

## 6. Análisis del infinito.

Investiguemos el comportamiento 'en el infinito' de las órbitas del sistema polinomial:

$$[S] \quad \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + \dots + A^m(x,y) \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + \dots + B^m(x,y) \end{cases}$$

donde  $m > n \geq 0$ . Veremos que las técnicas para esta investigación serán muy similares a las utilizadas en el origen. Como nos sucedía allí, podremos concluir el análisis, salvo en casos muy excepcionales, sin necesidad de realizar ningún cambio de variable.

Comenzaremos en la sección 6.1 describiendo los cambios de variable que nos llevarán los puntos del infinito a otros finitos (cambios que serán innecesarios una vez probados nuestros teoremas). Habitualmente estos cambios se interpretan a partir de proyecciones del plano sobre la esfera de Poincaré (así se hace, por ejemplo, en los libros [3] o [27]). Nosotros hemos preferido no dar ese paseo por el espacio y los miramos como aplicaciones en el plano.

Si se considera suficiente saber que con esos cambios de variable el problema se traslada a analizar puntos finitos se pierde la idea que preside el capítulo: que para el análisis del infinito se puede dar una teoría directa y dual a la del origen (los teoremas de este capítulo serán casi idénticos a los de los capítulos anteriores). Poco se ha explotado esta dualidad y no existen métodos de análisis tan directos como los nuestros (mostrados ya en [11]).

En 6.2 veremos que de nuevo, en muchos casos, bastará para determinar la estructura del infinito de [S] considerar unos términos homogéneos (en este caso los de mayor orden). Aquí tampoco habrá que hacer ningún cambio y los cálculos necesarios serán exactamente igual de simples que los del capítulo 3: bastará localizar las variedades que lleguen al infinito hallando las raíces de un polinomio, orientarlas y ver el signo de ese polinomio. También será muy parecida al capítulo 4 la forma de distinguir entre centros y focos en el infinito cuando no existan esas variedades: la atractividad o repulsividad de infinito dependerá de unas integrales  $I^*$  y  $J^*$  casi iguales que las del origen.

Referencias relacionadas con esta sección son [1], que observa la dualidad en los sistemas homogéneos, o [15] u [28] que caracterizan cuando los polinomios de mayor orden bastan para fijar la estructura del infinito (focos incluidos). En los tres artículos anteriores, como ocurría en su estudio del origen, se descarta la existencia de 'autovalores' cero (que nosotros sí admitimos y salvamos calculando términos de desarrollos (que incluyen potencias negativas) de 'variedades centro'). En [12] o [19] se tratan sistemas particulares con focos en el infinito (muy preparados y destinados a la obtención de bifurcaciones de ciclos límites desde el infinito).

Cuando no basten los resultados de la sección anterior habrá que acudir a la poligonal que introduciremos en 6.3: la que rodea por arriba a los puntos del sistema (una parte de ella informa sobre las órbitas con pendiente horizontal en el infinito y otra sobre las de pendiente vertical). Esta poligonal (no utilizada aún en el estudio del infinito) permitirá concluir el análisis excepto si se dan situaciones conflictivas análogas a las del teorema 5.3 para el estudio del origen.

En 6.4 se aplican los resultados anteriores al análisis de sistemas polinomiales concretos con el fin de mostrar la simplificación que suponen respecto a las técnicas utilizadas incluso en las referencias más recientes. Con la poligonal se puede fácilmente construir sistemas de propiedades deseadas (por ejemplo, sistemas con el infinito repulsor que poseen ciclos límites o atractores inestables) o abordar la clasificación de sistemas que dependen de parámetros. En el último ejemplo estudiamos sistemas en los que cambia la estabilidad de un foco degenerado, dando lugar a la aparición de ciclos límites en una especie de 'bifurcación de Hopf no lineal'.

Hay muchas publicaciones que incluyen estudios globales de sistemas sobre el círculo de Poincaré. Por ejemplo, además de las ya citadas, [2], [5], [8], [10], [13], [18], [21], [22], [23], [24], [25], [29], [30] y [31] (todas ellas analizan diferentes clases de sistemas cuadráticos), [4], [6], [7], [9], [14], [16], [17], [20], [26] y [32]. El camino habitual en todas ellas es llevar los puntos del infinito a puntos finitos realizando explícitamente los cambios y, si alguno de ellos resulta no ser hiperbólico, hacer después algún blow-up. Como muestra del atajo que suponen nuestros métodos se puede comparar el análisis de los sistemas cordales cuadráticos del ejemplo 9 con el artículo original [8] en el que estaban clasificados. O se puede ver como nuestra poligonal simplifica claramente los métodos de análisis (del origen y del infinito) propuestos en el reciente trabajo [33].

## Referencias del capítulo 6

- [1] J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ .  
Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV **79** [1968], 35-69.
- [2] R. J. Dickson - L. M. Perko. Bounded quadratic systems in the plane.  
J. of Diff. Eq. **7** [1970], 251-273.
- [3] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory  
of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [4] A. Lins - W. Melo - C. C. Pugh. On Lienard's equation.  
Lecture Notes in Math. **597** [1977], 335-357.
- [5] N. I. Vulpe - K. S. Sibirskii. Geometric classification of quadratic differential systems.  
Differential Equations **13** [1977], 548-556.
- [6] S. Songling. A method of constructing cycles without contact around a weak focus.  
J. of Diff. Eq. **41** [1981], 301-312.
- [7] T. R. Blows - N. G. Lloyd. The number of limit cycles of certain polynomial differential  
equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** [1984], 215-239.
- [8] A. Gasull - S. Li-Ren - J. Llibre. Chordal quadratic systems.  
Rocky Mountain J. of Math. **16** [1986], 751-782.
- [9] C. Chicone - J. Sotomayor. On a class of complete polynomial vector fields in the plane.  
J. of Diff. Eq. **61** [1986], 398-418.
- [10] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Some theorems on the existence, uniqueness and  
nonexistence of limit cycles for quadratic systems. J. of Diff. Eq. **67** [1987], 372-399.
- [11] J.I. Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos.  
Actas X CEDYA [1987], 20-25.
- [12] N. G. Lloyd - T. R. Blows - M. C. Kalenge. Some cubic systems with several limit cycles.  
Nonlinearity **1** [1988], 653-669.

- [13] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Quadratic systems with a unique finite rest point.  
Publicacions Matemàtiques UAB **32** [1988], 199-259.
- [14] A. Cima - J. Llibre. Bounded polynomial vector fields.  
Trans. Amer. Math. Soc. **318** [1990], 557-579.
- [15] A. Cima - J. Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. J. of Math. Anal. and Appl. **147** [1990], 420-448.
- [16] F. Dumortier - C. Rousseau. Cubic Liénard equations with linear damping.  
Nonlinearity **3** [1990], 1015-1039.
- [17] F. Dumortier - D. Shafer. Restrictions on the equivalence homeomorphism in stability of polynomial vector fields. J. London Math. Soc. **41** [1990], 100-108.
- [18] P. de Jäger. Phase portraits for quadratic systems with a higher order singularity with two zero eigenvalues, J. of Diff. Eq. **87** [1990], 169-204.
- [19] T. R. Blows - C. Rousseau. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields.  
J. of Diff. Eq. **104** [1993], 215-242.
- [20] A. Cima - A. Gasull - F. Mañosas. On polynomial hamiltonian planar vector fields.  
J. of Diff. Eq. **106** [1993], 367-383.
- [21] G. Q. Chen - Z. J. Liang. Affine classification for the quadratic vector fields without the critical points at infinity. J. of Math. Anal. and Appl. **172** [1993], 62-72.
- [22] J. C. Artés - J. Llibre. Hamiltonian quadratic systems. J. of Diff. Eq. **107** [1994], 80-95.
- [23] F. Dumortier - P. Roussarie - C. Rousseau. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields.  
J. of Diff. Eq. **110** [1994], 86-133.
- [24] J. C. Artés - J. Llibre. Phase portraits for quadratic systems having a focus and one antisaddle.  
Rocky Mountain J. of Math. **24** [1994], 875-889.
- [25] C. Li - J. Llibre - Z. Zhang. Weak foci, limit cycles and bifurcations for bounded quadratic systems. J. of Diff. Eq. **115** [1995], 388-436.
- [26] C. Rousseau - D. Schlomiuk. Cubic vector fields symmetric with respect to a center.  
J. of Diff. Eq. **123** [1995], 193-223.
- [27] L. Perko. Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag [1996].
- [28] J. Llibre - J. S. Pérez del Río - J. A. Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity.  
J. of Diff. Eq. **125** [1996], 490-520.
- [29] A. Gasull - R. Prohens. On quadratic systems with a degenerate critical point.  
Rocky Mountain J. of Math. **26** [1996], 135-164.
- [30] J. C. Artés - J. Llibre. Quadratic vector fields with a weak focus of third order.  
Publicacions Matemàtiques **41** [1997], 7-39.
- [31] L. Cairó - J. Llibre. Phase portraits of planar semi-homogeneous vector fields.  
Nonlinear Analysis, T.M.A. **29** [1997], 783-811.
- [32] A. Gasull - A. Guillamon - V. Mañosa. Phase portrait of hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities. Preprint, Universitat Autònoma de Barcelona [1997].
- [33] F. Dumortier - C. Herssens. Tracing phase portraits of planar polynomial vector fields with detailed analysis of the singularities (Preliminary version).  
Escuela de invierno sobre campos vectoriales polinomiales. Lleida [1997].

## 6.1 Cambios de variable

Nuestro objetivo será hacer un modelo de las órbitas de [S] sobre el círculo abierto unidad  $\mathbf{Z}$ , para el que cada punto de la circunferencia exterior  $\mathbf{C}$  representará un 'punto del infinito' asociado a una determinada dirección de llegada al infinito.

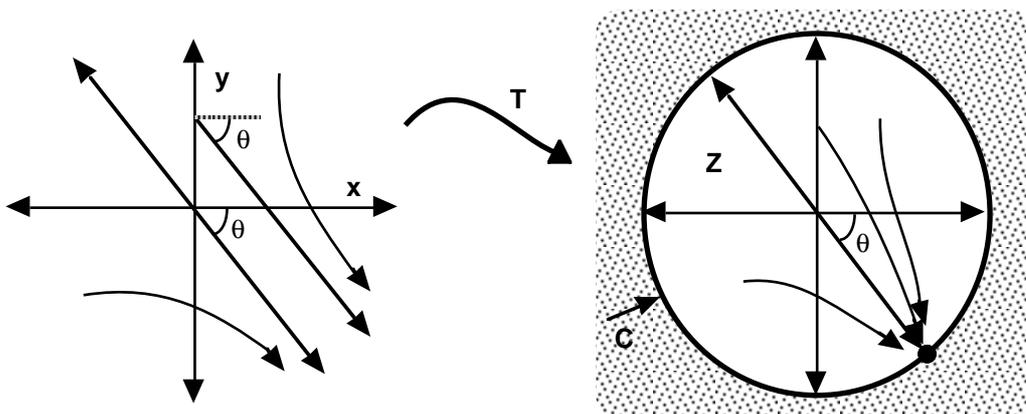
La forma más natural de convertir todo  $\mathbf{R}^2$  en  $\mathbf{Z}$  es realizar la siguiente transformación de coordenadas en el plano:

$$\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z} \quad \text{con} \quad x^* = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} ; y^* = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)$$

O, de forma más clara,  $\mathbf{T}$  transforma puntos de coordenadas polares  $(r,\theta)$  en puntos de  $\mathbf{Z}$  de coordenadas  $(r^*,\theta)$  con

$$r^* = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (\text{es decir: } r = \frac{r^*}{\sqrt{1-r^{*2}}}, \text{ para } r^* < 1)$$



$\mathbf{T}$  convertirá cada órbita  $\Gamma$  de [S] en otra curva  $\Gamma^*$  sobre  $\mathbf{Z}$ . Pretendemos describir las  $\Gamma^*$  cerca de  $\mathbf{C}$ , lo que nos informará del aspecto de las  $\Gamma$  cerca del infinito. A los puntos de  $\mathbf{C}$  se les llama de forma natural 'puntos del infinito'.

Cualquier curva que se acerca al infinito con pendiente  $m$  definida ( $\theta = \arctan m$  definida) es transformada por  $\mathbf{T}$  en una curva de  $\mathbf{Z}$  que tiende al punto de  $\mathbf{C}$  de coordenadas polares  $(1,\theta)$ . Dicho de otra forma: si una curva de  $\mathbf{Z}$  llega a un punto  $(1,\theta)$  de  $\mathbf{C}$ , dicha curva corresponde a una curva del plano  $xy$  que llega al infinito con una pendiente definida  $\tan \theta$ .

Para estudiar las órbitas inducidas por  $\mathbf{T}$  en  $\mathbf{Z}$  cerca de  $\mathbf{C}$  el cambio  $\mathbf{T}$  conduce a expresiones analíticamente poco sencillas, por lo que mejor el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{P}: \mathbf{R}^2 - \{x=0\} \rightarrow \mathbf{R}^2 - \{z=0\} \quad \text{con} \quad z = \frac{1}{x} ; u = \frac{y}{x} \quad (\text{es decir, } x = \frac{1}{z} ; y = \frac{u}{z} )$$

$$(x,y) \rightarrow (z,u)$$

que transforma el plano de la siguiente forma fácil de comprobar:

- lleva los cuadrantes 1, 2, 3, 4 a los cuadrantes 1, 3, 2, 4.
- lleva rectas de pendiente  $m$  a rectas que 'pasan' por el punto  $(z,u)=(0,m)$  :

$$y = mx + b \rightarrow u = bz + m$$

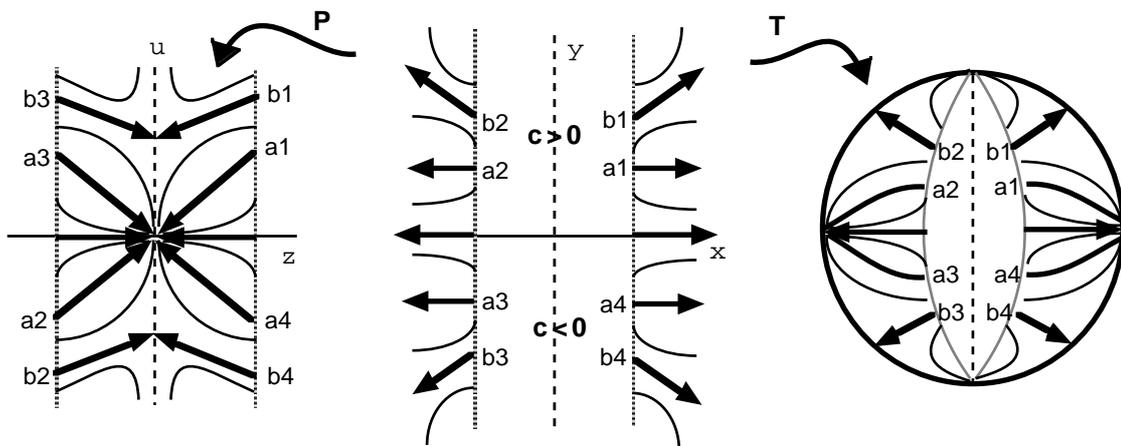
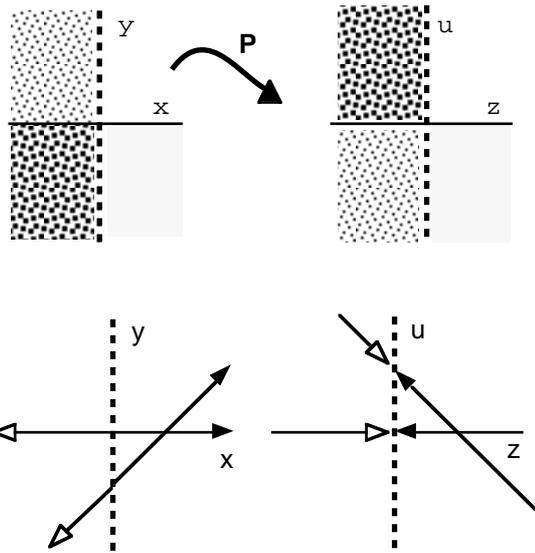
de forma que una sucesión de puntos que tiende a  $+\infty$  [ $-\infty$ ] sobre la recta se convierte en una sucesión que tiende a  $(0,m)$  por la derecha [izquierda].

- lleva curvas de la forma  $y = cx^s + o(x^s)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  a curvas de la forma  $u = cz^{1-s} + o(z^{1-s})$  cuando  $z \rightarrow 0^+$ , así que, cuando  $z \rightarrow 0^+$  :

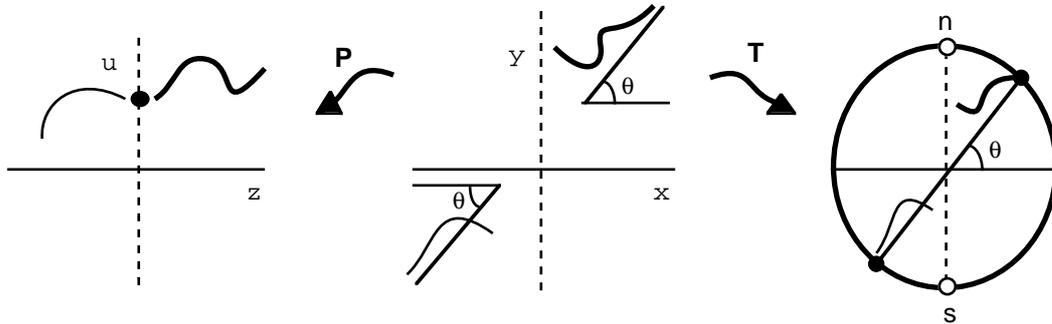
- si  $s > 1$ ,  $u \rightarrow +\infty$  ó  $-\infty$  (dependiendo del signo de  $c$ ) ;
- si  $s = 1$ ,  $u \rightarrow c$  ;
- si  $0 < s < 1$ ,  $u$  tiende al origen con pendiente horizontal ;
- si  $s = 0$ ,  $u$  tiende al origen con pendiente  $c$  ;
- si  $s < 0$ ,  $u$  tiende al origen con pendiente vertical.

Además si  $y = cx^{s'} + o(x^{s'})$  es mayor en el infinito que  $y = cx^s + o(x^s)$  la curva transformada de la primera es también mayor que la transformada de la segunda en un entorno a la derecha de  $z=0$ . Análogos comportamientos se tienen para curvas  $y = c[-x]^s + o([-x]^s)$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ , teniendo en cuenta que ahora se invierte el orden de las curvas.

Esquemáticamente, dibujando también las curvas correspondientes en  $Z$ :

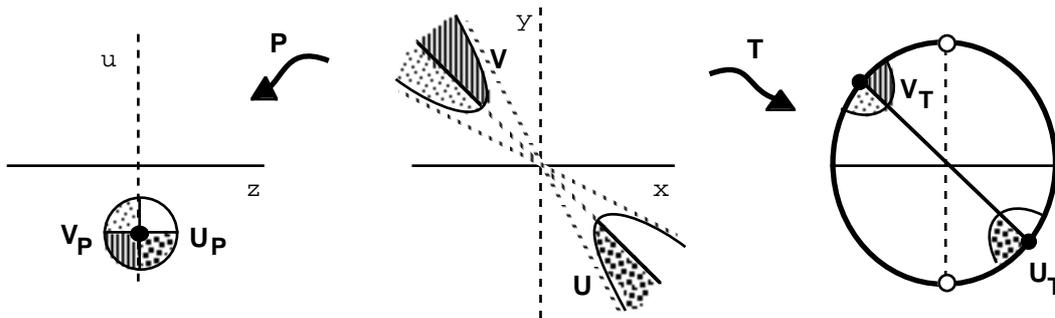


- las curvas que llegan al punto  $(z,u)=(0,m)$  por la derecha [izquierda] corresponden a curvas del plano  $xy$  con pendiente  $m$  en  $+\infty$  [ $-\infty$ ] y por tanto a curvas de  $Z$  que llegan al punto del infinito  $r=1$ ,  $\theta=\arctag m$  [ $\theta=\arctag m+\pi$ ] (intersecciones de  $y=mx$  con la circunferencia  $C$ ):



(así que a cada pareja de puntos de  $C$  opuestos (distintos de  $n$  ó  $s$ ) está asociado un único punto del eje  $u$ ).

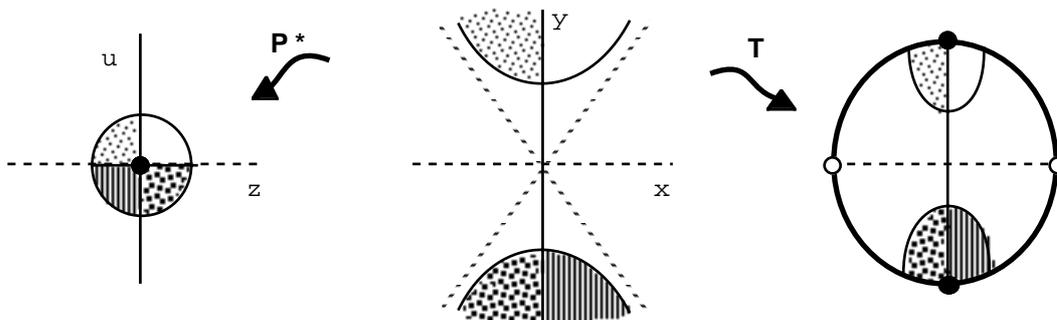
- un entorno circular de un punto  $(z,u)=(0,m)$  procede de dos entornos hiperbólicos en el infinito de la recta  $y=mx$  [ $(u-m)^2+z^2 \leq R \Leftrightarrow R^2x^2-(y-mx)^2 \geq 1$ ] y por tanto está asociado a dos semientornos de los puntos del infinito:



La descripción, por tanto, de un conjunto de curvas en  $U_P$  y  $V_P$  es una descripción de curvas de  $U_T$  y  $V_T$ , es decir, de curvas del plano "próximo en  $+y$  - infinito" a una determinada recta.

El cambio  $P$ , como se observa, no nos da información sobre lo que sucede en los polos norte y sur de  $Z$ . Para completar la información podemos considerar un cambio  $P^*$ , similar a  $P$ , definido cambiando los papeles de las coordenadas  $x$  e  $y$ :

$$P^*: \mathbb{R}^2 - \{y=0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{u=0\} \quad \text{con} \quad z = \frac{x}{y}; \quad u = \frac{1}{y} \quad (\text{es decir, } x = \frac{z}{u}; \quad y = \frac{1}{u})$$





## 6.2 El análisis homogéneo.

Haciendo en el sistema [S] el cambio **P** llegamos al nuevo sistema:

$$\begin{cases} z' = -z^2 f\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) & = -z^{2-m}A^m(1,u) - \dots - z^{2-n}A^n(1,u) \\ u' = z g\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) - uz f\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) & = z^{1-m}[B^m(1,u)-uA^m(1,u)] + \dots + z^{1-n}[B^n(1,u)-uA^n(1,u)] \end{cases}$$

Multiplicando por  $z^{m-1}$  obtendremos un sistema que tiene las mismas órbitas que el anterior salvo el eje  $z=0$  y el cambio de orientación en las órbitas de  $z<0$  si  $m$  es par:

$$[P] \begin{cases} z' = -zA^m(1,u) - \dots - z^{m-n+1}A^n(1,u) \\ u' = [B^m(1,u)-uA^m(1,u)] + \dots + z^{m-n}[B^n(1,u)-uA^n(1,u)] \end{cases}$$

Como  $z=0$  está formado por órbitas los puntos críticos en  $z=0$  nos dan las únicas posibles direcciones de aproximación a dicho eje. Dichos puntos vienen dados por

$$(1) \quad P_{m+1}(u) = B^m(1,u) - uA^m(1,u) = 0$$

Trabajando igual con el cambio **P\*** se llega a:

$$[P^*] \begin{cases} z' = [A^m(z,1)-zB^m(z,1)] + \dots + u^{m-n}[A^n(z,1)-zB^n(z,1)] \\ u' = -uB^m(z,1) - \dots - u^{m-n+1}B^n(z,1) \end{cases}$$

para el que los puntos críticos en  $u=0$  vienen dados por la expresión

$$(1^*) \quad zB^m(z,1) - A^m(z,1) = 0$$

Englobando (1) y (1\*) en una única expresión tenemos que **las únicas posibles direcciones de llegada al infinito vienen dadas por las raíces de**

$$(2) \quad \otimes(x,y) \equiv xB^m(x,y) - yA^m(x,y) = 0$$

Sea  $y=u_i x$  raíz de [2]. La matriz de la aproximación lineal de [P] en  $(0,u_i)$ , punto crítico, es:

$$\begin{pmatrix} -A^m & 0 \\ E & \frac{d}{du}[B^m - uA^m]_{(1;u_i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda_i & 0 \\ E_i & M_i \end{pmatrix}$$

con lo que este punto será simple si la raíz lo es, o si siendo raíz múltiple  $\Lambda_i \neq 0$  (y por tanto existirá al menos una variedad de [S] que llegará al infinito con pendiente  $u_i$ ). La estructura de  $(0,u_i)$  está determinada por  $\Lambda_i$  (si no se anula; en caso contrario habría que determinar más términos del desarrollo  $u=u_i+c_1z+c_2z^2+\dots$ , es decir, de  $y=u_ix+c_1+c_2x^{-1}+\dots$ ) y por la orientación de las órbitas sobre  $x=0$ .

Como ocurría en el capítulo 3 mejor que calcular los  $\Lambda_i$  sustituiremos las variedades obtenidas en la primera ecuación de [S], sin calcular los  $M_i$  orientaremos la circunferencia  $\mathbf{C}$  a partir de la ecuación (2) y representaremos la información obtenida directamente sobre el círculo  $\mathbf{Z}$ . Situación análoga se tiene para  $(0,0)$  en  $[P^*]$ , donde el  $\Lambda_\infty=B(0,1)$ . Así pues:

**Teorema 6.1**

Supongamos que  $\otimes(x,y)=xB^m(x,y)-yA^m(x,y)\neq 0$  y que  $\otimes(x,y)=0$  posee  $q\neq 0$  raíces reales  $y=u_1x, \dots, y=u_qx$  [ y tal vez  $x=0$  ].

Si para las  $u_i$  que no sean simples es  $A^m(1,u_i)\neq 0$  [  $B^m(0,1)\neq 0$  ], existen en [S] variedades  $y = u_i x + o(x)$ ,  $|x| \rightarrow \infty$  [ó  $x = o(y)$ ,  $|y| \rightarrow \infty$  ] que llegan al infinito con pendiente definida  $u_i$  [  $\infty$  ] y la estructura de las órbitas de [S] cerca de la circunferencia  $\mathbf{C}$  del infinito queda determinada con el signo de  $\otimes(x,y)$  y el flujo sobre cada una de estas variedades

Este flujo viene dado por  $x' = A^m(x, u_i x)$  si  $A^m(1, u_i) \neq 0$  o se puede precisar con algún término más del desarrollo  $y = u_i x + c_0 + c_{-1} x^{-1} + \dots$  de las variedades si se anula.

Con este teorema queda en muchas ocasiones determinada la estructura del infinito de [S] si existe alguna órbita que llegue hasta  $\mathbf{C}$ . Suponiendo que  $\otimes(x,y)$  no tiene raíces reales ( $m$  ha de ser impar) la distinción entre las tres posibilidades cerca del infinito (que las órbitas sean cerradas, que se acerquen o que se alejen en espiral de  $\mathbf{C}$ ) se reduce haciendo  $\rho=1/r$  en la expresión [P] en polares de [S] a un problema de los vistos en el capítulo 4:

$$[P] \begin{cases} r' = M_n r^n + \dots + M_m r^m \\ \theta' = m_n r^{n-1} + \dots + m_m r^{m-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho=1/r \\ \rightarrow \end{matrix} \quad [P^*] \begin{cases} \rho' = -M_m \rho^m + o(\rho^m) \\ \theta' = m_m \rho^{m-1} + o(\rho^{m-1}) \end{cases}$$

(tras multiplicar los segundos miembros por  $\rho^{2m-2}$ , lo que no altera las órbitas en  $\rho>0$ ), siendo como siempre  $M_k(\theta)=CA^k(C,S)+SB^k(C,S)$ ,  $m_k(\theta)=CB^k(C,S)-SA^k(C,S)$ ,  $C = \cos \theta$ ,  $S = \sen \theta$ . Tenemos que  $m_m$  no se anula para ningún  $\theta$ . Las órbitas de  $[P^*]$  cerca de  $\rho=0$  describen las de [S] cerca de  $\mathbf{C}$ . A la vista de los resultados de 4.1 y 4.5 podemos concluir:

**Teorema 6.2**

Sea  $I^* \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{m-1}(C,S)}{m_m(\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{m-1}(1,z)}{\otimes(1,z)} dz$ , con  $E_{m-1} = A^m_x + B^m_y$ . Entonces:

Si  $I^* \cdot a_{0m} < 0$ , las órbitas se acercan en espiral hacia la circunferencia  $\mathbf{C}$ .

Si  $I^* \cdot a_{0m} > 0$ , las órbitas se alejan en espiral de la circunferencia  $\mathbf{C}$ .

Si  $I^*=0$ , debemos considerar los términos de menor orden. Para poder aplicar 4.5 debemos restringirnos al caso  $m=3$ . Entonces los sistemas [S], [P] y  $[P^*]$  son, respectivamente:

$$\begin{cases} x' = A^1 + A^2 + A^3 \\ y' = B^1 + B^2 + B^3 \end{cases}, \quad \begin{cases} r' = M_1 r + M_2 r^2 + M_3 r^3 \\ \theta' = m_1 + m_2 r + m_3 r^2 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \rho' = -M_3 \rho^3 - M_2 \rho^4 - M_1 \rho^5 \\ \theta' = m_3 \rho^2 + m_2 \rho^3 + m_1 \rho^4 \end{cases}$$

Basta modificar ligeramente los cálculos de 4.5 para obtener:

**Teorema 6.3**

Sea  $a_{03} < 0$  y definamos  $Q^*_4(z) = A_3B_1 - B_3A_1|_{(1,z)}$ ,  $Q^*_8(z) = [B_2 - zA_2][B_3A_2 - A_3B_2]|_{(1,z)}$ ,

$R^*_4(z) = E_2(1,z)P_2(z) - E_0(1,z) \otimes(z)$ ,  $R^*_8(z) = P_3(z)[E_1(1,z) \otimes(z) - E_2(1,z)P_3(z)]$ ,

$E^*(z) = \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{\otimes}\right]$  y  $J^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q^*_4}{\otimes^{3/2}} + \frac{Q^*_8}{\otimes^{5/2}}\right] E^* dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{R^*_4}{2\otimes^{3/2}} + \frac{R^*_8}{3\otimes^{5/2}}\right] E^* dz$

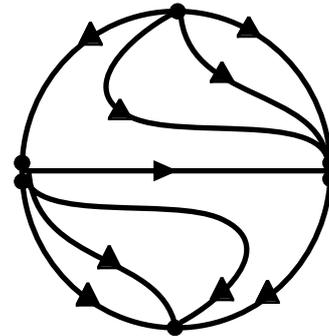
Entonces si  $I^* = 0$  y además:  $J^* < 0$ , las órbitas se acercan en espiral hacia la circunferencia  $C$ .

$J^* > 0$ , las órbitas se alejan en espiral de la circunferencia  $C$ .

La  $J^*$  no es normalmente calculable, pero se podrá reducir con las técnicas de 4.5.

**Ejemplo 1.**  $\begin{cases} x' = 1+x^2+xy \\ y' = xy-y^2 \end{cases} \quad \otimes = -2xy^2 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} y=0 \text{ doble} \rightarrow x' = x^2 + o(x^2) \\ x=0 \text{ simple} \rightarrow y' = -y^2 + o(y^2) \end{array}$

La estructura de las órbitas en el infinito queda determinada sólo con lo anterior: el signo de  $\otimes$  nos da la orientación de  $C$ , las dos ecuaciones en  $x'$  e  $y'$  orientan las órbitas que llegan o salen de puntos del infinito y queda precisada la estructura local de dichos puntos [ los asociados a  $y=0$  son silla-nodos y los de  $x=0$  son nodos ]. Como además el sistema no tiene puntos críticos en  $R^2$  podemos completar el esquema de las órbitas en  $Z$ .



**Ejemplo 2.**  $\begin{cases} x' = xy - x^3 + xy^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases}$  (ej.2 del cap.2)  $\otimes = xy(x^2 - y^2) = 0 \rightarrow y=0, x=0, y=\pm x$

$y=0 + o(x) \rightarrow x' = A^3(x,0) + o(x^3) = -x^3 + o(x^3)$

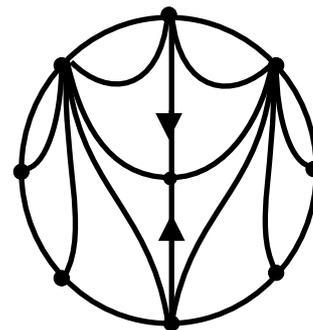
Para  $x=0$  (simple) es  $B^3(0,y) \equiv 0$ . La variedad centro es  $x=0 \rightarrow y' = -y$ . Los puntos quedan caracterizados.

Como  $A^3(x, \pm x) \equiv 0$  hallamos más términos de los desarrollos. Llevamos a la ecuación de las órbitas  $y = c_1x + c_0 + c_{-1}x^{-1} + \dots$ :

$[c_1 - c_{-1}x^{-2} + \dots][c_1x^2 - x^3 + c_1^2x^3 + 2c_0c_1x^2 + \dots] = -c_1x + x^2 + \dots$

Igualando las potencias de mayor orden:

$x^3 \rightarrow c_1 [c_1^2 - 1] = 0 \rightarrow c_1 = 0; \quad c_1 = 1; \quad c_1 = -1$   
 $x^2 \rightarrow c_1^2 [1 + 2c_0] = 1 \rightarrow c_0 \text{ imposible}; \quad c_0 = 0; \quad c_0 = 0$



La variedad asociada a  $y=0$  no era centro y podía no admitir desarrollo pero el punto elemental estaba ya analizado. Para las otras dos tenemos que  $y = \pm x + O(1/x) \rightarrow x' = \pm x^2 + O(x)$ . Con esta información y la obtenida en el capítulo 2 completamos el dibujo de las órbitas en  $Z$ .

**Ejemplo 3.**  $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = kx + y + m^2x^3 + 2x^2y + 2mxy^2 - y^3 \end{cases} \rightarrow \otimes = [y^2 + mx^2]^2$

El sistema homogéneo de tercer orden que nos proporciona el  $\otimes$  fue analizado en el ejemplo 1 del capítulo 4 para  $m > 0$  (cuando no tiene variedades que lleguen a  $\mathbf{C}$  con pendiente definida) y volvió aparecer en 4.5 para  $m = 2$  acompañado de términos de orden 4. En 4.1 vimos que tiene un foco inestable si  $0 < m < 2$ , un centro si  $m = 2$  y un foco estable si  $m > 2$ . En el sistema completo, por tanto, las órbitas se acercan en espiral a  $\mathbf{C}$  en el primer caso y se alejan en el tercero y todavía no sabemos su comportamiento si  $m = 2$ . Para verlo estudiamos la  $J^*$ :

$$E^* = \exp\left[-\frac{2[z-1]}{p}\right], \quad Q^*_4 = [k+z][2-z^2-z^3], \quad J^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q^*_4}{p^3} E^* dz, \quad \text{con } p = z^2 + 2$$

Reducimos la  $J^*$  de forma similar a la de 4.5 y hallamos el polinomio con integral cero:

$$\begin{aligned} \frac{Q^*_4}{p^3} E^* &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{E^*}{p} \left( z + \frac{k+3}{2} \right) \right] + \frac{E^*}{p^3} R_2, \quad R_2 = (1-2k)z^2 + (18+4k)z + 4k+2 \\ 0 &= \left[ \frac{E^*}{p} \left( \frac{1}{2} z^2 + z + 1 \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{p^3} N_2, \quad N_2 = z^2 + 2z \end{aligned}$$

El discriminante  $D_k(s)$  de  $R_2 + sN_2$  es  $\leq 0$  para algún  $s$  para los  $k$  tales que  $D_k = 0$  tiene raíces reales en  $s$ , o sea, para aquellos en que el discriminante de  $D_k$  respecto a  $s$  es  $\leq 0$  que son:

$$k \in [-5/2, -1/2]$$

[que son los  $k$  para los que hay una única raíz de  $R_2$  entre las raíces  $-2$  y  $0$  de  $N_2$ ]

Para estos  $k$  es fácil ver que  $R_2 + sN_2 \leq 0$  para los  $s$  con  $D_k \leq 0$  con lo que el infinito es atractor.

El intervalo obtenido para los  $k$  no es nada preciso, pues los valores numéricos de:

$$J^*_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{p^3}, \quad J^*_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 E^*}{p^3} \rightarrow J^* < 0 \text{ si } k < 1.1819 \text{ aproximadamente.}$$

Podemos mejorar el resultado engordando numeradores y denominadores.

$$\begin{aligned} \frac{p^2 Q^*_4}{p^5} E^* &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{E^*}{p^3} \left( z^5 + \frac{k+3}{2} z^4 + \dots \right) \right] + \frac{8E^*}{45p^5} R^*_2, \quad R^*_2 = (131-10k)z^2 + (32+80k)z + 38-40k \\ 0 &= \left[ \frac{E^*}{p^3} \left( \frac{1}{2} z^6 + z^5 + 3z^4 + \frac{8}{3} z^3 + \frac{10}{3} z^2 + \frac{4}{5} z + \frac{92}{45} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{16}{45} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{p^5} R_2, \quad N_2 = 37z^2 - 26z - 14 \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que las órbitas se acercan a infinito si  $k \in [-6.53, 0.620]$ . Y la aproximación aumenta mucho si seguimos. Tras largos cálculos se consigue fijar el  $sg[J^*]$  en los  $k$  descritos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^4 Q^*_4}{p^7} E^* dz \rightarrow k \notin [0.616, 1.23], \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^6 Q^*_4}{p^9} E^* dz \rightarrow k \notin [1.176, 1.197]$$

Para  $m \leq 0$ ,  $m \neq -1$ , el teorema 6.1 precisa la estructura de  $\mathbf{C}$  pues se tiene que  $\otimes \geq 0$  y además:

$$y = \pm \sqrt{-m} x \text{ dobles, pero asociadas a } A^3(x, \pm \sqrt{-m} x) = [\text{negativo}] [\pm \sqrt{-m} - 1] x^3$$

(cierto aun en el caso de  $y=0$  cuádruple que aparece para  $m=0$ ; para  $m=-1$  es  $y=x$  doble con autovalor 0). Si  $k > -1$  no hay más puntos críticos finitos que el origen, que es nodo inestable pues sobre la variedad centro  $y = -kx + \dots$  se tiene que  $x' = (k+1)(k^2 - 2k + 2)x^3 + \dots$ . Por tanto si  $m > 2$  y  $k > -1$  o si  $m = 2$  y  $k > 1.1819$  ha de existir un ciclo límite pues tanto el origen como el infinito son repulsores. [Integrando gráficamente se ve que siempre hay ciclos límites para  $m > 2$  aunque aparezcan otro par de puntos críticos finitos].

### 6.3 Acudiendo a la poligonal.

Consideremos en esta sección el caso no recogido en el teorema 6.1: **supondremos que  $y=0$  es raíz múltiple y que  $A^m(1,0) = a_{m0} = 0$** . Si la raíz múltiple fuese  $y=ux$ , haciendo  $x=x$ ;  $w=y-ux$  acabaríamos en el caso anterior; en este caso, como hacíamos en el análisis del origen, tal vez sea más corto determinar más términos del desarrollo para 'separar' la posible variedad múltiple en seguras variedades simples, si esto es posible.

Para analizar  $y=0$  podríamos realizar el cambio **P** y usar en [P] las técnicas del capítulo 5, es decir, utilizar la poligonal de Newton de la curva algebraica:

$$H_t^\infty(z,u) \equiv z^{m+1} g\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) - (1-t)uz^{m+1} f\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = 0$$

[la  $t$  cumple aquí el papel que desempeñaba la  $s$  en el análisis del origen]

Análogamente, si  $x=0$  fuera múltiple y  $B^m(0,y) = b_{0m} = 0$  podríamos hacer **P\*** y luego considerar para [P\*] la curva:

$$H_t^{\infty*}(z,u) \equiv (t-1)zu^{m+1} g\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) - tu^{m+1} f\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = 0$$

Pero vamos a ver que, salvo excepciones análogas a las del origen, no es necesario hacer ningún cambio y bastará considerar una nueva poligonal (ahora la que rodea por fuera a los demás puntos del sistema) asociada a la ya conocida curva

$$H_s(x,y) \equiv xg(x,y) - syf(x,y) = 0$$

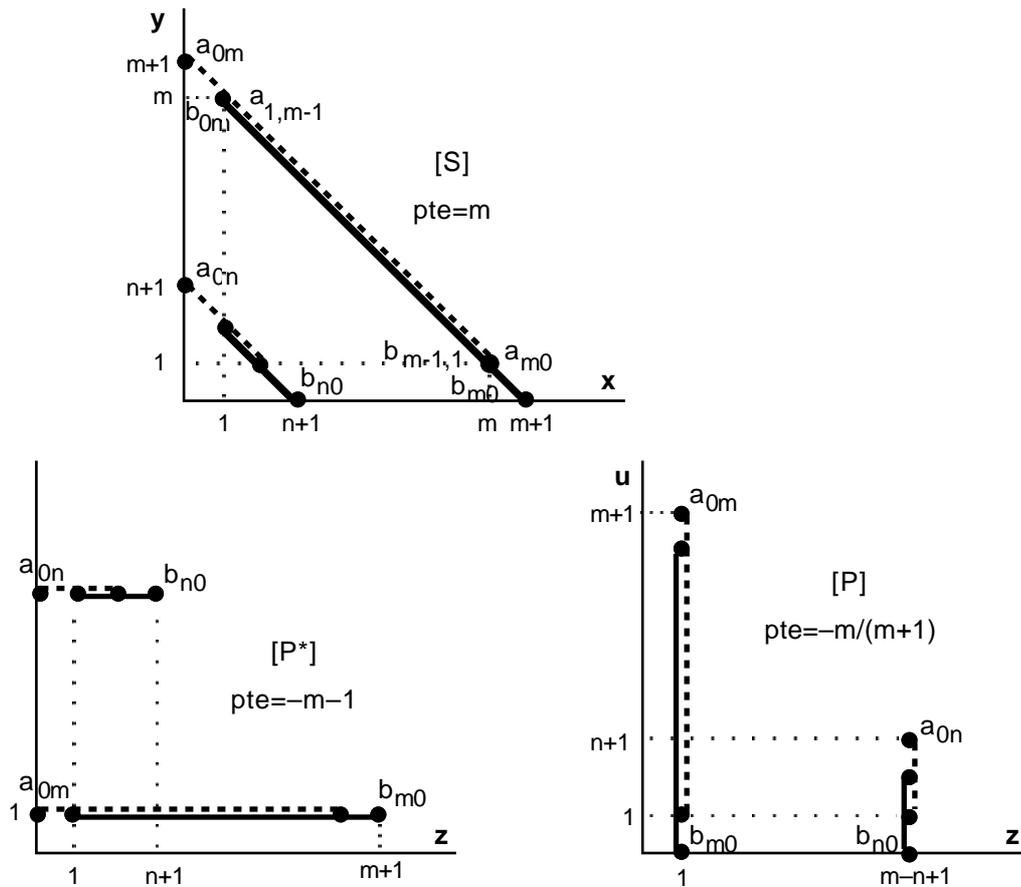
Es inmediato ver que los términos (tanto de la ecuación en  $z'$  como en  $u'$ ) que dan un mismo punto en la poligonal de [P] o [P\*] provienen de términos de [S] (de  $f$  y  $g$ ) que también dan un mismo punto en su poligonal. En concreto, un punto  $(r,q)$  del diagrama  $xy$  de  $H_s$ :

$$[S] \begin{cases} x' = ax^r y^{q-1} + \dots \\ y' = bx^{r-1} y^q + \dots \end{cases}$$

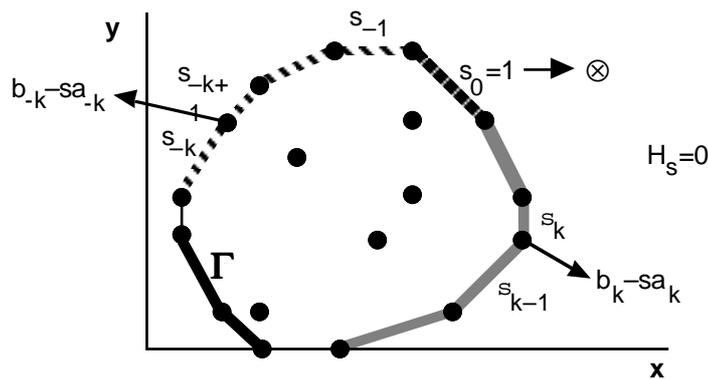
se transforma por **P** [ **P\*** ] en el punto  $(r^\infty, q^\infty) = (m+2-r-q, q)$  [  $(r^{\infty*}, q^{\infty*}) = (r, m+2-r-q)$  ] del diagrama  $zu$  de  $H_t^\infty$  [  $H_t^{\infty*}$  ]:

$$[P] \begin{cases} z' = -az^{m+2-r-q} u^{q-1} + \dots \\ u' = [b-a]z^{m+1-r-q} u^q + \dots \end{cases} \quad [P^*] \begin{cases} z' = [a-b]z^r u^{m+1-r-q} + \dots \\ u' = -bz^{r-1} u^{m+2-r-q} + \dots \end{cases}$$

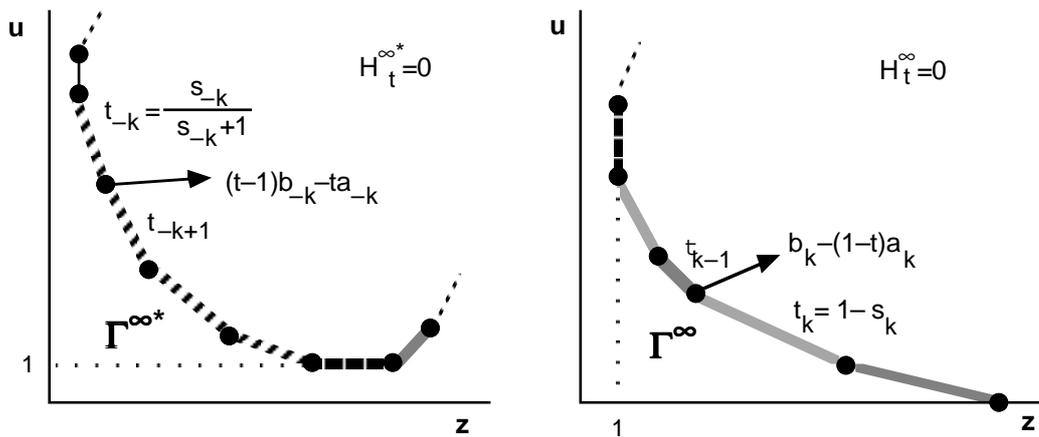
La transformación  $(p,q) \rightarrow (r^\infty, q^\infty)$  [  $(p,q) \rightarrow (r^{\infty*}, q^{\infty*})$  ] lleva rectas de  $xy$  de pendiente  $m$  a rectas de  $zu$  de pendiente  $-m/(m+1)$  [  $-m-1$  ]. Esquematiéndolo:



Construyamos para  $[S]$  (es decir, para  $H_S=0$ ) la poligonal convexa  $\Gamma$  que encierra en su interior a los puntos correspondientes a los demás coeficientes (como ya sabemos, la parte inferior izquierda de  $\Gamma$  informa de la estructura del origen de  $[S]$ ):



Al realizar  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}^*$ ) esta  $\Gamma$  se transforma en otra poligonal convexa  $\Gamma^\infty$  ( $\Gamma^{\infty*}$ ) que continúa encerrando los demás puntos de  $[P]$  (de  $[P^*]$ ). Pero ahora la parte derecha (superior izquierda) de  $\Gamma$  se convierte en la parte de la poligonal  $\Gamma^\infty$  ( $\Gamma^{\infty*}$ ) que informa sobre el origen de  $[P]$  (de  $[P^*]$ ) y, por tanto, sobre las órbitas de  $[S]$  que llegan al infinito con tangente horizontal (vertical). Un segmento de  $\Gamma$  de pendiente  $-1/s$  [ligado a variedades  $y=O(x^s)$ ] es llevado por  $\mathbf{P}$  a uno de  $\Gamma^\infty$  asociado a variedades  $u=O(z^{1-s})$  y por  $\mathbf{P}^*$  a otro de  $\Gamma^{\infty*}$  asociado a  $u=O(z^{s/(s-1)})$ :



Sea  $P_k(x,y) = xP_{kg} - s_k y P_{kf}$  el polinomio que nos proporciona un segmento de la parte derecha de  $\Gamma$  de pendiente  $-1/s_k$ . Al hacer  $P$  se transforma en

$$P_k^\infty(z,u) \equiv z^{m+1} P_{kg}\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) - (1-t_k) u z^{m+1} P_{kf}\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right), \text{ con } t_k = 1-s_k$$

Si  $y = mx^{s_k}$  es raíz de  $P_k = 0$  entonces  $u = mz^{1-s_k}$  lo es de  $P_k^\infty = 0$  con la misma multiplicidad. Luego si es raíz simple o con  $P_{kf}^\infty(1,m) = P_{kf}(1,m) \neq 0$  existe variedad de  $[P]$  de la forma  $u = mz^{t_k} + o(z^{t_k})$  y por tanto existe variedad de  $[S]$  que llega al infinito con tangente horizontal  $y = mx^{s_k} + o(x^{s_k}), x \rightarrow \infty$ .

Análogamente, si  $y = mx^{s-k}$  es raíz simple o con  $P_{-kf} \neq 0$  de un  $P_{-k} = 0$  existe variedad que llega al infinito (con tangente vertical):  $y = mx^{s-k} + o(x^{s-k})$ .

Los mismos resultados se obtienen cambiando  $x$  por  $[-x]$ .

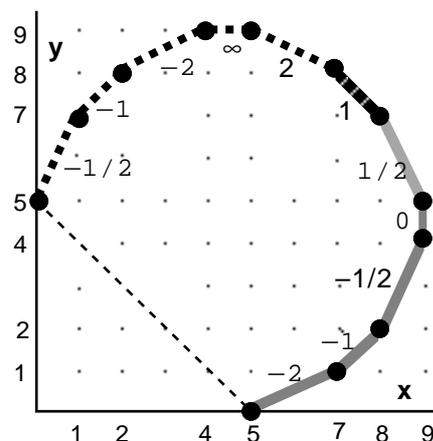
Como en el análisis del origen, el conocimiento de estas variedades orientadas más el signo de  $\otimes$  nos bastará en muchas ocasiones para precisar la estructura del infinito. Como allí, se complicará algo el análisis si el cociente de los coeficientes de  $[P]$  (o  $[P^*]$ ) correspondientes al punto común de dos segmentos sucesivos de la poligonal de pendientes  $-1/t_{k-1}$  y  $-1/t_k$  pertenece al intervalo  $[t_{k-1}, t_k]$ . Con facilidad se ve que esto se traduce para la parte derecha de  $\Gamma$  en que surgen complicaciones si  $b_k/a_k \in [s_k, s_{k-1}]$ .

Para la parte izquierda de  $\Gamma$  los problemas aparecerán si  $a_{-k}/b_{-k} \in [1/s_{-k}, 1/s_{-k+1}]$  (o sea, si  $b_{-k}/a_{-k} \in [s_{-k+1}, s_{-k}]$ , entendiéndose que si  $s_{-k+1} > 0$  y  $s_{-k} < 0$  esto significa que o bien  $b_{-k}/a_{-k} \geq s_{-k+1}$  o bien  $b_{-k}/a_{-k} \leq s_{-k}$  [ordenamos:

$$-2 \leq -1 \leq -\frac{1}{2} \leq 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \leq 2 \leq \pm\infty \leq -2 \leq -1 \leq -\frac{1}{2} ]).$$

[Observemos que, a diferencia del origen, aquí puede haber problemas aunque el  $a_{\bullet}$  o el  $b_{\bullet}$  sean 0].

Si  $b_{\bullet}/a_{\bullet}$  pertenece al intervalo abierto aparecen como en el origen infinitas variedades de la forma  $y = O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$  (asociadas a nodos) que llegan al infinito. Si  $b_k/a_k = s_k$  ó  $s_{k-1}$  ( $b_{-k}/a_{-k} = s_{-k+1}$  ó  $s_{-k}$ ) será necesario orientar además otra circunferencia con el signo de  $P_k$  ( $P_{-k}$ ).



Resumiendo todo lo anterior tenemos un teorema enteramente análogo al teorema 5.3:

**Teorema 6.4**

Si  $y = m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}$ ,  $x \geq 0$ , es raíz real simple de  $P_{\bullet}=0$  o múltiple con  $P_{\bullet f}(1, m_{\bullet\bullet}) \neq 0$ , existe en  $[S]$  variedad de la forma  $y = m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}} + o(x^{s_{\bullet}})$ , con  $x \rightarrow \infty$  (para  $s_k$ ) o con  $x \rightarrow 0$  (para  $s_{-k}$ ).

Análogo resultado se tiene cambiando  $x$  por  $[-x]$ .

Si ningún  $P_{\bullet} \equiv 0$  y todas las raíces de todos los  $P_{\bullet}=0$  (con  $m_{\bullet\bullet} \neq 0$ ) son simples o con  $P_{\bullet f}(1, m_{\bullet\bullet}) \neq 0$  la estructura de las órbitas de  $[S]$  en el infinito queda determinada por

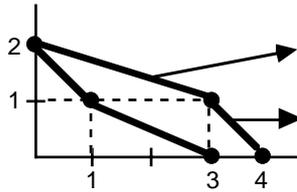
- el flujo para  $|x|$  o  $|y|$  grande sobre cada variedad
- el signo de  $\otimes$  y el signo de los  $P_{\bullet}$  para los que sea  $\frac{b_{\bullet}}{a_{\bullet}} = s_{\bullet}$  ó  $s_{\bullet \pm 1}$  ( $\bullet < > 0$ ).

Como en el origen, para determinar el flujo sobre las variedades  $y = m_{\bullet\bullet}|x|^{s_{\bullet}}$  bastará hallar  $P_{\bullet f}(x, m_{\bullet\bullet}|x|^{s_{\bullet}})$  (o el  $P_{\bullet g}$  correspondiente) si no se anula; si se anula y la raíz es simple la variedad será esencialmente centro y se podrán calcular más términos de su desarrollo. La forma de las órbitas entre dos variedades consecutivas, se deduce del signo de  $\otimes$  (sin olvidar las posibles variedades  $y = O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$  asociadas a nodos descritas y el cambio de flujos 'verticales' que acarrearán), si  $b_{\bullet}/a_{\bullet} \neq s_{\bullet}$  ó  $s_{\bullet \pm 1}$  (si no, habrá que fijar también el signo de  $P_{\bullet}$ ). Sólo quedan por analizar con este teorema los casos análogos a los citados para el teorema 5.3: si existen  $m_{\bullet\bullet}$  múltiples con  $P_{\bullet f} = 0$ , si algún  $P_{\bullet} \equiv 0$  y si no hay variedades que lleguen al infinito con pendiente definida. Este caso se podría reducir a las situaciones de los teoremas 7.2 y 7.3 en el caso de que la poligonal exterior se redujese a un único segmento apoyado en los ejes. No sabemos como distinguir el centro o foco del infinito si no es esa la situación.

En la próxima sección se estudian varios ejemplos para ilustrar la teoría de ésta. En algunos bastará aplicar el teorema anterior para concluir el análisis. Otros exigirán cálculos adicionales. El último más bien es un repaso de secciones previas pero está al final de éste capítulo porque incluye también algún análisis del infinito utilizando la poligonal.

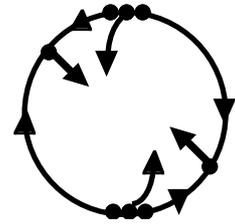
**6.4 Ejemplos que exigen la poligonal.**

**Ejemplo 4.**  $x'' + (x^2-3)x' + x^3-x^2 = 0$  , es decir ,  $\begin{cases} x' = v \\ v' = 3v+x^2-x^2v-x^3 \end{cases}$



$$v = -\frac{1}{3}x^3 + \dots \rightarrow x' = -\frac{1}{3}x^3 + \dots$$

$$\otimes = -x^3[x-v] = 0 \rightarrow v = -x + \dots \rightarrow x' = -x + \dots$$



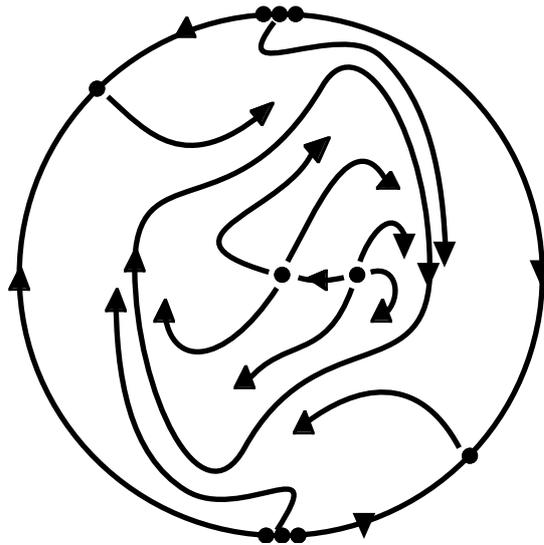
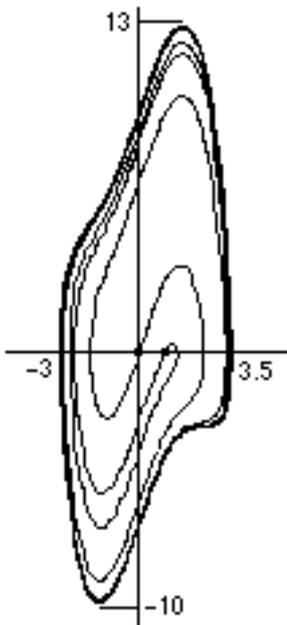
Así que el infinito es repulsor. Comprobemos que existe (al menos) un ciclo límite (la ecuación es similar a la de Van der Pol). Consideremos la energía total del sistema sin rozamiento:

$$U(x,y) = \frac{v^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

La derivada de esta U a lo largo de las soluciones del sistema es:

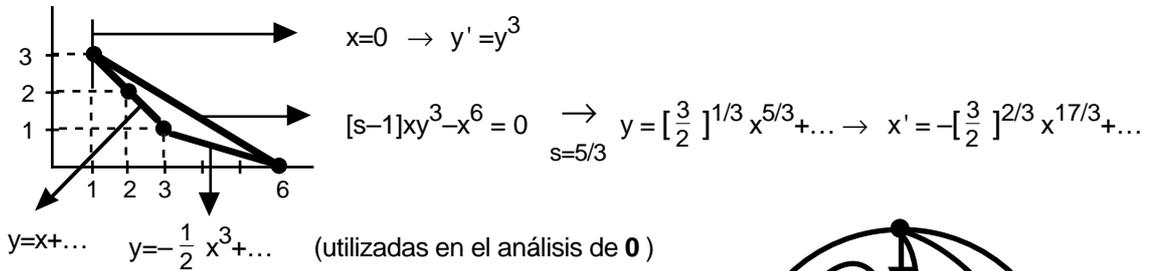
$$\dot{U} = v^2(3-x^2) \quad [ \geq 0 \text{ si } |x| \leq \sqrt{3} ]$$

La curva cerrada  $U = 9/64$  , por ejemplo, está contenida en  $|x| < \sqrt{3}$  y, por tanto, es cruzada por las órbitas del sistema desde dentro hacia fuera. Dichas órbitas, que no pueden irse al infinito ni tender hacia ningún punto crítico finito [que son (0,0) silla-nodo y (1,0) nodo inestable], deben aproximarse a un ciclo límite. Su forma, obtenida numéricamente, es la de la figura inferior de la izquierda. La figura de la derecha es un esquema de las órbitas en Z .

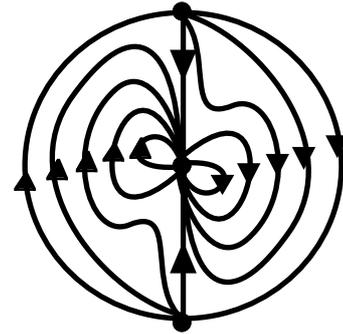


**Ejemplo 5.**  $\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases} \quad \otimes = -x^6 = 0 \rightarrow x=0 \text{ m\u00faltiple}, B^5(0,y) \equiv 0$

El origen, \u00fanico punto cr\u00edtico finito, fue analizado en el ejemplo 1 del cap\u00edtulo 3. El infinito:

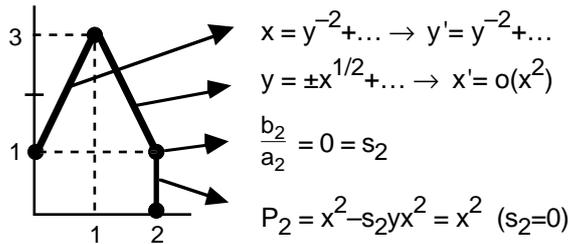


Llevando estas variedades a  $\mathbf{Z}$  completamos el an\u00e1lisis del infinito; con los datos del cap\u00edtulo 3 obtenemos el retrato de fases global de la figura. Obs\u00e9rvase que el origen es un **atractor inestable**: todas las soluciones tienden hacia el cuando  $t \rightarrow \infty$  pero  $x=y=0$  no es una soluci\u00f3n estable.



**Ejemplo 6.**  $\begin{cases} x' = 1+x^2-xy^2 \\ y' = x \end{cases}$

$\otimes = xy^3$   
 $A^3(x,0), B^3(0,y) \equiv 0$

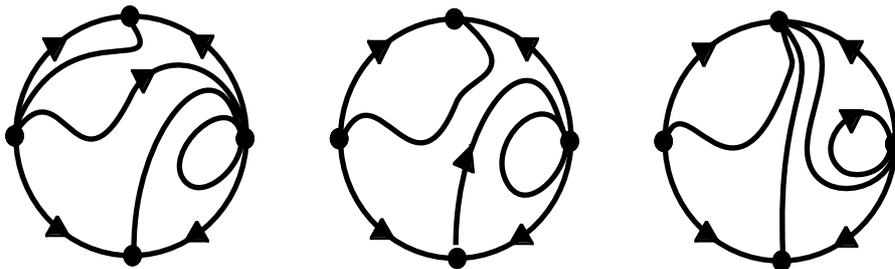
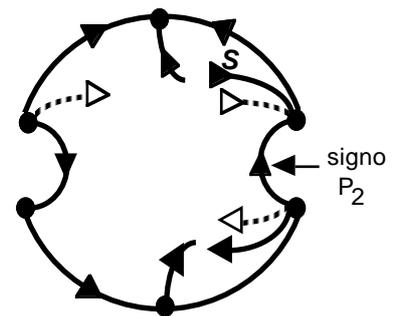


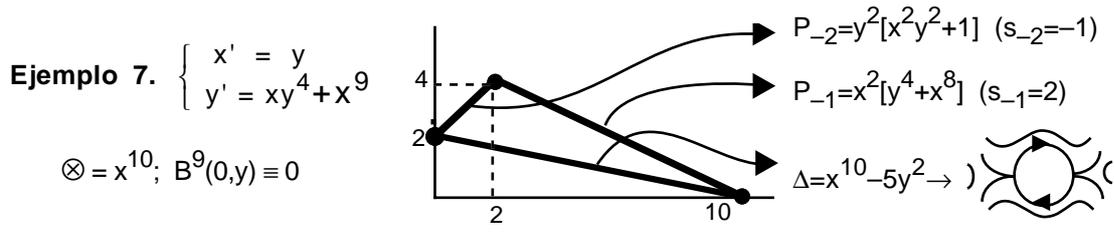
En este ejemplo 'se va' un t\u00e9rmino de la poligonal (lo que suele suceder cuando alg\u00fan  $s_\bullet$  es 0 \u00f3  $\infty$ , como en este caso en que hay un segmento vertical) y es necesario considerar, adem\u00e1s del de  $\otimes$ , el signo de alg\u00fan  $P_\bullet$ .

Necesitamos m\u00e1s t\u00e9rminos de las variedades  $O(x^{1/2})$  para precisar el flujo sobre ellas. Probando series obtenemos:

$y = \pm x^{1/2} - 1 + \dots \rightarrow x' = \pm x^{3/2} + o(x^{3/2})$

Todo lo anterior precisa la estructura del infinito. Teniendo en cuenta que no hay puntos cr\u00edticos finitos tenemos, en principio, las siguientes posibilidades para el retrato global, dependiendo de cu\u00e1l sea el origen de la separatriz  $S$ .



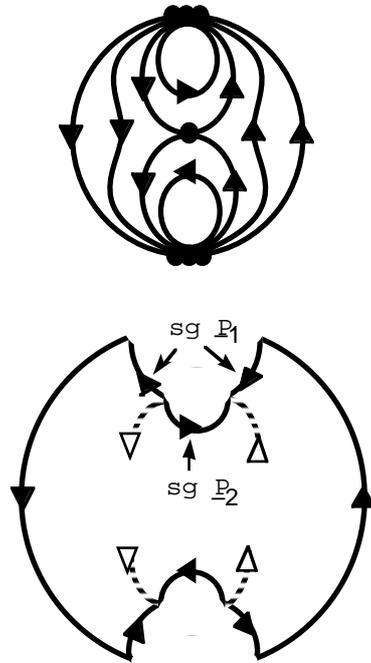


No existen variedades que lleguen al infinito dadas por segmentos de la poligonal. Pero como

$$\frac{1}{0} \in (-1,2) \quad [\text{es decir } \frac{0}{1} \in (-1, \frac{1}{2}) ]$$

existen infinitas variedades asociadas a nodos  $y=O(x^\infty)$ , o sea, infinitas variedades  $x=O(1)$ . Por tanto la estructura global de las órbitas es la de la derecha.

(como en el análisis del origen, el esquema anterior incluye implícitamente, aunque no lo dibujemos, la orientación de la circunferencia correspondiente a  $s_{-1}=2$  (que continúa la de  $\otimes$ ) y la orientación (opuesta) de la asociada a  $s_{-2}=-1$ ; obsérvese que la dirección de las flechas parece contradecir el signo de  $P_{-2}$ ; no es así, pues es fácil ver en general que si  $s_{-k}<0$  hay que orientar la circunferencia asociada de forma opuesta al signo de  $P_{-k}$ ; si cambiamos los papeles de  $x$  e  $y$  llegamos al mismo sentido de la flechas; habrá que cambiarlo si  $s_{-k}=0$ .



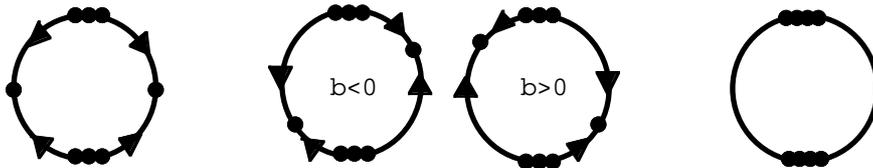
**Ejemplo 8.**  $\begin{cases} x' = y \\ y' = bx^k - x^2y \end{cases}$  con  $b \neq 0$  (origen aislado),  $k \geq 1$ .

Clasifiquemos los mapas de fases globales sobre  $Z$ . Para la circunferencia del infinito:

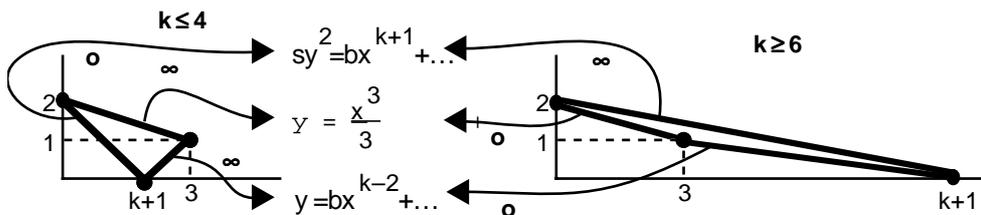
si  $k \leq 2$ ,  $\otimes = -x^3y$

si  $k=3$ ,  $\otimes = x^3[bx-y]$

si  $k \geq 4$ ,  $\otimes = bx^{k+1}$

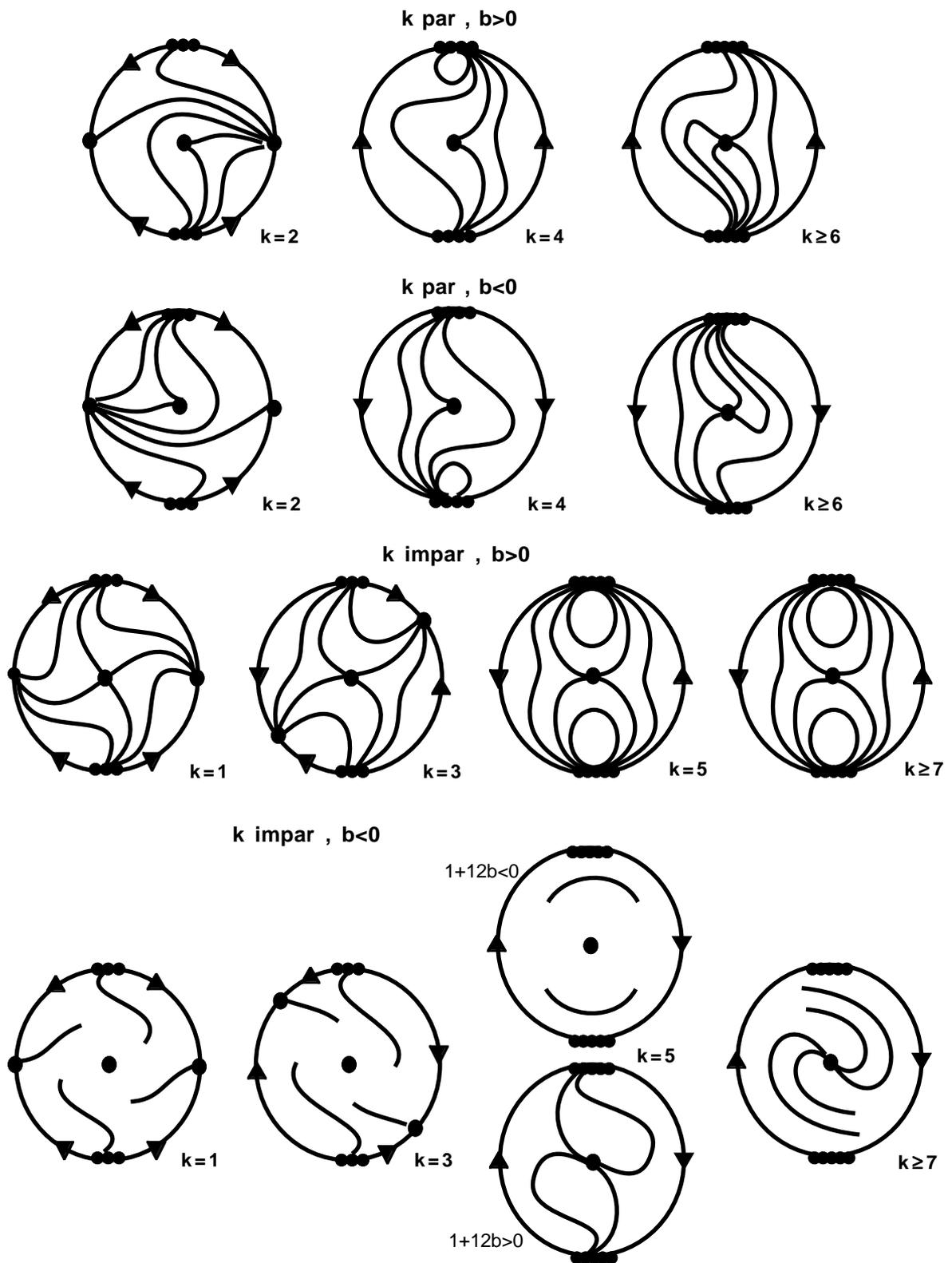


La poligonal nos da las siguientes variedades (útiles unas para el análisis de origen [o] y otras para el infinito [ $\infty$ ]):



y para  $k=5$ :  $y = \frac{1}{6} [-1 \pm \sqrt{1+12b}] x^3 + \dots$  (o e  $\infty$ )

Sin más que tener en cuenta las posibilidades para las variedades anteriores (su orientación es trivial; el origen está clasificado en el ejemplo 9 del capítulo 5) tenemos:



[ con  $U(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{bx^{k+1}}{k+1}$  se ve que el origen es globalmente asintóticamente estable ]

**Ejemplo 9.** Clasifiquemos los retratos globales de los **sistemas cordales cuadráticos**, es decir, sistemas sin puntos críticos finitos de la forma:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+lx^2+mxy+ny^2 \\ y' = h+cx+dy+rx^2+pxy+qy^2 \end{cases}$$

Como  $\otimes = xB^2 - yA^2$  es de tercer grado tiene al menos una raíz real.

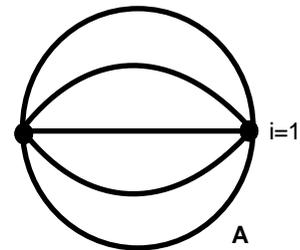
Eligiendo adecuadamente los ejes se puede conseguir que sea  $y=0$ . O sea, no hay pérdida de generalidad suponiendo que  $r=0$ :

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+lx^2+mxy+ny^2 \\ y' = h+cx+dy+pxy+qy^2 \end{cases} \quad \otimes = -y [ ny^2 + (m-q)xy + (l-p)x^2 ]$$

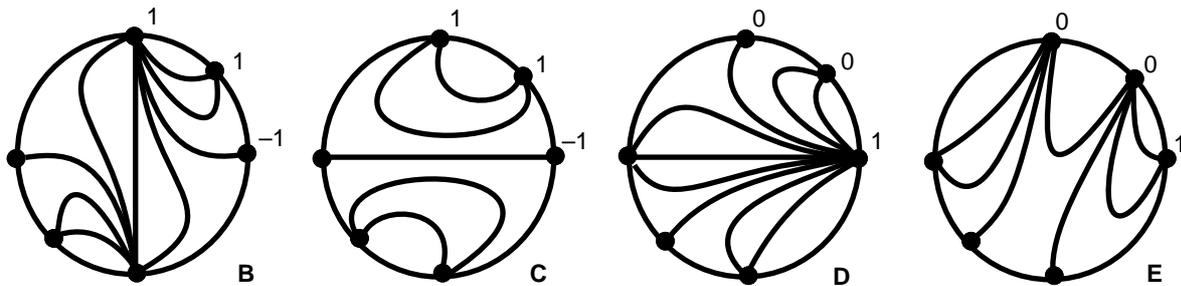
En ocasiones utilizaremos el hecho de que la suma de los índices de los puntos críticos sobre  $Z$  ha de ser igual a 1.

Supongamos inicialmente que  $\otimes \neq 0$ .

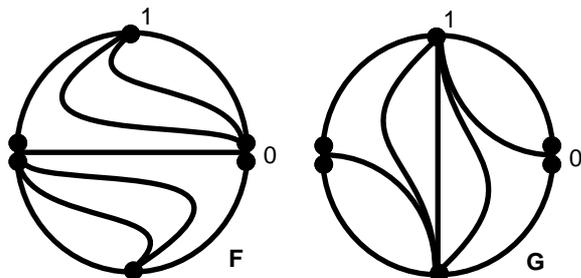
**1** Si  $y=0$  es la **única raíz** real de  $\otimes=0$  y es simple, o si es **raíz triple con  $A^2(1,0) = l \neq 0$** , o si  $y'=0$ , el único punto crítico ha de ser un nodo y las órbitas son como las de **A**:



**2** Si  $\otimes=0$  tiene **tres raíces distintas** los puntos críticos son nodos, sillas o silla-nodos. Como  $\sum i=1$ , las posibilidades son o (silla,nodo,nodo) o (nodo,silla-nodo,silla-nodo), lo que nos da cuatro posibilidades dependiendo de cuál sea el origen de las separatrices:



**3** Si  $\otimes=0$  tiene **una raíz simple y una doble con  $A^2 \neq 0$** , la primera ha de estar asociada a un nodo y la segunda a un silla-nodo, con lo que tenemos otros dos nuevos casos:



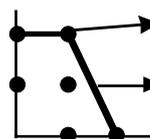
**4** Si hay una raíz simple y una doble con  $A^2 \equiv 0$  (que podemos suponer  $x=0$  e  $y=0$ , respectivamente) el sistema adopta la forma:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+mxy \\ y' = h+cx+dy+qy^2 \end{cases} \quad \otimes = (q-m)xy^2, \quad q \neq m$$

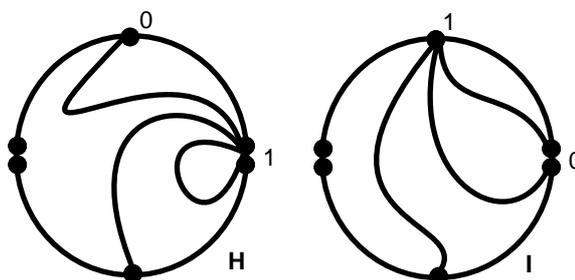
**4i.** Si  $c \neq 0$ , para que el sistema no tenga puntos críticos finitos debe ser para todo  $y$ :

$$-\frac{mq}{c}y^3 - \left[\frac{aq+md}{c}\right]y^2 + \left[b - \frac{ad+mh}{c}\right]y + \left[k - \frac{ah}{c}\right] \neq 0$$

Por tanto  $m \cdot q = 0$ . Acudiendo a la poligonal:

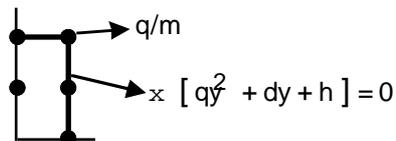


Luego hay dos variedades a un lado y ninguna al otro. Si una de ellas se acerca y otra se aleja del infinito ( $m \neq 0, q=0$ ) el punto doble tiene índice 1 y el otro debe ser silla-nodo. Si las dos variedades se alejan (o se acercan) del infinito ( $m=0, q \neq 0$ ) el doble tiene índice 0 y el otro 1.



**4ii.** Si  $c=0$

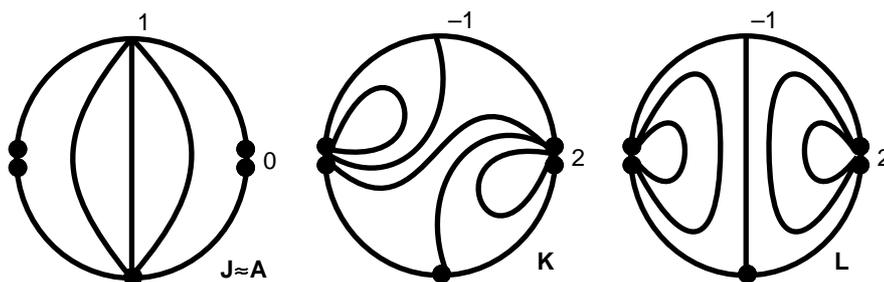
$$\begin{cases} x' = k+ax+by+mxy \\ y' = h+dy+qy^2 \end{cases}$$



**4iia.** Si  $d^2 < 4hq$  no da variedades el segmento vertical.

Si  $\frac{q}{m} \notin [0,1]$  no hay ninguna otra, el índice del punto doble es 0 y el simple es nodo.

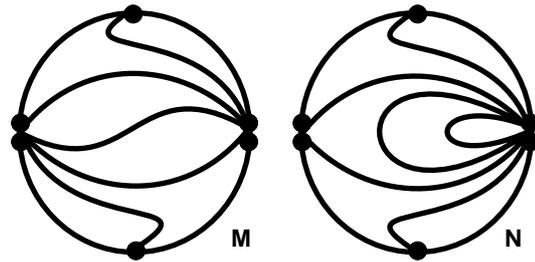
Si  $\frac{q}{m} \in (0,1)$  hay infinitas  $y=O(x^{q/m})$ , el índice es 2 y el otro es silla.



Si  $d=q=0, h \neq 0$ , el segmento tampoco da variedades. Ahora debemos considerar además el signo de  $P_1=hx$  y relacionarlo con el de  $\otimes = -mxy^2$ . Si  $hm < 0$  no hay variedades y aparece **J** otra vez. Si  $hm > 0$  tenemos **K** y **L**.

4iib. Si  $d^2 > 4hq$ , el segmento vertical da dos raíces y hay dos órbitas horizontales. Para que no haya puntos finitos debe ser  $a=m=0$ , con lo que  $\frac{q}{0} \notin [0,1]$ .

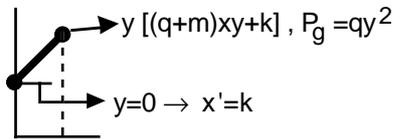
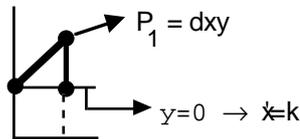
Dependiendo de que las dos rectas se recorran en el mismo sentido o en el opuesto tenemos:



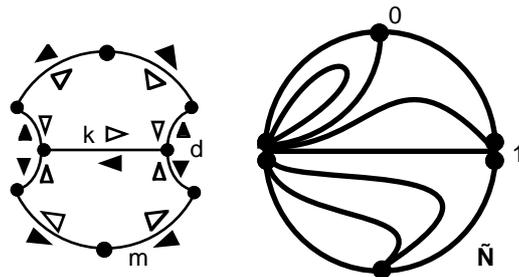
4iic. Si sólo hay una órbita horizontal  $y=y_0$ , podemos suponer que se trata de  $y=0$  (si no haríamos  $y=y_0+y^*$ ), con lo que  $h=0$  (y entonces  $a$  debe ser cero). También podemos suponer  $b=0$  (haríamos  $b+mx=x^*$ ). Así pues tenemos los dos sistemas:

$$\begin{cases} x' = k+mxy \\ y' = dy \end{cases} \otimes = -mxy^2; k,m,d \neq 0$$

$$\begin{cases} x' = k+mxy \\ y' = qy^2 \end{cases} \otimes = (q-m)xy^2; q \neq m; k,q \neq 0$$



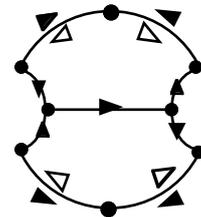
El primero exige estudiar  $P_1$ . Todas las posibilidades para los signos de  $d, m, k$  dan en esencia el mismo punto crítico de índice 1. El otro es silla-nodo y la estructura es la de la derecha.



Analicemos ahora el segundo. Supongamos  $k > 0$  (en el caso de que fuera  $k < 0$ , cambiando el signo de los demás coeficientes se obtendrían las mismas órbitas orientadas en sentido opuesto).

Si  $q^2 > m^2 \rightarrow q+m$  y  $q-m$  tienen el mismo signo  $\rightarrow \frac{q}{m} \notin [-1,1]$ .

Tanto si  $q > 0$  como si  $q < 0$  sale el caso **F** ya visto en 3.



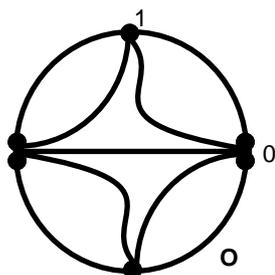
Si  $q = -m \rightarrow \otimes = 2qxy^2, P_1 = ky$  y sale de nuevo **F**  $\rightarrow$

Si  $q(q-m) < 0$ , o bien  $m > q > 0$  [ $m+q > 0, q-m > 0$ ] o bien  $m < q < 0$  [ $m+q < 0, q-m < 0$ ] con lo que en los dos casos  $\frac{q}{m} \in (0,1)$  y hay variedades  $y = O(x^{q/m})$ .

Se comprueba con facilidad que siempre sale esencialmente el mapa **K** de 4iia.

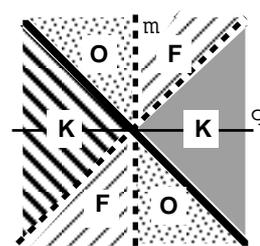
Si  $q(q+m) < 0$ , o bien  $m > -q > 0$  [ $m+q > 0, q-m < 0$ ] o bien  $m < -q < 0$  [ $m+q < 0, q-m > 0$ ] y se tiene  $\frac{q}{m} \in (-1,0)$  [hay variedades  $y = O(x^{q/m})$ ].

De aquí sale el nuevo caso **O** :



El esquema de la derecha resume las posibilidades para:

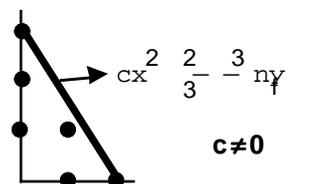
$$\begin{cases} x' = k+mxy \\ y' = qy^2 \end{cases}$$



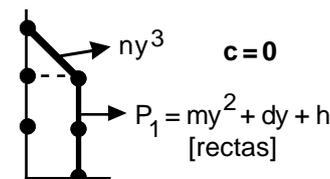
**5** Sea  $y=0$  triple, con  $A_2(1,0) = I = 0$ . El sistema es:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+mxy+ny^2 \\ y' = h+cx+dy+my^2 \end{cases} \quad \otimes = -ny^3, n \neq 0$$

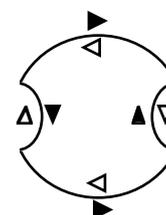
**5i.** Si  $c \neq 0$ , para que no haya puntos críticos finitos debe ser  $m=0$ . La poligonal nos da sólo una variedad simple a cada lado, con lo que el punto es un nodo y estamos de nuevo en el caso **A**.



**5ii.** Si  $c=0$ , la poligonal da diferentes posibilidades:

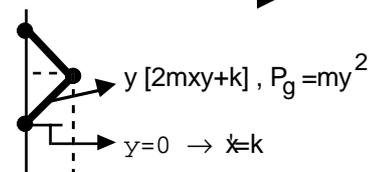


**5iia.** Sea  $m \neq 0$ .  $P_1=0$  puede tener dos raíces reales, ninguna o una doble. En el primer caso existen puntos críticos finitos. Si no tiene ninguna, sean cuales sean los signos de  $m$  y  $n$ , volvemos a encontrar el caso **A**:

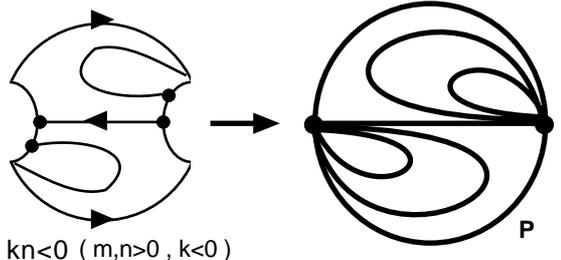
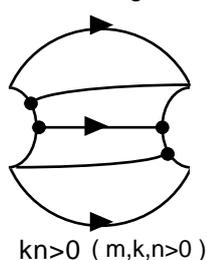


Si  $P_1=0$  tiene raíz doble podemos escribir:

$$\begin{cases} x' = k+mxy+ny^2 \\ y' = my^2 \end{cases} \quad k, m, n \neq 0$$



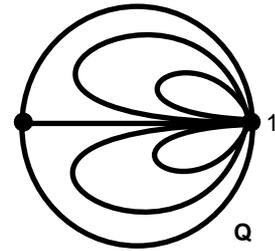
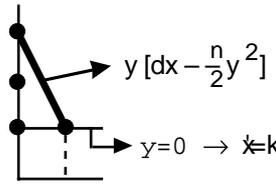
Si  $kn > 0$ , todas las posibilidades dan otra vez **A**, pero si  $kn < 0$  hay un tipo nuevo esencialmente igual a **P**:



5iib. Si  $m=0, d \neq 0$ , el sistema se puede poner (a debe ser cero):

$$\begin{cases} x' = k+by+ny^2 \\ y' = dy \end{cases} \quad k,n,d \neq 0$$

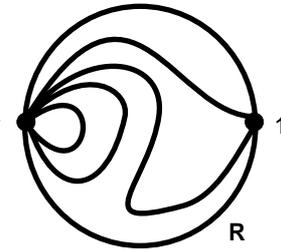
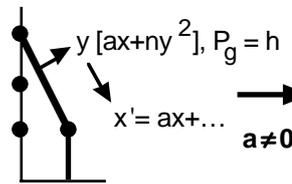
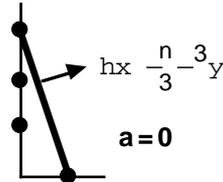
Si  $nk > 0$  sale otra vez **A**, pero si  $nk < 0$  aparece el caso **Q**.



5iic. Sea ahora  $m=d=0$ :

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+ny^2 \\ y' = h \end{cases} \quad n,h \neq 0$$

Si  $a=0$  la poligonal da de nuevo el caso **A**. Pero si  $a \neq 0$  teniendo en cuenta todas las posibilidades se obtiene esencialmente un nuevo caso **R**:



**6** Falta considerar la posibilidad  $\otimes \equiv 0$ .

Vamos a trabajar análogamente a como hacíamos en el capítulo 5 para  $\Delta \equiv 0$ , aunque no hayamos tratado este caso en este capítulo (no sería difícil). Los resultados que obtendremos se podrían justificar con un número suficiente de cambios de variable.

Si  $\otimes \equiv 0$ , el sistema es de la forma:

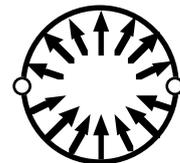
$$\begin{cases} x' = k+ax+by+x[lx+my] \\ y' = h+cx+dy+y[lx+my] \end{cases}$$

Si  $c \neq 0$ , para que no haya puntos finitos debe ser  $m=0$  (y el sistema no sería propiamente cuadrático). Así que  $c=0$ . El polinomio restante  $h+dy+my^2$  no puede tener raíces distintas (de nuevo habría puntos finitos). Las demás posibilidades se pueden escribir:

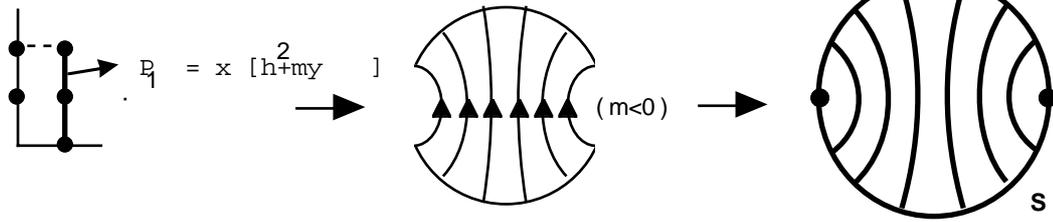
$$\begin{cases} x' = k+ax+by+mxy \\ y' = h+my^2 \end{cases} \quad h,m > 0$$

$$\begin{cases} x' = k+mxy \\ y' = my^2 \end{cases} \quad m \neq 0$$

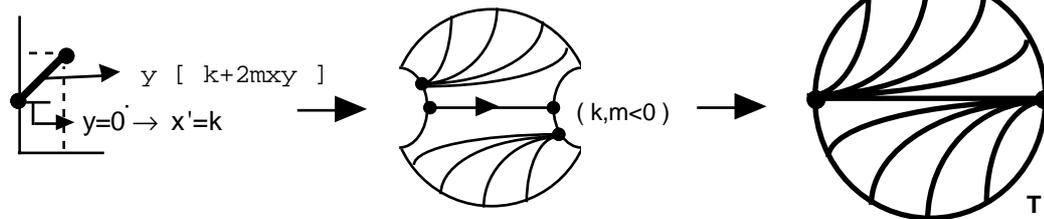
Como  $A^2(1,C)=Cm$  [  $B^2(0,1)=m$  ] existe para todo  $C$  [incluido  $\infty$ ] una variedad que llega al infinito con pendiente  $C$  (orientada por  $x'=Cmx^2$ ) excepto, tal vez, para  $C=0$ . Para ver lo que ocurre en ese punto problemático acudimos, como siempre, a la poligonal.



Para el primer sistema:



Para el segundo:



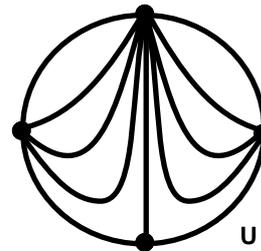
**7** Aunque sean poco cuadráticos analizamos también:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by \\ y' = h+cx+dy \end{cases}$$

Como  $\sum i = 1$ , si el sistema ha de ser cordal debe existir algún punto en el infinito, con lo que  $\otimes=0$  debe tener alguna raíz y podemos suponer  $c=0$ . Además, para que no haya puntos finitos debe cumplirse  $ad=bc=0$ :

$$\begin{cases} x' = k+ax+by \\ y' = h+dy \end{cases} \quad \otimes = y[-by + (d-a)x]$$

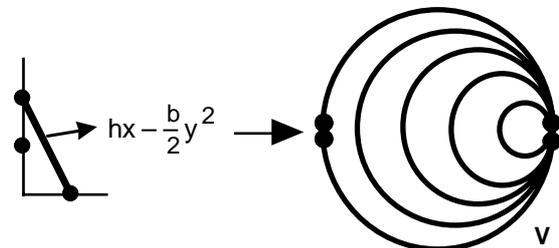
Si  $\otimes=0$  tiene dos raíces distintas un punto deber ser un nodo y el otro silla-nodo (**U**):



Si  $\otimes=0$  tiene la raíz doble  $y=0$  aparece el último caso **V**:

$$\begin{cases} x' = k+by \\ y' = h \end{cases} \quad b, h \neq 0$$

Por último, si  $\otimes=0 \rightarrow b=d=a=0$  y queda el caso **A** de siempre.



**Ejemplos 10.** Analicemos para acabar un sistema homogéneo que, para ciertos valores del parámetro  $r$ , posee centro o foco degenerado y que, perturbado adecuadamente, presentará bifurcaciones de Hopf no lineales que darán lugar al nacimiento de ciclos límite:

$$[H] \quad \begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases}$$

Con la notación y los resultados de los capítulos 3 y 4 se tiene:

$$P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + rz + 4, \quad Q = -28, \quad V_2 = -2(r-4)(9r-22), \quad D_4 = -(27r + 284)(r-8)(r-4)^2$$

$P_4$  tiene 4 raíces complejas si  $-284/27 < r < 8$  y 2 reales y 2 complejas para los demás  $r$ .

En el primer caso, tenemos centro o foco del sistema homogéneo dependiendo del signo:

$$sg[I] = sg \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z^2 + 10z + r}{P_4(z)} dz = sg[Z_3] sg[Z_3 - r]$$

siendo  $Z_3$  la menor de las raíces de  $P_3(Z) = Z^3 - 5Z^2 + (2r-16)Z + 64 - r^2$ .

Una condición necesaria para la anulación de  $I$  es que se cumpla:

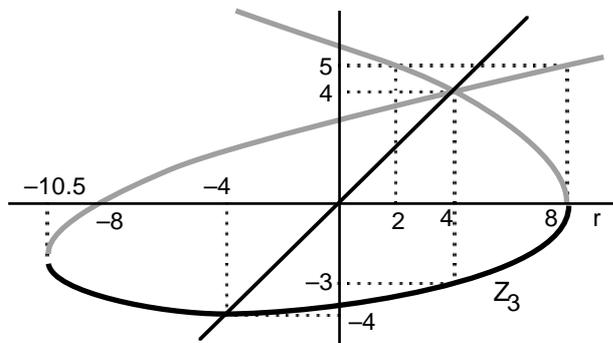
$$I_0 = -8(r+8)(r+4)(r-4)(r-8) = 0$$

Para  $r=8$  hay raíces reales (una doble). Los otros tres valores de  $r$  corresponden a casos de 4.2 en los que era posible calcular explícitamente la  $I$ . Utilizando aquellos resultados

$$\begin{aligned} r = -8 &\rightarrow N_L = 0, K_L < 0 \rightarrow \sqrt{\Psi} = 3\sqrt{17} & Z_3 = \frac{1}{2}[5 - 3\sqrt{17}] & I = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left[1 - \frac{7}{\sqrt{17}}\right] \sqrt{\sqrt{17}-1} \\ r = -4 &\rightarrow M = 0, K < 0 \rightarrow \sqrt{\sigma} = 2\sqrt{2} & Z_3 = -4 & I = 0 \\ r = 4 &\rightarrow F = M = 0, K > 0 \rightarrow \sqrt{\Omega} = 7, \sqrt{\omega} = 7 & Z_3 = -3, & I = \frac{12\pi}{7\sqrt{7}} \end{aligned}$$

El origen es un centro si  $r=-4$  y como ese es el único valor para el que  $I$  se anula deducimos que es un foco estable o inestable según  $r$  esté en los intervalos  $(-284/27, -4)$  o  $(-4, 8)$ , respectivamente.

[dibujando la curva  $P_3(z)=0$  de la derecha y viendo el signo de  $Z_3-r$  llegamos a la misma conclusión]



Veamos ahora los casos con  $z$  reales, asociados al "autovalor"  $\lambda = -z^2(z+1) \rightarrow sg[\lambda] = -sg[z+1]$ .

Comencemos con los de  $z$  doble:

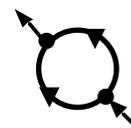
$$\text{si } r = -\frac{284}{27} \rightarrow P_4(z) = (z - \frac{2}{3})^2(z^2 + \frac{10}{3}z + 9) \rightarrow \text{dos complejas y } z_d = \frac{2}{3} \text{ con } \lambda = -\frac{20}{27}$$

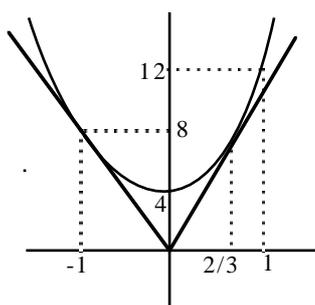
$$\text{si } r = 8 \rightarrow P_4(z) = (z+1)^2(z^2 + 4) \rightarrow \text{dos complejas y } z_d = -1 \text{ con } \lambda = 0$$

Posee [H], por tanto, una recta de puntos críticos [esta situación complicada la anunciaría el cálculo de los  $A = r^2(r-8)$  y  $B = (r^2 + 8r - 16)(r-8)$  de 4.6]. Si queremos su estructura:

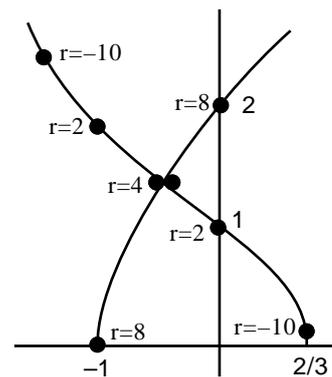
$$\begin{aligned} x' &= -y^2(x+y) & y' &= (4x^2 + 4xy + y^2)(x+y) \\ &\rightarrow x' = -y^2 & &\rightarrow y' = 4x^2 + 4xy + y^2 \end{aligned} \rightarrow P_3(z) = (z+1)(z^2 + 4), \quad z = -1, \lambda = -1$$

Analizado este segundo sistema lo está el homogéneo inicial.





Para los otros casos situamos las  $z$  reales con las gráficas de  $z^4+2z^3+5z^2+4$  y  $-rz$ .  
 si  $r < -\frac{284}{27}$ , las dos  $z$  son positivas:  
 $z_1, z_2 > 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$ .  
 si  $r > 8$ , las  $z$  reales cumplen:  
 $z_1 < -1 < z_2 < 0 \rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ .  
 [Las raíces de  $P_4(z)$  evolucionan con  $r$  como indica el dibujo de la derecha]



[Podríamos haber localizado estos  $z$  utilizando el método de Sturm de 3.5. Construyendo la secuencia de polinomios allí definida y sustituyendo en  $-\infty, -1, 0$  e  $\infty$  se tiene:

$-\infty$	+	-	-	$(r-4)(9r-22)$	$D_4$
-1	$8-r$	$r-8$	$r-4$	$(r-4)(r-8)$	$D_4$
0	+	$r$	$r-32$	$(r-4)(3r-124)$	$D_4$
$\infty$	+	+	-	$-(r-4)(9r-22)$	$D_4$

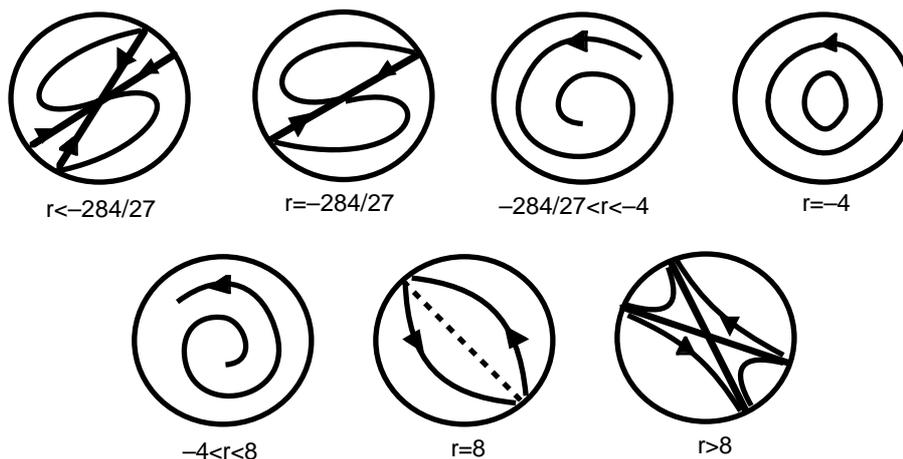
se obtienen, respectivamente, para  $r < -\frac{284}{27}$  y para  $r > 8$  las siguientes secuencias de signos:

$-\infty$	+	-	-	+	-	$-\infty$	+	-	-	+	-
-1	+	-	-	+	-	-1	-	+	+	+	-
0	+	-	-	+	-	0	+	+	±	±	-
$\infty$	+	+	-	-	-	$\infty$	+	+	-	-	-

También podríamos hallar los  $\lambda$  reales a partir de la ecuación de autovalores:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - (3r-16)\lambda^3 + (3r^2-21r+56)\lambda^2 - (r-8)(r^2+4r-24)\lambda + 16(8-r) ]$$

Hemos concluido, pues, el análisis de [H], que, por ser homogéneo, es global:



Si perturbamos [H] con términos de mayor orden, la estructura del origen se mantiene excepto en los casos  $r=-4$  y  $r=8$ , en que hay que proseguir el análisis. Lo mismo sucede con el infinito si añadimos términos de grado 2 o menor. Se ve que el origen de [H], único punto crítico finito, es asintóticamente estable para  $r < -4$  (o sea, el infinito es repulsor si  $r < -4$ ).

Comencemos añadiendo un término de orden 5 :

$$\begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 - y^5 \end{cases}$$

Además de (0,0) para todo  $r$  tiene los puntos críticos  $(\sqrt{r-8}, -\sqrt{r-8})$ ,  $(-\sqrt{r-8}, \sqrt{r-8})$  si  $r > 8$ , que son focos estables si  $r \in (8, 17/2)$  o nodos estables si  $r \geq 17/2$  [ $\lambda^2 + 4(r-8)^2\lambda + 2(r-8)^3 = 0$ ].

Para  $r = -4$ , vamos a probar que el origen es un foco estable utilizando las técnicas y notaciones de 4.5. En aquella sección vimos que si  $l=0$  la estabilidad venía dada por el signo de:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_8 E}{p^{5/2}} dz, \text{ con } Q_8 = -z^8 - z^7, P = z^4 + 2z^3 + 5z^2 - 4z + 4 \text{ y } E = \exp\left[\int_0^z \frac{z^2 + 5z - 2}{P} dz\right]$$

Para reducir el integrando utilizamos que:

$$\frac{Q_8 E}{p^{5/2}} - \frac{d}{dz} \left[ \frac{E}{p^{3/2}} \left( z^5 + \frac{3}{2} z^4 + 5z^3 - \frac{11}{4} z^2 + \frac{38}{5} z - \frac{154}{15} \right) \right] = \frac{E}{15p^{5/2}} (160 - 1210z - 1727z^2)$$

En este caso para determinar el signo de  $J$  basta eliminar el coeficiente en  $z$  utilizando:

$$0 = \left[ \frac{E}{p^{3/2}} \left( \frac{1}{4} z^6 + z^5 + \frac{7}{2} z^4 + \frac{10}{3} z^3 + \frac{55}{12} z^2 - \frac{71}{15} z + \frac{443}{45} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{8}{45} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^{5/2}} (110 - 335z - 178z^2) dz$$

Así pues:

$$J = \frac{1}{15} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^{5/2}} (160 - 1210z - 1727z^2) dz = -\frac{1}{335} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^{5/2}} (5300 + 24211z^2) dz < 0$$

y por tanto el origen es estable. Si las ideas de 4.5 no hubiesen resuelto el problema habríamos tenido que evaluar la integral. Para hacerlo podríamos utilizar que, al estar  $P$  en uno de los casos factorizables del capítulo 4, se puede dar una expresión explícita (aunque complicada) de  $E$ . Usando los resultados de allí y tras una serie de simplificaciones se llega a que:

$$P = \frac{P_+ P_-}{16}, \text{ con } P_+ = (2z+1+K)^2 + (K+1)^2(K^2-1), P_- = (2z+1-K)^2 + (K-1)^2(K^2-1) \text{ y } K = \sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{2}}$$

Una primitiva de  $[z^2 + 5z - 2]/P$  (no la que se anula en 0) se puede comprobar que es:

$$E_1 = \frac{K}{44} \left[ \sqrt{2} (3K^2 - 7) \arctan \frac{4\sqrt{2}(2z+1-K^2)}{K[(2z+1)^2 + 9 - 2K^2]} + (K^2 + 5) [2\ln(P_-/4) - \ln(P)] \right]$$

Así, las únicas integrales que deben evaluarse para obtener un valor aproximado de la  $J$  cuando  $r = -4$  en otro sistema con cualquier perturbación no homogénea de orden 5 serían:

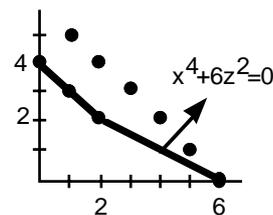
$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[E_1 - \frac{5}{2} \ln(P)\right] dz \quad \text{y} \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\left[E_1 - \frac{5}{2} \ln(P)\right] dz$$

[haciéndolo numéricamente resulta ser  $J_0 \approx 0.01586$ ,  $J_2 \approx 0.00516$ ]

Si  $r = 8$ , haciendo  $z = x + y$  para llevar el problema a  $z = 0$  el sistema se convierte en

$$\begin{cases} x' = -z(z-x)^2 \\ z' = 4xz^2 - (z-x)^5 \end{cases} \rightarrow xB - zA = z^2[4x^2 + (z-x)^2]$$

El origen será entonces un centro o un foco de los complicados. Como hay un foco inestable si  $-4 < r < 8$ , es de esperar que lo siga habiendo para  $r = 8$ . Numéricamente parece ser eso lo que sucede.

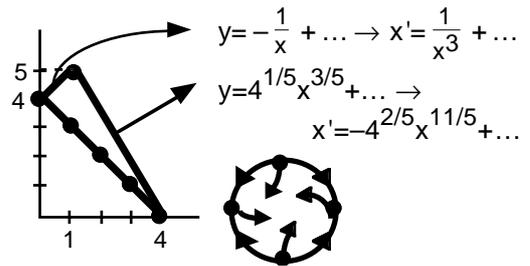


Analicemos ahora el infinito:

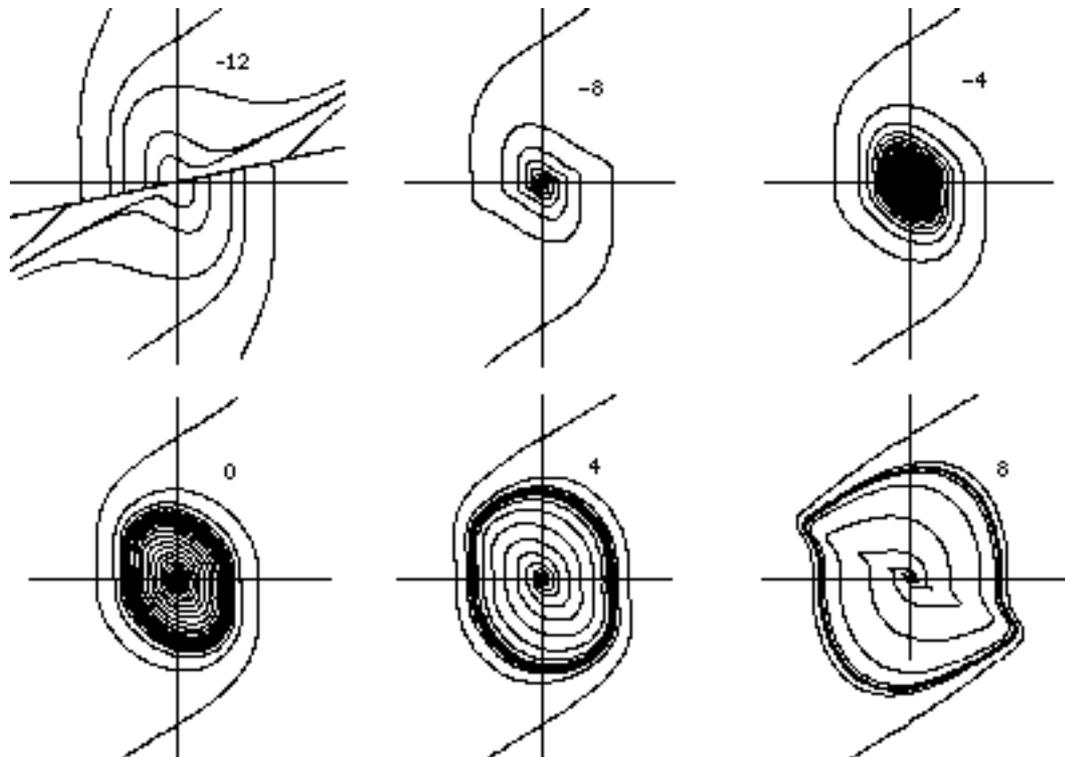
$$\otimes = -xy^5; \quad x=0 \rightarrow y' = -y^5 + \dots$$

Para  $y=0$  es necesario acudir a la poligonal.

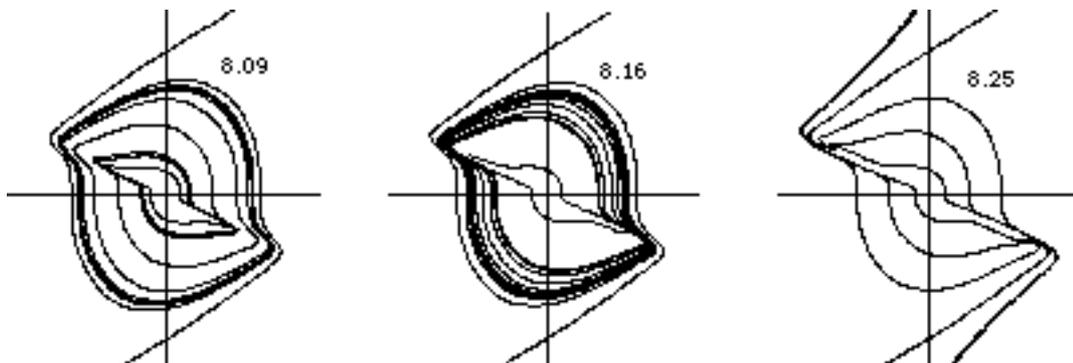
El infinito resulta ser repulsor para todo valor de  $r$  [lo que concuerda con la estabilidad del origen para  $r=-4$ : el infinito "empuja" las órbitas del centro homogéneo].



Para  $r \leq -4$  el origen será entonces globalmente asintóticamente estable. Al inestabilizarse el foco de  $(0,0)$  aparecerá un ciclo límite cuando sea  $-4 < r \leq 8$ . Integrando numéricamente se comprueban las afirmaciones anteriores:



A partir de  $r=8$  la integración numérica muestra el nacimiento de un segundo ciclo límite (inestable en este caso) que incluye en su interior los focos estables y el punto silla del origen. Los dos ciclos límites colapsan para un valor próximo a  $r=8.2$ :



Añadimos ahora a [H] unos términos lineales tipo centro:

$$\begin{cases} x' = -y - xy^2 - y^3 \\ y' = x + 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases}$$

El origen de este sistema es un foco estable para  $r < -2$  y uno inestable para  $r \geq -2$ , puesto que, para esos valores,  $x' = y + xy^2 + y^3$ ,  $y' = -x - 4x^3 - rx^2y - 5xy^2 - y^3$  tiene un foco del tipo opuesto [al ser  $l_3 = -r - 2$ ,  $l_5 = 9(3r + 4) \rightarrow l_5 < 0$  si  $r = -2$ ].

Los otros puntos críticos finitos son los  $(x, y)$  de la curva  $x = -y - 1/y$  para los que se cumpla

$$(r-8)y^6 + 2(r-9)y^4 + (r-13)y^2 - 4$$

que sólo tiene raíces reales (dos) si  $r > 8$ . Entonces el determinante de la aproximación lineal:

$$y^{-2} [-3(r-8)y^6 - 2(r-9)y^4 + (r-13)y^2 - 12] = y^{-2} [(r-9)y^4 + (r-13)y^2 - 6]$$

es, como se puede ver, negativo. Así esos puntos son siempre una pareja de sillars.

Como sabemos, el infinito es repulsor para  $r < -4$  y atractor si  $-4 < r < 8$ . Tenemos entonces que todas las órbitas tienden hacia el origen si  $r < -4$ , todas se van al infinito si  $-2 \leq r < 8$  y está garantizada la existencia de ciclos límite (inestables) cuando sea  $-4 < r < -2$ . Estos ciclos límite se bifurcan del infinito cuando  $r = -4$  y su amplitud va decreciendo con  $r$  hasta desaparecer en el origen para  $r = -2$ . Para  $r = -4$  el infinito (centro en la aproximación homogénea) parece que debe ser todavía repulsor. Lo podemos comprobar hallando la  $J^*$  definida en 6.2:

$$J^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_4^* E^*}{P^{3/2}} dz, \text{ con } Q_4^* = z^4 + 4z^3 - 5z^2 + 4z \text{ y } E^* = \exp\left[-\int_0^z \frac{z^2 + 5z - 2}{P} dz\right]$$

Reduciendo  $J^*$  por los caminos habituales acaba en la expresión:

$$J^* = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{P^{3/2}} R_2 dz, \text{ con } R_2 = 4 - 3z - 7z^2 = 2(z+1)(4-7z)$$

El integrando no tiene signo definido ni nos basta para hallar el signo de  $J^*$  utilizar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{P^{3/2}} (z^2 - 2z) dz = 0$$

pues  $-1 < 0 < 7/4 < 2$ . No basta tampoco considerar denominadores  $P^{5/2}$ , ni  $P^{7/2}$ .

Hallemos integrales numéricamente. Con el ordenador y la expresión dada de  $E_1$  se tiene:

$$J^*_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-E_1] P^{-3/2} dz \approx 0.580, \quad J^*_2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp[-E_1] P^{-3/2} dz \approx 0.251$$

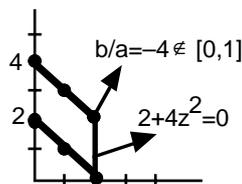
Y por tanto:

$$J^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{P^{3/2}} (8 - 17z^2) dz = 8J^*_0 - 17J^*_2 \approx 0.37 > 0$$

Nos restaría el análisis el del infinito cuando  $r = 8$ :

$$z = x + y \rightarrow \begin{cases} x' = -z(z-x)^2 \\ z' = 4xz^2 - (z-x)^5 \end{cases} \rightarrow \otimes = z^2[4x^2 + (z-x)^2]$$

Es un centro o foco complicado (probablemente repulsor).



## 7. Referencias.

Recogemos aquí (por orden alfabético) todas las referencias de los capítulos anteriores [a la izquierda figuran entre corchetes el o los capítulos en que fueron citadas]:

- [4] M. A. M. Alwash - N. G. Lloyd. Non-autonomous equations related to polynomial two-dimensional systems. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **105** [1987], 129-152.
- [5] A.F. Andreev. Investigation of the behavior of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point. Annals of the U. of Leningrad [1955], 183-207.
- [1,2,3,5,6] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [4] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Theory of bifurcations of dynamical systems on a plane. Wiley [1973].
- [2,5] J.I.Aranda. Métodos simples para el estudio de puntos singulares degenerados. Actas VII CEDYA [1984], 11-14.
- [3,5,6] J.I.Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos. Actas X CEDYA [1987], 20-25.
- [4,5] J.I.Aranda. Centros y focos degenerados de sistemas analíticos planos. Actas XV CEDYA [1997] (aún no publicadas).
- [3,4,6] J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ . Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV **79** [1968], 35-69.
- [4] V. I. Arnold. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. Springer-Verlag [1983].
- [1,4,5] V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations. Encyclopaedia of Math. Sci., vol 1. Springer- Verlag [1989].
- [5] D. K. Arrowsmith. The singularity  $x(\partial/\partial y)$ . J. of Diff. Eq. **34** [1979], 153-166.
- [2,5] D. K. Arrowsmith - C. M. Place. An introduction to dynamical systems. Cambridge University Press [1990].
- [6] J. C. Artés - J. Llibre. Hamiltonian quadratic systems. J. of Diff. Eq. **107** [1994], 80-95.
- [6] J. C. Artés - J. Llibre. Phase portraits for quadratic systems having a focus and one antisaddle. Rocky Mountain J. of Math. **24** [1994], 875-889.
- [6] J. C. Artés - J. Llibre. Quadratic vector fields with a weak focus of third order. Publicacions Matemàtiques **41** [1997], 7-39.
- [5] S. Barocio. Singularidades de sistemas diferenciales analíticos en el plano. Bol. S. Mat. Mexicana [1959], 1-25.
- [4] N. N. Bautin. On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium point of focus or center type. Amer. Math.Soc.Transl.Ser.I **5** [1962], 396-413.
- [1,2] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math., **24** [1901].
- [5] F. S. Berezovskaya - N. B. Medvedeva. A complicated singular point of "center-focus" type and the Newton diagram. Selecta Mathematica **13** [1994], 1-15.
- [4,6] T. R. Blows - N. G. Lloyd. The number of limit cycles of certain polynomial differential equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** [1984], 215-239.
- [4,6] T. R. Blows - C. Rousseau. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields. J. of Diff. Eq. **104** [1993], 215-242.

- [4] E. Brieskorn - H. Knörrer. Plane algebraic curves. Birkhäuser. [1986].
- [5] Briot - Bouquet. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'Ecole Polytechnique [1856].
- [5] M. Brunella - M. Miari. Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra. J. of Diff. Eq. **85** [1990], 338-366.
- [1,4,5] A. D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer-Verlag [1989].
- [6] L. Cairó - J. Llibre. Phase portraits of planar semi-homogeneous vector fields. Nonlinear Analysis, T.M.A. **29** [1997], 783-811.
- [2] J. Carr. Applications of center manifold theory. Springer-Verlag [1981].
- [5] J. Chavarriga - I. García - J. Giné. Integrability of centers perturbed by quasi-homogeneous polynomials. J. of Math. Anal. and Appl. **210** [1997], 268-278.
- [4] J. Chavarriga - J. Giné. Integrability of a linear center perturbed by a fourth degree homogeneous polynomial. Publicacions Matemàtiques **40** [1996], 21-39.
- [4] J. Chavarriga - J. Giné. Integrability of a linear center perturbed by a fifth degree homogeneous polynomial. Publicacions Matemàtiques **41** [1997], 335-356.
- [6] G. Q. Chen - Z. J. Liang. Affine classification for the quadratic vector fields without the critical points at infinity. J. of Math. Anal. and Appl. **172** [1993], 62-72.
- [4,6] C. Chicone - J. Sotomayor. On a class of complete polynomial vector fields in the plane. J. of Diff. Eq. **61** [1986], 398-418.
- [2,4] S. N. Chow - J. K. Hale. Methods of bifurcation theory. Springer-Verlag [1982].
- [6] A. Cima - A. Gasull - F. Mañosas. On polynomial hamiltonian planar vector fields. J. of Diff. Eq. **106** [1993], 367-383.
- [5] A. Cima - A. Gasull - F. Mañosas. Cyclicity of a family of vector fields. J. of Math. Anal. and Appl. **196** [1995], 921-937.
- [6] A. Cima - J. Llibre. Bounded polynomial vector fields. Trans. Amer. Math. Soc. **318** [1990], 557-579.
- [3,4,6] A. Cima - J. Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. J. of Math. Anal. and Appl. **147** [1990], 420-448.
- [3] C. Coleman. Equivalence of planar dynamical and differential systems. J. of Diff. Eq. **1** [1965], 222-233.
- [4,6] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Some theorems on the existence, uniqueness and nonexistence of limit cycles for quadratic systems. J. of Diff. Eq. **67** [1987], 372-399.
- [6] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Quadratic systems with a unique finite rest point. Publicacions Matemàtiques UAB **32** [1988], 199-259.
- [5] B. Coll - J. Llibre. Singularidades sobre el plano real de un sistema analítico de orden dos. Actas IX CEDYA [1986], 135-139.
- [3,4] C. B. Collins. Algebraic conditions for a center or a focus in some simple systems of arbitrary degree. J. of Math. Anal. and Appl. **195** [1995], 719-735.
- [3] T. Date. Classification and analysis of two-dimensional homogeneous quadratic differential systems. J. of Diff. Eq. **32** [1979], 311-334.
- [6] R. J. Dickson - L. M. Perko. Bounded quadratic systems in the plane. J. of Diff. Eq. **7** [1970], 251-273.
- [1,4] H. Dulac. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France **51** [1923].
- [1,5] F. Dumortier. Singularities of vector fields on the plane. J. of Diff. Eq. **23** [1977], 53-106.
- [6] F. Dumortier - C. Herzsens. Tracing phase portraits of planar polynomial vector fields with detailed analysis of the singularities (Preliminary version). Escuela de invierno sobre campos vectoriales polinomiales. Lleida [1997].

- [4,6] F. Dumortier - P. Roussarie - C. Rousseau. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields.  
J. of Diff. Eq. **110** [1994], 86-133.
- [6] F. Dumortier - C. Rousseau. Cubic Liénard equations with linear damping.  
Nonlinearity **3** [1990], 1015-1039.
- [6] F. Dumortier - D. Shafer. Restrictions on the equivalence homeomorphism in stability of  
polynomial vector fields. J. London Math. Soc. **41** [1990], 100-108.
- [1,3] H. Forster. Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung  
erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Math. Zeit., Dtsch., **43** [1938].
- [6] A. Gasull - A. Guillamon - V. Mañosa. Phase portrait of hamiltonian systems with  
homogeneous nonlinearities. Preprint, Universitat Autònoma de Barcelona [1997].
- [6] A. Gasull - S. Li-Ren - J. Llibre. Chordal quadratic systems.  
Rocky Mountain J. of Math. **16** [1986], 751-782.
- [6] A. Gasull - R. Prohens. On quadratic systems with a degenerate critical point.  
Rocky Mountain J. of Math. **26** [1996], 135-164.
- [2,4,5] J. Guckenheimer - P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and  
bifurcations of vector fields. Springer-Verlag [1983].
- [2] J. Hale - H. Koçak. Dynamics and bifurcations. Springer-Verlag [1991].
- [3] P. Hartman. Ordinary differential equations. Wiley [1964].
- [5] E. L. Ince. Ordinary differential equations. Longman [1927].
- [4] Yu. S. Il'yashenko. Algebraic insolvability and almost algebraic solvability of the  
center-focus problem. Funct. Anal. Appl. **6** [1972], 197-202.
- [4,5] Yu. S. Il'yashenko. Algebraically and analytically solvable problems in theory of  
ordinary differential equations. J. Soviet Math. **47** [1987], 2570-2584.
- [4,5] Yu. S. Il'yashenko - S. Yakovenko. Concerning the Hilbert 16th problem.  
AMS Translations, Series 2, vol 165 [1995].
- [6] P. de Jäger. Phase portraits for quadratic systems with a higher order singularity with  
two zero eigenvalues, J. of Diff. Eq. **87** [1990], 169-204.
- [5] D. T. Lê - K. Saito - B. Teissier. Singularity theory. World Scientific [1991].
- [1,2,3] S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- [6] C. Li - J. Llibre - Z. Zhang. Weak foci, limit cycles and bifurcations for bounded quadratic  
systems. J. of Diff. Eq. **115** [1995], 388-436.
- [6] A. Lins - W. Melo - C. C. Pugh. On Liénard's equation.  
Lecture Notes in Math. **597** [1977], 335-357.
- [3,4,6] J. Llibre - J. S. Pérez del Río - J. A. Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous  
polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity.  
J. of Diff. Eq. **125** [1996], 490-520.
- [4] N. G. Lloyd. A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems.  
J. London Math. Soc. (2) **20** [1979], 277-286.
- [4] N. G. Lloyd. Small amplitude limit cycles of polynomial differential equations.  
Lecture Notes in Mathematics **1032** [1982], 346-357.
- [4] N. G. Lloyd. Limit cycles of polynomial systems. LMS Lect. Notes Series **127** [1988], 192-234.
- [4,6] N. G. Lloyd - T. R. Blows - M. C. Kalenge. Some cubic systems with several limit cycles.  
Nonlinearity **1** [1988], 653-669.
- [1,5] A. M. Lyapunov. Investigation of one of the singular cases of the theory of stability of motion.  
Mathematicheskii Sbornik, **17** [1893].
- [1,3,4] V. V. Nemytskii - V. V. Stepanov. Qualitative theory of differential equations.  
Princeton University Press [1960].

- [3] T. A. Newton. Two dimensional homogeneous quadratic differential systems.  
J. of Diff. Eq. **20** [1978], 120-138.
- [2,6] L. Perko. Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag [1996].
- [1] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.  
Jour. Math. Pures et Appl. [1881-82-85-86].
- [3] J. Rey Pastor. Análisis matemático. Kapelusz [1965].
- [4,6] C. Rousseau - D. Schlomiuk. Cubic vector fields symmetric with respect to a center.  
J. of Diff. Eq. **123** [1995], 193-223.
- [5] A. P. Sadovskii. The center and focus problem. Differential Equations **4** [1968], 1034-1037.
- [5] M. E. Sagalovich. Topological structure of the neighborhood of a critical point of a  
differential equation. Diff. Equations **11** [1975], 1498-1503.
- [5] M. E. Sagalovich. Classes of local topological structures of an equilibrium state.  
Diff. Equations **15** [1979], 253-255.
- [4] D. Schlomiuk - J. Guckenheimer - R. Rand. Integrability of plane quadratic vector fields.  
Expo. Math. **8** [1990], 3-25.
- [4] A. S. Shubé. The structure of the integrating factor of a cubic system with a singular  
point of center type. Differential Equations **32** [1996], 726-729.
- [4] K. S. Sibirsky. On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point.  
Differential Equations **1** [1965], 36-47.
- [4,6] S. Songling. A method of constructing cycles without contact around a weak focus.  
J. of Diff. Eq. **41** [1981], 301-312.
- [3] J. V. Uspensky. Theory of equations. McGraw-Hill [1948].
- [3,6] N. I. Vulpe - K. S. Sibirskii. Geometric classification of quadratic differential systems.  
Differential Equations **13** [1977], 548-556.
- [4] R. J. Walker. Algebraic curves. Princeton University Press [1950].
- [2] S. Wiggins. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.  
Springer-Verlag [1990].
- [4] Ye Yanqian. Theory of limit cycles. Trans. Math. Monographs, 66. AMS. [1986].
- [4] H. Zoladek. Quadratic Systems with Center and Their Perturbations.  
J. of Diff. Eq. **109** [1994], 223-273.

## 8. Conclusiones.

Se ha mostrado en la memoria que el análisis de la estructura local del origen de un sistema autónomo analítico plano o la estructura del infinito de uno polinomial se puede llevar a cabo, con los métodos presentados, de forma mucho más organizada y con muchos menos cálculos que con otros métodos ya conocidos. Además se han obtenido resultados nuevos sobre un tema abierto sobre el que existían pocos trabajos anteriores: la distinción entre centros y focos degenerados.

Consideramos que nuestra mayor aportación es la utilización sistemática de la poligonal de Newton para localizar y orientar las variedades que pasan por el origen o que llegan al infinito (teoremas de las secciones 5.2 y 6.3). En estos teoremas se simplifica además radicalmente la forma de precisar la estructura de las órbitas entre dos variedades consecutivas: basta hallar el signo de un polinomio (basado en los términos homogéneos de menor orden para el origen y de mayor orden para el infinito) o, excepcionalmente, el de algún otro más (en los casos que se han descrito). Y en dichos teoremas se incluye la posibilidad de la presencia de variedades similares a las centro que no está recogida en otros resultados. Con estos teoremas se puede, en general, precisar la estructura del origen o del infinito sin realizar ningún cambio de variable (a diferencia del camino habitual). Con ellos, se simplificarían notablemente los análisis de puntos degenerados que se realizan incluso en las referencias más recientes, como ponen de manifiesto los abundantes ejemplos analizados.

Se han sugerido también formas de abordar, sin necesidad de realizar blow-ups (que en alguna ocasión acabarán siendo necesarios), las situaciones excepcionales para las que los teoremas anteriores no bastan (sección 5.4): lo que podríamos llamar 'vector propio múltiple' (rama múltiple asociada a un segmento de la poligonal) con el 'autovalor' correspondiente cero, el caso en que se anula idénticamente alguno de los polinomios asociados a la poligonal y el caso en que no existen variedades que lleguen al origen, es decir, si hay un centro o un foco.

Un caso particular de estos teoremas son los demostrados previamente en el capítulo 3, que permiten organizar de forma directa y práctica el estudio de las perturbaciones de los más conocidos sistemas homogéneos, incluyendo los casos con 'variedades centro' (rectas de puntos críticos del sistema homogéneo). En ellos queda precisado cuando son innecesarios los blow-ups (o la utilización de la poligonal) para concluir el análisis del origen. En la sección 6.2 se ha visto que el problema análogo para el infinito es exactamente igual de (poco) complicado y que, en general, tampoco será necesario hacer ningún cambio de variable. Creemos, además, interesante la visión de estos sistemas de una forma similar a los lineales: con su 'aproximación homogénea', sus 'vectores propios' y su ecuación de 'autovalores'.

Se ha explotado esta visión en los trabajos de las secciones 3.4 y 3.6 para los sistemas que comienzan con términos homogéneos de orden dos y tres, tras obtener formas simplificadas de caracterizar y calcular las raíces de los polinomios de tercer y cuarto grado.

Otra serie de resultados se refieren al caso de que no existan variedades que lleguen al origen, es decir, si se trata de un centro o un foco (capítulo 4). Por una parte se han presentado simplificaciones para el cálculo de los valores focales para los centros lineales perturbados. Por otra, se ha trabajado en el tema cuando la aproximación homogénea es de tercer orden. Se ha caracterizado entonces cuándo el sistema no posee variedades que lleguen al origen, se ha obtenido una condición algebraica necesaria (totalmente general) para la existencia de centros en esa situación y se ha dado una lista de casos en que es calculable la integral que da la estabilidad del foco. También se ha visto, tanto cerca del origen como del infinito (sección 6.2), cómo reducir las complicadas integrales que informan sobre la estabilidad en el caso de que la aproximación homogénea tenga un centro, reducciones que pueden bastar para garantizar algebraicamente que se ha convertido en un foco. Se ha obtenido también algún resultado sobre los centros y focos cuya detección exige la poligonal y para los que no son posibles los desarrollos del capítulo 4: cuando la poligonal se reduce a un segmento su análisis se traslada fácilmente al de uno o dos problemas homogéneos (sección 5.4).

Han quedado, desde luego, varios temas abiertos en los que se podría profundizar. En concreto, se podrían atacar algunos de los casos en que la poligonal no decide, como los centros o focos asociados a poligonales con más de un segmento. También podría ser útil el empleo sistemático de series en la ecuación de las órbitas. Otra línea de trabajo sería la mejora de los resultados dados sobre perturbaciones de centros homogéneos y el estudio de los de orden mayor que tres. Un tema en el que se podría avanzar es el de la estabilidad del origen en la línea de las ideas que se esbozan en la sección 3.7. Ya que se dispone de instrumentos adecuados, sería productivo abordar la clasificación de diversas clases de sistemas polinomiales para los que el problema estuviese abierto...

Otro amplio campo en el que se podrían aplicar estos resultados sería el estudio de las bifurcaciones de sistemas planos. Un camino podría ser la utilización del hecho de que en los términos del sistema que proporcionan puntos sobre la poligonal (interior o exterior) reside casi siempre toda la información sobre la estructura del origen y del infinito. Y otra posibilidad sería la búsqueda de resultados sobre la 'bifurcación de Hopf no lineal' aparecida en varios ejemplos.