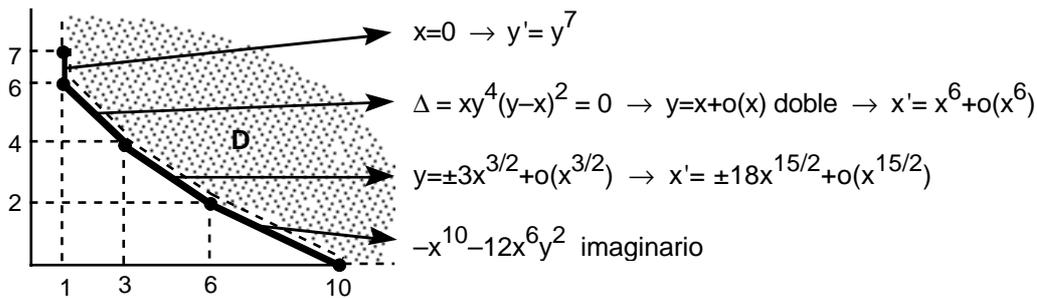
Si $y=0$ ó $x=0$ son raíces múltiples con autovalor cero el análisis se proseguirá utilizando el teorema 5.3 [si fuese $y=mx$, $m \neq 0$ la raíz problemática, haciendo $z=y-mx$ se reduciría al caso $z=0$ (aunque en ocasiones el cálculo de algún término más del desarrollo de las órbitas podría representar un atajo)]. Para ello dibujaremos la poligonal (que puede ser útil también para hallar términos de variedades centro horizontales y verticales al aplicar el teorema 3.2) y calcularemos las raíces $y = m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}$ e $y = m_{\bullet\bullet}[-x]^{s_{\bullet}}$ de cada $P_{\bullet}(x,y)=0$. Si todas son simples o con $P_{\bullet f} \neq 0$ las esquematizaremos sobre el punto horizontal (si $s_{\bullet} > 1$) o el vertical (si $s_{\bullet} < 1$) y las orientaremos (con $x' = P_{\bullet f}(x, m_{\bullet\bullet}|x|^{s_{\bullet}})$), o calculando algún término más de la variedad si es simple con $P_{\bullet f} \neq 0$. Miraremos a continuación los valores de b_{\bullet}/a_{\bullet} (esto será innecesario si sólo hay un segmento, o si no existen dos términos distintos asociados a ningún ángulo). Si b_{\bullet}/a_{\bullet} no pertenece al intervalo cerrado determinado por los s_{\bullet} contiguos para ningún \bullet (sin olvidar el $s=1$ del Δ que podría reducirse a un punto) sólo las variedades $y = m_{\bullet\bullet}|x|^{s_{\bullet}}$ llegan al origen y se puede dibujar la forma de las órbitas entre ellas a partir del signo del Δ . Para los b_{\bullet}/a_{\bullet} estrictamente comprendidos entre los s_{\bullet} contiguos añadiremos además las variedades $O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ asociadas a nodos (y tendremos en cuenta que los flujos verticales se invierten a partir de ellas). Con esto se acaba el análisis salvo en el caso excepcional de que 'se vaya' algún ángulo de la poligonal. En ese caso será preciso además esquematizar el signo del P_{\bullet} correspondiente.

El teorema 5.3 no dice todo sobre la estructura de $\mathbf{0}$ en las siguientes situaciones excepcionales: si existen $m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}$ ó $m_{\bullet\bullet}[-x]^{s_{\bullet}}$, $m_{\bullet\bullet} \neq 0$ múltiples con $P_{\bullet f} = 0$, si es algún $P_{\bullet} \equiv 0$ (en particular si $\Delta \equiv 0$) o si no existen variedades reales que lleguen al origen, en cuyo caso dicho punto es evidentemente o **centro** o **foco**. La sección 5.4 está dedicada al estudio de las dos últimas situaciones. En ella se darán ideas sobre los cálculos adicionales que exigirá la primera si se quieren evitar los blow-ups.

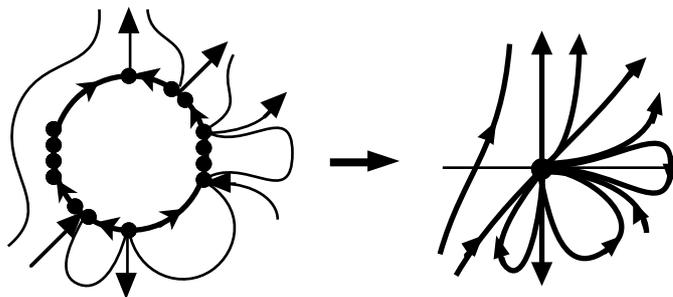
5.3. Aplicando los teoremas.

Estudiemos varios ejemplos para comprobar la eficacia de los teoremas de la sección 5.2. En el primero estamos en las hipótesis del teorema 5.3 y la poligonal nos dice todo:

Ejemplo 6. $\begin{cases} x' = 2x^2y^4 - xy^5 + 6x^6y \\ y' = x^2y^4 - x^9 + y^7 \end{cases} \rightarrow H_S(x,y) = x^3y^4 - x^{10} + xy^7 - 2sx^2y^5 + sxy^6 - 6sx^6y^2 = 0$



Con todo lo anterior tenemos:



Observemos que la anterior estructura local del origen se mantendría para cualquier sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x^2y^4 - xy^5 + 6x^6y + R_f(x,y) \\ y' = x^2y^4 - x^9 + y^7 + R_g(x,y) \end{cases}$$

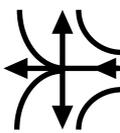
obtenido perturbando el anterior con términos R_f y R_g que aporten puntos al diagrama que estén situados en la región convexa D limitada por la poligonal (que no está incluida en D , aunque sí lo están las dos semirrectas $\{y=0, x>10\}$ y $\{x=1, y>7\}$). Sólo en aquellos sistemas para los que existan variedades con $P_{\bullet}f=0$ (en particular, con $\Lambda_i=0$) serán relevantes los términos que caigan en D para determinar el flujo sobre ellas. Esto es lo que ocurría en el ejemplo 3.b de la sección 5.1 (allí era $\Lambda_0=0$ y a la variedad doble $y = -x^2 + \dots$ estaba asociado $P_f(1,-1)=0$).

Ejemplo 7. Clasificamos localmente los sistemas cuadráticos para los que el origen sea punto crítico aislado, no elemental y con aproximación lineal no nula. Suponemos que la parte lineal está escrita ya en forma canónica, así que los sistemas a clasificar son:

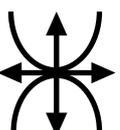
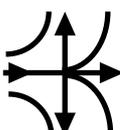
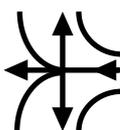
$$[Q1] \begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = y + dx^2 + exy + fy^2 \end{cases} \quad y \quad [Q2] \begin{cases} x' = y + ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = dx^2 + exy + fy^2 \end{cases}$$

Para [Q1] basta analizar el flujo sobre la variedad centro $y = -dx^2 + d(e-2a)x^3 + O(x^4)$

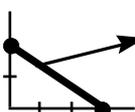
dato por: $x' = ax^2 - bdx^3 + d(cd+be-2ab)x^4 + O(x^5)$

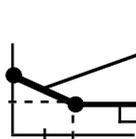
Si $a \neq 0$ tenemos pues un silla-nodo en el origen: $a > 0$  $a < 0$ 

Sea ahora $a=0$. Si además $d=0$ es $y=0$ una recta de puntos críticos. Si $a=b=c=0$ el origen no es punto crítico aislado. Para el resto de casos:

$bd > 0$ silla  $bd < 0$ nodo  $b=0, d \neq 0, c > 0$ silla-nodo  $b=0, d \neq 0, c < 0$ silla-nodo 

Para [Q2] $\rightarrow \Delta = -y^2 \rightarrow$  La poligonal nos da:

Si $d \neq 0$:  $sy^2 = dx^3$, simples

Si $d = 0$:  $y = (\frac{e}{2} - a)x^2 + \dots \rightarrow x' = \frac{e}{2}x^2 + \dots$
 $y = 0 \rightarrow x' = ax^2 + \dots$

Estas últimas variedades ($d=0$) son simples salvo si $e=2a$ (entonces $y=0$ es doble, pero $P_f(x,0) = ax^2 \pm 0$ [ya que si $a=d=0$, $y=0$ está formado por puntos críticos]). El flujo queda determinado salvo si $d=e=0$. Entonces necesitamos calcular un término más, obteniendo:

$$y = -ax^2 + a(b - \frac{f}{2})x^3 + \dots \rightarrow x' = -\frac{af}{2}x^3 + \dots$$

que ya determina el flujo (si $d=e=f=0$, el origen no sería aislado). Con todo lo anterior:

$d > 0$  $d < 0$  ángulos

$d = 0, a > 0$

$e < 0$  silla

$e \in (0, 2a]$  medusas

$e > 2a$ 

$e = 0$

$f > 0$  silla-nodos

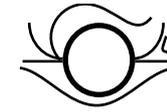
$f < 0$ 

$d = 0, a < 0$

$e < 0$ 

$e \in (0, 2a]$ 

$e > 2a$ 

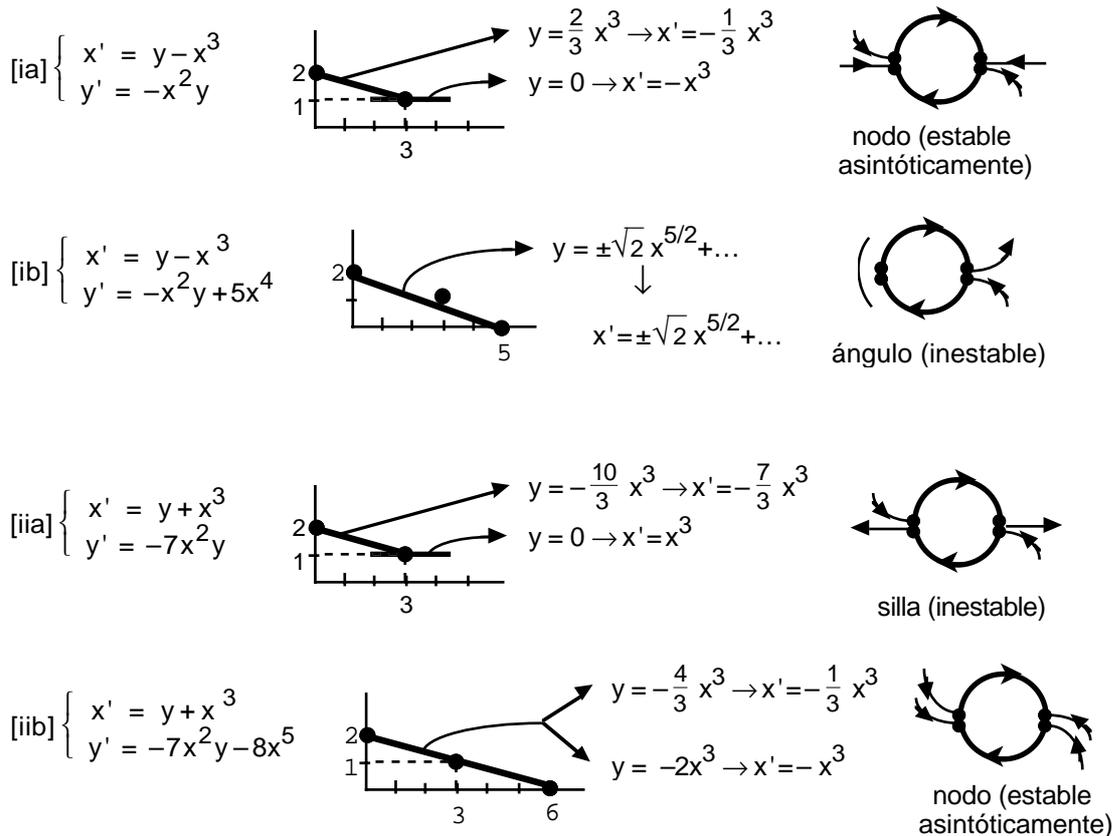
$f > 0$ 

$f < 0$ 

La clasificación de [Q2] anterior podríamos resumirla más (perdiendo información) en la forma:

$d \neq 0$ ángulo $d = 0, a \neq 0$ $\begin{cases} ae < 0 & \text{silla} \\ ae = 0 & \text{silla-nodo} \\ ae > 0 & \text{medusa} \end{cases}$

Ejemplos 8. Para un punto elemental asintóticamente estable o inestable es sabido que al añadir términos no lineales se conserva la estabilidad. Tal vez pudiera pensarse que podría suceder algo análogo con uno no elemental. Pero ya hemos visto que los términos importantes para el análisis son precisamente los de la poligonal y que términos de mayor orden sobre ella influyen más en la estructura que otros de mayor orden que proporcionen puntos por encima de ella. Así, en los dos ejemplos siguientes existen puntos críticos que tienen una estabilidad fuerte si sólo consideramos los términos de orden menor o igual que tres ([ia] y [ib]), pero que cambian su carácter al añadirle los términos de orden cuatro o cinco ([iia] y [iib]):



[Algo similar ocurre en el punto elemental [iia] $\begin{cases} x' = y + y^2 \\ y' = -x + y^2 \end{cases}$

centro en la aproximación lineal y foco estable al considerar los términos cuadráticos ($l_3 = -2 < 0$), pero que inestabiliza incorporando un término de tercer orden:

[iib] $\begin{cases} x' = y + y^2 + x^3 \\ y' = -x + y^2 \end{cases}$ es foco inestable, pues $l_3 = 1 > 0$]

Ejemplo 9. Encontramos ahora todos los retratos locales para la ecuación

$$x'' = g(x, x'), \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

con g analítica en un entorno del origen, que suponemos punto crítico aislado. Desarrollando y ordenando los coeficientes:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = cx + dy + b_k x^k + b_{k+1} x^{k+1} + \dots + b_{n,1} x^n y + b_{n+1,1} x^{n+1} y + \dots + y^2 g_2(x, y) \end{cases}$$

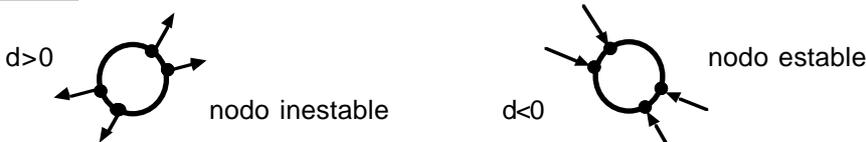
donde g_2 es analítica y $b_k \neq 0$ [existe $b_k \neq 0$ porque en caso contrario $(0,0)$ no sería aislado; todos los $b_{n,1}$, sin embargo, podrían ser nulos].

Utilicemos las técnicas de esta sección incluso para puntos elementales. La orientación de las variedades que encontremos será trivial: se recorren hacia la derecha en $y > 0$ y hacia la izquierda en $y < 0$. El análisis del capítulo 3 para los términos lineales nos da:

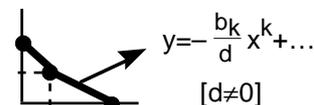
$$\Delta = -y^2 + dxy + cx^2 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} [d \pm \sqrt{d^2 + 4c}] x = \Lambda_{\pm} x$$

Por tanto, si $c > 0$  silla

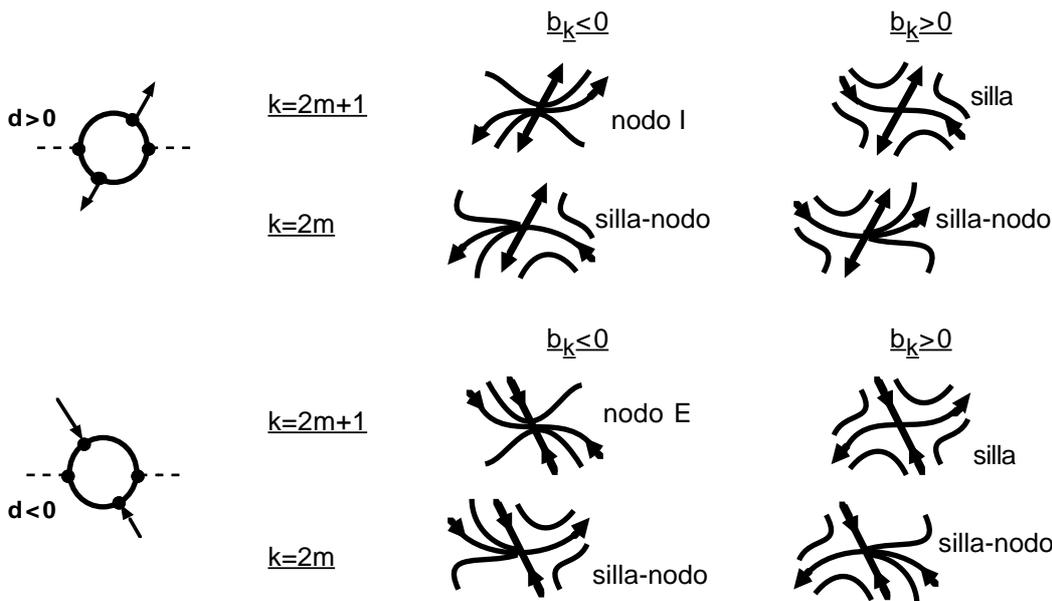
Para $c < 0$, si $d^2 + 4c < 0$, foco o centro. Si $d^2 + 4c > 0$, nodo:



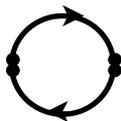
Si $c = 0$, $\Lambda_+ = d$, $\Lambda_- = 0$. Hay que considerar los términos no lineales. Según sean los signos de d y b_k y la paridad de k se tiene:



$$y = -\frac{b_k}{d} x^k + \dots \quad [d \neq 0]$$

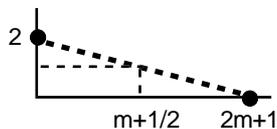


Si $c=d=0$, $y=0$ es doble con $\Lambda_-=0$



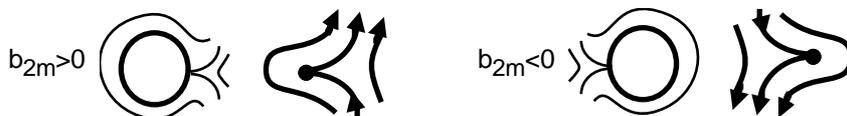
$$H_s(x,y)=0 \rightarrow sy^2=b_kx^k+b_{n,1}x^ny+\dots$$

Sea $k=2m$

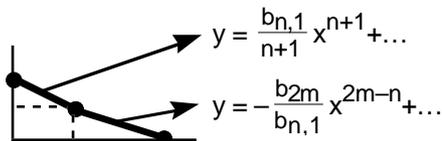


Existen dos posibilidades:

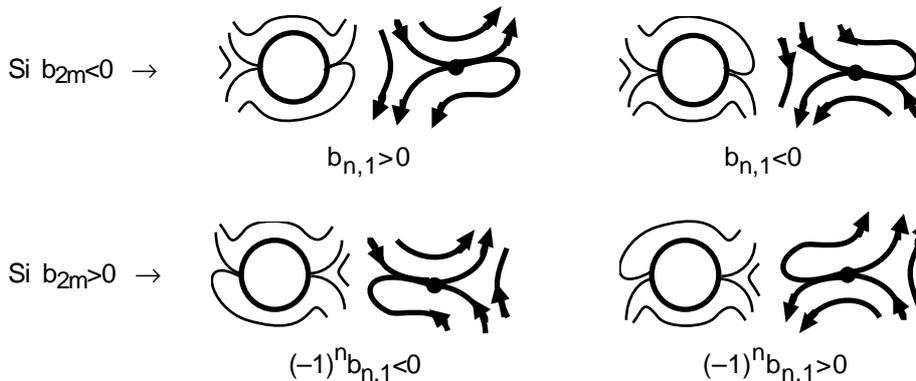
Si $n \geq m$ (o si $b_{n,1}=0 \forall n$) $\rightarrow y^2 = \frac{1}{s}b_{2m}x^{2m+1}$ con $s=m+\frac{1}{2}$ y el origen es un ángulo:



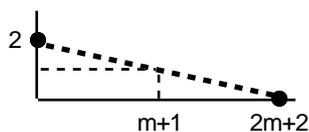
Si $n < m$:



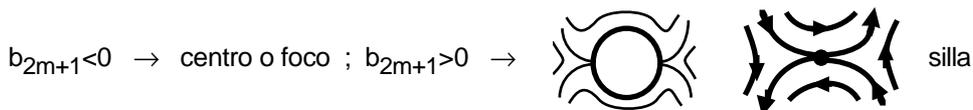
Una variedad tiene potencia par y otra impar, lo que bastaría para asegurar que el origen es silla-nodo. Pero precisemos algo más:

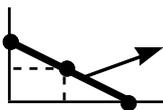


Si $k=2m+1$



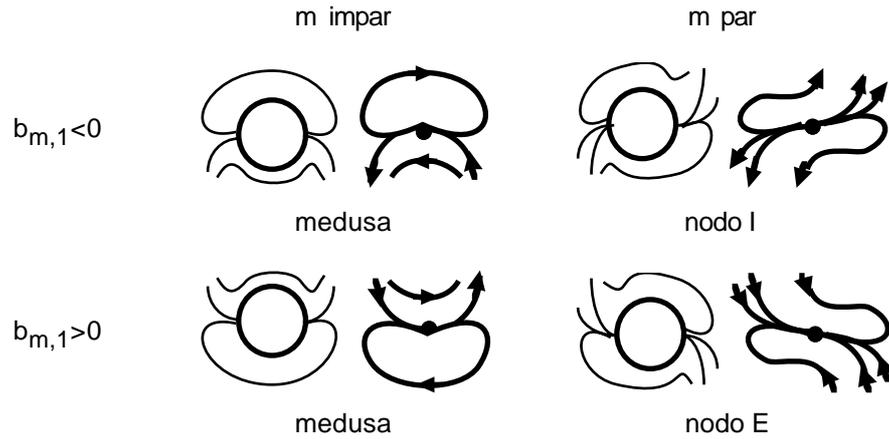
Si $n > m$ (o si $b_{n,1}=0 \forall n$) $\rightarrow y^2 = \frac{1}{s}b_{2m+1}x^{2m+2}$, con $s=m+1$, y por tanto:

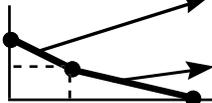


Si $n=m$:  $(m+1)y^2 - b_{m,1}x^{m+1}y + b_{2m+1}x^{2m+2} = 0 \rightarrow y = \frac{b_{m,1} \pm \sqrt{D}}{2(m+1)} x^{m+1}$
 con $D = b_{m,1}^2 + 4(m+1)b_{2m+1}$

Si $b_{2m+1} > 0 \rightarrow$ silla . Si $b_{2m+1} < 0$ y $D < 0 \rightarrow$ centro o foco.

Si $b_{2m+1} < 0$ y $D \geq 0$ (cuando $D=0$ la variedad es doble, pero con $P_f=0$) , depende de la paridad de m y el signo de $b_{m,1}$:



Si $n < m$:  $y = \frac{b_{n,1}}{n+1} x^{n+1} + \dots$
 $y = -\frac{b_{2m+1}}{b_{n,1}} x^{2m-n+1} + \dots$ Ambas tienen la misma paridad.

Considerando todas las posibilidades, se tiene que si $b_{2m+1} > 0$ el origen es silla, y que aparecen los mismos casos que los del último cuadro si $b_{2m+1} < 0$:

	n impar	n par
$b_{n,1} < 0$	medusa	nodo I
$b_{n,1} > 0$	medusa	nodo E

5.4. Situaciones no recogidas por los teoremas.

Si el teorema 5.3 no decide la estructura de $\mathbf{0}$ necesitaremos, en principio, realizar algún otro cambio de variable. Con el análisis de esta sección podremos evitarlo en algunos casos.

Comencemos tratando el caso $\Delta \equiv 0$. Esto quiere decir que [S] es de la forma:

$$[S \equiv] \begin{cases} x' = xQ(x,y) + A^p(x,y) + \dots \\ y' = yQ(x,y) + B^p(x,y) + \dots \end{cases}$$

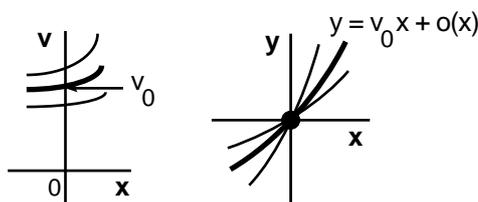
Haciendo el clásico blow-up $x=x; y=xv$ queda en este caso:

$$\begin{cases} x' = x^n Q(1,v) + o(x^n) \\ y' = x^{p-1} [B^p(1,v) - vA^p(1,v)] + o(x^{p-1}) \end{cases}$$

cuyas órbitas son como las de:

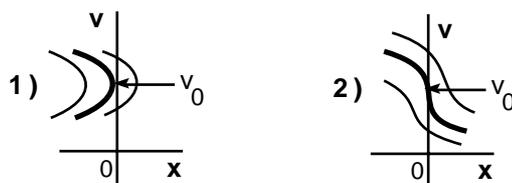
$$[N \equiv] \begin{cases} x' = Q(1,v) + o(1) \\ y' = x^{p-n-1} [B^p(1,v) - vA^p(1,v)] + o(x^{p-n-1}) \end{cases}$$

Si v_0 es tal que $Q(1,v_0) \neq 0$ (o sea, si $A(1,v_0) \neq 0$), en un entorno de v_0 sigue siendo $Q(1,v) \neq 0$ y por tanto las órbitas de [N≡] cerca del punto regular $(0,v_0)$ atraviesan el eje $x=0$. Para el sistema [S≡] obtenemos entonces una familia de variedades $y = vx + o(x)$ que llegan al origen con diferentes pendientes.



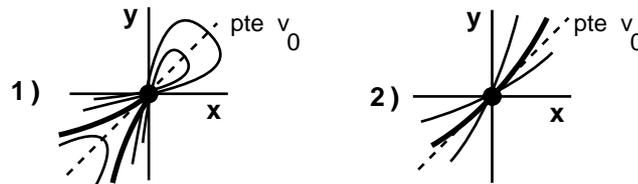
Por tanto, si $\Delta \equiv 0$, para todo m con $A(1,m) \neq 0$ existe una única variedad que pasa por el origen con pendiente m [y si $B(0,1) \neq 0$ existe una única con pendiente ∞]. El flujo sobre ellas viene dado como siempre por $A(x,mx)$ [$B(0,y)$].

Si v_0 es tal que $Q(1,v_0) = 0$ ($A(1,v_0) = 0$) la situación es mucho más complicada, pudiendo haber ninguna, una, un número finito o infinitas variedades que pasan por $\mathbf{0}$ con pendiente v_0 . Imaginemos primero que $(0,v_0)$ no es un punto crítico del sistema [N≡]. Para ello debe ser $p=n+1$ y $B^{n+1}(1,v_0) - v_0 A^{n+1}(1,v_0) \neq 0$. Sólo existen entonces dos posibilidades esencialmente distintas para las órbitas de [N≡] cerca de $(0,v_0)$:



dependiendo de que v_0 sea raíz de multiplicidad par o impar, respectivamente, de $Q(1,v) = 0$.

Para [S≡] obtenemos entonces:

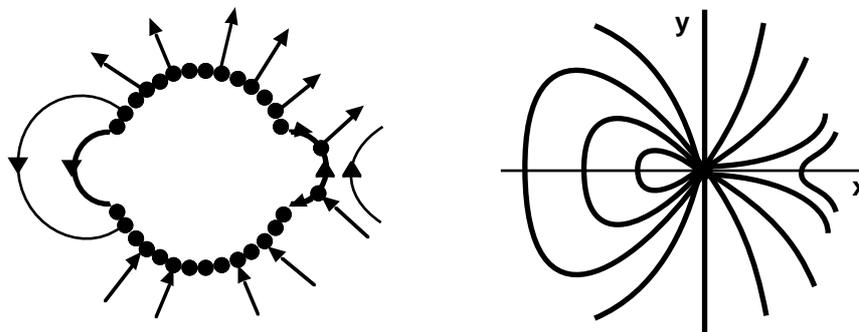


La situación **2)** es como la vista antes. Pero en la primera se observa como existen en un lado del origen dos órbitas que tienden hacia **0** con pendiente v_0 separando un sector hiperbólico, mientras que en el opuesto hay un sector elíptico y ninguna órbita llega a **0** con pendiente v_0 .

Si $(0, v_0)$ es punto crítico de [N≡], las posibilidades para las órbitas de [S≡] cerca de la dirección $y=v_0x$ son tan variadas como lo es la estructura de un punto crítico. En principio, si $Q(1, v_0)=0$ necesitaremos realizar explícitamente el blow-up (y utilizar entonces los teoremas de la sección 5.2). Pero si la única raíz de $Q(1, v)=0$ es $v_0=0$ [ó $Q(0, 1)=0$] las variedades dadas por la poligonal y el signo de algún P_k nos podrían suministrar toda la información necesaria, como sugiere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10. $\begin{cases} x' = xy \\ y' = y^2 + x^3 \end{cases}$

$A(x, mx) = mx^2$
 $B(0, y) = y^2$
 $B([y^2/2]^{1/3}, y) = \frac{3}{2}y^2$



[Las órbitas del sistema son $y^2 = 2x^3 + Cx^2$, lo que confirma el esquema; otra forma de confirmarlo sería haciendo el blow-up:

$\begin{cases} x' = v \\ v' = 1 \end{cases}$

(observemos que la poligonal sigue dando información sobre el sistema, a pesar de que el origen no sea un punto crítico)].

La situación más general de que un $P_k \equiv 0$, es muy similar a la vista para $\Delta \equiv 0$.

Análogamente se probaría que existe una única variedad de la forma $y = m_k x^{S_k} + \dots$ si $P_{kf}(x, m_k x^{S_k}) \neq 0$, orientada por $x' = P_{kf}(x, m_k x^{S_k})$ [y lo mismo para $P_{kf}(x, m_k [-x]^{S_k}) \neq 0$]. Las complicaciones aparecen si $P_{kf}(x, m_k x^{S_k}) \equiv 0$. Entonces para precisar la estructura tendremos que realizar varios blow-ups sucesivos o mejor, directamente, $x = u^\beta, y = u^\omega v$ ($S_k = \omega/\beta$) [ó $-x = u^\beta, y = u^\omega v$, si los problemas aparecen con $[-x]^{S_k}$]. Como antes, nos podremos ahorrar los cálculos si sólo $P_{kf}(x, 0) \equiv 0$.

Ejemplo 11. $\begin{cases} x' = 2xy^2 - 2x^4 \\ y' = 3y^3 - 3x^3y + x^5 \end{cases} \quad \Delta = xy^3$

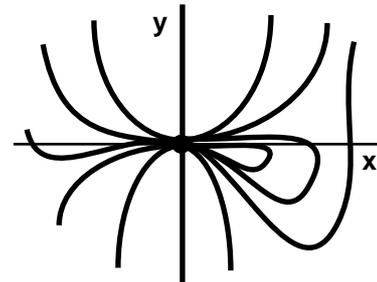
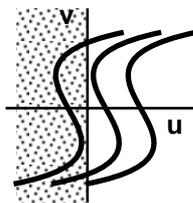
$P_{1f}(x, mx^{3/2}) = 2(m^2 - 1)x^4$
 $P_{1f}(x, m[-x]^{3/2}) = 2(-m^2 - 1)x^4$
 $[y + x^2]x^4 \rightarrow P_{2f} = -2x^4$

$P_1 \equiv 0$

Así que existen variedades $y = mx^{3/2} + \dots$ para todo $m \neq \pm 1$ e $y = m[-x]^{3/2} + \dots$ para todo m , recorridas según indica la figura. Para ver lo que sucede cerca de $y = \pm x^{3/2}$ hacemos el cambio $x = u^2; y = u^3 v$ y obtenemos tras simplificar:

$$\begin{cases} u' = v^2 - 1 \\ v' = 1 \end{cases} \rightarrow u = \frac{1}{3}v^3 - v + C$$

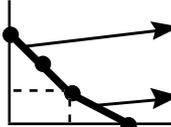
$$\rightarrow y^3 - 3yx^3 - 3x^5 + Cx^{9/2} = 0$$



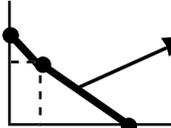
Podemos completar ya el esquema de arriba y obtener la estructura local del origen.

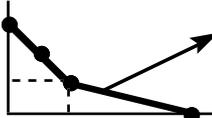
Otro de los casos no recogidos por los teoremas es el caso de **raíz múltiple** de un P_k asociada a $P_{kf} = 0$ (en particular, vector propio múltiple de la aproximación homogénea asociado a autovalor cero). Las posibles formas de operar en el análisis de estas situaciones serán las descritas en el siguiente ejemplo: o bien se realiza algún cambio de variable (no todos los blow-ups que serían precisos en caso de no haber demostrado el teorema 5.3) y se utiliza de nuevo la poligonal o bien se utilizan desarrollos en serie de la ecuación de las órbitas. Esto es ahora menos trivial que en el caso de variedades centro: no tenemos garantizado que las variedades que buscamos tengan desarrollo y además no está claro qué potencias hay que suponerle a la serie que probemos (pues pueden aparecer como sabemos diversas potencias fraccionarias).

En el siguiente ejemplo aparecen 'autovalores' cero por partida doble: uno asociado a raíz simple (y que admite, por tanto, desarrollo) y otro a raíz doble (que es caso problemático que estamos tratando):

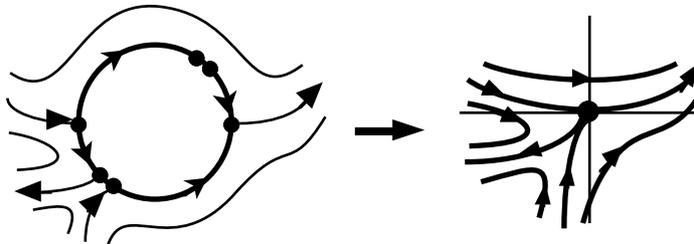
Ejemplo 12. $\begin{cases} x' = y^2 - xy + x^3 \\ y' = y^2 - xy + x^3 - x^2y \end{cases}$  $y=x+o(x)$ doble $\rightarrow x'=o(x^2)$ [$\Lambda=0$]
 $y=x^2+o(x^2) \rightarrow x'=o(x^4)$ [$P_f(1,1)=0$]

Necesitamos más términos para determinar el flujo sobre la variedad horizontal y saber si existen o no variedades de pendiente 1. Para ello podemos hacer los cambios de variable:

$y = x+w \rightarrow \begin{cases} x' = w^2 + xw + x^3 \\ w' = -x^2 w - x^3 \end{cases}$  $sxw^2=-x^4; w = +[\frac{2}{3}]^{3/2}[-x]^{3/2} + \dots$
 $\rightarrow x' = +[\frac{2}{3}]^{3/2}[-x]^{5/2} + \dots$

$y = x^2+w \rightarrow \begin{cases} x' = w^2 - xw + 2x^2w + x^4 \\ w' = w^2 - xw - 2x^5 - 2xw^2 - 4x^3w + 3x^2w \end{cases}$  $w=-2x^4 + \dots$
 $\rightarrow x' = x^4 + \dots$

Por tanto:



Alternativamente, como siempre, podríamos probar series en la ecuación de las órbitas. Como las potencias asociadas a nuestros segmentos son 1 y 2 podría inicialmente pensarse que podría probarse una serie de potencias enteras normal. Pero se ve que al hacer cambios de variable pueden aparecer potencias fraccionarias.

Probamos entonces: $y = c_1x + c_{3/2}x^{3/2} + c_2x^2 + \dots$. De aquí:

$$\begin{aligned} & [(c_1^2 - c_1)x^2 + (2c_1 - 1)c_{3/2}x^{5/2} + (2c_1c_2 + c_{3/2}^2 - c_2 + 1)x^3 + \dots] [c_1 + \frac{3}{2}c_{3/2}x^{1/2} + 2c_2x + \dots] = \\ & = (c_1^2 - c_1)x^2 + (2c_1 - 1)c_{3/2}x^{5/2} + (2c_1c_2 + c_{3/2}^2 - c_2 + 1 - c_1)x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$x^2 \rightarrow c_1^3 - 2c_1^2 + c_1 = 0 \rightarrow \quad c_1 = 1 \text{ doble}, \quad c_1 = 0$$

$$x^{5/2} \rightarrow [\frac{7}{2}c_1^2 - \frac{9}{2}c_1 + 1]c_{3/2} = 0 \rightarrow \quad c_{3/2} \text{ indeterminado}, \quad c_{3/2} = 0$$

$$x^3 \rightarrow [4c_1^2 - 5c_1 + 1]c_2 + c_{3/2}^2 [4c_1 - \frac{5}{2}] + 2c_1 - 1 = 0 \rightarrow \quad c_{3/2}^2 = -\frac{2}{3}, \quad c_2 = 1$$

Lo que nos da las dos variedades $y = x \pm [\frac{2}{3}]^{3/2}[-x]^{3/2} + \dots$.

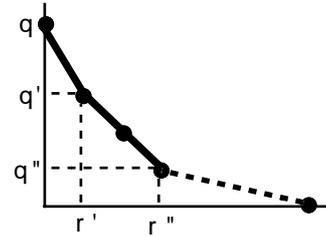
Probando ahora $y = x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$ obtenemos $c_3 = 0, c_4 = 2$ y, de nuevo,

$$y = x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

[de hecho $c_3 = 0$ nos bastaba ya para precisar el flujo].

Pasemos ahora al problema de los **centros y focos**.

Si no existan variedades reales que lleguen al origen de [S] cada P_k debe tener todas sus raíces complejas. Es claro que para ello es preciso que **todos los términos que dan puntos en ángulos de la poligonal sean de orden impar** (es decir, $q, r'+q', r''+q'', \dots$ deben ser pares). En particular, **para que el origen pueda ser centro o foco es necesario que n sea impar**. También es necesario que la poligonal llegue hasta los ejes: así han de existir términos y^{2n+1} en la primera ecuación de [S] y x^{2m+1} en la otra.

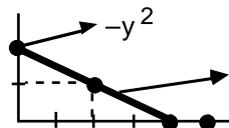


A la vista de la demostración del teorema 5.3, también es claro que no basta que ningún P_k tenga raíces reales para tener centro o foco, ya que si algún $b_k/a_k \in (s_k, s_{k+1})$ pueden existir variedades llegando al origen (si $b_k/a_k \in (s_k, s_{k+1})$ tales variedades siempre existen). Pero si $b_k/a_k \notin [s_k, s_{k+1}]$ para todo k y todas las raíces no triviales de todos los $P_k=0$ son complejas, el origen se trata de un centro o un foco. En particular, esto sucede si Δ tiene todas sus raíces complejas (la situación del capítulo 4); la poligonal se reduce entonces a un segmento de pendiente -1 sobre el que están los términos de la aproximación homogénea.

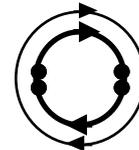
Distinguir centros de focos es un problema complicado, como vimos, incluso en este último caso (y ya lo era hasta para puntos elementales). Antes de dar unas pocas ideas sobre el problema general consideraremos dos ejemplos en que la existencia de centros es inmediata.

Ejemplo 13.

$$\begin{cases} x' = y - x^2 \\ y' = 2xy - 3x^3 + x^4 \end{cases}$$



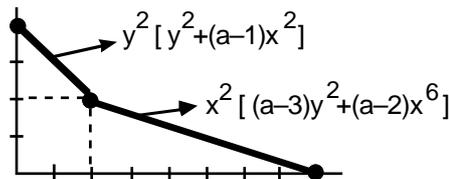
$$-2y^2 + 4x^2y - 3x^4 \text{ (complejas)}$$



El origen es un centro (no puede ser un foco porque el sistema es hamiltoniano)

Ejemplo 14.

$$\begin{cases} x' = -y^3 + x^2y \\ y' = axy^2 + (a-2)x^7 \end{cases}$$

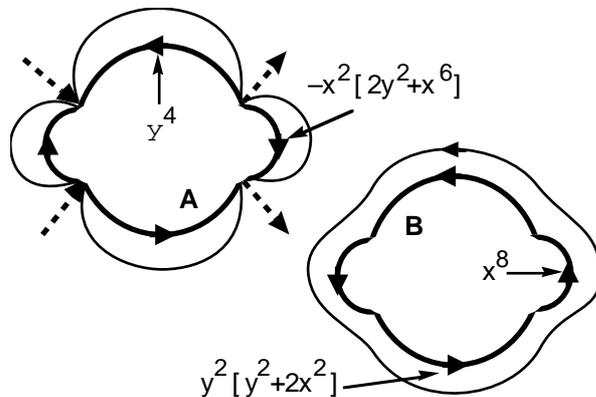


Estudiamos para qué valores de a el origen es un centro (foco no puede ser por las simetrías del sistema).

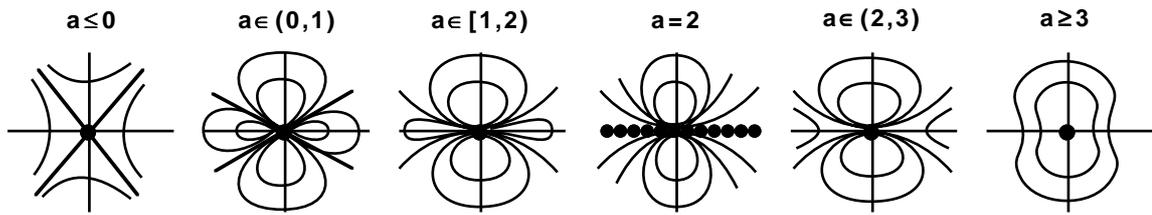
Si $a < 1$, $a \in (2,3)$, hay variedades reales dadas por segmentos de la poligonal y no puede tratarse de un centro.

Veamos los demás casos:

- Si $a=1$, hay cuatro sectores elípticos (A).
- Si $a \in (1,2)$, existen las infinitas variedades $y=|x|^a + \dots$ y la estructura es como en el caso anterior.
- Si $a=2$, $y=0$ es una recta de puntos críticos y tampoco hay centro.
- Si $a=3$ el origen es un centro (B).
- Si $a > 3$ no hay problemas en el ángulo de la poligonal y no hay variedades: centro.



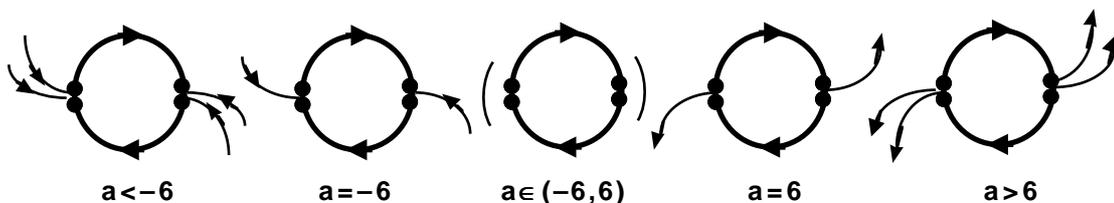
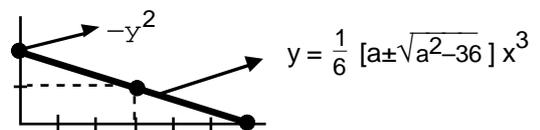
Completando la información anterior tenemos:



Tratemos ahora varios ejemplos, progresivamente más complicados, que dan idea de las técnicas que se utilizarían para construir una teoría más general. En los dos primeros, la poligonal se reducirá a un segmento:

Ejemplo 15. [S] $\begin{cases} x' = y + A(x,y) \\ y' = ax^2y - 3x^5 + B(x,y) \end{cases}$

donde A y B incluyen términos que dan lugar a puntos por encima de la poligonal.



Así pues, el origen es un nodo estable si $a \leq -6$, un nodo inestable si $a \geq 6$ y un centro o un foco para los demás valores de a . Hagamos un cambio de variable que nos lleve el problema de distinguir entre centro y foco a otro ya conocido:

$$y = v^3 \rightarrow \begin{cases} x' = v^3 + A(x, v^3) \\ 3v^2v' = ax^2v^3 - 3x^5 + B(x, v^3) \end{cases} \rightarrow [S_H] \begin{cases} x' = v^5 + v^2 A(x, v^3) \\ v' = \frac{a}{3}x^2v^3 - x^5 + \frac{1}{3}B(x, v^3) \end{cases}$$

Este último sistema, si $a \in (-6,6)$, es de los analizados en la sección 4.3, pues v^2A y B incluirán términos de orden mayor que 5, con lo que, según el teorema 4.2, la estabilidad de los focos de la aproximación homogénea se mantiene en el sistema completo (y en el sistema inicial [S]). Sólo son relevantes los términos de A y B cuando dicha aproximación es un centro. Para ver lo que ocurre con los términos homogéneos mucho mejor que hallar la I es considerar:

$$[S_P] \begin{cases} x' = y \\ y' = ax^2y - 3x^5 \end{cases}$$

y hacer en este sistema:

$$u = x^3 \rightarrow \begin{cases} u' = 3x^2[y] \\ y' = 3x^2[\frac{a}{3}y - u] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u' = y \\ y' = \frac{a}{3}y - u \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{1}{6} [a \pm \sqrt{a^2 - 36}]$$

Por tanto, el último sistema elemental es un foco estable si $a \in (-6, 0)$, uno inestable si $a \in (0, 6)$ y un centro si $a=0$. Las órbitas del sistema $[S_P]$, obtenidas simplemente deformando el eje x , tendrán entonces la misma estructura (incluso si $a=0$). Los focos se mantendrán para $[S_H]$ y también para el sistema inicial $[S]$. Para ver lo que sucede en $[S]$ si $a=0$ habría que seguir en general el camino de 4.3, calculando algún término más del desarrollo en polares.

Consideremos, por ejemplo, un caso particular sencillo de $[S]$:

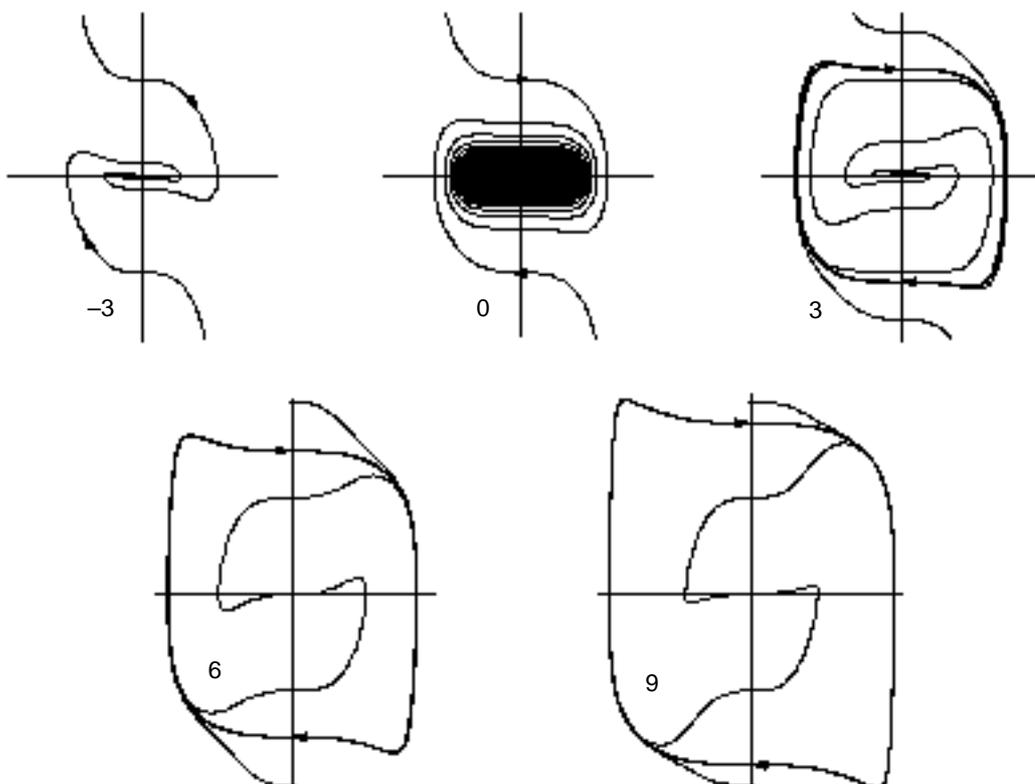
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = ax^2y - 3x^5 - 3x^2y^3 \end{cases}$$

Sólo falta precisar lo que ocurre si $a=0$. Excepcionalmente es válido el segundo cambio $u=x^3$ (en general conduciría a un sistema no analítico) que lleva a

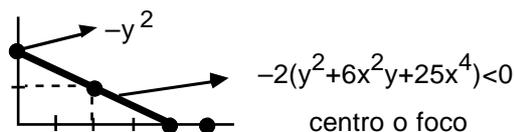
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -u - y^3 \end{cases} \rightarrow I_3 < 0 \rightarrow \text{foco estable si } a=0.$$

La ruptura de la estabilidad al pasar por $a=0$ (y la estabilidad asintótica en este caso) sugieren la posible aparición de un ciclo límite para $a>0$ (una especie de bifurcación de Hopf no lineal; con los métodos del capítulo 6 se podría ver que el infinito es repulsor para todo a lo que, unido al hecho de que no hay más puntos críticos finitos, confirmaría la conjetura).

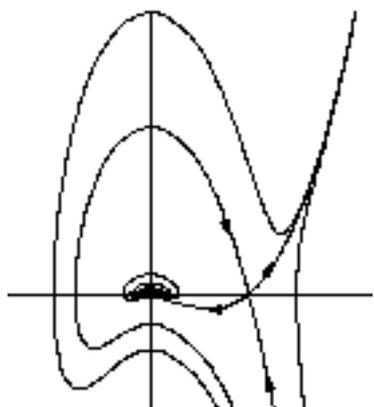
Reproducimos el dibujo aproximado de los mapas de fase para $a=-3, 0, 3, 6, 9$ en los que se observan las estructuras del origen anunciadas y los ciclos límites conjeturados:



Ejemplo 16. [S] $\begin{cases} x' = y \\ y' = -12xy - 50x^3 + 50x^4 \end{cases}$



Sin el término en x^4 se trata de un centro (simétrico respecto a $x=0$). El sistema total, como veremos, va a tener un foco estable en el origen [además de un punto silla elemental en $(1,0)$]. Comencemos dando un dibujo aproximado del diagrama de fases de [S]:



Intentamos, como en el ejemplo anterior, hacer un cambio que lleve nuestro sistema a otro de tipo ya analizado:

$$y = v^2 \rightarrow \begin{cases} x' = v^2 \\ 2vv' = -12xv^2 - 50x^3 + 50x^4 \end{cases}$$

Sus órbitas, si $v \neq 0$ y salvo orientación, son las mismas que las del siguiente sistema atacable con las técnicas de 4.3:

$$[S+] \begin{cases} x' = -v^3 \\ v' = 6xv^2 + 25x^3 - 25x^4 \end{cases}$$

Como es simétrico respecto a $v=0$, tiene un centro en $(0,0)$.

Pero el cambio de variable realizado sólo nos informa sobre las órbitas de [S] en $y > 0$. Para el semiplano inferior debemos hacer otro diferente (que nos lleva a un nuevo sistema simétrico):

$$y = -v^2 \rightarrow \begin{cases} x' = -v^2 \\ -2vv' = 12xv^2 - 50x^3 + 50x^4 \end{cases} \rightarrow [S-] \begin{cases} x' = -v^3 \\ v' = -6xv^2 + 25x^3 - 25x^4 \end{cases}$$

Si pegamos el mapa de fases de [S+] en $v > 0$ y el de [S-] en $v < 0$, el conjunto de órbitas resultante, salvo deformación del eje v , será el de nuestro sistema inicial [S]. Gráficamente, eso es lo que está hecho a la derecha.

Sea un punto de coordenadas polares $(r_0, 0)$, r_0 pequeño.

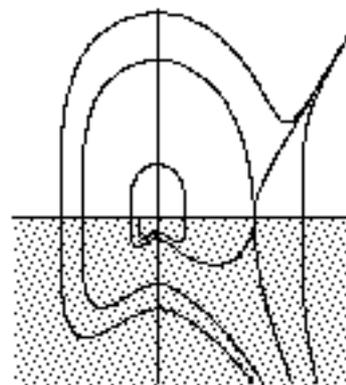
La solución $r_+(\theta)$ de [S+] que parte de él volverá a tocar el eje x en un $r_1 = r_+(\pi)$. Se trata de saber si el valor para $\theta = 2\pi$ de la solución $r_-(\theta)$ de [S-] con $r_+(\pi) = r_1$ es mayor o menor que r_0 .

Para r_0 cercano a 0, el valor de $r_+(\pi)$ y $r_-(2\pi)$ se pueden aproximar trabajando con el desarrollo de u_+ y u_- en serie de potencias del dato inicial, de la misma forma que se hizo en 4.3. Con notación análoga a la utilizada allí, y teniendo en cuenta que $u_{+1}(\pi) = 1$ (por tener un centro simétrico la aproximación homogénea), tenemos que:

$$r_1 = r_+(\pi) = r_0 + u_{+2}(\pi) r_0^2 + \dots \quad \text{con} \quad u_{+2}(\pi) = \int_0^\pi u_{+1} R_{+2}$$

siendo:

$$u_{+1} = e^{S_{+1}}, \quad S_{+1} = \int_0^\theta \frac{5SC[S^2 + 5C^2]}{m_{+3}} \quad , \quad R_{+2} = -\frac{25S^3C^4}{m_{+3}^2} \quad , \quad m_{+3} = S^4 + 6C^2S^2 + 25C^4$$



Además:

$$r_-(2\pi) = r_1 + u_{-2}(\pi) r_1^2 + \dots, \quad u_{-2}(\pi) = \int_{\pi}^{2\pi} u_{-1} R_{-2}$$

donde:

$$u_{-1} = e^{S_{-1}}, \quad S_{-1} = \int_{\pi}^{\theta} \frac{SC[25C^2 - 7S^2]}{m_{-3}}, \quad R_{-2} = -\frac{25S^3 C^4}{m_{-3}^2}, \quad m_{-3} = S^4 - 6C^2 S^2 + 25C^4$$

Por tanto:

$$r_-(2\pi) = r_0 + [u_{+2}(\pi) + u_{-2}(\pi)] r_0^2 + \dots$$

La estabilidad del origen nos la da, pues, el signo del último corchete, o lo que es lo mismo, por ser R_{-2} impar y u_{-1} par respecto a π , el signo de la integral:

$$J = \int_0^{\pi} 25S^3 C^4 \left[\frac{e^{S_{-1}}}{m_{-3}^2} - \frac{e^{S_{+1}}}{m_{+3}^2} \right]$$

Los coeficientes de [S] se han elegido para que S_{-1} y S_{+1} tengan una expresión manejable:

$$S_{+1} = \frac{1}{2} \ln(5) - \frac{1}{4} \ln(m_{+3}) + \frac{3}{8} \arctan \frac{11}{2} - \frac{3}{8} \arctan\left(\frac{11}{2} - 5S^2\right)$$

$$S_{-1} = \frac{1}{2} \ln(5) - \frac{1}{4} \ln(m_{-3}) - \frac{3}{8} \arctan 7 + \frac{3}{8} \arctan(7 - 8S^2)$$

Evaluando numéricamente se obtiene $J \approx 1.2073$ y el origen es un foco inestable.

Los dos ejemplos anteriores se generalizarían fácilmente, en teoría, al estudio de cualquier sistema para el que la poligonal correspondiente fuese un segmento y no existiesen variedades que llegasen al origen. Dependiendo de la paridad del numerador y denominador de la pendiente de ese segmento habría que realizar uno o dos cambios de variable de los sugeridos en los ejemplos anteriores para convertirlo en uno o dos problemas del tipo de los analizados en el capítulo 4. Está claro que en la práctica los cálculos podrían ser muy complicados si la aproximación homogénea que resultase fuese de orden alto.

Pero lo que sí conduce a problemas esencialmente nuevos (salvo situaciones simples como la del ejemplo 14) es el estudio de puntos sin variedades que lleguen al origen para los que la poligonal está constituida por más de un segmento. Para esos puntos lo único que podremos garantizar es que el punto se trata de un centro o un foco, pero no sabemos decidir entre ellos. En estas condiciones no es posible llevar con cambios de variable de los vistos a problemas de análisis de aproximaciones homogéneas de las del capítulo 4. Ni el blow-up clásico $y=xv$ aporta nada (con ellas las posibles órbitas cerradas se rompen en dos curvas abiertas que se van al infinito). Ni tampoco, directamente, se pueden probar desarrollos en la ecuación de las órbitas en polares, que es lo que estaba en la base de los análisis del capítulo 4, pues esta ecuación presenta singularidades.

El siguiente ejemplo está dedicado a ilustrar las dificultades descritas:

Ejemplos 17. [i] $\begin{cases} x' = axy^2 - y^3 \\ y' = xy^2 + x^5 \end{cases}$

$y^2[y^2 - axy + x^2] \rightarrow y = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{a^2 - 4}] x + \dots$
 $x' = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{a^2 - 4}] x^3 + \dots$

Con esto es inmediato que el origen es un nodo estable si $a < -2$, nodo inestable si $a > 2$ y centro (simétrico respecto a ambos ejes) si $a = 0$. Para $a \in (-2, 0)$ y para $a \in (0, 2)$ es un centro o foco. A primera vista uno esperaría que fuese un foco estable en el primer caso e inestable en el segundo, y si se integra numéricamente eso es lo que se obtiene. Pero, ¿cómo probarlo? Desde luego no estamos en las hipótesis del capítulo 4 pues la aproximación homogénea no tiene focos, sino una recta de puntos críticos. Aunque si se quitan los puntos si están los focos:

$$\begin{cases} x' = axy^2 - y^3 \\ y' = xy^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = ax - y \\ y' = x \end{cases} \rightarrow \text{foco estable si } a \in (-2, 0) \text{ e inestable si } a \in (0, 2)$$

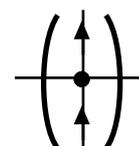
Cuando aparecían rectas de puntos críticos (autovalores cero) en la aproximación homogénea la estructura dependía de los términos de mayor orden. Pero aun en el caso de que se pudiera justificar en este ejemplo la estructura se parece a la de la aproximación homogénea sin los puntos, ¿cómo se trataría el caso general? Por ejemplo, las aproximaciones de los dos sistemas siguientes, para los que la poligonal tiene exactamente la misma forma y en las que tampoco hay variedades que lleguen al origen:

$$[ii] \begin{cases} x' = -y^3 \\ y' = xy^2 + x^5 + x^6 y \end{cases} \quad [iii] \begin{cases} x' = x^2 y - y^3 \\ y' = 2xy^2 + y^3 + x^5 \end{cases}$$

son respectivamente, salvo la recta de puntos, un centro y un punto con dos sectores elípticos y en ninguno de los dos casos hay ninguna tendencia a acercarse o alejarse del origen.

El cambio habitual $y = xv$ lleva (tras dividir por x^2), por ejemplo, [i] a:

$$\begin{cases} x' = axv^2 - xv^3 \\ v' = v^4 - av^3 + v^2 + x^4 \end{cases}$$



que, si $a \in (-2, 2)$, es sólo un punto crítico con dos sectores hiperbólicos:

Y la ecuación en polares es para [i]: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{aC^2 S^2 r + C^5 S r^3}{S^2 [S^2 - aCS + C^2] + C^6 r^2}$, singular en $(r, \theta) = (0, 0)$

(excepcionalmente el desarrollo en serie del segundo miembro tiene el coeficiente de r^1 regular si $-2 < a < 2$: $aC^2/[S^2 - aCS + S^2]$, pero es singular para [iii], por ejemplo).