

**Métodos simples  
para el análisis  
de puntos degenerados  
de sistemas analíticos planos**

**J. I. Aranda**

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Puntos críticos con un único autovalor cero</b>	<b>9</b>
<b>3. Análisis de puntos 'poco degenerados'</b>	<b>15</b>
3.1. Utilizando la expresión en polares	18
3.2. Usando el blow-up: $x=x$ , $y=xv$	21
3.3. Polinomios de tercer grado	27
3.4. La aproximación homogénea para $n=2$	29
3.5. Polinomios de cuarto grado	34
3.6. La aproximación homogénea para $n=3$	42
3.7. Ideas sobre estabilidad	51
<b>4. ¿Centros o focos?</b>	<b>55</b>
4.1. Sistemas homogéneos	59
4.2. Cálculo de la integral $I$ para $n=3$	64
4.3. Centros y focos homogéneos para $n=3$	79
4.4. Inestabilización de centros elementales	85
4.5. Centros y focos no homogéneos y no elementales	100
<b>5. Utilizando la poligonal</b>	<b>107</b>
5.1. Ejemplos introductorios	110
5.2. Resultados generales	117
5.3. Aplicando los teoremas	130
5.4. Situaciones no recogidas en los teoremas	136
<b>6. Análisis del infinito</b>	<b>147</b>
6.1. Cambios de variable	150
6.2. El análisis homogéneo	154
6.3. Acudiendo a la poligonal	158
6.4. Ejemplos que exigen la poligonal	162
<b>7. Referencias</b>	<b>177</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>181</b>

**Métodos simples para el análisis  
de puntos degenerados  
de sistemas analíticos planos**

José Ignacio Aranda Iriarte

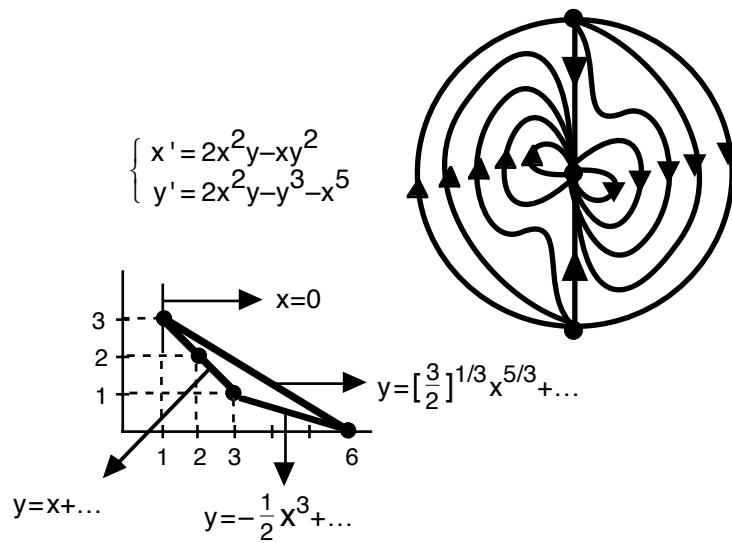
1998

Memoria presentada para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Jesús Esquinas Candenás

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad Complutense de Madrid

a CM



Gracias por su ayuda y comentarios a:

Ana, Armengol, Carmen,  
 Carmen María, Chema,  
 Gabriel, Jaume, Jaume,  
 Javier, Jesús, Juanma,  
 Miguel Ángel, Paco, Ricardo.

# 1. Introducción.

El objetivo principal de este trabajo es presentar un método práctico y sistemático, basado en técnicas mucho más directas que otras ya conocidas, para analizar la estructura de las órbitas, cerca del origen y del infinito, del sistema autónomo analítico plano:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

Desde que hacia 1900 comenzaron Poincaré [1], Lyapunov [2], Bendixon [3], Dulac [4]... a tratar estos sistemas, mucho se ha escrito sobre ellos. El propio Poincaré clasificaba ya sus puntos críticos elementales (nodos, sillas, focos, centros) y Bendixon estudiaba aquellos con un autovalor cero (nodos, sillas, silla-nodos). Forster [5] trataba el caso en que los desarrollos de  $f$  y  $g$  comienzan por polinomios homogéneos del mismo grado sin raíces comunes. Aparecen más aportaciones en conocidos libros de los años sesenta como los de Nemytskii-Stepanov [6], Lefschetz [7] o Andronov-Leontovich-Gordon-Maier [8] (edición rusa del 66).

Un resultado básico en el estudio de puntos críticos es el hecho de que, mediante cambios de variable ('blow-ups'), el análisis de un punto no elemental de un sistema analítico (que no sea centro o foco) se reduce al de otros en que, como mucho, uno de los autovalores de su aproximación lineal es cero. La prueba de esta afirmación (exigiendo a [S] algo menos que la analiticidad) se encuentra en el artículo de Dumortier de 1977 ("Singularities of vector fields on the plane" [9]). Este resultado, en teoría, cierra el problema. Pero la vía habitual de estudiar los puntos críticos degenerados utilizando exclusivamente los blow-ups exige realizar excesivos cálculos y no existe aún una teoría práctica sobre el tema.

A lo largo de los años han seguido apareciendo trabajos que proponían métodos más rápidos que los anteriores para llevar a cabo el análisis de puntos críticos (éste es uno de ellos). Por ejemplo, en el libro "Local methods in nonlinear differential equations" [11] (1979, en ruso), Bruno defiende las ventajas de su algoritmo basado en la utilización de formas normales y en la poligonal de Newton (que nosotros también emplearemos de forma más directa). Sus ideas son citadas como las más prácticas por Arnold e Il'Yashenko en [10]. Aplicando las técnicas que expondremos al estudio de los ejemplos de Bruno de las páginas 143-151, se comprueba claramente que las suyas exigen muchos más cálculos (lo que puede dar lugar a errores, como de hecho sucede con el de la página 149).

El mapa de fases cerca de un punto crítico elemental, que no sea centro o foco, queda fijado si hallamos las variedades que llegan al origen (es decir, si hallamos los vectores propios de la aproximación lineal) y fijamos el flujo sobre ellas (con el signo del autovalor asociado). Esta es la idea que presidirá los métodos aquí presentados: determinaremos (a partir de los términos homogéneos de menor orden o utilizando la poligonal) la forma de las órbitas que pasan por el origen (si las hay) y las orientaremos. Con poco trabajo más veremos si el sector comprendido entre dos de esas órbitas consecutivas es parabólico, elíptico o hiperbólico que son, como es sabido, las únicas posibilidades ([6], [7], [8]). Con ello quedará determinada, sin hacer cambios de variable y salvo en las excepciones que detallaremos, la estructura local del punto.

Si no existen variedades que lleguen al origen, la cuestión (bastante más complicada y que todavía plantea problemas abiertos) será discutir si dicho punto es un centro o un foco (en los sistemas analíticos no se acumulan los ciclos límites ([4]) y no pueden existir los centro-focos). A esta discusión se dedican otros de los resultados originales que hemos obtenido.

El **capítulo 2** contiene un repaso de los puntos con un autovalor no nulo (su signo da el flujo sobre la variedad estable o inestable asociada) y otro cero (asociado a la 'variedad centro'). La estructura local queda determinada aquí también por el flujo sobre las variedades (para fijarlo sobre la centro hay que hallar términos de su desarrollo de Taylor). Presentamos los resultados sin suponer que la parte lineal esté en forma de Jordan para simplificar los cálculos habituales.

El **capítulo 3** muestra que considerar la 'aproximación homogénea' para un sistema que comienza por términos homogéneos de orden  $n \geq 2$  es casi tan sencillo como considerarla para  $n=1$  (la aproximación lineal). Bastará hallar unos 'vectores propios', obtener unos 'autovalores' a partir de ellos y determinar el signo de un polinomio. Como en el caso lineal, nuestros 'vectores propios' darán las rectas invariantes de la aproximación homogénea y los 'autovalores' fijarán el flujo sobre ellas. Aunque se han tratado ampliamente en la literatura los sistemas homogéneos y sus perturbaciones, aportamos aquí esta visión novedosa en lenguaje lineal, organizamos de forma práctica los cálculos e incluimos la posibilidad no recogida en trabajos anteriores de que existan 'autovalores cero simples' (asociados a variedades regulares tipo centro). Para probar los teoremas se hará explotar el origen en puntos sencillos con los clásicos blow-ups para el estudio de puntos degenerados: el cambio a polares o, mejor, el cambio  $x=x; y=xv$ . Pero, una vez demostrados, sólo en casos excepcionales serán necesarios los cambios para analizar el origen (el capítulo 5 los hará innecesarios incluso en algunos de estos casos).

Las secciones posteriores del capítulo estudian las aproximaciones homogéneas para  $n=2$  y  $n=3$ , utilizando las respectivas 'ecuaciones de autovalores' y simplificando el problema de precisar cuándo hay valores propios múltiples con autovalor cero, que es uno de los casos en que no bastan las técnicas mostradas para analizar el punto. Previamente se deducen formas, adecuadas a nuestros intereses, de calcular las raíces polinomios de tercer o cuarto grado, se caracteriza cuándo son simples o múltiples y cuántas son reales y cuántas complejas. Concluye el capítulo con unas breves ideas, basadas en estos resultados, sobre la estabilidad del origen.

El capítulo 3 no aborda el caso de que todos los autovalores sean complejos. Entonces no hay variedades que lleguen al origen y el punto es centro o foco. A este problema se dedica el **capítulo 4**. La situación vuelve a ser similar al caso  $n=1$ : si la aproximación homogénea posee un foco, el sistema completo también (con la misma estabilidad); si un centro, puede convertirse en un foco al añadir términos de mayor orden. Pero si  $n > 1$  e impar (si es par siempre hay órbitas pasando por el origen) la distinción entre centro y foco de la aproximación homogénea no es tan simple como el signo de la parte real de un autovalor: la da el signo de una integral  $I$  de un cociente de polinomios (si  $I=0$  hay un centro). Hallar el signo de  $I$  analíticamente es ya difícil incluso si  $n=3$ , y no existe casi ningún resultado general sobre el tema.

Para atacar este problema escribiremos  $I$  en términos de las raíces de polinomios de tercer orden, la expresaremos en términos de los coeficientes del sistema en diversos casos y deduciremos una condición polinómica necesaria (aunque no suficiente) para su anulación. Esto nos permitirá analizar varios ejemplos de distinción entre centros y focos homogéneos, más generales que los que ilustran otros trabajos.

Más complicado es ver en qué se convierte un centro. Primero repasamos el problema para  $n=1$ , simplificando los cálculos clásicos de los valores focales o constantes de Lyapunov. Se aborda después el problema (mucho más difícil y menos tratado) para  $n \geq 3$ . Reduciendo las complicadas integrales que dan la estabilidad para  $n=3$  conseguimos, en ocasiones, dar un signo definido al integrando y probar algebraicamente que el centro se ha convertido en foco.

Analizamos en el **capítulo 5** el caso de autovalor cero múltiple usando como herramienta fundamental la poligonal de Newton que, aunque se ha utilizado (de forma menos práctica que la aquí propuesta) por varios autores (Bruno, Berezowskaya, Brunella-Miari,...), es ignorada, desafortunadamente, en casi todas las referencias recientes. Veremos que para completar el análisis homogéneo bastará, una vez más, hallar y orientar las órbitas que pasan por el origen (y como mucho fijar el signo de algún polinomio más). Hallar esas órbitas (si entran con pendiente horizontal o vertical) se puede hacer de forma sencilla: determinando, a partir de la poligonal, las ramas de una curva algebraica. Probaremos que las ramas asociadas a los segmentos de la poligonal (y tal vez otras asociadas a los vértices) dan todas las variedades buscadas. El origen quedará determinado con el flujo sobre ellas y el signo de uno o más polinomios. Este resultado generaliza los del capítulo 3: allí la poligonal se reduce a un segmento de pendiente  $-1$  y las ramas son las rectas invariantes ya citadas. Los términos del sistema que dan puntos sobre la poligonal son casi siempre los únicos necesarios para fijar la estructura del origen. Constituyen, aún más que la aproximación homogénea, la mejor generalización de la aproximación lineal elemental. Los teoremas son de demostración larga y exigirán la realización de sucesivos blow-ups, pero una vez probados serán, en general, innecesarios los cambios. Sólo quedarán por analizar, además de los centros y focos no abordables con el capítulo 4 (que sí sabremos tratar si la poligonal se reduce a un segmento), unas situaciones muy excepcionales. Se darán ideas de cómo atacarlas también sin cambios de variable. Se estudiarán a lo largo del capítulo varios sistemas concretos (algunos ya tratados con otras técnicas) para mostrar la bondad del método.

El **capítulo 6** prueba que para el análisis del infinito de un sistema polinomial se puede dar una teoría directa, dual y con el mismo grado de dificultad que la del origen (tampoco esta idea ha sido aprovechada lo suficiente en la literatura). Tras presentar (de un modo más directo que el habitual) los cambios de variable que llevan puntos críticos del infinito a otros finitos se van deduciendo resultados similares a los de los capítulos anteriores. De nuevo no habrá que hacer ningún cambio, salvo excepciones, para determinar la estructura del infinito: bastará hallar las variedades que lleguen al infinito, orientarlas y precisar el signo de algún polinomio. Para ello en muchos casos basta considerar los términos homogéneos de mayor orden. También será muy parecida la forma de distinguir entre centros y focos en el infinito. Cuando los términos de mayor orden no basten habrá que acudir a la poligonal (en este caso a la que rodea por arriba a los puntos del sistema, que no ha sido utilizada en este análisis). Los resultados del capítulo, unidos a los del origen, permiten analizar los sistemas polinomiales mucho más rápidamente que con las técnicas habituales basadas en blow-ups que, aún hoy en día, se utilizan. Esto se comprueba en los ejemplos del final del capítulo. Gracias a la poligonal es fácil construir sistemas con propiedades deseadas (por ejemplo, sistemas con ciclos límites o atractores inestables) o clasificar, con pocos cálculos, sistemas que dependen de parámetros. Trataremos también ejemplos que presentan una especie de 'bifurcación de Hopf no lineal'.

Para favorecer la lectura casi no se han introducido las referencias dentro del texto, como es usual, sino en la introducción de cada capítulo (al final se resumen todas en el **capítulo 7**). En esas introducciones detallaremos dónde encontrar los resultados presentados sin prueba o que hemos demostrado de forma distinta y citaremos los resultados parciales mejorados por este trabajo. Un breve **capítulo 8** final resume las principales aportaciones de esta memoria.

Digamos algo más sobre la forma de presentar los resultados. Intentando hacer más legible el texto no hemos querido usar demasiado las palabras 'definición', 'teorema' o similares y por eso muchas conclusiones aparecerán entre los cálculos, según han sido deducidas. Aunque el objetivo del trabajo es elaborar métodos generales, para hacerlos más comprensibles hemos tratado una gran cantidad de ejemplos (que tienen en muchos casos interés en sí mismos).

Para la edición, con el fin de controlar mejor la presentación, se ha escrito el texto con el Microsoft Word y sobre él se han pegado los dibujos hechos con el SuperPaint. Las órbitas aproximadas proceden de un viejo programa de 78K: el DEGraph (sus curvas arrugadas sobre ejes sin unidades pueden recordar que son sólo aproximaciones numéricas). Para algunos cálculos no realizables a mano se ha utilizado el Maple. Gran parte de ellos se han hecho con un lento Macintosh SE20 con 4 megas de memoria (es fácil, pues, reproducir muchas cuentas). Sólo en ocasiones se han tenido que utilizar ordenadores más potentes (para alguna integral numérica o para el manejo de alguno de los largos polinomios de los capítulos 3 ó 4).

#### Referencias de esta introducción

- [1] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.  
Jour. Math. Pures et Appl. [1881-82-85-86].
- [2] A. M. Lyapunov. Investigation of one of the singular cases of the theory of stability of motion.  
Mathematicheskii Sbornik, **17** [1893].
- [3] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math., **24** [1901].
- [4] H. Dulac. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France **51** [1923].
- [5] H. Forster. Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung  
erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Math. Zeit., Dtsch, **43** [1938].
- [6] V. V. Nemytskii - V. V. Stepanov. Qualitative theory of differential equations.  
Princeton University Press [1960].
- [7] S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- [8] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory  
of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [9] F. Dumortier. Singularities of vector fields on the plane. J. of Diff. Eq. **23** [1977], 53-106.
- [10] V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations.  
Encyclopaedia of Math. Sci., vol 1. Springer- Verlag [1989].
- [11] A. D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer- Verlag [1989].



## 2. Puntos críticos con un único autovalor cero.

Consideremos el sistema analítico

$$[S] \quad \begin{cases} x' = ax + by + A^p(x,y) + A^{p+1}(x,y) + \dots \equiv f(x,y) \\ y' = cx + dy + B^p(x,y) + B^{p+1}(x,y) + \dots \equiv g(x,y) \end{cases}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con  $A^k$  y  $B^k$  polinomios homogéneos de grado  $k \geq 2$ , es decir:

$$A^k(x,y) = \sum_{j=0}^k a_{k-j,k} x^{k-j} y^j ; \quad B^k(x,y) = \sum_{j=0}^k b_{k-j,k} x^{k-j} y^j$$

Supongamos que el origen  $\mathbf{0}$  es un punto crítico aislado, que los autovalores de la matriz  $M$  son  $\lambda_0=0$  y  $\lambda_1 \neq 0$  (es decir, que  $ab=cd$  y  $\lambda_1=a+d \neq 0$ ) y sean  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}_1$  los vectores propios respectivos. La estructura local de estos puntos es bien conocida y fue establecida ya por Bendixson ([1]). Para determinarla basta, como en los puntos elementales con autovalores reales, encontrar las variedades que llegan a  $\mathbf{0}$  con pendiente definida y fijar el flujo local sobre ellas. Simplemente es algo más complicado que en los elementales estudiar las variedades asociadas al autovalor 0 (variedades centro). En el siguiente teorema presentamos, como ya se hizo en [6], una forma más directa que la habitual de analizar estos puntos (sin suponer, a diferencia de resultados anteriores, que la matriz  $M$  esté escrita en forma de Jordan):

### Teorema 2.1

- i) Existe una única variedad (**variedad estable o inestable**) que llega al origen siendo tangente a  $\mathbf{v}_1$ ; el sentido del flujo local sobre esta variedad queda determinado por el signo de  $\lambda_1$ .
- ii) Existe al menos una variedad de clase  $C^\infty$  asociada a  $\lambda_0$  (**variedad centro**) que llega al origen siendo tangente a  $\mathbf{v}_0$ ; el flujo local sobre esta variedad depende de los términos no lineales de [S] y se puede determinar calculando algún término de su desarrollo en serie de Taylor a partir de la ecuación de las órbitas del sistema [S] [  $dy/dx = g(x,y)/f(x,y)$  ].
- iii) La estructura de las órbitas de [S] en un entorno del origen queda determinada por  $\lambda_1$  y el flujo sobre la variedad centro, pudiendo tratarse de un nodo (estable o inestable), de un punto silla o de un silla-nodo.

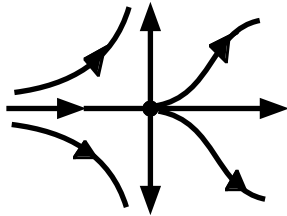
[Observemos que la variedad centro no tiene por qué ser única.  
De hecho, salvo en el caso del punto silla, existen infinitas].

Ejemplos de las tres posibles configuraciones citadas en el teorema nos los dan los tres sencillos sistemas siguientes, para los que la expresión de sus órbitas es fácilmente calculable:

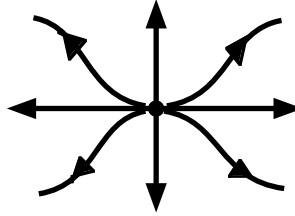
$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = y \end{cases} \rightarrow y = Ce^{-1/x}$$

$$\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = y \end{cases} \rightarrow y = Ce^{-1/2x^2}$$

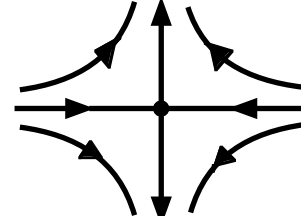
$$\begin{cases} x' = -x^3 \\ y' = y \end{cases} \rightarrow y = Ce^{1/2x^2}$$



silla-nodo



nodo



silla

Como se observa, en el primero y segundo casos existen infinitas variedades centro, todas ellas son  $C^\infty$  y todas tienen la misma serie de Taylor, aunque, salvo la  $y=0$ , ninguna sea analítica. Para sistemas del tipo [S], en general, no dispondremos de una expresión explícita de la variedad centro, pero siempre podremos (por ser la variedad infinitamente derivable) calcular algún término de su desarrollo en serie de potencias (que podría converger sólo para  $x=0$ ). Esto bastará para determinar el flujo sobre ella y la estructura local de las órbitas.

Observemos también que las variedades asociadas a autovalores no nulos, en general, no admiten estos desarrollos. Por ejemplo, el nodo elemental  $x' = x$ ,  $y' = 2y - x^2$  tiene por órbitas  $y = [C - \log|x|]x^2$  y todas las variedades que pasan por el origen siendo tangentes al eje  $x$  son solamente  $C^1$  en un entorno de  $x=0$ . Pero la no regularidad estas variedades no dificulta el análisis ya que el flujo sobre ellas viene dado por el signo del autovalor.

La justificación de las afirmaciones hechas hasta ahora se deduce de la vasta bibliografía existente sobre variedades centro (los libros [4], [5], [6], [8], [9], [10] y [11], por ejemplo) o de resultados más antiguos en los que se aborda directamente y por otros métodos el análisis de este tipo de puntos (como el capítulo X de [2] y el IX de [3]). Usualmente, se supone que, tras cambios de variable lineales, [S] tiene la matriz  $M$  escrita ya en forma de Jordan:

$$[Sd] \quad \begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = d y + Q(x,y) \end{cases}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad d \neq 0, \quad P, Q \text{ de orden } > 1$$

Para estos sistemas se demuestra [ver, por ejemplo, el libro de Chow-Hale] que si  $P$  y  $Q$  son de clase  $C^k$  en un entorno  $U$  del origen existe una variedad centro local  $y=h(x)$  de clase  $C^k$  con  $h(0)=h'(0)=0$ . Además, si  $d < 0$ , se prueba que la estabilidad del origen de [Sd] es la misma que la de la solución  $x=0$  de la ecuación escalar  $x' = P(x, h(x))$  y se tiene que dentro de  $U$  todas las soluciones se acercan exponencialmente a las soluciones sobre la variedad centro. Si  $d > 0$ , basta cambiar el sentido de las órbitas. La caracterización de la página anterior es una forma simplificada de presentar los resultados referidos, de forma más práctica para los cálculos concretos (es un rodeo innecesario poner  $M$  en forma de Jordan).

Ilustremos el método propuesto de análisis de puntos con un  $\lambda=0$  con un par de ejemplos:

**Ejemplo 1.**  $\begin{cases} x' = x-y-xy-x^3 \\ y' = -x+y+3y^2 \end{cases}$  En este caso  $\lambda_0=0$ ,  $\mathbf{v}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1=2$ ,  $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Existe variedad inestable tangente a  $\mathbf{v}_1$ . Para ver el flujo sobre la variedad centro ( tangente a  $\mathbf{v}_0$  ) probamos soluciones de la forma  $y = x+c_2x^2+\dots$  en la ecuación diferencial de las órbitas:

$$[x-y-xy-x^3] \frac{dy}{dx} = -x+y+3y^2 \rightarrow$$

$$[x-x-c_2x^2-\dots-x^2-\dots+x^3] [1+2c_2x+\dots] = -x+x+c_2x^2+\dots+3x^2+\dots$$

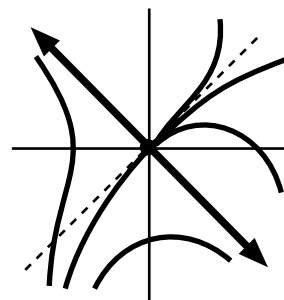
Por tanto,  $-c_2-1 = -c_2+3 \rightarrow c_2 = -2$

La variedad centro es de la forma  $y = x-2x^2+O(x^3)$ .

Llevando esta expresión a la primera ecuación del sistema obtenemos

$$x' = x-x+2x^2-x^2+O(x^3) = x^2+O(x^3)$$

con lo que la variedad centro se recorre hacia la derecha a ambos lados del origen y se trata de un silla-nodo.



Para determinar el flujo en la variedad centro, en ocasiones necesitaremos varios términos de su desarrollo (y en otras nos bastará con el término lineal que se deduce de  $\mathbf{v}_1$  ) como en:

**Ejemplo 2.**  $\begin{cases} x' = xy-x^3+xy^2 \\ y' = -y+x^2 \end{cases}$   $\lambda_0=0$ ,  $\mathbf{v}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1=-1$ ,  $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Probamos  $y = c_2x^2+c_3x^3+\dots$  en la ecuación de las órbitas:

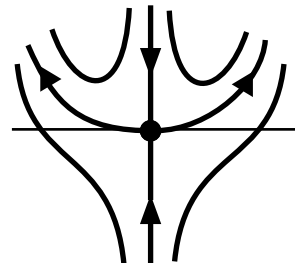
$$[c_2x^3+c_3x^4+c_4x^5+\dots-x^3+c_2^2x^5+\dots] [2c_2x+3c_3x^2+\dots] =$$

$$= -c_2x^2-c_3x^3-\dots+x^2 \rightarrow c_2=1.$$

Esto no basta, pues de  $y = x^2+O(x^3)$  sólo deducimos  $x' = O(x^4)$ .

Necesitamos calcular también  $c_3=0$ ,  $c_4=0$  (y ningún término más).

Ahora  $y = x^2+O(x^5) \rightarrow x' = x^5+O(x^4)$ , y el origen es un punto silla.



Volvamos al sistema general [S]. Sea  $d \neq 0$  (en caso contrario cambiaríamos los papeles de  $x$  e  $y$  ). Como el vector propio asociado a  $\lambda_0=0$  es  $(1, -c/d)$  probamos series de la forma

$$y = -\frac{c}{d}x + c_p x^p + \dots \rightarrow$$

$$[bc_p x^p + A^p(x, -\frac{c}{d}x + \dots) + \dots] [-\frac{c}{d}x + \dots] = dc_p x^p + B^p(x, -\frac{c}{d}x + \dots) + \dots \rightarrow$$

$$(1) \quad y = h(x) = -\frac{c}{d}x + \frac{1}{d(d+a)} [cA^p(1, -\frac{c}{d}) + dB^p(1, -\frac{c}{d})] x^p + O(x^{p+1}) \rightarrow$$

$$(2) \quad x' = \frac{1}{d+a} [dA^p(1, -\frac{c}{d}) - bB^p(1, -\frac{c}{d})] x^p + O(x^{p+1})$$

y, por tanto, si el corchete no se anula basta para determinar la estructura del origen.

Tratemos ahora el caso particular en que el sistema tenga la forma [S<sub>d</sub>]. Si todos los  $b_{k0}=0$  la variedad centro es  $y=0$  (sobre dicho eje es  $y'=0$ ). En caso contrario, supongamos que el primer  $b_{k0}$  que no se anula es  $b_{N0}$ . Entonces es fácil comprobar que  $c_2 = \dots = c_{N-1} = 0$  y  $dc_N + b_N = 0$ , y por tanto la variedad centro es simplemente de la forma

$$y = -\frac{b_{N0}}{d}x^N + O(x^{N+1}), \quad N \geq p$$

[Observemos que, en general, no son los términos no lineales de menor orden los que más influyen en la forma de la variedad o en la estructura del origen de [S<sub>d</sub>] (por ejemplo, influyen más que  $b_{02}$  el  $b_{30}$  en la forma y el  $a_{30}$  en la estructura). Esto no contradice (1) y (2); de allí:

$$h(x) = -\frac{1}{d}b_{p0}x^p + O(x^{p+1}) = O(x^{p+1}) \text{ si } N > p; \quad x' = a_{p0}x^p + O(x^{p+1}) \quad ]$$

Los sistemas con  $a=b=c=0$  permiten, además, determinar su estructura mediante cálculos más sencillos [método de Lyapunov-Schmidt; ver [5], o [3] para un estudio similar más directo]. Sea  $y = L(x)$  la función analítica con  $L(0)=L'(0)=0$  definida en un entorno de  $\mathbf{0}$  por la ecuación  $dy + A^p(x,y) + \dots = 0$  (el teorema de la función implícita garantiza su existencia). Se demuestra que entonces el flujo local sobre la variedad centro coincide con el de la ecuación escalar obtenida al sustituir la  $y$  por  $L(x)$  en la primera ecuación:  $x' = P(x, L(x))$ . También aquí bastará hallar un número finito de términos del desarrollo de  $L(x)$  para analizar cada ejemplo concreto. El primer término de este desarrollo es, de nuevo,  $(-b_{N0}/d)x^N$  aunque  $L(x)$  y  $h(x)$  diferirán en términos posteriores. Observemos que la ecuación escalar para  $x'$  obtenida al sustituir  $y$  por  $h(x)$  o  $L(x)$  no puede ser  $x'=0$ , ya que esto implicaría que  $y=h(x)$  e  $y=L(x)$  serían curvas de puntos críticos y el origen no sería aislado.

Calculemos, utilizando ambos métodos descritos, algún término más de los desarrollos en un sistema de la forma [S<sub>d</sub>], en el caso de que  $P$  y  $Q$  comiencen por términos de orden dos:

$$h(x) = c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \rightarrow$$

$$h(x) = -\frac{b_{20}}{d}x^2 + \left[ \frac{(b_{11}-2a_{20})b_{20}}{d^2} - \frac{b_{30}}{d} \right] x^3 + \left[ \frac{b_{20}}{d^3} (2b_{20}a_{11} + 5a_{20}b_{11} - 6a_{20}^2 - b_{20}b_{02} - b_{11}^2) + \frac{b_{20}}{d^2} (b_{21} - 2a_{30}) + \frac{b_{30}}{d^2} (b_{11} - 3a_{20}) - \frac{b_{40}}{d} \right] x^4 + O(x^5) \rightarrow$$

$$x' = a_{20}x^2 + \left[ a_{30} - \frac{a_{11}b_{20}}{d} \right] x^3 + \left[ a_{40} - \frac{a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30}}{d} + \frac{b_{20}(a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11} - 2a_{20}a_{11})}{d^2} \right] x^4 + O(x^5)$$

Los primeros términos de  $L(x)$  son (basta hacer todos los  $a_{ij}=0$ ):

$$L(x) = -\frac{b_{20}}{d}x^2 + \left[ \frac{b_{11}b_{20}}{d^2} - \frac{b_{30}}{d} \right] x^3 + \left[ -\frac{b_{20}}{d^3} (b_{20}b_{02} + b_{11}^2) + \frac{b_{20}b_{21} + b_{11}b_{30}}{d^2} - \frac{b_{40}}{d} \right] x^4 + O(x^5)$$

$$\rightarrow x' = a_{20}x^2 + \left[ a_{30} - \frac{a_{11}b_{20}}{d} \right] x^3 + \left[ a_{40} - \frac{a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30}}{d} + \frac{b_{20}(a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11})}{d^2} \right] x^4 + O(x^5)$$

que nos proporciona la misma estabilidad.

## Referencias del capítulo 2

- [1] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math., **24** [1901].
- [2] S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- [3] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [4] J. Carr. Applications of center manifold theory. Springer-Verlag [1981].
- [5] S. N. Chow - J. K. Hale. Methods of bifurcation theory. Springer-Verlag [1982].
- [6] J. Guckenheimer - P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag [1983].
- [7] J.I.Aranda. Métodos simples para el estudio de puntos singulares degenerados. Actas VII CEDYA [1984], 11-14.
- [8] S. Wiggins. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer-Verlag [1990].
- [9] D. K. Arrowsmith - C. M. Place. An introduction to dynamical systems. Cambridge University Press [1990].
- [10] J. Hale - H. Koçak. Dynamics and bifurcations. Springer-Verlag [1991].
- [11] L. Perko. Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag [1996].



### 3. Análisis de puntos 'poco degenerados'.

Consideremos en este capítulo el sistema analítico

$$[S] \quad \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + A^p(x,y) + \dots \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + B^p(x,y) + \dots \end{cases}$$

con  $p > n \geq 1$ , donde  $A^k$  y  $B^k$  son polinomios homogéneos de grado  $k$  como en el capítulo anterior y donde al menos uno de los  $A^n$  o  $B^n$  no es idénticamente nulo. En el capítulo vamos a tratar [S] de forma similar a como se trata el caso lineal y por eso introduciremos nosotros unas notaciones inspiradas en ese caso. Así, diremos que su '**aproximación homogénea**' es el sistema [H] obtenido considerando sólo los términos de menor orden:

$$[H] \quad \begin{cases} x' = A^n(x,y) \\ y' = B^n(x,y) \end{cases}$$

Suponemos también que el origen  $0$  es un punto crítico aislado de [S] (si hay una curva de puntos críticos  $p(x,y)=0$ , con  $p$  factor común de  $f$  y  $g$ , tras dividir ambos segundos miembros por  $p$  tenemos un sistema (de estructura más sencilla) con las mismas órbitas que [S], salvo la desaparición de puntos críticos y el posible cambio de sentido de parte de las órbitas).

Los puntos '**poco degenerados**' de este capítulo serán aquellos para los que bastaría un único cambio de variable a polares o la realización de un único 'blow-up'  $x=x, y=xv$  (y tal vez además uno  $x=yu; y=y$ ) para precisar su estructura. Es decir, aquellos para los que con sólo uno de estos cambios el origen queda descompuesto en varios de los conocidos puntos elementales o con un único autovalor cero (llamaremos puntos 'simples' a los que sean de uno de estos dos tipos). Entonces será inmediato caracterizar los sectores parabólicos, hiperbólicos o elípticos que rodean al punto.

Los cambios de variable citados fueron usados ya por Bendixon para precisar las posibles direcciones de llegada al origen y hay trabajos en la línea de los de las dos primeras secciones en variadas referencias, como [3] (que cita a Forster [1]), [4], [5], [7], [8], [9],[14] o [16].

Sin embargo no se ha observado hasta ahora que para estos puntos 'poco degenerados' ni siquiera es preciso realizar explícitamente los cambios y que se puede emplear en su análisis un algoritmo muy similar y, en teoría, no mucho más complicado que el de los puntos simples: en vez de resolver una ecuación de segundo grado para hallar autovalores y autovectores, bastará con hallar unos '**vectores propios**' (las raíces de un polinomio  $P$  de grado  $n+1$  basado en la aproximación homogénea), deducir de ellos unos '**autovalores**' (el valor de otro polinomio en esas raíces), fijar el signo de  $P$  entre sus raíces (para orientar una circunferencia) y, tal vez, calcular algún término del desarrollo de una '**variedad centro**', probando (como se hizo en el capítulo 2) series en la ecuación de las órbitas. Estas ideas se precisan en el teorema básico del capítulo: el **teorema 3.2** de la página 19 (presentado en [13]).

En los resultados previos sobre sistemas homogéneos y sus perturbaciones se supone además que  $A$  y  $B$  no tienen factores comunes, es decir, que no hay rectas de puntos críticos (es decir, en nuestros términos, 'autovalores cero'). El teorema 3.2 admite también esta situación (si el vector propio es simple): bastará entonces hallar términos de variedades 'centro'. [15] discute la presencia de factores comunes pero en sistemas propiamente homogéneos.

Otra analogía entre los puntos 'poco degenerados' y los elementales será que si todos los 'autovalores' son no nulos la estructura local de  $[S]$  mantiene la estructura de su aproximación homogénea  $[H]$  (como ocurre con la aproximación lineal). Este resultado (corolario inmediato del teorema 3.2) se puede encontrar, con otras palabras, en [16].

Si para el caso lineal era fácil analizar el punto excepto si los dos autovalores eran cero (o si eran imaginarios) aquí ocurrirá algo parecido: sólo será insuficiente el teorema 3.2 cuando sea  $P=0$ , cuando existan 'vectores propios múltiples' asociados a un 'autovalor cero' o cuando sean complejos todos los 'autovalores' (en este caso el origen será un centro o un foco).

En las secciones 3.4 y 3.6, explotando la descrita visión lineal (no utilizada hasta ahora) del problema, estudiaremos con detalle las **ecuaciones de autovalores y vectores propios** de los sistemas para los que  $A^n$  y  $B^n$  son de **orden 2** y de **orden 3**, para caracterizar, de forma sencilla y en términos de los coeficientes del sistema, cuándo influyen en la estructura los términos de mayor orden y cuándo el teorema 3.2 no decide.

Por ejemplo, si  $n=2$ , para descubrir que hay 'autovalores cero' debemos en principio hallar las raíces reales de un polinomio de tercer grado y ver que anulan otro del mismo grado. Con la ecuación de autovalores el problema se reduce a ver que se anula su término independiente (polinomio de orden 4 en los coeficientes del sistema). Más simplificaremos, todavía, la cuestión de precisar si hay 'vectores propios múltiples' con 'autovalor cero'. En el caso  $n=3$  la ecuación de autovalores proporcionará además una información directa sobre la **estabilidad** del origen.

Nuestros resultados sobre perturbaciones de sistemas homogéneos cuadráticos y cúbicos se pueden comparar con la variada literatura que estudia los sistemas homogéneos de esos órdenes: así los cuadráticos son clasificados en [10], [11] o [12] y los cúbicos en [14] (aunque, como hemos dicho, nuestro objetivo es diferente: no buscamos una clasificación sino precisar de modo inmediato cuando hay rectas dobles de puntos críticos en esos sistemas).

Como los vectores propios son raíces de un polinomio de grado  $n+1$  y las dificultades están asociadas a raíces múltiples (o complejas), antes de tratar los sistemas de orden 2 y 3 vamos a precisar (en las secciones 3.3 y 3.5) cuándo son múltiples las raíces (y cómo calcularlas) de los polinomios de grados 3 y 4, y cuando todas ellas son complejas (en los de grado 4). Algunas de las ideas que utilizaremos (raíces, resultante, discriminante, método de Sturm...) se han inspirado en los libros [2] y [6], pero aquí deduciremos muchos resultados que no están en ellos (expresiones compactas de discriminantes, caracterización del número de raíces reales y complejas de los polinomios de grado 4, métodos para su cálculo adecuados a nuestros objetivos,...). No obstante, no sería extraño que hayamos vuelto a 'descubrir' viejos resultados sobre un tema tan clásico.

Las formas de abordar las situaciones no recogidas en este capítulo serán descritas en los posteriores: los centros y focos se tratarán en el 4 y los casos  $P=0$  y autovalores cero múltiples en el 5. Conseguiremos en esos capítulos hacer innecesarios los cambios de variable también en esos casos (salvo en situaciones cada vez más excepcionales).



### Referencias del capítulo 3

- [1] H. Forster. Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Math. Zeit., Dtsch, **43** [1938].
- [2] J. V. Uspensky. Theory of equations. McGraw-Hill [1948].
- [3] V. V. Nemytskii - V. V. Stepanov. Qualitative theory of differential equations. Princeton University Press [1960].
- [4] S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- [5] P. Hartman. Ordinary differential equations. Wiley [1964].
- [6] J. Rey Pastor. Análisis matemático. Kapelusz [1965].
- [7] C. Coleman. Equivalence of planar dynamical and differential systems. J. of Diff. Eq. **1** [1965], 222-233.
- [8] J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ . Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV **79** [1968], 35-69.
- [9] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [10] N. I. Vulpe - K. S. Sibirskii. Geometric classification of quadratic differential systems. Differential Equations **13** [1977], 548-556.
- [11] T. A. Newton. Two dimensional homogeneous quadratic differential systems. J. of Diff. Eq. **20** [1978], 120-138.
- [12] T. Date. Classification and analysis of two-dimensional homogeneous quadratic differential systems. J. of Diff. Eq. **32** [1979], 311-334.
- [13] J.I.Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos. Actas X CEDYA [1987], 20-25.
- [14] A. Cima - J.Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. J. of Math. Anal. and Appl. **147** [1990], 420-448.
- [15] C. B. Collins. Algebraic conditions for a center or a focus in some simple systems of arbitrary degree. J. of Math. Anal. and Appl. **195** [1995], 719-735.
- [16] J. Llibre - J. S. Pérez del Río - J. A. Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity. J. of Diff. Eq. **125** [1996], 490-520.

### 3.1. Utilizando la expresión en polares

Comencemos con el cambio a **polares**:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi/2, 3\pi/2]$ . Denotaremos para abreviar en esta sección y la siguiente  $c \equiv \cos \theta$ ,  $s \equiv \sin \theta$ ,  $A^n \equiv A$  y  $B^n \equiv B$ . El sistema [S] se convierte en:

$$\begin{cases} r' = r^n [cA(c,s) + sB(c,s)] + \dots & \equiv r^n R(\theta) + \dots \\ \theta' = r^{n-1} [cB(c,s) - sA(c,s)] + r^{p-1} [cB^p(c,s) - sA^p(c,s)] + \dots & \equiv r^{n-1} \Theta(\theta) + r^{p-1} \Theta^p(\theta) + \dots \end{cases}$$

Las órbitas de este sistema en  $r > 0$  son las mismas que las de

$$[P] \begin{cases} r' = r [cA(c,s) + sB(c,s)] + \dots & = r R(\theta) + \dots \\ \theta' = [cB(c,s) - sA(c,s)] + r^{p-n} [cB^p(c,s) - sA^p(c,s)] + \dots & = \Theta(\theta) + r^{p-n} \Theta^p(\theta) + \dots \end{cases}$$

Los puntos críticos de [P] sobre  $r=0$  vienen dados por

$$(1) \quad cB(c,s) - sA(c,s) \equiv \Theta(\theta) = 0$$

polinomio homogéneo de grado  $n+1$  en  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$ . Supondremos durante toda esta sección que  $\Theta(\theta)$  **no es idénticamente nulo**.

Podemos escribir (1) en la forma:

$$(2) \quad B(1, \tan \theta) - \tan \theta A(1, \tan \theta) = 0$$

(teniendo en cuenta que si  $\theta = \pi/2$  y  $\theta = 3\pi/2$  son raíces de (1) no aparecerán entre las raíces de (2)). Esta ecuación tiene a lo más  $2n+2$  raíces reales  $\theta_i$  agrupadas por parejas, ya que si  $\theta_i$  es raíz también lo es  $\theta_i + \pi$ . Llamaremos  $\theta_1, \dots, \theta_q$  (con  $q \leq n+1$ ) a las raíces de (1) que se encuentren en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2]$ . Observemos que, por ser el origen un punto crítico aislado, no existen más puntos en el entorno del eje  $r=0$  que los dados por (1). Como dicho eje es una órbita de [P], las órbitas de  $r > 0$  que lleguen a él sólo pueden hacerlo a los puntos  $(0, \theta_i)$  anteriores. A cada órbita que llegue a uno de esos puntos se corresponderá una órbita de [S] que llega al origen con pendiente  $\tan \theta_i$  y esas serán las únicas posibles pendientes de las órbitas de [S] que lleguen a  $0$ . En el caso de que no existiese ninguna raíz real de (1), ninguna órbita podría acercarse a  $0$  con pendiente definida y entonces  $0$  se trataría de un centro o de un foco estable o inestable (dedicaremos el capítulo 4 a estudiar estas últimas posibilidades).

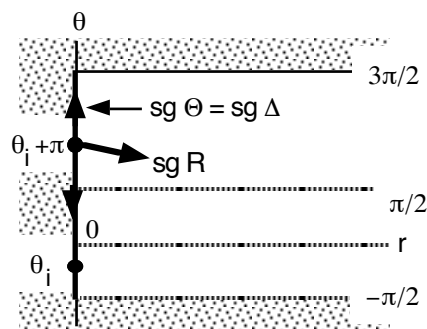
De forma equivalente, escribiendo (1) en cartesianas obtenemos la ecuación más sencilla

$$(3) \quad \Delta(x,y) \equiv xB(x,y) - yA(x,y) = 0$$

que define a lo más  $n+1$  rectas que pasan por el origen. Con todo lo anterior está claro que,

**si una órbita llega a  $0$  lo hará siendo tangente a alguna de las rectas definidas por la ecuación (3).**

Si cada uno de los  $(0, \theta_i)$  fuese un punto simple, la estructura de las órbitas de [P] cerca del eje  $r=0$ , y por tanto la estructura de  $0$ , quedaría perfectamente determinada. La matriz de la aproximación lineal de [P] en cada uno de esos puntos es:



$$M(\theta_i) = \begin{pmatrix} R(\theta_i) & 0 \\ E(\theta_i) & \frac{d}{d\theta} \Theta(\theta_i) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad E(\theta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n+1 \\ \Theta^{n+1}(\theta_i) & \text{si } p = n+1 \end{cases}$$

Los autovalores de  $M(\theta_i)$  son  $\Lambda_i = R(\theta_i)$  y  $M_i = \Theta'(\theta_i)$ , asociado este último a un vector propio vertical. Como  $r=0$  es órbita, si  $(0, \theta_i)$  es simple sólo puede tratarse de un nodo, una silla o un silla-nodo. Los autovalores de  $M(\theta_i + \pi)$  son los mismos  $\Lambda_i$  y  $M_i$  si  $n$  es impar o  $-\Lambda_i$ ,  $-M_i$  si  $n$  es par. Así pues,

**la estructura local de 0 queda determinada si  $\Lambda_i^2 + M_i^2 \neq 0$  para todo  $i=1, \dots, q$ .**

Veamos como podemos precisar esta estructura realizando el mínimo de cálculos. Si  $\theta_i$  es una raíz simple de  $\Theta(\theta)=0$  entonces  $\Theta'(\theta_i)$  será distinto de cero, con lo que  $(0, \theta_i)$  será un punto simple. Si ninguna raíz es múltiple, a cada  $(0, \theta_i)$  llegará una variedad no vertical (al menos). El flujo sobre esta variedad estará determinado por  $R(\theta_i)$  si es no nulo. Si  $R(\theta_i)=0$  será más cómodo determinar el flujo sobre la variedad centro volviendo al sistema [S] y probando la serie adecuada (la variedad seguirá siendo infinitamente derivable en cartesianas). Como  $\theta' = \Theta(\theta)$  en  $r=0$ , para analizar el flujo en la variedad vertical más rápido que calcular los  $M_i$  será determinar el signo de  $\Theta$  en  $[0, 2\pi]$  (es decir, el signo de  $\Delta(x, y)$ ). Para ello se puede calcular  $\Theta$  en algún  $\theta$  que no sea raíz de (1) e ir luego orientando alternativamente los segmentos entre puntos críticos.

Si  $\theta_i$  es un raíz de multiplicidad  $k$  y  $\Lambda_i = R(\theta_i) \neq 0$  (si es cero exigirá un análisis bastante más detallado que veremos en capítulos posteriores) la variedad no centro está ya orientada con  $\Lambda_i$ . El flujo en las cercanías de  $(0, \theta_i)$  sobre  $r=0$  (variedad centro) se determinará de forma análoga a la de antes (sin calcular  $M_i$ ), teniendo en cuenta que ahora la orientación del eje por encima y por debajo del punto será la misma o la opuesta dependiendo de que la multiplicidad  $k$  sea par o impar respectivamente.

Resumamos los cálculos anteriores en un teorema:

### Teorema 3.1

Supongamos que  $\Theta(\theta) = \cos \theta B(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta A(\cos \theta, \sin \theta) \pm 0$  y que  $\Theta(\theta)=0$  posee  $q \neq 0$  ceros reales  $\theta_1, \dots, \theta_q$  en  $(-\pi/2, \pi/2]$ . Si todos ellos son simples o si para aquellos  $\theta_i$  que sean múltiples se tiene que  $R(\theta_i) \neq 0$ , existe para cada  $i=1, \dots, q$  al menos una variedad de [S] que llega a **0** con pendiente  $\tan \theta_i$ .

El flujo local sobre cada una de ellas viene dado por el signo de  $R(\theta_i)$  si no es nulo o se puede precisar calculando algún término del desarrollo de la variedad si es  $R(\theta_i)=0$ .

Estos flujos y el signo de  $\Theta(\theta)$  en  $[0, 2\pi]$  determinan la estructura local de **0**.

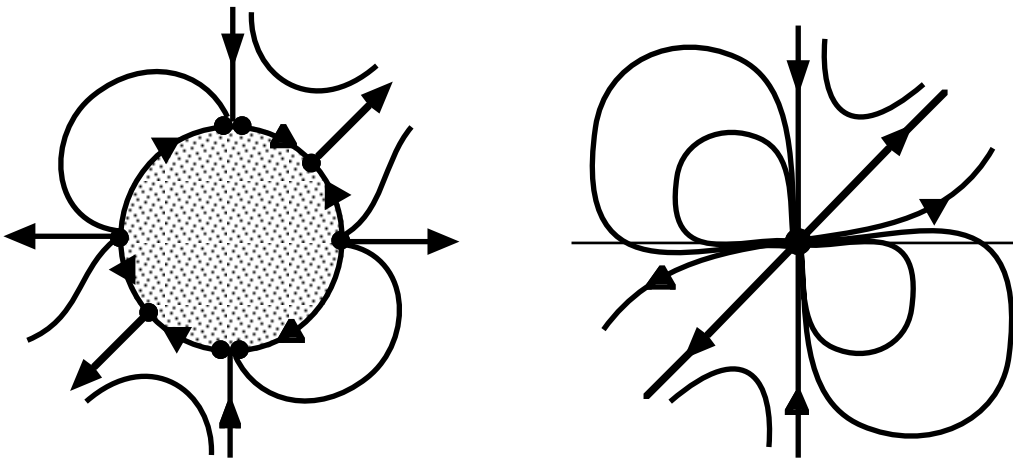
En la práctica conviene ir esquematizando la información obtenida sobre una circunferencia (el eje  $r=0$ , identificando  $\theta=0$  y  $\theta=2\pi$ ) en la que habremos situado tantas parejas de puntos críticos asociados a cada raíz de (1) como indique su multiplicidad. Lo ilustramos con un ejemplo preparado para que se den todas las situaciones anteriores:

**Ejemplo 1.**  $\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$  Con las notaciones vistas se tiene:

$$cB - sA = 2c^2s(c-s) \rightarrow \theta_1=0, \theta_2=\frac{\pi}{4}, \theta_3=\frac{\pi}{2} \text{ doble}$$

$$cA + sB = 2c^3s + c^2s^2 - s^4 \rightarrow \Lambda_1=0, \Lambda_2=\frac{1}{2}, \Lambda_3=-1$$

Las tres  $\theta_i$  están asociadas a puntos simples. Como para  $\theta \in (0, \pi/4)$  es  $\Theta(\theta) > 0$ , sin más que tener en cuenta la paridad de la multiplicidad de las  $\theta_i$  se obtiene que la orientación de la circunferencia entre puntos críticos es la del dibujo. Falta sólo por orientar la variedad centro correspondiente a  $\theta_1$ , para lo que necesitamos conocer algún término de su desarrollo.



Probando  $y = c_2x^2 + \dots$  se tiene que

$$[2c_2x^4 + O(x^5)] [2c_2x + O(x^2)] = 2c_2x^4 + 2c_3x^5 - x^5 + O(x^6)$$

$$\rightarrow c_2=0, c_3=\frac{1}{2}; \text{ es decir, } y = \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)$$

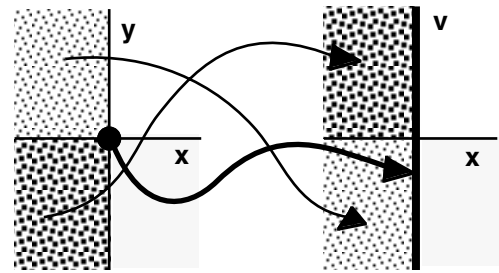
(más adelante veremos como calcular el primer término de los desarrollos de variedades de tangente horizontal o vertical mucho más rápidamente utilizando la poligonal de Newton).

Por tanto, sobre la variedad centro:  $x' = x^5 + O(x^6)$ .

Las demás órbitas en un entorno de  $r=0$  quedan entonces determinadas y, por tanto, el retrato local de fases en un entorno del origen (único punto crítico del sistema) es el dibujado (faltaría sólo por precisar, para un retrato global, si existe o no algún sector parabólico entre los sectores elípticos e hiperbólicos).

### 3.2. Usando el blow-up: $x=x, y=xv$

Mediante el cambio de variable  $x=x, y=xv$  llegaremos a resultados similares a los obtenidos con las polares. Dicho cambio 'estira' verticalmente el punto  $(x,y)=(0,0)$  y lo convierte en todo el eje  $v$  ( $x=0$ ), deja el eje  $x$  invariante, y lleva puntos de los cuadrantes 1, 2, 3 y 4 del plano  $xy$  a puntos de los cuadrantes 1, 3, 2 y 4 del plano  $xv$ .



Haciendo  $x=x, y=xv$ , [S] se convierte en el sistema:

$$\begin{cases} x' = x^n A(1, v) + x^p A^p(1, v) + \dots \\ v' = x^{n-1} [B(1, v) - vA(1, v)] + x^{p-1} [B^p(1, v) - vA^p(1, v)] + \dots \end{cases}$$

para el que  $x=0$  es una recta de puntos críticos. Sus órbitas para  $x<0$  y  $x>0$  son las de:

$$[B] \begin{cases} x' = xA(1, v) + \dots \\ v' = [B(1, v) - vA(1, v)] + x^{p-n} [B^p(1, v) - vA^p(1, v)] + \dots \end{cases}$$

aunque su orientación en  $x<0$  es la opuesta si  $n$  es par. Los puntos críticos de [B] sobre el eje  $x=0$  (formado por órbitas) se obtienen resolviendo

$$(4) \quad P_{n+1}(v) \equiv B(1, v) - vA(1, v) = 0$$

ecuación de orden a lo más  $n+1$  en  $v$  y por tanto con  $n+1$  raíces reales como mucho. Supondremos que  $B-vA \neq 0$  y que (4) posee  $r$  raíces  $v_1, \dots, v_r$ , suposiciones equivalentes a las que hicimos trabajando con las polares. La aproximación lineal en un punto crítico  $(0, v_i)$  es

$$M(v_i) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ E & \frac{d}{dv} [B - vA] \end{pmatrix}_{(1, v_i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ E_i & \mu_i \end{pmatrix}$$

donde  $E_i$  puede ser cero. El autovalor  $\mu_i$  informa aquí también de la multiplicidad de  $v_i$  como raíz de (4). Supongamos que ninguna raíz es múltiple o que, si alguna lo es, el correspondiente  $\lambda_i \neq 0$ . Entonces es posible dibujar de forma elemental las órbitas de [B] en un entorno de  $x=0$  (calculando, por una parte, los  $\lambda_i = A(1, v_i)$  y el flujo en las posibles variedades centro, y analizando por otra el signo de  $B-vA$ ). A cada variedad no vertical que llegue a un  $(0, v_i)$  corresponderá una variedad de [S] que llegará a  $0$  siendo tangente a la recta  $y=v_i x$  y la orientación de esta última variedad a la izquierda del origen coincidirá con la de aquella o se invertirá, dependiendo de la paridad de  $n$  (para evitar estos líos con las paridades será más cómodo orientar las variedades que vayamos encontrando sustituyendo directamente su expresión en la primera ecuación del sistema [S]).

Por este camino hemos llegado, pues, de nuevo, a que las posibles direcciones de aproximación a **0** vienen dadas por la ecuación (3), ya que podemos escribir (4):

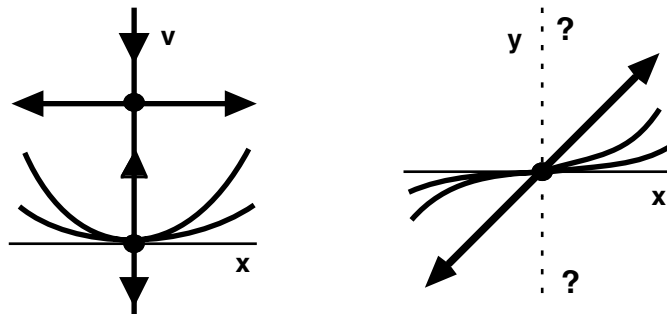
$$0 = B(1, \frac{y}{x}) - \frac{y}{x} A(1, \frac{y}{x}) = \frac{\Delta(x,y)}{x^{n+1}}$$

(la ecuación (4) no da las posibles variedades verticales de [S], así que de nuevo resolveremos mejor la ecuación (3), es decir  $\Delta=0$ ).

¿Queda determinada la estructura de **0** con el análisis de todos los  $(0, v_i)$  ? Volvamos al ejemplo 1. La ecuación (4) es en este caso  $2v-v^2=0$  así que los  $v_i$  de [B] son  $v_1=0$  y  $v_2=1$ , con  $\lambda_1=A(1,0)=0$ ,  $\lambda_2=A(1,1)=1$ . Con el signo de  $2v-v^2$  orientamos el eje  $x=0$ . El flujo en la variedad centro podemos determinarlo calculando términos suyos como hicimos antes

(o llevando el cambio hasta el final:  $\begin{cases} x' = 2xv - xv^2 \\ v' = 2v - 2v^2 - x^2 \end{cases} \rightarrow v = \frac{x^2}{2} + O(x^3) \rightarrow y = \frac{x^3}{2} + O(x^4)$  )

El dibujo de  $xv$  está determinado, así como las órbitas pintadas en el plano  $xy$  (se invierten los cuadrantes 2 y 3 pero no el sentido de las órbitas en ellos por ser  $n$  impar). Como dijimos antes, para fijar los sentidos, mejor que fijarnos en los  $\lambda$  y en paridades será llevar las expresiones de las variedades a la ecuación en  $x'$ : por ejemplo, la variedad no centro  $y = x+o(x)$  se orienta mejor con  $x' = x^3+o(x^3)$ . Pero aún no tenemos información con el trabajo realizado de lo que ocurre en un entorno del eje  $y$ .



Evidentemente podemos "estirar" **0** en dirección horizontal haciendo  $x=yu$ . Obtenemos la ecuación equivalente a (4) que ahora será  $A(u,1)-uB(u,1) = 0$  y que al igual que (4) está incluida en la ecuación más general (3). Si  $u$  es raíz simple de esta ecuación (es decir, si  $x=0$  lo es de (3)) o si, a pesar de no serlo,  $\lambda_\infty=B(0,1)=b_{0n} \neq 0$  existirá una variedad no horizontal que llega a  $(u,y)=(0,0)$  y por tanto habrá una variedad de [S] que llegará a **0** con pendiente vertical (para determinar el flujo nos bastará  $b_{0n} < 0$ , en el peor de los casos, necesitaremos algún término de la variedad centro  $x=h(y)$ ).

En el ejemplo 1, aunque  $x=0$  era doble, tenemos que  $\lambda_\infty=B(0,1)=-1$ , con lo que existe una variedad estable que llega al origen con pendiente vertical. Para determinar las órbitas en un entorno de ella no necesitamos hacer un dibujo en el plano  $uy$ . En la práctica convendrá reflejar la información que nos dan los  $\lambda_i$  y el posible  $\lambda_\infty$  sobre la conocida circunferencia con puntos  $y$  orientada. De hecho los  $\Lambda$  y los  $\lambda$  tienen el mismo signo en  $(-\pi/2, \pi/2]$ :

$$\Lambda_i = cA + sB = cA - \frac{s^2 A}{c} = \frac{A(c,s)}{c} = \cos^{n-1} \theta_i \cdot A(1, \tan \theta_i) = \cos^{n-1} \theta_i \cdot \lambda_i, \theta_i \neq \frac{\pi}{2}; \Lambda_{\pi/2} = B(0,1) = \lambda_\infty$$

Pero los  $\lambda$  son más fáciles de calcular que los  $\Lambda$ . Podemos mejorar el teorema 3.1 con los últimos cálculos. Hemos obtenido así un resultado más cómodo de utilizar en la práctica:

### Teorema 3.2

Supongamos que  $\Delta(x,y) = x B(x,y) - y A(x,y) \neq 0$  y que  $\Delta(x,y)=0$  posee  $q \neq 0$  raíces reales  $y=v_1x, \dots, y=v_qx$  [y tal vez  $x=0$ ].

Si para aquellas  $v_i$  que no sean simples se tiene que  $A(1,v_i) \neq 0$  [  $B(0,1) \neq 0$  ], existen en [S] variedades  $y=v_ix+o(x)$  [ó  $x=o(y)$ ] que llegan a  $\mathbf{0}$  con pendiente  $v_i$  [  $\infty$  ] y la estructura local de  $\mathbf{0}$  queda totalmente determinada con el signo de  $\Delta(x,y)$  y el flujo local sobre cada una de estas variedades.

Este flujo viene dado por  $x' = A(x,v_ix)$  si  $A(1,v_i) \neq 0$  [  $y' = B(0,y)$  si  $B(0,1) \neq 0$  ] o se puede precisar hallando algún término más de las variedades si fuese cero.

(lo que sucede si no hay raíces reales (centro o foco) se estudiará en el capítulo 4)

Si el sistema es **homogéneo** (es decir, si es de la forma [H]), las rectas  $y=v_ix$  asociadas a las raíces reales de  $\Delta=0$  están formadas por órbitas del sistema (son invariantes, como en los lineales homogéneos:  $n=1$ ), ya que  $y=v_ix$  es tangente al campo definido por el sistema [H] si y sólo si para algún  $\lambda$ :

$$[v\lambda] \quad \begin{cases} A(1,v) = \lambda \\ B(1,v) = \lambda v \end{cases}$$

Por tanto, para cada  $v$  que satisfaga  $[v\lambda]$  (es decir que cumpla  $P_{n+1}(v)=0$ ) se tiene una recta invariante dada por  $(1,v)$ . Y los  $\lambda$  que obtenemos a partir de cada  $v$  nos dan la orientación sobre la recta. Como sucedía también en los lineales, a un  $\lambda=0$  está asociada una recta de puntos críticos (y el único punto aislado posible es el origen). Y de nuevo la estructura que se obtiene del análisis local de [H] es válida para todo  $\mathbf{R}^2$ .

Observemos más similitudes entre el último teorema y la forma de analizar los puntos simples: el papel de los '**vectores propios**' lo cumplen aquí los  $v_i$  y el de los '**autovalores**', los  $\lambda_i=A(1,v_i)$ . En estos términos, el teorema 3.2 asegura que la estructura queda determinada si no existen 'vectores propios' múltiples asociados al 'autovalor'  $\lambda=0$ . Se tiene también que, como en los puntos elementales, **si existen  $\lambda_i$  reales y todos son distintos de cero el sistema no homogéneo [S] mantiene la estructura de la 'aproximación homogénea' [H]**. La forma de proceder con los  $\lambda=0$  asociados a  $v$  simples es también enteramente análoga al trabajo con sistemas lineales con un único autovalor cero que hicimos en el capítulo 2: hay entonces que calcular términos de una '**variedad centro**'.

Para  $n=1$  se calculan primero los autovalores y después los vectores propios asociados, pero se podría proceder a la inversa, como aquí. Podríamos encontrar también una '**ecuación de autovalores**' eliminando la  $v$  del sistema  $[v\lambda]$  (así lo haremos para  $n=2$  y  $n=3$  en 3.4 y 3.6). Pero, a diferencia de los lineales (para los que la ecuación de autovalores contiene, en general, toda la información sobre la estructura del punto), conociendo para  $n>1$  los  $\lambda$  (e incluso los  $v$ ) no queda determinada la estructura: es necesario también el signo de  $\Delta(x,y)$ .

Acabamos la teoría de esta sección, comprobando que al probar formalmente **series** arbitrarias en la ecuación diferencial de las órbitas obtenemos resultados concordantes con los anteriores. De paso calculamos el término siguiente del desarrollo en serie de la variedad en el caso en que lo necesitamos, es decir, cuando  $A(x, v_i x)$  [o  $B(0, y)$ ] es idénticamente cero.

Probemos, pues,  $y = c_1 x + c_2 x^{p-n+1} + \dots$  en  $g(x, y) - f(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$

(se ve fácil que los coeficientes de  $x^2, \dots, x^{p-n}$  han de ser necesariamente cero); entonces:

$$\begin{aligned} & [ B(x, c_1 x + c_2 x^{p-n+1} + \dots) + B(x^p, c_1 x + \dots) ] - \\ & - [ c_1 + (p-n+1)c_2 x^{p-n} + \dots ] [ A(x, c_1 x + c_2 x^{p-n+1} + \dots) + A(x^p, c_1 x + \dots) ] = 0 \end{aligned}$$

Igualando a cero el coeficiente de  $x^n$  obtenemos las viejas conocidas posibles variedades:

$$B(1, c_1) - c_1 A(1, c_1) = 0$$

Calculamos el siguiente término para un  $c_1$  que sea raíz simple de la ecuación anterior y tal que  $A(1, c_1) = 0$  (es decir, asociado a un  $v_i$  simple con  $\lambda_i = 0$ ). Tenemos que

$$\begin{aligned} A(x, c_1 x + c_2 x^r + \dots) &= \sum_{k=0}^n a_{n-k, k} x^{n-k} (c_1 x + c_2 x^r + \dots)^k = \\ &= \sum_{k=0}^n a_{n-k, k} x^{n-k} (c_1^k x^k + k c_1^{k-1} c_2 x^{k+r-1} + \dots) = x^n \sum_{k=0}^n a_{n-k, k} c_1^k + c_2 x^{n+r-1} \sum_{k=0}^n k a_{n-k, k} c_1^{k-1} + \dots = \\ &= x^n A(1, c_1) + c_2 x^{n+r-1} A_y(1, c_1) + \dots \end{aligned}$$

Igualando a 0 el coeficiente de la siguiente potencia ( $x^p$ ) y teniendo en cuenta que  $A(1, c_1) = 0$ :

$$c_2 B_y - B^p - c_1 c_2 A_y - c_1 A^p = 0 \quad ; \quad [ B_y - c_1 A_y + (p-n+1)A ] c_2 = c_1 A^p - B^p$$

El corchete no se anula (es  $\mu_i$  y la raíz es simple). Así pues:  $y = c_1 x + \frac{c_1 A^p - B^p}{B_y - c_1 A_y} x^{p-n+1} + O(x^{p-n+2})$

Llevándolo a la primera ecuación de [P]:

$$x' = A(x, c_1 x + \dots) + A^p(x, c_1 x + \dots) + \dots = [ c_2 A_y + A^p ] x^p + \dots$$

Y volviendo a la notación del teorema 3.2

$$x' = \frac{A^p B_y - A_y B^p}{B_y - v_i A_y} \Big|_{(1, v_i)} x^p + O(x^{p+1})$$

informa sobre el flujo en la variedad centro asociado a un  $v_i$  simple con  $\lambda_i = 0$ , si el coeficiente de  $x^p$  no se anula (como en el ejemplo 1). Análogamente, si  $x=0$  es raíz simple y  $\lambda_\infty = 0$  se puede demostrar que sobre el flujo en la variedad centro vertical informa:

$$y' = \frac{a_{1, n-1} b_{0p} - a_{0p} b_{1, n-1}}{a_{1, n-1}} y^p + O(y^{p+1})$$

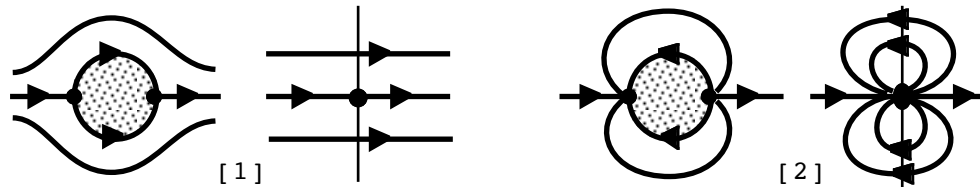


**Ejemplo 2.** Consideremos: [1]  $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = 0 \end{cases}$  y [2]  $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$

Para [1] se tiene  $\Delta(x,y) = -y(x^2 + y^2)$ , mientras que para [2] es  $\Delta(x,y) = y(x^2 + y^2)$ .

Ambos tienen el mismo único vector propio ( $v=0$ ) asociado al mismo autovalor ( $\lambda=1$ ).

Sin embargo sus mapas de fase son esencialmente diferentes:



**Ejemplo 3.** Analicemos todas las posibles estructuras del origen en un sistema de la forma:

$$[S] \begin{cases} x' = ax^2 - y^2 + A^p(x,y) + \dots \\ y' = 2xy + B^p(x,y) + \dots \end{cases} \quad \text{con } p > 2$$

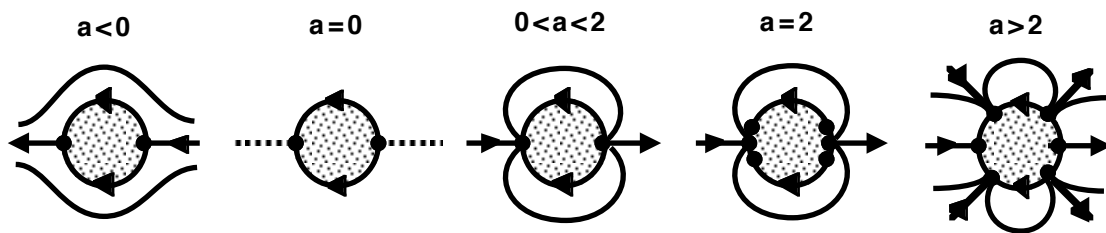
Tratemos primero la aproximación homogénea (para la que los retratos de fase serán globales):

$$[H] \begin{cases} x' = ax^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases} \rightarrow \Delta(x,y) = y[(2-a)x^2 + y^2]$$

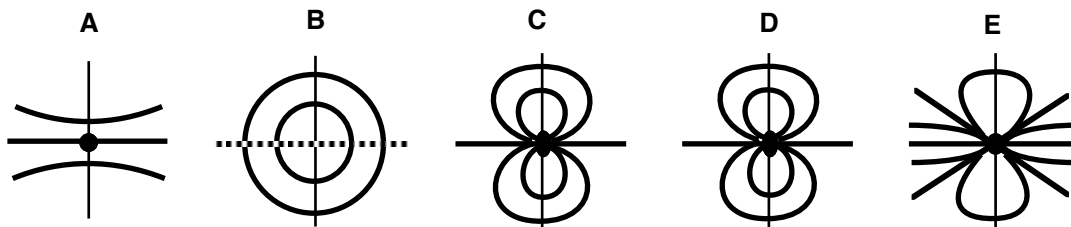
Sus raíces son  $y=0$  para todo  $a$  (simple, salvo si  $a=2$ , en que es triple) e  $y = \pm\sqrt{a-2}x$  para  $a > 2$ .

Los autovalores correspondientes son:  $\lambda_0 = a$ ,  $\lambda_+ = \lambda_- = 2$ .

Existen por tanto los siguientes cinco casos para [H]:



asociados a los siguientes retratos de fase:

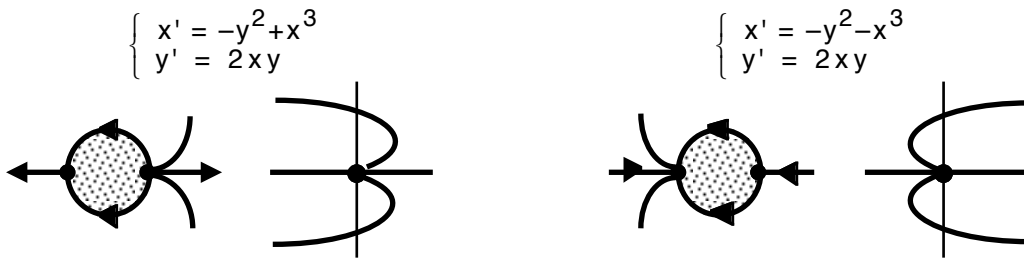


¿Cuáles de ellos son localmente equivalentes a los de cualquier sistema de tipo [S]?, o, en otras palabras, ¿en qué casos la estructura local de [S] está determinada por los términos homogéneos de menor orden? Como ya sabemos en los casos A, C, D y E el origen de [S] mantiene la estructura de la aproximación homogénea [H] (e incluso A, C y E la mantiene aunque perturbemos [S] con términos de la forma  $\varepsilon A^2(x,y)$ ,  $\varepsilon B^2(x,y)$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño; y hasta D lo hace si no distinguimos entre las estructuras C, D y E que son localmente homeomorfas).

En el caso B ( $a=0$ ), sin embargo, los términos  $A^p$ ,  $B^p$  influyen en el flujo de la variedad centro, habiendo (en el caso de que el origen sea aislado) cuatro posibilidades (determinadas por  $a_{p,0}$ , si este coeficiente no es nulo) ejemplificadas por dos que vuelven a dar C y A, respectivamente:

$$\begin{cases} x' = -y^2 + x^4 \\ y' = 2xy \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -y^2 - x^4 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

y por otras dos que proporcionan mapas locales de fase de nuevo tipo:



Si  $a_{p,0}=0$  es necesario considerar los términos de orden mayor que  $p$ ; así, por ejemplo, en

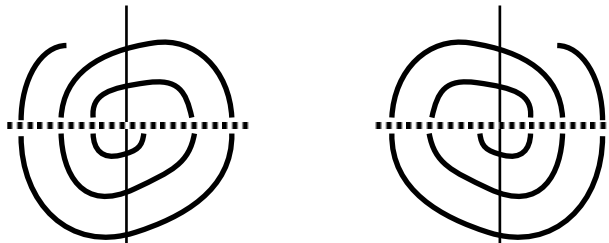
$$\begin{cases} x' = -y^2 + x^6 \\ y' = 2xy + y^3 + x^4 \end{cases}$$

necesitamos conocer el término  $x^3$  del desarrollo de variedad y el término  $x^6$  para fijar el flujo sobre ella; probando series se obtiene, respectivamente:

$$y = \frac{1}{4}x^3 + O(x^4) \quad y \quad x' = \frac{3}{4}x^6 + O(x^7)$$

Este sistema tiene, pues, la estructura C (con la poligonal del capítulo 6 podríamos precisar qué términos son significativos para el cálculo de la variedad sin necesidad de series).

Por último, consideremos dos nuevos casos que pueden derivar del B si hay una curva de puntos críticos  $y=h(x)$ . Dividiendo por  $y-h(x)$  ambos segundos miembros del sistema obtendríamos uno del tipo  $x'=-y+\dots$ ;  $y'=2x+\dots$  para los que la aproximación lineal es un centro. Así, [S] podría tener también las dos siguientes estructuras:



### 3.3 Polinomios de tercer grado.

Consideremos el polinomio  $P_3(z) = pz^3 + qz^2 + rz + s$ , con  $p, s \neq 0$ .

Veamos en primer lugar cuándo posee una raíz múltiple  $z$ . La  $z$  debe satisfacer:

$$\begin{cases} pz^3 + qz^2 + rz + s = 0 \\ 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (5) \begin{cases} qz^2 + 2rz + 3s = 0 \\ 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases}$$

Es sabido que un sistema de ecuaciones de la forma:  $\begin{cases} cz^2 + bz + a = 0 \\ gz^2 + fz + e = 0 \end{cases}$

tiene solución en  $z$  si y sólo si se anula su **resultante**, dada por el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ e & f & g & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \end{vmatrix}$$

Por tanto,  $P_3$  posee raíz múltiple si y solo si se anula el llamado **discriminante** del polinomio:

$$D_3 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} r & 2q & 3p & 0 \\ 3s & 2r & q & 0 \\ 0 & r & 2q & 3p \\ 0 & 3s & 2r & q \end{vmatrix} = q^2r^2 - 4pr^3 - 4q^3s + 18pqrs - 27p^2s^2$$

(esto sigue siendo válido aunque sea  $p=0$  ó  $s=0$ ).

Para poder expresar el  $D_3$  de forma más compacta definimos:

$$R \equiv q^2 - 3pr, \quad V \equiv 9ps - qr, \quad W \equiv r^2 - 3qs, \quad S \equiv 27p^2s - 9pqr + 2q^3 = 3pV + 2qR$$

Se tiene entonces que:

$$D_3 = \frac{1}{3} [4RW - V^2] = \frac{1}{27p^2} [4R^3 - S^2]$$

Si  $D_3=0$  ( $\Rightarrow R \geq 0$ ), las raíces de  $P_3(z)$  se calculan fácilmente:

El sistema (5) implica que  $2Rz - V = 0$ . Por tanto, si  $D_3=0$  y  $R > 0$ , la raíz doble es:

$$z_d = \frac{V}{2R} = -\frac{q}{3p} + \frac{S}{6pR}$$

A partir de ella se puede deducir que la tercera raíz (simple) es:

$$z_s = -\frac{q}{p} - \frac{V}{R} = -\frac{q}{3p} - \frac{S}{3pR}$$

Si además de ser  $D_3=0$  es  $R=0$  (o lo que es lo mismo, si  $R=V=0$  o si  $R=S=0$ ), hay raíz triple:

$$z_t = -\frac{q}{3p}$$

ya que  $z_t$  satisface (5) y además anula la segunda derivada del polinomio:  $6pz + 2q$ .

Lleguemos a estas expresiones por otra vía. Si  $z_1, z_2, z_3$  son las raíces de  $P_3$  se tiene que

$$q = -p(z_1 + z_2 + z_3) ; \quad r = p(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) ; \quad s = -p z_1 z_2 z_3$$

De aquí:

$$R = \frac{1}{2} p^2 [(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_3)^2] , \quad V = p^2 [z_3(z_1 - z_2)^2 + z_2(z_1 - z_3)^2 + z_1(z_2 - z_3)^2]$$

$$S = p^3 (z_1 + z_2 - 2z_3)(z_1 + z_3 - 2z_2)(z_2 + z_3 - 2z_1) , \quad D_3 = p^4 (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 (z_2 - z_3)^2$$

y por tanto:

$$z_2 = z_3 = z_d \Rightarrow q = -p(z_s + 2z_d) , \quad R = p^2 (z_s - z_d)^2 , \quad V = 2p^2 z_d (z_s - z_d)^2 , \quad S = 2p^3 (z_d - z_s)^3 , \quad D_3 = 0$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_t \Rightarrow q = -3pz_t , \quad R = V = S = D_3 = 0$$

Podemos obtener una expresión para un  $z$  múltiple  $z_m$  que es válida también aunque sea  $R=0$  (nos proporciona  $z_d$  y también  $z_t$ ):

$$D_3 = 0 \Rightarrow [S/2]^{1/3} = \frac{S}{2R} \Rightarrow z_m = \frac{-q + [S/2]^{1/3}}{3p}$$

También se pueden dar expresiones de las raíces simples de  $P_3$  (ver [2] o [6]):

Si  $D_3 < 0$ ,  $P_3$  tiene una única raíz real  $z_r$ . Se comprueba que viene dada por

$$z_r = \frac{1}{3p} \left( \left[ \frac{1}{2} (-S + \sqrt{S^2 - 4R^3}) \right]^{1/3} + \left[ \frac{1}{2} (-S - \sqrt{S^2 - 4R^3}) \right]^{1/3} - q \right)$$

Si  $D_3 > 0$  ( $\Rightarrow R > 0$ ), hay tres raíces reales  $z_{1,2,3}$  que admiten una expresión no algebraica:

$$z_{1,2,3} = \frac{1}{3p} \left[ 2\sqrt{R} \cos \frac{\phi + 2k\pi}{3} - q \right] , \quad k=0,1,2 , \quad \text{con } \phi = \arccos \left( \frac{-S}{2R^{3/2}} \right)$$

En la siguiente sección realizaremos cambios de variable del tipo  $z = M + tc^{-k}$ . Si  $P_3(t)$  es el polinomio obtenido al multiplicar por  $c^j$  el que resulta del cambio, es decir,  $P_3(t) \equiv c^j P_3(M + tc^{-k})$  se comprueba que los  $p, R, S$  y  $D_3$  del  $P_3(t)$  son casi los de  $P_3(z)$  (no lo son  $q, r, s, V$  y  $W$ ):

$$(6) \quad p_t = c^{j-3k} p ; \quad R_t = c^{2j-4k} R ; \quad S_t = c^{3j-6k} S ; \quad D_{3t} = c^{4j-6k} D_3$$

Comparemos los cálculos anteriores con los sencillos polinomios de segundo grado:

$P_2(z) = qz^2 + rz + s$ , con  $q, s \neq 0$  posee raíz múltiple si y sólo si se satisface:

$$\begin{cases} qz^2 + rz + s = 0 \\ 2qz + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rz + 2s = 0 \\ 2qz + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow D_2 = \begin{vmatrix} r & 2q \\ 2s & r \end{vmatrix} = r^2 - 4qs = 0$$

$$\text{Si } D_2 = 0 \text{ la raíz doble es: } z_d = -\frac{r}{2q} .$$

A lo mismo se llega a partir de las raíces  $z_1, z_2$  de  $P_2$ . Como  $r = -q(z_1 + z_2)$ ;  $s = qz_1 z_2$ ,

$$D_2 = q^2 (z_1 - z_2)^2 \text{ y } z_1 = z_2 = z_d \Rightarrow D_2 = 0 , \quad r = -2qz_d \Rightarrow z_d = -\frac{r}{2q}$$

Y el signo del discriminante, como antes, nos informa del número de raíces reales de  $P_2$ .

### 3.4 La aproximación homogénea para $n=2$ .

Consideremos el sistema homogéneo

$$[H2] \quad \begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = ex^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$$

Supongamos, por ahora, que  $c \neq 0$ . Como vimos en la sección 3.2 sus autovalores  $\lambda$  y sus vectores propios  $(1, z)$  se pueden obtener resolviendo el sistema:

$$[z\lambda] \quad \begin{cases} a + bz + cz^2 = \lambda \\ e + fz + gz^2 = \lambda z \end{cases}$$

Eliminando la  $\lambda$  obtenemos la conocida ecuación para los **vectores propios** de [H2]:

$$P_3(z) = cz^3 + (b-g)z^2 + (a-f)z - e = 0$$

Y la resultante en  $z$  de  $[z\lambda]$  nos dará la ecuación para los  $\lambda$  de [H2]:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & 0 \\ e & f-\lambda & g & 0 \\ 0 & a-\lambda & b & c \\ 0 & e & f-\lambda & g \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos la siguiente ecuación de **autovalores**:

$$P_3(\lambda) \equiv c\lambda^3 + q_\lambda\lambda^2 + r_\lambda\lambda + s_\lambda \equiv c\lambda^3 + [bg - g^2 - ac - 2fc]\lambda^2 + [2ag^2 - abg - fbg + 2afc + f^2c - bce - 2gce]\lambda + [-a^2g^2 + afbg - af^2c - b^2ge + 2agce + fbce - c^2e^2] = 0$$

Si llamamos  $q \equiv b + 2g$ ,  $m \equiv 2a + f$ ,  $F \equiv bg - cf$ ,  $E \equiv ag - ce$ , podemos escribir:

$$r_\lambda = qE - mF, \quad s_\lambda = -\frac{1}{c} [aF^2 - bEF + cE^2]$$

A partir de un  $\lambda$  podemos calcular el  $z$  del que procede (lo contrario está claro). Multiplicando la primera ecuación de  $[z\lambda]$  por  $g$  y la segunda por  $c$  y restando se tiene:  $[E - g\lambda] + [F + c\lambda]z = 0$ , lo que nos permite hallar  $z$  de forma única siempre que  $F + c\lambda \neq 0$ .

Investiguemos cuándo se presentan problemas en la aplicación del teorema 3.2. Está claro que siempre hay algún  $z$  real, con lo que **no hay ni centros ni focos**. De la ecuación de autovalores y de los resultados de 3.3 se deduce inmediatamente que:

#### Teorema 3.3

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \text{ es autovalor} &\Leftrightarrow s_\lambda = -a^2g^2 + afbg - af^2c - b^2ge + 2agce + fbce - c^2e^2 = 0 \\ \text{Existe } z \text{ múltiple} &\Leftrightarrow D_z \equiv (b-g)^2(a-f)^2 - 4c(a-f)^3 + 4e(b-g)^3 - 18ce(b-g)(a-f) - 27c^2e^2 = 0 \end{aligned}$$

Vimos en 3.3 que el  $D_z$  se puede expresar de forma más compacta introduciendo:

$$R \equiv (b-g)^2 - 3c(a-f), \quad V \equiv -(b-g)(a-f) - 9ce, \quad W \equiv (a-f)^2 + 3(b-g)e, \quad S \equiv 2(b-g)R + 3cV \rightarrow$$

$$D_z = \frac{1}{3} [4RW - V^2] = \frac{1}{27c^2} [4R^3 - S^2]$$

Recordemos que para un sistema no homogéneo con aproximación homogénea [H2], el teorema 3.2 precisa la estructura del origen aunque existan  $z$  múltiples o haya un  $\lambda=0$ , siempre que no se den las dos cosas a la vez. Estudiemos cuando ocurre la situación problemática.

El  $\lambda$  asociado a un  $z$  múltiple es fácil de calcular. Como  $z$  debe ser también raíz de  $P_3'(z)$ :

$$(7) \quad 3\lambda = [3cz^2 + 2(b-g)z + (a-f)] + (b+2g)z + (2a+f) = qz + m$$

Si  $P_3(z)$  tiene una raíz  $z_t$  triple ( $\Leftrightarrow D_z=R=0 \Leftrightarrow R=V=0$ ) el autovalor asociado al  $z_t = \frac{g-b}{3c}$  es:

$$\lambda_{z_t} \equiv \frac{1}{3} [qz_t + m] = \frac{3cm - (b-g)q}{9c} \equiv \frac{1}{9c} n_{z_t}$$

Hemos caracterizado una primera situación en la que no basta considerar la aproximación [H2]:

$$\text{Existe } z \text{ triple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow R=V=n_{z_t}=0, \\ \text{si } R = (b-g)^2 - 3c(a-f), \quad V = -(b-g)(a-f) - 9ce, \quad n_{z_t} = 3cm - (b-g)q$$

[En esta situación se pueden despejar fácilmente  $a$ ,  $f$  y  $e$  en función de  $b$ ,  $g$  y  $c$ :

$$a = \frac{1}{9c} (2b+g)(b-g), \quad f = -\frac{1}{9c} (b-4g)(b-g), \quad e = -\frac{1}{27c^2} (b-g)^3]$$

Nos planteamos lo mismo con  $z_m$  múltiple en general. Utilizando la expresión de  $z_m$  de 3.3:

$$z_m = z_t + \frac{[S/2]^{1/3}}{3c} \rightarrow \lambda_{z_m} \equiv \frac{n_{z_t} + q[S/2]^{1/3}}{9c}$$

Que sea  $\lambda_{z_m}=0$  equivale a que sea cero  $n_{z_m} \equiv \frac{1}{27c} [2n_{z_t}^3 + q^3 S]$ . Desarrollando la expresión:

#### Teorema 3.4

$$\text{Existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_z = n_{z_m} = 0, \\ \text{si } n_{z_m} = -(b-g)(2ag - ab - bf)q^2 - 2(b-g)qm^2c + 2m^3c^2 - q^3ce$$

Busquemos caracterizaciones equivalentes, pero más manejables y fáciles de recordar. Si existe un  $z$  múltiple asociado a  $\lambda=0$ , la igualdad (7) se convierte en  $qz + m = 0$ . Así, en ese caso, el  $z$  satisface uno de los dos sistemas equivalentes:

$$[z_m \lambda = 0] \quad \begin{cases} a + bz + cz^2 = 0 \\ e + fz + gz^2 = 0 \\ qz + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-f) + 2(b-g)z + 3cz^2 = 0 \\ -3e + 2(a-f)z + (b-g)z^2 = 0 \\ qz + m = 0 \end{cases}$$

Por tanto, si  $q \neq 0$ ,  $z = -\frac{m}{q}$  está asociado a  $\lambda=0$ . Así, si  $q \neq 0$  y se satisface  $[z_m \lambda = 0]$  entonces:

$$A \equiv aq^2 - bmq + cm^2 = \frac{1}{3} [(a-f)q^2 - 2(b-g)qm + 3cm^2] = (2ag - ab - fb)(b+2g) + c(2a+f)^2 = 0$$

$$B \equiv eq^2 - fmq + gm^2 = \frac{1}{3} [3eq^2 + 2(a-f)qm - (b-g)m^2] = e(b+2g)^2 + (2ag - fb - fg)(2a+f) = 0$$

Y si es  $q=0$ , debe ser también  $m=0$  y, desde luego, es cierto que  $A=B=0$ . En conclusión:

### Teorema 3.5

Si existe  $z$  múltiple asociado a  $\lambda=0 \Rightarrow A=B=0$ , con  $A = aq^2 - bmq + cm^2$ ,  $B = eq^2 - fmq + gm^2$

Sería interesante que la implicación opuesta al teorema fuera cierta. Lo será si  $q \neq 0$  ó si  $m \neq 0$ , pero no si ambos se anulan. Como es fácil comprobar:

$$n_{zm} = [2cm - (b-g)q]A - cqB \rightarrow A = B = 0 \Rightarrow n_{zm} = 0$$

Algo más complicado es ver si  $D_z$  también se hace cero. Si  $A=B=0$ ,  $q \neq 0$  y  $m \neq 0$  se tiene:

$$(8) \quad 3c = 2(b-g)\frac{q}{m} - (a-f)\left(\frac{q}{m}\right)^2, \quad 3e = (b-g)\left(\frac{m}{q}\right)^2 - 2(a-f)\frac{m}{q}$$

$$\rightarrow R = \frac{H^2}{m^2}, \quad V = \frac{-2H^2}{mq}, \quad W = \frac{H^2}{m^2}, \quad \text{con } H = m(b-g) - q(a-f) \rightarrow D_z = 0$$

Si  $q \neq 0$  y  $m=0$ ,  $A=B=0 \Rightarrow a=f=e=0$  y es claro que se anula el discriminante.

Y si  $m \neq 0$  y  $q=0$ ,  $A=B=0 \Rightarrow b=g=c=0 \Rightarrow D_z=0$ . Aunque en este caso no es válido el teorema 3.4, deducido con  $c \neq 0$ , sigue existiendo un vector propio vertical ( $x=0$ ) asociado a  $\lambda_\infty=0$ .

Sin embargo, si  $q=m=0$  (es decir, si [H2] es exacto), cumpliéndose  $A=B=n_{zm}=0$  no tiene que existir un  $z$  múltiple con  $\lambda=0$ , pues no tiene por qué anularse el discriminante  $D_z$ :

$$D_z = 27[3g^2a^2 - 4ca^3 - 4g^3e + 6agce - c^2e^2] = 27s_\lambda$$

Resumiendo lo anterior tenemos:

### Teorema 3.6

Si  $q^2 + m^2 \neq 0$ , existe vector propio múltiple asociado a  $\lambda=0 \Leftrightarrow A=B=0$   
 Si  $q=m=0$ , existe vector propio múltiple asociado a  $\lambda=0 \Leftrightarrow D_z=0$

[Las caracterizaciones que estamos probando se podrían encontrar cambiando los papeles de  $x$  e  $y$  en el sistema [H2], es decir, intercambiando  $a \leftrightarrow g$ ,  $b \leftrightarrow f$ ,  $e \leftrightarrow c$ . No varían con esos cambios las expresiones de los  $V$ ,  $D_z$  y  $s_\lambda$ , mientras que se transforman uno en otro:  $q \leftrightarrow m$ ,  $R \leftrightarrow W$ ,  $A \leftrightarrow B$ . Estas simetrías están claras en los todos teoremas menos en el 3.4].

En los dos casos del teorema 3.6 las igualdades de la derecha permiten expresar unos coeficientes en términos de otros y describir con facilidad los  $\lambda$  y los  $z$ :

Si  $A=B=0$  y  $q, m \neq 0$  [si no es mucho más fácil], se tiene (8), el  $z_m = -m/q$  está asociado a  $\lambda=0$ .

$$[\text{Además hay un } z_s = \frac{m[fg-gm]}{q[fm-qa]} \text{ asociado a } \lambda_{zs} = \frac{[(b+g)m-qa][(2b+g)m-3aq]}{q[fm-qa]}]$$

Y si  $q=m=0$ ,  $D_z=0$  y  $c \neq 0$  [si  $c=0$  es más fácil] podemos despejar  $b=-2g$ ,  $f=-2a$  y además:

$$e = \frac{1}{c^2} [g(3ac-2g^2) \pm 2(g^2-ac)^{3/2}] , \quad z_m = \frac{1}{c} [g \pm 2(g^2-ac)^{1/2}]$$

Comprobemos ahora que los resultados vistos son ciertos también en el caso sencillo  $c=0$ . Entonces las ecuaciones de vectores propios y autovalores pasarán a ser de segundo grado:

$$P_2(z) = (b-g)z^2 + (a-f)z - e, \text{ con discriminante } D_2 = (a-f)^2 + 4e(b-g)$$

$$P_2(\lambda) = (b-g)\lambda^2 + r_{2\lambda}\lambda + s_{2\lambda} = [b-g]\lambda^2 + [2ag-ab-fb]\lambda + [afb-a^2g-b^2e]$$

y existe además otro vector propio  $x=0$  (asociado a  $\lambda_\infty=g$ ) que no está recogido por  $P_2(z)=0$ . Por lo tanto se tienen los siguientes resultados que concuerdan con el teorema 3.3:

$$\lambda=0 \text{ es autovalor} \Leftrightarrow g s_{2\lambda} = 0$$

$$\text{Existe vector propio múltiple} \Leftrightarrow (b-g) D_2 = 0$$

Si  $b \neq g$ , el vector propio múltiple posible es  $z_m = \frac{f-a}{2(b-g)}$  asociado a  $\lambda_{zm} = -\frac{r_{2\lambda}}{2(b-g)}$

Por tanto:

$$\text{Existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_2 = r_{2\lambda} = 0$$

Se comprueba que:

$$A = qr_{2\lambda}, \quad B = \frac{1}{4(b-g)} [q^2 D_2 - 9r_{2\lambda}^2] - \frac{m}{3} r_{2\lambda}$$

Por tanto,  $D_2 = r_{2\lambda} = 0 \Rightarrow A = B = 0$ . También está claro que: si  $q \neq 0$ ,  $A = B = 0 \Rightarrow D_2 = r_{2\lambda} = 0$ .

Si  $q=0$  y  $m \neq 0$ ,  $B = -\frac{1}{3}(b-g)m^2 \neq 0$ ,  $r_{2\lambda} = -\frac{2}{3}(b-g)m \neq 0$  y no existe  $z$  doble asociado a  $\lambda=0$ .

Y si  $m=q=0$  ( $\Rightarrow b, g \neq 0, r_{2\lambda} = 0$ ), existe  $z$  doble asociado a  $\lambda=0 \Leftrightarrow D_2 = 3a^2 - 4ge = 0 \Leftrightarrow D_2 = 0$ .

Si  $b=g$  se tiene:

$$\text{Existe vector propio múltiple } x=0 \text{ asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow g=0$$

Ahora  $A = 3g^2(a-f)$ ,  $B = g[9ge - 2(a-f)(2a+f)]$  y está claro que  $g=0 \Rightarrow A=B=0$ .

Si  $A=B=0$  y el sistema es exacto ( $\Leftrightarrow g=0$ ), siempre hay múltiple con  $\lambda=0$  y siempre es  $D_2=0$ .

Si  $q=0$ , siempre es  $A=B=0$  y siempre es  $g=0$ .

Y si  $q \neq 0$  ( $\Leftrightarrow g \neq 0$ ),  $A=B=0 \Rightarrow a=f$ ,  $e=0 \Rightarrow P_3(z)=0$ , caso en que el teorema 3.2 no decide.

Resumiendo: si  $P_3(z) \neq 0$ , los teoremas 3.3, 3.5 y 3.6 son ciertos tanto si  $c \neq 0$  como si  $c=0$ .

[Esto no ocurre para el 3.4: si  $c=0$ ,  $b=g \neq 0$  siendo siempre  $n_{zm} = D_2 = 0$  el  $x=0$  múltiple no está asociado a  $\lambda=0$ ].

Observemos que si hay  $z$  múltiple con  $\lambda=0$  debe ser  $r_\lambda = s_\lambda = 0$  (aunque esto no sea suficiente, pues el  $\lambda=0$  podría provenir de  $z$  distintos). Que  $s_\lambda = 0$  se deduce del primer sistema de  $[zm\lambda 0]$ , ya que  $s_\lambda$  es precisamente la resultante de las primeras dos ecuaciones. Si el sistema es exacto, siempre es  $r_\lambda = 0$ . Si no lo es y  $q \neq 0$ , la anulación del  $r_\lambda$  se deduce de la igualdad  $qr_\lambda = gA - cB$ . Y si  $q=0$ ,  $m \neq 0$  ( $b=g=c=0$ ) es evidente que  $r_\lambda = 0$ .

Si el  $z$  asociado a  $\lambda=0$  es triple debe ser también  $q_\lambda = 0$ . Esto se deduce de  $q_\lambda = -\frac{1}{3}[R + n_{zt}]$ .



Veamos qué relación existe entre el discriminante  $D_\lambda$  de  $P_3(\lambda)$  y el  $D_z$ . Está claro que si hay  $z$  múltiple, el  $\lambda$  asociado también es raíz múltiple de  $P_3(\lambda)$ . Por tanto  $D_\lambda$  ha de ser múltiplo de  $D_z$ . Obviamente, la comprobación a mano de esto es casi imposible ( $D_\lambda$  es un polinomio de orden 10 en los coeficientes del sistema). Acudiendo al Maple se comprueba que:

$$(9) \quad D_\lambda = \Sigma^2 D_z, \text{ siendo } \Sigma = bg^2 + g(a-f)c - c^2e = gF + cE$$

¿Que significado tiene el  $\Sigma$ ? Podría existir un  $\lambda$  doble asociado a  $z$  distintos. Para que  $\lambda$  no determine de forma única a  $z$  debe ser  $E - g\lambda = F + c\lambda = 0$ , lo que implica  $\Sigma = 0$ . Reconstruyamos (9) sin ordenador. Sea  $c \neq 0$  (si no sería más sencillo al tratarse de polinomios de orden dos). Expresando los coeficientes de  $P_3(\lambda)$  en función de  $\Sigma$  y de  $F$  se obtiene tras algún cálculo:

$$P_3(\lambda) = c\lambda^3 + [3F - r]\lambda^2 + \frac{1}{c}[3F^2 - 2rF + q\Sigma]\lambda + \frac{1}{c^2}[F^3 - rF^2 + qF\Sigma - \Sigma^2], \text{ con } r = c(a-f) + 2bg + g^2$$

Esta expresión de  $P_3(\lambda)$  sugiere el cambio:  $\lambda = \frac{\mu - F}{c} \rightarrow P_3(\mu) = \mu^3 - r\mu^2 + q\Sigma\mu - \Sigma^2$

$P_3(z)$  se puede expresar en términos de  $r$ ,  $q$  y  $\Sigma$ :  $z = \frac{y + g}{c} \rightarrow P_3(y) = y^3 + qy^2 + ry + \Sigma$

Vimos que estos cambios dejan casi invariante el discriminante (y  $R$  y  $S$ ). Las fórmulas (6) dan:

$$D_z = \frac{1}{c^2} D_y = \frac{1}{3c^2} [4R_y W_y - V_y^2], \quad D_\lambda = \frac{1}{c^2} D_\mu = \frac{1}{3c^2} [4R_\mu W_\mu - V_\mu^2]$$

y la igualdad (9) se sigue inmediatamente de las expresiones:

$$R_y = q^2 - 3r = R, \quad V_y = 9\Sigma - qr, \quad W_y = r^2 - 3q\Sigma \\ R_\mu = R_\lambda = r^2 - 3q\Sigma = W_y, \quad V_\mu = -9\Sigma^2 - qr\Sigma = -\Sigma V_y, \quad W_\mu = q^2 \Sigma^2 - 3\Sigma^2 r = \Sigma^2 R,$$

Relacionado con lo anterior: el autovalor múltiple  $\lambda_m$  que existe si  $D_\lambda = 0$  no tiene por qué provenir de un  $z_m$  múltiple. Así, en general, pueden no coincidir las expresiones de  $\lambda_{zm}$  y  $\lambda_m$ . Sí deben hacerlo cuando  $D_z = 0$ . Análogamente,  $\lambda_{zt}$  y un autovalor triple  $\lambda_t$  deben coincidir si  $D_z = R = 0$ . En efecto, de las expresiones de 3.3 para  $z_d$  y  $\lambda_d$  cuando  $R, R_\lambda \neq 0$ , se deduce:

$$\lambda_{zd} = \frac{2n_{zt}R + qS}{18cR}, \quad \lambda_d = -\frac{q_\lambda}{3c} + \frac{S_\lambda}{6cR_\lambda} = \frac{n_{zt}}{9c} + \frac{cD_z}{6R_\lambda} + \frac{q}{18c} \frac{[S(R+q^2) - 4qR^2]}{[R(R+q^2) - qS]} \Rightarrow \lambda_d - \lambda_{zd} = \frac{cD_z}{6R_\lambda} - \frac{cq^2 D_z}{6RR_\lambda} \\ \lambda_t = -\frac{q_\lambda}{3c} = \frac{n_{zt} + R}{9c} \Rightarrow \lambda_t - \lambda_{zt} = \frac{R}{9c}$$

Acabemos la teoría de la sección comparando con lo que ocurre cuando  $n=1$ :

$$[H1] \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = ex + fy \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + bz = \lambda \\ e + fz = \lambda z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_2(z) = bz^2 + (a-f)z - e = 0 \\ P_2(\lambda) = \lambda^2 - r_\lambda \lambda + s_\lambda = \lambda^2 - [a+f]\lambda + af - be = 0 \end{cases}$$

Los resultados equivalentes al teorema 3.3 son:  $\lambda=0$  es autovalor  $\Leftrightarrow s_\lambda = af - be = 0$   
Existe  $z$  doble  $\Leftrightarrow D_z = D_\lambda = (a-f)^2 + 4be = 0$

El  $z$  doble es  $z_d = \frac{f-a}{2b}$  ( $b \neq 0$ ) con  $\lambda_{zd} = \frac{a+f}{2} = \lambda_d$  (ó  $x=0$  si  $b=a-f=0$  y  $e \neq 0$  con  $\lambda_\infty = a=f$ ).

Y el teorema 3.6 adopta la forma:

$$\text{existe } z_d \text{ asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_z = a+f=0 \Leftrightarrow r_\lambda = s_\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ es doble} \Leftrightarrow f=-a, be=-a^2$$

**Ejemplo 3.** Sea [s1] 
$$\begin{cases} x' = 3x^2 - 4xy + y^2 + P(x,y) \\ y' = ex^2 - 6xy + 2y^2 + Q(x,y) \end{cases}$$

¿Para qué valores de  $e$  no bastarían utilizar el teorema 3.2 para analizar la estructura del origen del sistema, si  $P$  y  $Q$  incluyen términos de orden 3 y mayores? Como hemos venido diciendo esto ocurrirá si existe algún  $z$  múltiple asociado a  $\lambda=0$ .

Puesto que  $m=q=0$ , el teorema 3.3 nos asegura que esta situación se dará si y sólo si se anula el discriminante del polinomio

$$P_3(z) = z^3 - 6z^2 + 9z - e$$

Calculamos este discriminante a partir de su expresión en términos de:

$$R = 9, S = 27(2-e) \quad \rightarrow \quad D_3 = \frac{1}{27} [4R^3 - S^2] = 27e(4-e)$$

Así pues, si  $e \neq 0$  y  $e \neq 4$  nos bastaría el teorema 3.2 para precisar la estructura local de [s1]. Para esos valores tendremos que acudir a las técnicas del capítulo 5 para concluir el análisis.

Utilicemos este ejemplo para ilustrar otros resultados vistos. La situación del teorema 3.2 que más esfuerzo costaba analizar era el caso de  $z$  simple asociado a un  $\lambda=0$  (habría que calcular algún término del desarrollo de la variedad centro). Hemos visto que si  $m=q=0$  esto es equivalente a que el discriminante se anule. De hecho la ecuación de autovalores es:

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + e(4-e)$$

Si no existen autovalores nulos, como los términos de orden superior a dos no son necesarios en los cálculos del teorema 3.2, la estructura del origen coincide con la de la aproximación homogénea (que, de hecho, utilizando el teorema, se ve que es un punto con dos sectores hiperbólicos si  $e < 0$  ó si  $e > 4$  y un punto rodeado de seis sectores hiperbólicos si  $e \in (0, 4)$ ; por ser un sistema exacto la aproximación homogénea no podía tener atractores y por ser  $n=2$  no era un centro, con lo que no le quedaban muchas posibilidades).

Era fácil calcular las raíces de  $P_3(z)$  si eran dobles (triple no puede tener por ser  $R \neq 0$ ), es decir, cuando  $D_3=0$ . Las fórmulas de 3.3 nos dan:

$$z_d = 3 - \frac{e}{2} \quad (\text{ó } z_m = 2 + [1 - e/2]^{1/3}), \quad z_s = e \quad \rightarrow \quad z_d=3, z_s=0 \text{ si } e=0 \text{ y } z_d=1, z_s=4 \text{ si } e=4$$

Las fórmulas exactas de 3.3 son complicadas de usar si las raíces son distintas. Por ejemplo, si  $e=2$ , por ser el discriminante positivo hay tres raíces reales dadas por la fórmula trigonométrica:

$$S=0 \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad z_{1,2,3} = \frac{1}{3} [6 + \cos \frac{\pi + 4k\pi}{6}] = 2, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$$

[Para este valor de  $e$  hay un autovalor doble ( $\lambda=2$ ) como debía, pues se anula  $\Sigma=2-e$ .

El otro, asociado a  $z=2$ , es  $\lambda=-1$ ]

O para  $e=54$  en que la inmediata única raíz real  $z=6$  (con  $\lambda=15$ ) viene dada por la expresión:

$$z_r = 2 + [26 + 15\sqrt{3}]^{1/3} + [26 - 15\sqrt{3}]^{1/3}$$

**Ejemplo 4.** [s2]  $\begin{cases} x' = y^2 - x^2 + P(x, y) \\ y' = 2y^2 + fxy + ex^2 + Q(x, y) \end{cases}$  P, Q con términos de orden 3 y mayores.

Hagamos un análisis similar al ejemplo anterior. Como  $q=4$ , existe  $z$  múltiple asociado a  $\lambda=0$  si y sólo si se verifica que  $A=B=0$ . Como  $A = (f+2)(f-6)$  y  $B = 16e-2f^2+8$  esto sucede si:

$$f=-2, e=0 \text{ ó } f=6, e=4$$

En los demás casos basta el teorema 3.2 para precisar la estructura del origen de [s2]. Sin los resultados de esta sección el trabajo sería mucho más largo. Para ver cuando existe un  $z$  múltiple debemos calcular el discriminante de:

$$P_3(z) = z^3 - 2z^2 - (f+1)z - e \rightarrow R=7+3f, S=-18f-27e-34 \\ \rightarrow D_3 = 4f^3 + 16f^2 + 20f + 8 - 68e - 27e^2$$

Y para que haya un  $\lambda=0$  debe anularse el término independiente de la ecuación de autovalores:

$$E=-2-e, F=-f \rightarrow s_\lambda = F^2 - E^2 = (f+2+e)(f-2-e)$$

Imponiendo  $D_3=s_\lambda=0$  obtenemos 4 pares de valores para (f,e):

$$\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{4}\right), (-2, 0), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{4}\right), (6, 4).$$

De los que sabemos que sólo el segundo y el cuarto nos dan situaciones problemáticas. De hecho los  $z$  (fáciles de calcular por la multiplicidad) y los  $\lambda$  respectivos son en cada caso:

$$\begin{array}{ll} z = 1, -\frac{1}{2} \text{ doble} \rightarrow \lambda = 0, -\frac{3}{4} & z = 0, 1 \text{ doble} \rightarrow \lambda = -1, 0 \\ z = -1, \frac{3}{2} \text{ doble} \rightarrow \lambda = 0, \frac{5}{4} & z = 4, -1 \text{ doble} \rightarrow \lambda = 15, 0 \end{array}$$

¿En qué casos dos autovalores  $\lambda=0$ ? Cuando sea  $s_\lambda=0$  y  $r_\lambda=f^2-2f-8-4e=0$ .

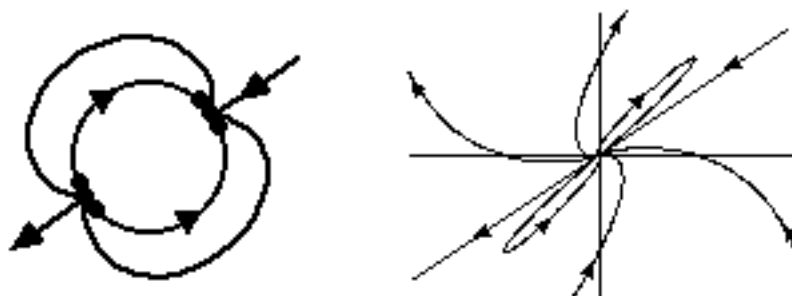
Esto sucede, desde luego, si  $f=-2, e=0$  ó  $f=6, e=4$ , pero también si  $f=0, e=-2$ .

[El sistema homogéneo es entonces el trivial  $x'=y^2-x^2; y'=2[y^2-x^2]$  de órbitas rectas]

Este caso ha de corresponder a que sea  $\Sigma=0$ . En efecto  $\Sigma = 2F+E = -2f-2-e$ .

¿Existe algún  $z$  triple? Debe ser  $R=D_3=0 \rightarrow f=-\frac{7}{3}, e=\frac{8}{27} \rightarrow z=\frac{2}{3}$  triple  $\rightarrow \lambda=-\frac{5}{9}$ .

Dibujemos este sistema que es el único de los casos citados en que basta mirar la aproximación homogénea. El esquema del teorema 3.2 y el dibujo aproximado son los de abajo:



### 3.5 Polinomios de cuarto grado.

Analicemos ahora el polinomio  $P_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s$ , con  $m, s \neq 0$ .

Si  $z$  es raíz múltiple de  $P_4$  satisface:

$$\begin{cases} mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0 \\ 4mz^3 + 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (10) \begin{cases} pz^3 + 2qz^2 + 3rz + 4s = 0 \\ 4mz^3 + 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases}$$

El sistema tiene solución si y sólo si se anula el discriminante:

$$D_4 = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 4m & 3p & 2q & r & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 3p & 2q & r & 0 \\ 0 & 0 & 4m & 3p & 2q & r \\ p & 2q & 3r & 4s & 0 & 0 \\ 0 & p & 2q & 3r & 4s & 0 \\ 0 & 0 & p & 2q & 3r & 4s \end{vmatrix} =$$

$$= 4Lq^4 - 4Nq^3 + (K^2 - 20LK - 8L^2)q^2 + 18(2L+K)Nq - 27N^2 + 4L^3 - 12L^2K + 12LK^2 - 4K^3$$

siendo:

$$L = 4ms, \quad K = pr, \quad N = mr^2 + p^2s$$

Busquemos expresiones mejores para  $D_4$ . No es difícil comprobar que si llamamos:

$$Q = 3p^2 - 8mq, \quad V = 6mr - pq, \quad T = K - 4L, \quad U = q^2 - L - 2K, \quad W = 6ps - qr, \quad P = 3r^2 - 8qs$$

$$V_2 = \frac{1}{2} [UQ - V^2] = 16m^2qs - 6p^2ms - 18m^2r^2 - 3p^3r + 14mpqr - 4mq^3 + p^2q^2$$

$$T_V = \frac{1}{2} [QW - TV] = 9p^3s + 48m^2rs - 32mpqs - p^2qr - 3mpr^2 + 4mq^2r$$

$$T_2 = \frac{1}{8} [QP - T^2] = \frac{1}{2} [VW - TU] = K^2 + KL - 2L^2 + 2Lq^2 - 3qN$$

se tiene que:  $(10) \Rightarrow \begin{cases} Qz^2 - 2Vz + T = 0 \\ Vz^2 - 2Uz + W = 0 \end{cases} \Rightarrow (11) \begin{cases} 2V_2z - T_V = 0 \\ T_Vz - 2T_2 = 0 \end{cases}$

El discriminante  $D_4$  estará relacionado con los coeficientes de (11). En efecto, se tiene que:

$$D_4 = \frac{1}{Q} [4V_2T_2 - T_V^2], \quad \text{si } Q \neq 0$$

Otras expresiones nos aparecerán en el proceso de cálculo de las raíces que iniciamos ahora. Intentemos descomponer  $P_4(z)$  en producto de dos polinomios de segundo grado:

$$mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = m(z^2 + Az + C)(z^2 + Bz + D)$$

Tenemos que:

$$p = m(A+B), \quad q = m(AB+C+D), \quad r = m(AD+BC), \quad s = mCD$$

Y llamemos:

$$Z = m(C+D), \quad X = mAB, \quad Z + X = q$$

Está claro que si podemos hallar  $Z$  ó  $X$ , bastaría resolver ecuaciones de segundo grado para calcular las cuatro raíces. Observemos que:

$$L = 4m^2CD, \quad K = m^2[A^2D+B^2C+AB(C+D)], \quad N = m^2[(A^2D+B^2C)(C+D)+4ABCD]$$

Por tanto se tiene que:  $KZ-N = m^3AB(C-D)^2 = X(Z^2-L)$

y concluimos que  $Z$  y  $X$  han de satisfacer, respectivamente, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_3(Z) &\equiv Z^3 - qZ^2 + K_L Z - N_L = 0, \quad \text{con } K_L \equiv K-L, \quad N_L \equiv N-qL \\ P_3(X) &\equiv X^3 - 2qX^2 + q_L X - q_N = 0, \quad \text{con } q_L \equiv q^2+K-L, \quad q_N \equiv qK-N \end{aligned}$$

Si llamamos:

$$Y \equiv 2Z-X = 2q-3X = 3Z-q = m[2(C+D)-AB]$$

Esta nueva variable satisface una ecuación más sencilla:

$$\begin{aligned} P_3(Y) &\equiv Y^3 - 3RY - S = 0, \quad \text{con} \\ R &\equiv q^2 - 3K + 3L = q^2 - 3K_L = 4q^2 - 3q_L = U-T, \\ S &\equiv 2q^3 - 9qK - 18qL + 27N = 2q^3 - 9qK_L + 27N_L = 18qq_L - 16q^3 - 27q_N \end{aligned}$$

Resuelta cualquiera de las tres ecuaciones de tercer orden (las tres soluciones de cada una corresponden a las tres formas diferentes de agrupar en parejas las cuatro raíces del polinomio inicial), podemos calcular  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  y, por tanto, las raíces. Está claro que existirán  $z$  múltiples si y sólo si existen  $Z$  ó  $X$  ó  $Y$  múltiples con lo que el discriminante respectivo  $D_{3Z}$ ,  $D_{3X}$ ,  $D_{3Y}$ , de estos polinomios de tercer orden han de coincidir (salvo constante multiplicativa) con el  $D_4$ . En efecto, se cumple que:

$$D_4 = D_{3Z} = D_{3X} = \frac{1}{27^2} D_{3Y} = \frac{1}{27} [4R^3 - S^2]$$

Los libros suelen atacar el cálculo de las raíces haciendo primero desaparecer el término cúbico del polinomio mediante un cambio de variable.

En concreto, si hacemos  $z = \frac{x-p}{4m}$  en  $P_4(z)$  y multiplicamos por  $256m^3$  obtenemos:

$$\begin{aligned} P_4(x) &\equiv x^4 - 2Qx^2 + 8Fx + G = 0, \quad \text{con} \\ F &\equiv p^3 - 4mpq + 8m^2r, \quad G \equiv 256m^3s - 64m^2pr + 16mp^2q - 3p^4 \end{aligned}$$

De aquí:

$$D_4 = \frac{1}{2^{16}m^6} [Q^4G - 2Q^2G^2 + G^3 + 8Q^3F^2 - 72QF^2G - 432F^4] = \frac{1}{2^{24}m^6} D_{4x}$$

Escribamos antes de seguir otra serie de relaciones entre los objetos definidos:

$$(12) \quad F = \frac{1}{3} [pQ+4mV] \quad , \quad G = \frac{1}{3} [64m^2R-Q^2]$$

$$S = \frac{1}{64m^3} [48m^2QR+27F^2-Q^3] = \frac{1}{256m^3} [108F^2+9QG-Q^3]$$

$$V_2 = \frac{1}{3} [RQ-2mS] = \frac{1}{128m^2} [Q^3-QG-36F^2] = \frac{1}{96m^2} [Q^3-27F^2-16m^2QR]$$

$$T_V = \frac{1}{3} [pS+2VR] = \frac{1}{2m} [RF-pV_2] \quad , \quad T_2 = \frac{1}{3} [2R^2+3TR-qS]$$

Y observemos que algunos de ellos son casi invariantes ante cambios de la forma  $z = M+td^k$ . En concreto, si  $P_4(t) \equiv d^j P_4(M+td^{-k})$  entonces los nuevos  $m, Q, R, S, F, G, V_2$  y  $D_4$  son:

$$m_t = d^{j-4k} m \quad , \quad Q_t = d^{2j-6k} Q \quad , \quad R_t = d^{2j-4k} R \quad , \quad S_t = d^{3j-6k} S \quad ,$$

$$F_t = d^{3j-9k} F \quad , \quad G_t = d^{4j-12k} G \quad , \quad V_{2t} = d^{4j-10k} V_2 \quad , \quad D_{4t} = d^{6j-12k} D_4$$

Hallemos las expresiones de los  $z$  múltiples que existen si se anula el discriminante. La primera ecuación de (11) determina de forma única un  $z$  doble (real) si el coeficiente de  $z$  no se anula:

$$D_4=0, V_2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad z_d = \frac{T_V}{2V_2} \quad \text{y dos raíces simples}$$

Para el resto de los casos nos será más fácil utilizar la ecuación en  $x$ . Un  $x$  doble satisface:

$$(13) \quad \begin{cases} x^4 - 2Qx^2 + 8Fx + G = 0 \\ x^3 - Qx + 2F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Qx^2 - 6Fx - G = 0 \\ 6Fx^2 + (G - Q^2)x + 2FQ = 0 \end{cases} \Rightarrow (Q^3 - QG - 36F^2)x - 2F(Q^2 + 3G) = 0$$

$$\text{Así: } D_4=0, V_2 \neq 0 \quad (\Rightarrow R > 0) \quad \rightarrow \quad x_d = \frac{2F(Q^2+3G)}{Q^3-QG-36F^2} = \frac{FR}{V_2} \quad \rightarrow \quad z_d = -\frac{p}{4m} + \frac{FR}{4mV_2} = \frac{T_V}{2V_2} \quad , \quad \text{de nuevo.}$$

$$\text{Y se puede ver que las otras dos raíces (simples) vienen dadas por: } z_{s\pm} = -\frac{p}{4m} - \frac{FR}{4mV_2} \pm \frac{\sqrt{V_2}}{\sqrt{R}}$$

Si  $D_4=V_2=0$  y  $Q \neq 0$ , debe ser  $T_V=0$  y de (12) deducimos que entonces  $RF=0$ .

Esto nos lleva a los siguientes subcasos:

Si  $R=0$  ( $\Rightarrow S=0, 3G=-Q^2 \neq 0, 27F^2=Q^3 \neq 0$ )  $\rightarrow x_t = \frac{3F}{Q}$  es raíz triple, pues es fácil ver que satisface (13) y que anula también la segunda de derivada de  $P_4(x)$ :  $3x^2-Q=0$ .

De aquí deducimos que  $z_t = -\frac{p}{4m} + \frac{3F}{4mQ} = \frac{V}{Q}$  es raíz triple de  $P_4(z)$ .

La raíz simple restante es:  $x_s = -\frac{9F}{Q} \rightarrow z_s = -\frac{p}{m} - \frac{3V}{Q}$

Si  $F=0 \Leftrightarrow R \neq 0$  ( $\Rightarrow S \neq 0, G=Q^2 \neq 0$ )  $\rightarrow x_{d\pm} = \pm\sqrt{Q}$  son raíces dobles (reales o complejas), pues anulan tanto  $x^4-2Qx^2+G=0$  como  $x^3-Qx=0$ .

Las raíces dobles (reales o complejas)  $P_4(z)$  son entonces:  $z_{d\pm} = \frac{-p \pm \sqrt{Q}}{4m}$ .

En fin, si  $D_4=V_2=Q=0 \Leftrightarrow R=V=Q=0$  ( $\Rightarrow F=G=S=0$ )  $\rightarrow x_c=0$  y  $z_c = -\frac{p}{4m}$  son cúdruples.

Podemos deducir las mismas fórmulas para las raíces múltiples (sin entrar en el detalle de los cálculos) partiendo de que, si las raíces de  $P_4(z)$  son  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , se cumple que:

$$p = -m(z_1 + z_2 + z_3 + z_4), \quad q = m(z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4)$$

$$r = -m(z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4), \quad q = mz_1z_2z_3z_4$$

Se prueba que entonces:

$$(14) \quad D_4 = m^6(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2(z_1 - z_4)^2(z_2 - z_3)^2(z_2 - z_4)^2(z_3 - z_4)^2$$

Esto corrobora que  $D_4=0$  si y sólo si existe alguna raíz múltiple de  $P_4$ .

En el caso de que sea  $z_3=z_4=z_d$ , se comprueba que:

$$p = -m(z_1 + z_2 + 2z_d), \quad R = m^2(z_1 - z_d)^2(z_2 - z_d)^2, \quad F = -m^3(z_1 + z_2 - 2z_d)(z_1 - z_2)^2,$$

$$V_2 = m^4(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_d)^2(z_2 - z_d)^2, \quad T_V = 2m^4z_d(z_1 - z_2)^2(z_1 - z_d)^2(z_2 - z_d)^2, \quad D_4=0$$

Si  $z_2=z_3=z_4=z_t$  se cumple:

$$Q = 3m^2(z_1 - z_t)^2, \quad V = 3m^2z_t(z_1 - z_t)^2, \quad F = -m^3(z_1 - z_t)^3, \quad R=V_2=D_4=0$$

Si  $z_1=z_2=z_{d+}, z_3=z_4=z_{d-}$  es:

$$p = -2m(z_{d+} + z_{d-}), \quad R = m^2(z_{d+} - z_{d-})^4, \quad Q = 4m^2(z_{d+} - z_{d-})^2, \quad F=V_2=D_4=0$$

Por último, si  $z_1=z_2=z_3=z_4=z_c$  se tiene que:

$$p = -4mz_c, \quad R=Q=V=F=V_2=D_4=0$$

El discriminante, además de indicar la presencia de raíces múltiples, informa, si es no nulo, del número de raíces reales o complejas del polinomio. Si no hay raíces múltiples, sólo quedan tres posibilidades: ó 4 raíces reales, ó 2 reales y 2 complejas (conjugadas), ó 4 raíces complejas. En el primer caso (14) muestra que  $D_4 > 0$ . Si hay 2 ó 4 complejas se tiene, respectivamente:

$$z_3, z_4 = \alpha \pm \beta i \quad \rightarrow \quad D_4 = -4m^6[(z_1 - \alpha)^2 + \beta^2]^2[(z_2 - \alpha)^2 + \beta^2]^2[z_1 - z_2]^2 < 0$$

$$z_3, z_4 = \alpha \pm \beta i, \quad z_1, z_2 = \gamma \pm \delta i \quad \rightarrow \quad D_4 = 16m^6\beta^2\gamma^2[(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2]^2[(\alpha - \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2]^2 > 0$$

$D_4 < 0$  caracteriza, pues, el caso 2+2, pero es más complicado distinguir entre los dos restantes. Como el discriminante de  $P_4''(z) = 12mz^2 + 6pz + 2q$  es  $12Q$ , el hecho de que  $Q > 0$  es una condición necesaria para que existan 4 raíces reales (si  $P_4$  no tiene puntos de inflexión esto es imposible). Para obtener una condición necesaria y suficiente acudimos al método de Sturm que relaciona el número de raíces en un intervalo con el número de cambios de signo de una secuencia de polinomios en los extremos del intervalo (ver, por ejemplo, Uspensky ([2])). Supuesto que  $D_4, V_2$  y  $Q$  son no nulos podemos, con algunos cálculos, construir dicha secuencia:

$$mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s, \quad 4mz^3 + 3pz^2 + qz + r, \quad Qz^2 - 2Vz + T, \quad 2V_2z - T_V, \quad Q^2D_4$$

Nos interesa el signo de cada uno de estos polinomios en más y menos infinito ordenados así:

$$\begin{array}{cccccc} -\infty & m & -m & Q & -V_2 & D_4 \\ \infty & m & m & Q & V_2 & D_4 \end{array}$$

La diferencia entre el número de cambios de signo en la fila superior y el número de cambios de los de la inferior proporcionará el número de raíces reales. Suponemos sin pérdida de generalidad que  $m > 0$ . Para que puedan existir 4 reales la fila superior debe tener 4 cambios y la inferior ninguno. Es decir, si  $D_4, V_2, Q > 0$ :

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & \\ + & + & + & + & + & + \end{array}$$

existen 4 raíces reales. Y no hay más posibilidades. Las otras tres posibles con  $D_4 > 0$ :

$$\begin{array}{cccccc} + & - & - & - & + & \\ + & + & - & + & + & \\ + & + & - & - & + & \\ + & + & + & + & - & \end{array}$$

nos dan, como era previsible, 4 complejas (si  $D_4 < 0$  se tienen tres casos 2+2 y uno imposible). Si fuese  $V_2 = 0$  ó  $Q = 0$  podríamos construir las correspondientes secuencias, que resultan ser de cuatro polinomios o menos, con lo que nunca podemos tener 4 cambios de signo.

En el caso de que  $D_4 = 0, V_2 \neq 0$ , podemos volver a ver que el signo de  $V_2$  informa sobre el carácter de las raíces simples. Si  $z_1, z_2$  son simples está claro que  $R, V_2 > 0$ . Además, si:

$$z_1, z_2 = \alpha \pm \beta i \quad \rightarrow \quad R = m^2[(z_0 - \alpha)^2 + \beta^2]^2 > 0, \quad V_2 = -4m^4\beta^2[(z_0 - \alpha)^2 + \beta^2]^2 < 0$$

Así pues, resumiendo resultados anteriores:

- $D_4, V_2, Q > 0 \rightarrow$  4 raíces reales distintas
- $D_4 < 0 \rightarrow$  2 raíces reales distintas y 2 complejas
- $D_4 > 0$  y  $V_2 \leq 0$  ó  $Q \leq 0 \rightarrow$  4 raíces complejas distintas
- $D_4 = 0$  y  $V_2 > 0 \rightarrow$  1 raíz doble real y 2 simples reales
- $D_4 = 0$  y  $V_2 < 0 \rightarrow$  1 raíz doble real y 2 simples complejas
- $D_4 = V_2 = 0, Q \neq 0$  y  $R = 0 \rightarrow$  1 raíz triple real y 1 simple real
- $D_4 = V_2 = 0, Q > 0$  y  $R \neq 0 \rightarrow$  2 raíces dobles reales
- $D_4 = V_2 = 0, Q < 0$  y  $R \neq 0 \rightarrow$  2 raíces dobles complejas
- $D_4 = V_2 = Q = 0 \rightarrow$  1 raíz cuádruple real

[Podríamos escribir parte de la clasificación anterior en términos de objetos más sencillos, pues:

$$\begin{array}{l} V_2 = R = 0 \Leftrightarrow R = S = 0 \Rightarrow D_4 = 0 \quad , \quad D_4 = V_2 = 0 \Leftrightarrow V_2 = T_V = 0 \Leftrightarrow V_2 = F = 0 \text{ si } R \neq 0 \\ V_2 = Q = 0 \Leftrightarrow Q = F = 0 \Leftrightarrow Q = V = 0 \Leftrightarrow Q = S = 0 \quad \rightarrow \quad D_4 = V_2 = Q = 0 \Leftrightarrow Q = V = R = 0 \end{array}$$

]



**Ejemplo 5.** Factoricemos y hallemos las raíces de los siguientes polinomios, siguiendo esta sección (los coeficientes están preparados para que salgan números sencillos):

$$P_4(z) = z^4 - 10z^3 + 35z^2 - 50z + 24 \rightarrow D_4=144, V_2=40, Q=20 \rightarrow 4 \text{ raíces reales}$$

$$P_3(Z) = Z^3 - 35Z^2 + 404Z - 1540 \rightarrow Z = 14, 11, 10 = C+D$$

[estas últimas raíces son, en general, las complicadas; se podrían utilizar las fórmulas de 3.3, o ver si el polinomio es uno de los casos que analizaremos en 4.4 (así sucede: será "F=0")]

$$C+D=14, CD=s=24 \rightarrow C=2, D=12 \rightarrow 12A+2B=r=-50, A+B=p=-10 \rightarrow A=-3, B=-7$$

$$P_4(z) = [z^2 - 3z + 2][z^2 - 7z + 12] = [z-1][z-2][z-3][z-4].$$

(de  $Z=11$  obtendríamos  $[z^2 - 4z + 3][z^2 - 6z + 8] = [z-1][z-3][z-2][z-4]$  y de  $Z=10$ ,  $[z^2 - 5z + 4][z^2 - 5z + 6]$ )

(se podría haber resuelto  $X^3 - 70X^2 + 1629X - 12600 = 0$ ,  $X=AB$  ó  $Y^3 - 39Y - 70 = 0$ ,  $Y=3(C+D) - q = 2q - 3X$ )

$$P_4(z) = z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 3z + 2 \rightarrow D_4=-400 \rightarrow 2 \text{ raíces reales y 2 complejas.}$$

$$P_3(X) = X^3 - 6X^2 + 10X \text{ (caso "q}_N=0" \text{ de 4.4)} \rightarrow X = 0, 3+i, 3-i = AB$$

$$AB=0, A+B=3 \rightarrow A=0, B=3 \rightarrow 3C=3, CD=2 \rightarrow C=1, D=2$$

$$P_4(z) = [z^2 + 1][z^2 + 3z + 2] \rightarrow z = -2, -1, i, -i$$

(de los otros valores (no aconsejables) de  $X$  obtendríamos factorizaciones complejas)

$$P_4(z) = z^4 + 12z^2 - 64z + 132 \rightarrow D_4=764411904, V_2=-55296, Q=-96 \rightarrow 4 \text{ complejas.}$$

$$P_3(Y) = Y^3 - 5184Y \text{ (caso "S=0" de 4.4)} \rightarrow Y = 72, 0, -72 = 3(C+D) - 12$$

$$C+D=28, CD=132 \rightarrow C=6, D=22 \rightarrow 22A+6B=-64, A+B=0 \rightarrow A=-4, B=4$$

$$P_4(z) = [z^2 - 4z + 6][z^2 + 4z + 22] \rightarrow z = 2 \pm \sqrt{2}i, -2 \pm 3\sqrt{2}i$$

(si no se toma el mayor valor de  $Y$  los polinomios de segundo orden son complejos)

**Ejemplo 6.**  $P_4(z) = z^4 + z^3 + qz^2 + z + 1$

$$D_4=(q+4)q(4q-9)^2, V_2=(q+3)(q-1)(9-4q), Q=3-8q, R=q^2+9, F=9-4q \rightarrow$$

Si  $q < -4$  ( $Q, V_2, D_4 > 0$ ) hay 4 raíces reales distintas

$$\text{Si } q = -4 \text{ ( } D_4=0, V_2 > 0 \text{ ) , hay } z_d = -\frac{p}{4m} + \frac{FR}{4mV_2} = -\frac{1}{4} + \frac{25 \cdot 25}{4 \cdot 125} = 1 \text{ doble y además } z = -\frac{1}{2} [3 \pm \sqrt{5}]$$

Si  $-4 < q < 0$  ( $D_4 < 0$ ) , 2 reales distintas y 2 complejas

$$\text{Si } q = 0 \text{ ( } D_4=0, V_2 < 0 \text{ ) , real doble } = -\frac{1}{4} + \frac{9 \cdot 9}{4 \cdot [-27]} = -1 \text{ y dos complejas } z = \frac{1}{2} [1 \pm i\sqrt{3}]$$

Si  $0 < q < \frac{9}{4}$  las 4 raíces son complejas y distintas ( $D_4 > 0$ , si  $q \leq \frac{3}{8}$ ,  $V_2 < 0$  y si  $q \geq \frac{3}{8}$ ,  $Q \leq 0$ )

$$\text{Si } q = \frac{9}{4} \text{ ( } D_4=V_2=0, Q < 0, R \neq 0 \text{ ) , raíz doble compleja: } z_{d\pm} = \frac{-p \pm \sqrt{Q}}{4m} = \frac{1}{4} [-1 \pm i\sqrt{15}]$$

Si  $q > \frac{9}{4}$  ( $D_4 > 0, Q < 0$ ) , vuelve a haber 4 complejas distintas.

### 3.6 La aproximación homogénea para $n=3$ .

Estudiamos en esta sección el sistema:

$$[H3] \quad \begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$$

que a diferencia del [H2] si puede poseer centros y focos (a su estudio está destinado el capítulo 4). Otra diferencia esencial es el hecho de que el origen sí puede ser un solución estable de [H3]. Trataremos aquí los problemas asociados a la presencia de vectores propios múltiples y autovalores cero, de forma análoga a como lo hicimos en la sección 3.4 para  $n=2$  . Los autovalores y vectores propios de [H3] vienen dados por:

$$[z\lambda] \quad \begin{cases} a+bz+cz^2+dz^3 = \lambda \\ e+fz+gz^2+hz^3 = \lambda z \end{cases}$$

La ecuación de los **vectores propios** es este caso:

$$P_4(z) = dz^4 + (c-h)z^3 + (b-g)z^2 + (a-f)z - e = 0$$

y la de los **autovalores** nos la proporciona la resultante en  $z$  de  $[z\lambda]$ , es decir:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & d & 0 & 0 \\ e & f-\lambda & g & h & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & b & c & d & 0 \\ 0 & e & f-\lambda & g & h & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f-\lambda & g & h \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollándolo se obtiene la ecuación para los  $\lambda$  (bastante menos manejable que la de  $n=2$ ):

$$\begin{aligned} P_4(\lambda) &\equiv d^2\lambda^4 + p_\lambda\lambda^3 + q_\lambda\lambda^2 + r_\lambda\lambda + s_\lambda \equiv d^2\lambda^4 + [-ad^2 - 3fd^2 + 2hbd + cgd - 3hgd - c^2h + 2ch^2 - h^3] \lambda^3 + \\ &+ [3afd^2 + 3f^2d^2 - 2ahbd - 4fhbd + 6ahgd + 3fhgd - acgd - 2fcgd - 4ach^2 - 2fch^2 + ac^2h + 2fc^2h + 3ah^3 + \\ &+ ched - 3h^2ed + bg^2d - g^3d - chbg + chg^2 + h^2b^2 - h^2bg - bed^2 - 3ged^2] \lambda^2 + \\ &+ [-3af^2d^2 - f^3d^2 - 3a^2hgd - 3a^2h^3 + 2a^2ch^2 + 4afhbd - 6afhgd + 4afch^2 - 2afc^2h + 2afcgd + f^2cgd + 2f^2hbd - f^2c^2h + \\ &+ 3aged^2 + 3fged^2 + 2fbed^2 - ached - fched + 6ah^2ed + 2ag^3d - abg^2d - fbg^2d + achbg - 2achg^2 - ce^2d^2 - 3he^2d^2 - \\ &- ah^2b^2 + 2ah^2bg + fchbg - fh^2b^2 - 2hb^2ed + hbged - cbged - 2cg^2ed - 3ch^2be + c^2hbe + 2c^2hge] \lambda + \\ &+ [af^3d^2 + 3a^2fhgd - af^2cgd - 2af^2hbd + a^3h^3 - 2a^2fch^2 + af^2c^2h - 3afged^2 - f^2bed^2 - 3a^2h^2ed + afched - a^2g^3d + \\ &+ afbg^2d + a^2chg^2 - a^2h^2bg - afchbg + afh^2b^2 + 3ah^2ed^2 + fce^2d^2 + 2acg^2ed - ahbged + fcbged + 2fhb^2ed - \\ &- 2ac^2hge - fc^2hbe + 3ach^2be + chb^2ge - h^2b^3e - b^2g^2ed + c^3he^2 - c^2ge^2d - 3chbe^2d + 2bge^2d^2 - e^3d^3] = 0 \end{aligned}$$

Hay  $z_m$  múltiples si y sólo si se anula el discriminante  $D_z$  de  $P_4(z)$  de expresión desarrollada:

$$D_z = 4(c-h)^2(b-g)^3e - 16(b-g)^4de - 27(c-h)^4e^2 + 144(c-h)^2(b-g)de^2 - 128(b-g)^2d^2e^2 - 256d^3e^3 + \\ + [80(b-g)^2de - 18(c-h)^2(b-g)e - 192d^2e^2](c-h)(a-f) + \\ + [(c-h)^2(b-g)^2 - 4(b-g)^3d + 6(c-h)^2de - 144(b-g)d^2e](a-f)^2 + [18(b-g)d - 4(c-h)^2](c-h)(a-f)^3 - 27d^2(a-f)^4$$

En la sección anterior vimos formas de escribirlo de forma más compacta. Llamando:

$$K = (c-h)(a-f) , \quad L = -4de , \quad N = d(a-f)^2 - (c-h)^2e \\ R = (b-g)^2 - 3K + 3L , \quad S = 2(b-g)^3 - 9(b-g)K - 18(b-g)L + 27N \\ Q = 3(c-h)^2 - 8(b-g)d , \quad V = 6d(a-f) - (c-h)(b-g) , \quad T = K - 4L , \quad F = \frac{1}{3} [(c-h)Q + 4dV] \\ V_2 = \frac{1}{3} [RQ - 2dS] , \quad T_V = \frac{1}{3} [(c-h)S + 2VR] , \quad T_2 = \frac{1}{9} [2R^2 + 3TR - (b-g)S]$$

podemos poner:

$$D_z = \frac{1}{27} [4R^3 - S^2] = \frac{1}{Q} [4V_2T_2 - T_V^2]$$

Escribamos mejor el  $s_\lambda$  (informa de la presencia de  $\lambda=0$ ). Dicho  $s_\lambda$  es la resultante del sistema:

$$\begin{cases} a+bz+cz^2+dz^3 = 0 \\ e+fz+gz^2+hz^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H+Dz+Jz^2 = 0 \\ E+Cz+Hz^2 = 0 \end{cases}$$

donde hemos eliminado las potencias en  $z^3$  y  $z^0$  (suponiendo que  $z \neq 0$ ) y llamado:

$$H=ah-de , \quad D=bh-df , \quad J=ch-dg , \quad E=af-be , \quad C=ag-ce$$

La resolvente del último sistema (de orden 8 en los coeficientes del sistema):

$$r_2 = H [ 2HEJ + HCD - H^3 - C^2J - D^2E ] + EJ [ CD - EJ ]$$

resulta ser múltiplo de H, puesto que  $CD = EJ + HI$ , siendo  $I = bg - cf$  (la cruz que faltaba).

El  $s_\lambda$  es precisamente el  $r_2/H$  cambiado de signo:

$$s_\lambda = E[D^2 - JH - JI] + C[JC - DH] + H[H^2 - JE] = \begin{vmatrix} H & D & J \\ C & H+I & D \\ E & C & H \end{vmatrix}$$

Observemos que se satisfacen las siguientes relaciones entre los binomios definidos:

$$\begin{array}{llll} bH = aD + dE & cH = aJ + dC & cD = bJ + dI & bC = aI + cE \\ fH = eD + hE & gH = eJ + hC & gD = fJ + hI & fC = eI + gE \end{array}$$

Se puede ver que también el  $r_\lambda$  se escribe de forma compacta en función de estos binomios:

$$r_\lambda = - ( m[D^2 - JH - JI] + 2n[JC - DH] + p[H^2 - JE] )$$

donde hemos llamado:

$$m \equiv 3a + f , \quad n \equiv b + g , \quad p \equiv c + 3h$$

Como  $3\lambda = [ 4dz^3 + 3(c-h)z^2 + 2(b-g)z + (a-f) ] + pz^2 + 2nz + m$  y el corchete se anula si  $z$  es raíz múltiple de  $P_4(z)$ , el  $\lambda_{z_m}$  asociado a un  $z_m$  múltiple se puede calcular utilizando:

$$\lambda_{z_m} = \frac{1}{4} [ m + 2nz_m + pz_m^2 ]$$

Halleamos expresiones de los  $\lambda$  asociados a las distintas posibilidades de  $z$  múltiples, vistas en 3.5. Suponemos que  $d \neq 0$  (que el polinomio es realmente de orden 4 y no 3).

Si existe raíz cuádruple  $z_c = -\frac{c-h}{4d}$  ( $\Leftrightarrow Q=V=R=0 \Rightarrow 3(c-h)^2=8(b-g)d$ ) el  $\lambda$  asociado es:

$$\lambda_{zc} = \frac{16md^2 - 8n(c-h)d + p(c-h)^2}{64d^2} = \frac{n_{zc}}{12d}$$

con

$$n_{zc} = \frac{1}{2} [6md - 3n(c-h) + p(b-g)] = 3(3a+f)d - (cb+2cg-3hb)$$

Si hay raíz triple  $z_t = \frac{V}{Q}$  ( $\Leftrightarrow R=S=0, Q \neq 0 \Rightarrow V^2=QT, 12de=(b-g)^2-3(c-h)(a-f)$ ) está asociada a:

$$\lambda_{zt} = \frac{mQ^2 + 2nQV + pV^2}{4Q^2} = \frac{n_{zt}}{2Q}$$

siendo:

$$n_{zt} = \frac{1}{2} [mQ + 2nV + pT] = (c-h)(5ca+cf-3ha-3hf) - (c-h)(b-g)(b+g) + 2(9ag-3ab-fg-5fb)d + 8(c+3h)de$$

[También podemos dar una expresión que no contenga el coeficiente  $e$  :

$$n_{zt2} = 3n_{zt} + 2pR = 9(c-h)(ca+cf-3ha+hf) + (b-g)(9hb-cb-3hg-5cg) + 6(9ag-3ab-fg-5fb)d]$$

El autovalor asociado a una raíz doble  $z_d = \frac{TV}{2V_2}$  ( $\Leftrightarrow D_z=0, V_2 \neq 0 \Rightarrow T_V^2 = 4V_2T_2$ ) es:

$$\lambda_{zd} = \frac{4mV_2^2 + 4nV_2TV + pTV^2}{16V_2^2} = \frac{n_{zd}}{2V_2}, \quad \text{con} \quad n_{zd} = \frac{1}{2} [mV_2 + nTV + pT_2]$$

es decir:

$$\begin{aligned} n_{zd} = & 2(c-h)^2(a-f)(3ha-2ca-cf) + (c-h)^2(b-g)(ab+fb-2ag) + 3(c-h)^2(3hb-cb-2cg)e + \\ & + (a-f)(18cab-21cag-24hab+27hag+10cfb-7cfg-4hfb+hfg)d + 4(b-g)^2(2ag-ab-fb)d + \\ & + (c-h)(7ca+5cf-15ha+3hf)de + 4(b-g)(3cb-7hb+5cg-hg)de - 9(3a+f)(a-f)^2d^2 - \\ & - 16(3ab-fb-2fg)d^2e - 16(c+3h)d^2e^2 \end{aligned}$$

Queda por ver el caso de dos raíces dobles. En esta sección nos interesa sólo si son reales:

$$F=V_2=0, Q>0, R \neq 0 \quad (\Rightarrow (c-h)^3 + 8(a-f)d^2 = 4(c-h)(b-g)d) \Leftrightarrow \text{existen } z_{d\pm} = -\frac{c-h}{4d} \pm \frac{\sqrt{Q}}{4d}$$

asociadas a :

$$\lambda_{zd\pm} = \frac{8md^2 - 4n(c-h)d + 2p(c-h)^2 - 4p(b-g)d \pm (4nd - p(c-h))\sqrt{Q}}{32d^2}$$

De todo lo anterior tenemos:

- |      |  |
|------|--|
| (15) | $\lambda=0$ es autovalor $\Leftrightarrow s_\lambda = 0$   |
| (16) | Existe $z$ múltiple $\Leftrightarrow D_z = 0$  |
| (17) | Existe $z$ cuádruple asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow Q=V=R=n_{zc}=0$   |
| (18) | Existe $z$ triple asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow R=S=n_{zt}=0, Q \neq 0$  |
| (19) | Existe $z$ doble real asociado a $\lambda=0 \Leftrightarrow D_z=n_{zd}=0, V_2 \neq 0$<br>ó si $F=V_2=0, Q>0, R \neq 0$ y $\lambda_{zd+}=0$ ó $\lambda_{zd-}=0$ |

Intentamos, como hicimos para  $n=2$ , buscar caracterizaciones más manejables. Si existe un  $z$  múltiple asociado a  $\lambda=0$  debe satisfacerse aquí:

$$[zm\lambda 0] \begin{cases} a+bz+cz^2+dz^3 = 0 \\ e+fz+gz^2+hz^3 = 0 \\ m+2nz+pz^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-f)+2(b-g)z+3(c-h)z^2+dz^3 = 0 \\ -3e+2(a-f)z+(b-g)z^2+(c-h)z^3 = 0 \\ m+2nz+pz^2 = 0 \end{cases}$$

y por tanto deben anularse la resultante A de las ecuaciones primera y tercera y la resultante B de la segunda y la tercera del primer sistema (o del segundo, ya que las resultantes respectivas resultan ser las mismas salvo en un factor 16). Calculando estas resultantes:

$$A \equiv (c+3h)(2ac+fc-3ah)^2 - (c+3h)(cb+2cg-3hb)(ab+fb-2ag) - \\ -2(3a+f)(3cab+2cfb+cfg+3hfb-9hag)d + 4(b+g)^2(ab+fb-2ag)d + (3a+f)^3d^2$$

$$B \equiv (3a+f)(2hf+cf-3ha)^2 - (3a+f)(fg+2fb-3ag)(hg+cg-2hb) - \\ -2(c+3h)(3fhg+2fcg+fcg+3acg-9ahb)e + 4(b+g)^2(hg+cg-2hb)e + (c+3h)^3e^2$$

se tiene que:

$$(20) \quad \text{Si existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Rightarrow A = B = 0$$

Podemos escribir de forma más resumida las expresiones de A y B. Llamando:

$$a_c \equiv 2ac+fc-3ah = \frac{1}{4} [3(c-h)m-(a-f)p] \quad , \quad h_f \equiv 2hf+cf-3ha = \frac{1}{4} [(c-h)m-3(a-f)p] \\ a_b \equiv ab+fb-2ag = \frac{1}{2} [(b-g)m-(a-f)n] \quad , \quad h_g \equiv hg+cg-2hb = \frac{1}{2} [(c-h)n-(b-g)p] \\ c_b \equiv cb+2cg-3hb = \frac{1}{2} [3(c-h)n-(b-g)p] \quad , \quad f_g \equiv fg+2fb-3ag = \frac{1}{2} [(b-g)m-3(a-f)n]$$

se puede poner:

$$A = a_c^2 p - c_b a_b p - 2a_b m p d - 2a_c m n d + 4a_b n^2 d + m^3 d^2 \\ B = h_f^2 m - f_g h_g m - 2h_g m p e - 2h_f p n e + 4h_g n^2 e + p^3 e^2$$

[Aquí también hay simetrías ligadas al cambio de papeles de  $x$  e  $y$  en [H3]. Intercambiando  $a \leftrightarrow h$ ,  $b \leftrightarrow g$ ,  $c \leftrightarrow f$ ,  $e \leftrightarrow d$ , quedan invariantes  $K, L, R, T, T_2, D_z, H, I, n$  y  $s_\lambda$ , cambian simplemente de signo  $N$  y  $S$  y se convierten el uno en el otro:  $D \leftrightarrow C, J \leftrightarrow E, m \leftrightarrow p, a_c \leftrightarrow h_f, a_b \leftrightarrow h_g, c_b \leftrightarrow f_g$  y  $A \leftrightarrow B$ ].

¿Bastará que A y B se anulen para que exista (en general)  $z$  múltiple asociada a  $\lambda=0$ ? Esto es lo que sucedía para  $n=2$ , pero, por desgracia, las cosas no son tan sencillas para  $n=3$ . Para construir un contraejemplo resolvemos  $A=0$  y  $B=0$  en  $d$  y  $e$  respectivamente. Utilizando:

$$2na_c = mc_b + pa_b \quad , \quad 2nh_f = mh_g + pf_g$$

y suponiendo que  $m, p \neq 0$ , se puede ver que:

$$A=0 \rightarrow d_{\pm} \equiv \frac{1}{m^3} [n \pm \sqrt{n^2 - mp}] [a_c m - (n \pm \sqrt{n^2 - mp}) a_b] \\ B=0 \rightarrow e_{\pm} \equiv \frac{1}{p^3} [n \pm \sqrt{n^2 - mp}] [h_f p - (n \pm \sqrt{n^2 - mp}) h_g]$$

Fijamos, por ejemplo, unos valores de los coeficientes restantes que hacen sencillos  $d_{\pm}$  y  $e_{\pm}$  :

$$a=-1, f=4, b=0, g=2, c=12, h=-3 \rightarrow m=1, n=2, p=3 \rightarrow d_{\pm} = 11, 9 ; e_{\pm} = 1, -1$$

Con los 6 valores fijos y  $d=11, e=-1$  ó  $d=9, e=1$  se cumple  $A=B=n_{zd}=D_z=0$  (y en ambos casos existen  $z$  dobles con  $\lambda=0$ , que son  $z_d=-1/3$  en el primer caso y  $z_d=-1$  en el segundo).

Pero escogiendo  $d$  y  $e$  de las otras dos formas posibles, siendo  $A=B=0$  se tiene:

$$d = 11, e=1 \rightarrow n_{zd}=-274, D_z=40396, \quad d=9, e=-1 \rightarrow n_{zd}=21222, D_z=265356$$

con lo que no existen  $z$  múltiples y no se da un resultado como el teorema 3.6.

Con un ordenador potente se confirma que lo ocurrido en el ejemplo es general: si  $m, p \neq 0$  y descomponemos  $A$  y  $B$  en el producto de sus factores en  $d$  :

$$A = m^3[d-d_+][d-d_-] \equiv m^3 A_+ A_-, \quad B = p^3[e-e_+][e-e_-] \equiv p^3 B_+ B_-$$

se cumple que  $A_+ = B_- = 0 \Rightarrow n_{zd} = D_z = 0$  y que  $A_- = B_+ = 0 \Rightarrow n_{zd} = D_z = 0$

Pero estas caracterizaciones, escritas en términos de raíces, son menos manejables que las iniciales (aunque se puede ver que incluyen también los casos de raíces triples y cuádruples).

Sí se conserva un resultado similar al de  $n=2$  para los sistemas exactos. Si es  $m=n=p=0$  (o sea, si  $f=-3a, g=-b, c=-3h$ ), siendo una identidad la tercera ecuación de  $[zm\lambda 0]$ , el hecho de que exista  $z$  múltiple con  $\lambda=0$  equivale a que se satisfagan las dos primeras ecuaciones (de cualquiera de los sistemas, pues pasan a ser equivalentes). En general, la resolvente de las dos primeras ecuaciones del primero es  $s_{\lambda}$  y la de las dos del segundo es  $D_z$ . Se cumple, pues:

$$(21) \quad \text{Si } m=n=p=0, \text{ existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_z=0 \Leftrightarrow s_{\lambda}=0$$

Pasemos a ver la relación entre el discriminante  $D_{\lambda}$  de  $P_4(\lambda)$  y el  $D_z$ . Como para  $n=2$ , el primero ha de ser múltiplo del segundo. Ahora las cosas se complican pues  $D_{\lambda}$  es de orden 24 y  $D_z$  de orden 6 en los coeficientes del sistema y esto agota la memoria de los ordenadores normales. Buscamos escribir  $D_{\lambda} = \sum^2 D_z$ . El  $\sum$  debe reflejar la posibilidad de que existan  $z_1$  y  $z_2$  distintos asociados al mismo  $\lambda$ . Si esto ocurre deben satisfacerse las cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} a+bz_i+cz_i^2+dz_i^3 = \lambda \\ e+fz_i+gz_i^2+hz_i^3 = \lambda z_i \end{cases} \text{ para } i=1, 2$$

Operando con este sistema y llamando  $z_1+z_2 \equiv [+]$  y  $z_1 z_2 \equiv [.]$  se obtiene:

$$\begin{cases} b+c[+]+d[+]^2-d[.] = 0 \\ f+g[+]+h[+]^2-h[.] = \lambda \\ a-c[.] - d[+][.] = \lambda \\ e-g[.] - h[+][.] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D+J[+] = -\lambda d \\ H-J[.] = \lambda h \end{cases} \Rightarrow dH+hD+hJ[+] = dJ[.]$$

Así

$$J[+] [d[+]+(c-h)] = dH+hD-bJ = h^2 b - chb + bgd + h(a-f)d - d^2 e \equiv \Gamma$$

$$\frac{J}{[.]} (d[.]^2 - e) = dH+hD-gJ = \Gamma + (b-g)J = h^2 b - chg + g^2 d + h(a-f)d - d^2 e \equiv \Omega$$

Por otra parte, podemos descomponer :  $P_4(z) = d(z^2 - [ + ]z + [ . ]) (z^2 + [ + ] + \frac{c-h}{d} )z - \frac{e}{d[ . ]}$

Según 3.5, las variables  $X = - [ + ] [ d[ + ] + (c-h) ]$  y  $Z = d[ . ] - \frac{e}{[ . ]}$  satisfacen  $P_3(X)=0$  y  $P_3(Z)=0$ .

De esto deducimos:

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma^3 + 2(b-g)J\Gamma^2 + q_L J^2 \Gamma + q_N J^3 = \Sigma \\ 0 &= \Omega^3 - (b-g)J\Omega^2 + K_L J^2 \Omega - N_L J^3 = \Sigma \end{aligned}$$

Este  $\Sigma$  es un buen candidato a satisfacer  $D_\lambda = \Sigma^2 D_Z$  ya que es de orden 9 como debía:

$$\begin{aligned} \Sigma &= h^6 b^3 - ch^5 b^3 + 2c^2 h^4 b^2 g - 2ch^5 b^2 g - c^3 h^3 b g^2 + c^2 h^4 b g^2 + h^4 b^3 g d - 4ch^3 b^2 g^2 d + 2h^4 b^2 g^2 d + 3c^2 h^2 b g^3 d - \\ &- 2ch^3 b g^3 d + c^5 h^3 e - 2c^4 h^4 e + c^3 h^5 e - 4c^3 h^3 b d e + 4c^2 h^4 b d e - 3c^4 h^2 g d e + 6c^3 h^3 g d e - 3c^2 h^4 g d e + \\ &+ 2ch^3 b^2 d^2 e - 3h^4 b^2 d^2 e + 10c^2 h^2 b g d^2 e - 4ch^3 b g d^2 e + 3c^3 h g^2 d^2 e - 7c^2 h^2 g^2 d^2 e + 3ch^3 g^2 d^2 e + \\ &+ 2h^2 b^2 g^3 d^2 - 3ch b g^4 d^2 + h^2 b g^4 d^2 + g^5 b d^3 - 2h^2 b^2 g d^3 e - 8ch b g^2 d^3 e - c^2 g^3 d^3 e + 4ch g^3 d^3 e - h^2 g^3 d^3 e - \\ &- 4c^2 h^2 d^3 e^2 - ch b d^4 e^2 + 3h^2 b d^4 e^2 + 6ch g d^4 e^2 + 2b g^3 d^4 e - g^4 d^4 e + b g d^5 e^2 - 2g^2 d^5 e^2 - d^6 e^3 + \\ &+ [ c^3 h^4 b - c^2 h^5 b - c^4 h^3 g + c^3 h^4 g - 2ch^4 b^2 d + 3h^5 b^2 d - 2ch^4 b g d + 3c^3 h^2 g^2 d - 2c^2 h^3 g^2 d + \\ &+ 2h^3 b^2 g d^2 - 3ch^2 b g^2 d^2 + 3h^3 b g^2 d^2 - 3c^2 h g^3 d^2 + ch^2 g^3 d^2 - c^3 h^2 d^2 e + 5c^2 h^3 d^2 e + 2h b g^3 d^3 + c g^4 d^3 - \\ &- c g^2 d^4 e - 2h b g d^4 e + h g^2 d^4 e + 3h d^5 e^2 + 2ch^2 b d^3 e - 6h^3 b d^3 e + 2c^2 h g d^3 e - 6ch^2 g d^3 e ] (a-f) \\ &+ [ -c^2 h^4 d - ch^3 b d^2 + 3h^4 b d^2 + c^2 h^2 g d^2 + h^2 b g d^3 - 2ch g^2 d^3 + h^2 g^2 d^3 - 3h^2 d^4 e + g^3 d^4 ] (a-f)^2 + h^3 d^3 (a-f)^3 \end{aligned}$$

Además se observa que el término de mayor orden en  $d$  y  $e$  es  $-d^6 e^3$ , siendo  $-256d^3 e^3$  el de  $D_Z$  y, como es fácil ver,  $-256d^{15} e^9$  el que aparecería en la expresión de  $D_\lambda$ .

Otra expresión para el  $\Sigma$  la podemos encontrar utilizando la variable  $Y=2Z-X$  de la sección 3.5. De allí deducimos que si

$$\Pi \equiv JY = 3dH + 3hD - (b+2g)J = -h(cb+2cg-3hb) + g(b+2g)d + 3h(a-f)d - 3d^2 e$$

debe cumplirse:

$$0 = \Pi^3 - 3RJ^2\Pi - SJ^3 = 27\Sigma$$

Observemos que tanto en el  $D_Z$  como en el  $\Sigma$  los coeficientes  $a$  y  $f$  aparecen sólo en la forma  $(a-f)$ , con lo que lo mismo tiene que suceder en el  $D_\lambda$ . Esto nos permitiría reducir a 7 el número de coeficientes involucrados en las cuentas, si intentásemos hallar directamente el  $D_\lambda$ . Para hacerlo, lo mejor sería trabajar utilizando la expresión del discriminante en función de  $R_\lambda$  y  $S_\lambda$  (de definición natural y extensa expresión), pues se ve que ambos son también funciones de  $(a-f)$ , mientras que  $T_{V_\lambda}$ , por ejemplo, no lo es. Utilizando el Maple, un ordenador rápido y suficientes megas de memoria se puede probar entonces la conjetura:

$$(22) \quad D_\lambda = \Sigma^2 D_Z$$

Pero, como hicimos para  $n=2$ , vamos a comprobar (22) por caminos que se podrían recorrer con papel y bolígrafo (o al menos con un ordenador modesto):

Haciendo en  $P_4(z)$  el cambio  $z = \frac{y+h}{d}$  se obtiene el polinomio  $P_4(y) = y^4 + py^3 + qy^2 + ry + s$ , con  
 $p = c+3h$ ,  $q = 3h(c+h) + (b-g)d$ ,  $r = h(3c+h) + 2h(b-g)d + (a-f)d^2$ ,  $s = ch^3 + h^2(b-g)d + h(a-f)d^2 - d^3e$

El discriminante  $D_y$  de  $P_4(y)$  (vimos en 3.5 que será casi el  $D_z$ ) se puede, por ejemplo, escribir en función de los también casi invariantes  $R_y$  y  $S_y$ :

$$R_y = q^2 - 3pr + 12s = d^2 R, \quad S_y = 2q^3 - 9qpr - 18qs + 27r^2 + 27p^2s = d^3 S \rightarrow D_y = d^6 D_z$$

El  $\Sigma$  se podrá, entonces, expresar en función de  $J$ ,  $R_y$ ,  $S_y$  y  $\Pi$ . En efecto, se tiene:

$$d^3 \Sigma = \frac{1}{27} [(d\Pi)^3 - 3R_y J^2 (d\Pi) - S_y J^3], \quad \text{si } d\Pi = 3s - qJ + 3J^2$$

Ahora, como para  $n=2$ , intentamos escribir  $P_4(\lambda)$  con otro cambio de variable en función de los coeficientes de  $P_4(y)$  (aquí también aparecerá el  $J$ ). La siguiente forma de escribir el  $p_\lambda$ :

$$p_\lambda = 4dD + 8hJ - r - pJ$$

Sugiere hacer:  $\lambda = \frac{\mu - dD - 2hJ}{d^2} \rightarrow P_4(\mu) = \mu^4 + p_\mu \mu^3 + q_\mu \mu^2 + r_\mu \mu + s_\mu$ , siendo:

$$\begin{aligned} p_\mu &= -r - pJ \\ q_\mu &= qs + (pr - 4s)J + qJ^2 \\ r_\mu &= -ps^2 - (pq - 3r)sJ - (qr - 3ps)J^2 - rJ^3 \\ s_\mu &= s^3 + (p^2 - 2q)s^2J + (2s - 2pr + q^2)sJ^2 + (r^2 - 2qs)J^3 + sJ^4 \end{aligned}$$

El discriminante  $D_\mu$  de  $P_4(\mu)$  se puede escribir en la forma:  $D_\mu = \frac{1}{27} [4R_\mu^3 - S_\mu^2]$ , siendo:

$$R_\mu = q_\mu^2 - 3p_\mu r_\mu, \quad S_\mu = 2q_\mu^3 - 9q_\mu p_\mu r_\mu - 18q_\mu s_\mu + 27r_\mu^2 + 27p_\mu^2 s_\mu$$

Y sabemos que  $R_\mu$ ,  $S_\mu$  y  $D_\mu$  son casi los  $R_\lambda$ ,  $S_\lambda$  y  $D_\lambda$ . Más precisamente, se tiene:

$$R_\mu = d^4 R_\lambda, \quad S_\mu = d^6 S_\lambda, \quad D_\mu = d^{12} D_\lambda$$

Como se puede escribir tanto el  $\Sigma$  como el  $D_y$  en función de  $J$ ,  $d\Pi$ ,  $R_y$  y  $S_y$ , es de esperar (si se ha de satisfacer (22)) que también pueda hacerse lo mismo con el  $R_\mu$  y el  $S_\mu$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} R_\mu &= \frac{1}{9} [R_y (d\Pi)^2 + S_y (d\Pi)J + R_y^2 J^2] \\ S_\mu &= \frac{1}{27} [S_y (d\Pi)^3 + 6R_y^2 (d\Pi)^2 J + 3R_y S_y (d\Pi)J^2 + (S_y^2 - 2R_y^3)J^3] \end{aligned}$$

Deducimos unas igualdades nada visibles a partir de las largas expresiones iniciales de  $R_\lambda$  y  $S_\lambda$ :

$$R_\lambda = \frac{1}{9} [R\Pi^2 + S\Pi J + R^2 J^2], \quad S_\lambda = \frac{1}{27} [S\Pi^3 + 6R^2 \Pi^2 J + 3RS\Pi J^2 + (S^2 - 2R^3)J^3]$$

y que hacen ya sencillo comprobar el resultado (22), es decir, comprobar:

$$\begin{aligned} &4[R\Pi^2 + S\Pi J + R^2 J^2]^3 - [S\Pi^3 + 6R^2 \Pi^2 J + 3RS\Pi J^2 + (S^2 - 2R^3)J^3]^2 = \\ &= [\Pi^3 - 3RJ^2\Pi - SJ^3]^2 [4R^3 - S^2] \end{aligned}$$



**Ejemplo 7.** [s7] 
$$\begin{cases} x' = y^3 + 3xy^2 + 2x^2y - 2x^3 \\ y' = y^3 + 2xy^2 + ex^3 \end{cases}$$

Veamos para qué valores de  $e$  podemos precisar con el teorema 3.2 la estructura del origen de [s7] (y del sistema perturbado con términos de orden mayor que 3). Como:

$$m=-6, n=4, p=6, a_c=-6, a_b=4, c_b=12 \rightarrow A=-32 \neq 0$$

concluimos que no hay  $z$  múltiple asociado a  $\lambda=0$  para ningún valor de  $e$ .

El único problema es que haya centro o foco. Esto ocurre si  $e < -11/16 = -0.6875 = e^*$  pues:

$$P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 2z - e \rightarrow Q=12, V_2=24(e-1), D_2=-16(16e+11)(e-1)^2, R=12(1-e)$$

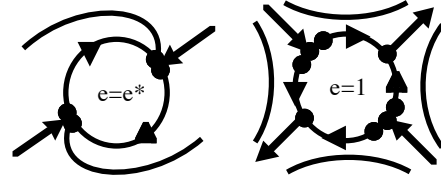
Por ahora no sabemos precisar su estabilidad para esos valores.

[con el capítulo 4 se podría ver que es centro si  $e=-1$ , foco estable si  $-1 < e < e^*$  e inestable si  $e < -1$ : será  $I_0=3456(1+e)(1-e)$  lo que implicará que sólo podrá ser centro si  $e=-1$  y de hecho lo será: el  $P_4(z)$  se puede factorizar por ser fácilmente calculable la  $Z$  de 3.5]

¿Cómo es el mapa de fases local de [s5] para  $e \geq e^*$  ?

Si  $e=e^*$  ( $D_z=0, V_2 < 0$ ), hay dos  $z$  complejas y una doble real:  $z_d=1/2 \rightarrow \lambda=-1/8$ .

Si  $e=1$  ( $D_z=V_2=R=0, Q \neq 0$ ), una triple real  $z_t=-1 \rightarrow \lambda=-2$  y otra simple  $z_s=1 \rightarrow \lambda=4$ .



Para los demás valores hay siempre dos reales distintas y dos complejas ( $D_z < 0$ ).

Como

$$s_\lambda = -e^3 - 7e^2 - 16e - 8 = 0$$

sólo tiene una raíz real ( $e^{**} \approx -0.6854$ ), por ser menor que cero el discriminante del polinomio cúbico, sólo para  $e=e^{**}$  existe un autovalor (simple)  $\lambda=0$  y sólo en ese caso habría que hallar términos de la variedad centro y no bastarían para analizar el punto los términos de orden 3. En los demás se mantiene la estructura de la aproximación homogénea.

Puesto que sólo si  $e=e^{**}$  pueden los autovalores cambiar de signo, para  $e^* < e < e^{**}$  siguen siendo negativos los  $\lambda$  asociados a los dos  $z$  reales y por tanto hay un nodo estable.

Por la misma razón, para  $e > e^{**}$  ( $e \neq 1$ ) hay un  $\lambda$  positivo y otro negativo como para  $e=1$ . Además la orientación de la circunferencia dada por el signo del  $\Delta(x,y)$  del teorema 3.2 será en todo caso similar a la de  $e=1$  (es decir, la  $z$  asociada al  $\lambda$  positivo será mayor que la asociada al negativo). Hay, pues, para  $e > e^{**}$  un punto silla.

[que conste que existen sistemas homogéneos de orden 3 con un  $\lambda$  positivo y otro negativo que no son sillas sino puntos con 4 sectores elípticos (como por ejemplo  $x'=y^3-2x^2y$ ;  $y'=x^3-2xy^2$ )]

**Ejemplo 8.** Sea ahora [s8]  $\begin{cases} x' = y^3 + 3xy^2 - 2x^3 \\ y' = y^3 + ex^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 2z - e$  como en [s5].

Sin embargo en este ejemplo nos aparecen situaciones complicadas. Se tiene que:

$$A=0, B=216(e-1)(e+1) \rightarrow \text{si } e = 1, -1 \text{ pueden haber } z \text{ m\u00faltiples asociados a } \lambda=0$$

Para  $e=-1$  hay centro o foco (se puede ver que centro). Para  $e=1$ :

$$P_4(z) = [z+1]^3[z-1], z=-1 \text{ triple asociado a } \lambda=-1+3-2=0.$$

[a lo mismo nos hubiera llevado el an\u00e1lisis de las ra\u00edces de  $P_4(z)$  y el c\u00e1lculo de  $n_{zt}=48(1-e)$ ]

Por tanto, si  $e=1$  no basta el teorema 3.2 para analizar el origen de [s8].

\u00bfPara qu\u00e9 otros valores hay  $z$  m\u00faltiples? Para  $e=e^*$ . Ahora al  $z_d=1/2$  est\u00e1 asociado  $\lambda=-9/8$ .

\u00bfCu\u00e1ndo existe alg\u00fan  $\lambda=0$ ? Resulta ser

$$s_\lambda = (1-e)(e^2 - 20e - 8).$$

As\u00ed que la aproximaci\u00f3n homog\u00e9nea tiene una recta de puntos cr\u00edticos tambi\u00e9n para  $e=10 \pm 6\sqrt{3}$  ( $\approx 20.39, -0.39$ ) y si le a\u00f1adimos t\u00e9rminos de mayor orden, es preciso calcular t\u00e9rminos de la variedad centro para completar el an\u00e1lisis.

Por todo lo anterior, la estructura del origen es la misma (y no depende de t\u00e9rminos de orden superior) en cada una de los siguientes intervalos:

$$\text{i) } e^* < e < 10 - 6\sqrt{3}, \text{ ii) } 10 - 6\sqrt{3} < e < 1, \text{ iii) } 1 < e < 10 + 6\sqrt{3}, \text{ iv) } e > 10 + 6\sqrt{3}.$$

Elijamos un  $e$  de cada regi\u00f3n para ver c\u00f3mo es (en todos los casos existen dos  $z$  reales):

Para i) los  $\lambda$  seguir\u00e1n siendo negativos como para  $e=e^*$  y tendremos un nodo estable.

En ii) elegimos  $e=0 \rightarrow z_1=0 (\lambda=-2)$  y  $z_2 \approx 0.84 (\lambda \approx 0.7)$  + orientaci\u00f3n  $\rightarrow$  silla.

Para iii) si  $e=4 \rightarrow z_1=-2 (\lambda=2)$  y  $z_2=2^{1/3} (\lambda=108^{1/3}) \rightarrow$  nodo inestable.

Para iv) si  $e=28 \rightarrow z_1=2 (\lambda=2)$  y  $z_2 \approx 2.9 (\lambda=-1.2)$  + orientaci\u00f3n  $\rightarrow$  silla.

### 3.7 Ideas sobre estabilidad.

La estabilidad de un punto crítico elemental es bien fácil de determinar: si la parte real de los dos autovalores es negativa el punto es asintóticamente estable y si existe algún autovalor con parte real mayor que cero es inestable. En las secciones anteriores hemos hablado de los 'autovalores' de las aproximaciones homogéneas de orden 2 y 3. La intención de ésta es ver si se puede generalizar algo de las ideas de los sistemas lineales a estos de mayor orden.

Primero tratamos el caso  $n=2$ . Es decir, estudiemos la estabilidad del sistema:

$$[S2] \quad \begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 + A(x,y) \\ y' = ex^2 + fxy + gy^2 + B(x,y) \end{cases}, \quad A \text{ y } B \text{ de orden mayor que } 2$$

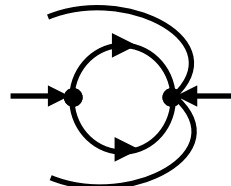
Llamemos [H2] a su aproximación homogénea. Suponemos que  $c \neq 0$  (o sea que  $x=0$  no es invariante) para simplificar las discusiones. No se pierde generalidad pues un cambio de variable lineal giraría  $x=0$ . Puesto que  $x' = \lambda x^2 + \dots$ , con  $\lambda \neq 0$  siempre se aleja por la izquierda o por la derecha del origen, el primer resultado es inmediato:

Si existe algún autovalor real de [H2] distinto de 0 el origen de [S2] es inestable

Por tanto, para que un sistema del tipo [S2] pueda ser estable o asintóticamente estable deben ser 0 todos sus autovalores reales. La forma más fácil de dar un [S2] asintóticamente estable es a partir de un [H2] que tenga un solo  $z$  real asociado a  $\lambda=0$ .

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x' = y^2 - x^3 \\ y' = -xy \end{cases} \rightarrow \Delta(x,y) = -y(y^2 + x^2) \rightarrow y=0 \text{ simple} \rightarrow \lambda=0$$



Orientando la variedad centro:  $y=0 \rightarrow x' = -x^3$

Con lo que el esquema del punto es el de la derecha:

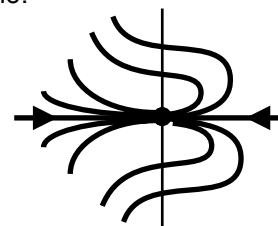
Otra posibilidad más complicada es que existan tres  $z$  asociados a  $\lambda=0$ . Esto sólo puede ocurrir si hay  $z$  múltiples, pues es imposible que  $a+bx+cx^2$  se anule para tres  $z$  distintos (es decir, [H2] sólo puede tener dos rectas de puntos críticos). De otra forma: imponiendo que en la ecuación de autovalores se anulen los coeficientes de  $\lambda^2$  y  $\lambda$  y el término independiente se obtienen dos únicas posibilidades de expresar  $a$ ,  $f$  y  $e$  en función de los demás:

$$a = -\frac{g[b+g]}{c}, \quad f = \frac{bg}{c}, \quad e = -\frac{g^2[b+g]}{c^2} \quad \text{ó} \quad a = \frac{[b-g][2b+g]}{9c}, \quad f = -\frac{[b-g][b-4g]}{9c}, \quad e = -\frac{[b-g]^3}{27c^2}$$

con un  $z$  doble y uno simple en el primer caso y con uno triple en el segundo (asociados todos a  $\lambda=0$ ). En general, habría que esperar a la siguiente sección para tratar un [S2] de estos, pero podemos dar un ejemplo integrable con el origen asintóticamente estable:

$$\begin{cases} x' = y^2 - x^3 \\ y' = -3x^2 y \end{cases} \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{3y} - \frac{y}{3x^2}. \text{ Ecuación de Bernouilli de solución:}$$

$$x = [Cy - y^2]^{1/3}$$



El dibujo aproximado de su mapa de fases es el de la derecha:

Pasemos ya a considerar el caso  $n=3$  :

$$[S3] \quad \begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + A(x,y) \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 + B(x,y) \end{cases}, \quad A \text{ y } B \text{ de orden mayor que } 3$$

donde suponemos que  $d \neq 0$ . Ahora se pueden ya presentar situaciones más parecidas a las de  $n=1$  : es posible que la aproximación homogénea [H3] sea asintóticamente estable y pueden aparecer centros y focos. Pero también van a ser muchas las diferencias (la complicación del análisis entre ellas). Nos limitamos a tratar de analizar cuando [H3] es asintóticamente estable, lo que, según todo lo visto hasta ahora, nos garantiza lo mismo para el sistema [S3] (veremos en el próximo capítulo que esto es cierto también en el caso de los focos). No puede entonces existir ningún  $\lambda=0$  (no puede haber rectas de puntos críticos en [H3]). [H3] podía tener 4, 2 ó 0 vectores propios reales (y el mismo número de autovalores). En los dos primeros casos la estabilidad estaba ligada a las de  $x' = \lambda x^3 + \dots$  [en el tercero, la estabilidad dependerá del signo de una integral  $I$ , que definiremos en 4.1]. Así que se tiene el siguiente resultado que permite estudiar la estabilidad de [S3] directamente a partir de la ecuación de autovalores de [H3]:

### Teorema 3.7

Si [H3] posee  $\lambda$  reales y todos esos  $\lambda$  reales son negativos, el origen de [S3] es asintóticamente estable.

Tal vez podría pensarse que existiese, como en el caso lineal, una relación entre la parte real de los autovalores complejos y la estabilidad. Pero esto es falso tanto en el caso de los focos como en el de 2 reales + 2 complejos, como muestran los siguientes contraejemplos:

$$\begin{cases} x' = -x^3 - y^3 \\ y' = -3x^2y + 4xy^2 - 3y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 2z = z(z-1)(z^2 - 2z + 2) \rightarrow \begin{cases} z=0 \rightarrow \lambda=-1 \\ z=1 \rightarrow \lambda=-2 \end{cases}$$

El origen es asintóticamente estable y, sin embargo, los  $\lambda$  complejos son con  $\text{Re} \lambda > 0$  :

$$z=1+i \rightarrow \lambda=1-2i, \quad z=1-i \rightarrow \lambda=1+2i$$

Los autovalores los podíamos haber calculado a partir de su ecuación, encontrada en 5.4:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 11\lambda + 10 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

Los signos de los  $\lambda$  reales podríamos hallarlos de otra forma más larga (pero generalizable): hallando para  $P_4(\lambda)$  la secuencia de polinomios de Sturm, citados en 5.3, y evaluándolos en  $-\infty$ ,  $0$  e  $\infty$ . Hallando los  $Q$ ,  $T$ ,  $V_2$ ,  $T_V$  y  $D_4$  allí citados se obtiene:

$-\infty$	m	-m	Q	$-V_2$	$D_4$	→	1	-1	-5	1960	-173056
<b>0</b>	s	r	T	$-T_V$	$D_4$	→	10	11	-149	-4720	-173056
$\infty$	m	m	Q	$V_2$	$D_4$	→	1	1	-5	-1960	-173056

Por tanto hay 2 autovalores reales negativos y no hay ningún autovalor real positivo.

$$\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = m^2x^3 + 2x^2y + 2mxy^2 - y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = (z^2+m)^2; \text{ si } m>0, z = \pm i\sqrt{m} \rightarrow \lambda = 2 + m \pm i\sqrt{m}$$

Este será el ejemplo 1 de 4.1. Allí veremos que el origen es un foco estable para  $m > 2$ . En cambio, la  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  para todo  $m > 0$ . Para  $m < 0$  (cuatro  $z$  reales) el signo de  $\lambda = 2 + m \pm \sqrt{-m}$  sí nos da la estabilidad: es asintóticamente estable si  $m < -4$ . Otra forma de ver lo último sería hallar el signo de las raíces reales de:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - 4(m+2)\lambda^3 + 2(m^3+3m^2+12m+12)\lambda^2 - 4(m+1)(m+2)(m^2+4)\lambda + (m+1)^2(m^2+4)^2$$

El objetivo ideal que podríamos plantearnos sería encontrar una caracterización, a ser posible algebraica, de la estabilidad del origen de [H3] en términos de sus coeficientes. Pero veremos que no se puede expresar la integral  $I$  del caso complejo de forma sencilla. Y el análisis de los casos reales también se hace muy complicado: aunque la distinción entre cuando hay 4 ó cuando hay 2 raíces reales no es demasiado larga (basta considerar la ecuación de vectores propios y utilizar la clasificación de 3.5) sí lo es precisar en cada caso si los 4 o los 2 autovalores existentes son todos negativos o no. En teoría esto se puede afirmar sin más que aplicar el método de Sturm a la ecuación de los  $\lambda$ .

Pero si el  $P_4(\lambda)$  ya tiene unos coeficientes  $m, p, q, r$ , s bastante gordos (respectivamente, de orden 2, 3, 4, 5, 6 en términos de los coeficientes de [H3]) lo son mucho más los  $Q, T, V_2, T_V$  y  $D_4$  de los polinomios de Sturm (de orden 6, 8, 14, 15 y 24, aunque el resultado (22) de 3.6 permita hallar en vez del  $D_4$ , el discriminante de orden 6 de la ecuación en  $z$ ).

Conclusiones más modestas sobre estabilidad sí se podrían dar utilizando los resultados clásicos del estudio de polinomios. Por ejemplo, de la ley de Descartes de los signos se sigue:

Si  $P_4(\lambda)$  tiene raíces reales y todos sus coeficientes son positivos  $\Rightarrow$  el origen es AE.

[esto (y el hecho de que el discriminante de  $P_4(z)$  era negativo) bastaba para garantizar la estabilidad asintótica del primero de los dos ejemplos analizados]

O del simple teorema de Bolzano para funciones continuas:

$$s_\lambda < 0 \Rightarrow \text{el origen es inestable.}$$

[También en el caso de autovalores todos complejos, se podrían enunciar, a la vista de la expresión que daremos de la  $I$ , condiciones suficientes de estabilidad. Por ejemplo:

Si no hay  $\lambda$  reales,  $d(c+3h) > 0$ ,  $d(3a+f) > 0$  y  $(b+g)^2 \leq (c+3h)(3a+f) \Rightarrow$  el origen es AE].



## 4. ¿Centros o focos?

Dado el sistema analítico:

$$[S] \begin{cases} x' = A^n(x,y) + A^{n+1}(x,y) + \dots \\ y' = B^n(x,y) + B^{n+1}(x,y) + \dots \end{cases}$$

abordaremos en este capítulo uno de los casos en que no basta el teorema 3.2 para precisar su estructura local: cuando son complejos todos los 'autovalores' de la aproximación homogénea (necesariamente  $n$  ha de ser impar). En ese caso sabemos que no hay órbitas que pasen por el origen con pendiente definida y el punto es un centro o un foco.

Analizaremos en la sección 4.1 cuándo la aproximación homogénea [H] posee un centro, un foco estable o un foco inestable. Veremos que esto dependerá del signo de la integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}(z)}{P_{n+1}(z)} dz, \text{ con } P_{n+1}(z) = B^n - zA^n \Big|_{(1,z)}, E_{n-1}(z) = A^n x + B^n y \Big|_{(1,z)}$$

con  $P_{n+1}(z)$  sin raíces reales (cuando sea  $I=0$  habrá un centro). En 4.2 avanzaremos en el problema de determinar analíticamente el signo de integrales de la forma  $I$  para  $n=3$  (problema nada trivial) y aplicaremos los resultados en 4.3 al estudio de sistemas concretos.

Para determinar el signo de  $I$  para  $n=3$  comenzaremos hallando su valor en términos de las raíces de los polinomios de tercer grado que aparecieron en la sección 3.5. Luego trataremos varios casos de  $P_4$  factorizables para los que se puede dar una expresión algebraica de  $I$  en términos de los coeficientes, detallando al tiempo cuando  $P_4$  sólo posee raíces complejas. Deduiremos a continuación una condición necesaria para la anulación de  $I$ : debe anularse un polinomio  $I_0$  de orden 6 en los coeficientes de  $E_2$  y  $P_4$ .

Estudiaremos después lo que sucede al añadir a [H] términos de mayor orden: los focos se conservarán, pero los centros pueden convertirse en focos. Primero repasaremos en 4.4 los muy estudiados centros elementales (su estabilidad la determinan los llamados valores focales o constantes de Lyapunov  $I_n$  (polinomios en términos de los coeficientes del sistema); para que el sistema no lineal tenga un centro deben anularse todas las  $I_n$ ). Luego trataremos los no elementales en 4.5, con más detalle los de aproximación cúbica. Para estos centros cúbicos (es decir, con  $I=0$ ) perturbados la siguiente condición que da su inestabilización será una integral  $J$  mucho más complicada que la  $I$  (la  $J$  vendría a ser la siguiente 'constante de Lyapunov'):

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{Q_8}{P_4^{5/2}} + \frac{Q_{12}}{P_4^{7/2}} \right] E dz, \text{ con } E(z) = \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{P_4} \right],$$

$$Q_8(z) = B^3 A^5 - A^3 B^5 \Big|_{(1,z)}, Q_{12}(z) = [B^4 - zA^4][A^3 B^4 - B^3 A^4] \Big|_{(1,z)}.$$

Esta  $J$  (evidentemente no calculable en general) la conseguiremos reducir a otra similar con el numerador de grado 2 que, en ocasiones, tendrá signo definido. Si esto es así, habríamos probado algebraicamente que el centro se ha convertido en foco.

La primera prueba (con errores; ver [31]) de que en un sistema analítico no pueden existir centro-focos por no poder acumularse los ciclos límites se encuentra en [1].

Que la distinción entre centro y foco homogéneo depende de una integral se puede ver ya en [3]. En [6], [26] y [35] se utiliza una integral similar a la  $I$  que hemos definido pero el numerador de su integrando es  $A^n$ . Considerar dicha  $I$  (utilizada en [32] y [38]), simplifica aun más los cálculos al tener el numerador de un grado inferior (lo que la hace estrictamente convergente; además deja claro que se anula, como debe, si el sistema es exacto).

No parece existir ningún resultado similar al teorema 4.2 ni a las demás técnicas de distinción entre centros y focos (expuestas en [38]). En [32] se dan condiciones algebraicas de estabilidad de focos cúbicos (y de mayor orden), pero a partir de la suposición de que el polinomio del denominador de  $I$  ya está factorizado, con lo que se evita la principal dificultad.

Hay muchas referencias sobre los centros lineales perturbados de 4.4. Esta sección no deduce resultados nuevos, aunque sí presenta, de forma simplificada, detallada y fácilmente reproducible con ordenadores modestos, el cálculo de los primeros valores focales. El  $I_3$  está calculado, por ejemplo, en el capítulo IX de [8] (por la vía aquí seguida, pero sin detalles) o en el 3 de [13] (de modo totalmente diferente). Nuestras integraciones por partes para abreviar el cálculo de los siguientes valores focales son similares a las de [12] o [21]. Un camino alternativo, basado en desarrollos en serie de funciones de Lyapunov, está descrito en [3], [10] o [15]. No conocemos expresiones tan reducidas como la nuestra para  $I_5$  en el caso general.

Se han calculado muchas más veces las  $I_n$  para sistemas concretos, con el fin de obtener condiciones algebraicas necesarias y suficientes para la existencia de centros y avanzar en el principal problema abierto en la teoría de sistemas polinomiales planos, el llamado problema 16 de Hilbert sobre el máximo número de ciclos límites de un sistema polinomial de grado  $n$ , no resuelto siquiera para  $n=2$  (ver [22] o [30]). Un buen artículo de resumen sobre la integrabilidad de los sistemas cuadráticos  $x'=y+ax^2+bxy+cy^2$ ;  $y'=-x+ex^2+fx+gy^2$  (sobre los que hay más de 800 publicaciones) es [27] que indica los errores de alguna referencia anterior (la clásica y muy citada [4] o [16]), además de probar condiciones de centro, como las nuestras, en términos de los coeficientes del sistema inicial (y no del habitual con  $e+g=0$  al que se lleva mediante un cambio de variable). Se dan condiciones de centro bastante compactas en términos de la forma compleja de estos sistemas en [29]. Para los centros perturbados con polinomios cúbicos se puede ver [33] que se basa en [5]. Sistemas con términos cuadráticos y cúbicos se tratan en [23], [28] u [34], con términos de orden cuatro en [21] y [35], de orden cinco en [37] ...

Hay muchos menos resultados sobre los centros y focos homogéneos perturbados de 4.5. Que un foco se conserva está probado en [35]. Integrales (en polares) en la línea de la  $J$  del teorema 4.4 (presentada en [38]) aparecen en [3], [9], [18], [19], [25] o [28], pero casi nada se dice sobre la determinación efectiva de su signo, ni se realizan nuestras reducciones. Y los sistemas con focos no elementales analizados son mucho más fáciles que los nuestros (por ejemplo, es  $P_4=1$  en [28]). En relación con este tema es importante tener en cuenta el artículo [7] que prueba a través de un contraejemplo que, en general, el problema de distinguir entre centros y focos de este tipo de sistemas es, a diferencia de lo que ocurre con los lineales, algebraicamente irresoluble. Hay reflexiones sobre esta idea en [14], [20], [24] o [25].

Un breve y buen repaso de la poligonal de Newton (que se utilizará en este y, sobre todo, en el siguiente capítulo) se puede leer en el capítulo 2 del [11]. Libros de geometría que tratan este tema (y que también exponen resultados sobre polinomios) son [2] y [17].



## Referencias del capítulo 4

- [1] H. Dulac. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France **51** [1923].
- [2] R. J. Walker. Algebraic curves. Princeton University Press [1950].
- [3] V. V. Nemytskii - V. V. Stepanov. Qualitative theory of differential equations.  
Princeton University Press [1960].
- [4] N. N. Bautin. On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients  
from an equilibrium point of focus or center type. Amer. Math.Soc.Transl.Ser.I **5** [1962], 396-413.
- [5] K. S. Sibirsky. On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point.  
Differential Equations **1** [1965], 36-47.
- [6] J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ .  
Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV **79** [1968], 35-69.
- [7] Yu. S. Il'yashenko. Algebraic insolvability and almost algebraic solvability of the  
center-focus problem. Funct. Anal. Appl. **6** [1972], 197-202.
- [8] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Theory of bifurcations  
of dynamical systems on a plane. Wiley [1973].
- [9] N. G. Lloyd. A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems.  
J. London Math. Soc. (2) **20** [1979], 277-286.
- [10] S. Songling. A method of constructing cycles without contact around a weak focus.  
J. of Diff. Eq. **41** [1981], 301-312.
- [11] S. N. Chow - J. K. Hale. Methods of bifurcation theory. Springer-Verlag [1982].
- [12] N. G. Lloyd. Small amplitude limit cycles of polynomial differential equations.  
Lecture Notes in Mathematics **1032** [1982], 346-357.
- [13] J. Guckenheimer - P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and  
bifurcations of vector fields. Springer-Verlag [1983].
- [14] V. I. Arnold. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.  
Springer-Verlag [1983].
- [15] T. R. Blows - N. G. Lloyd. The number of limit cycles of certain polynomial differential  
equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** [1984], 215-239.
- [16] Ye Yanqian. Theory of limit cycles. Trans. Math. Monographs, 66. AMS. [1986].
- [17] E. Brieskorn - H. Knörrer. Plane algebraic curves. Birkhäuser. [1986].
- [18] C. Chicone - J. Sotomayor. On a class of complete polynomial vector fields in the plane.  
J. of Diff. Eq. **61** [1986], 398-418.
- [19] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Some theorems on the existence, uniqueness and  
nonexistence of limit cycles for quadratic systems. J. of Diff. Eq. **67** [1987], 372-399.
- [20] Yu. S. Il'yashenko. Algebraically and analytically solvable problems in theory of  
ordinary differential equations. J. Soviet Math. **47** [1987], 2570-2584.
- [21] M. A. M. Alwash - N. G. Lloyd. Non-autonomous equations related to polynomial  
two-dimensional systems. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **105** [1987], 129-152.
- [22] N. G. Lloyd. Limit cycles of polynomial systems. LMS Lect. Notes Series **127** [1988], 192-234.
- [23] N. G. Lloyd - T. R. Blows - M. C. Kalenge. Some cubic systems with several limit cycles.  
Nonlinearity **1** [1988], 653-669.
- [24] V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations.  
Encyclopaedia of Math. Sci., vol 1. Springer- Verlag [1989].
- [25] A. D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer- Verlag [1989].

- [26] A. Cima - J.Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. *J. of Math. Anal. and Appl.* **147** [1990], 420-448.
- [27] D. Schlomiuk - J. Guckenheimer - R. Rand. Integrability of plane quadratic vector fields. *Expo. Math.* **8** [1990], 3-25.
- [28] T. R. Blows - C. Rousseau. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields. *J. of Diff. Eq.* **104** [1993], 215-242.
- [29] H. Zoladek. Quadratic Systems with Center and Their Perturbations. *J. of Diff. Eq.* **109** [1994], 223-273.
- [30] F. Dumortier - P. Roussarie - C. Rousseau. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields. *J. of Diff. Eq.* **110** [1994], 86-133.
- [31] Yu. S. Il'yashenko - S. Yakovenko. Concerning the Hilbert 16th problem. *AMS Translations, Series 2, vol 165* [1995].
- [32] C. B. Collins. Algebraic conditions for a center or a focus in some simple systems of arbitrary degree. *J. of Math. Anal. and Appl.* **195** [1995], 719-735.
- [33] C. Rousseau - D. Schlomiuk. Cubic vector fields symmetric with respect to a center. *J. of Diff. Eq.* **123** [1995], 193-223.
- [34] A. S. Shubé. The structure of the integrating factor of a cubic system with a singular point of center type. *Differential Equations* **32** [1996], 726-729.
- [35] J. Llibre - J. S. Pérez del Río - J. A. Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity. *J. of Diff. Eq.* **125** [1996], 490-520.
- [36] J. Chavarriga - J. Giné. Integrability of a linear center perturbed by a fourth degree homogeneous polynomial. *Publicacions Matemàtiques* **40** [1996], 21-39.
- [37] J. Chavarriga - J. Giné. Integrability of a linear center perturbed by a fifth degree homogeneous polynomial. *Publicacions Matemàtiques* **41** [1997], 335-356.
- [38] J.I.Aranda. Centros y focos degenerados de sistemas analíticos planos. *Actas XV CEDYA* [1997] (aún no publicadas).

### 4.1 Sistemas homogéneos.

Consideremos primero el sistema analítico homogéneo

$$[H] \begin{cases} x' = A^n(x,y) = a_{n0}x^n + \dots + a_{0n}y^n \\ y' = B^n(x,y) = b_{n0}x^n + \dots + b_{0n}y^n \end{cases}$$

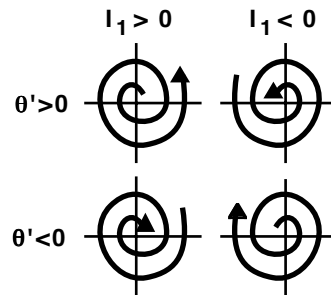
Escrito en polares [  $c=\cos\theta$ ,  $s=\text{sen}\theta$  , como en el capítulo 3 ], adopta la forma:

$$[P] \begin{cases} r' = [cA^n(c,s) + sB^n(c,s)]r^n \equiv M_n(\theta) r^n \\ \theta' = [cB^n(c,s) - sA^n(c,s)]r^{n-1} \equiv m_n(\theta) r^{n-1} \end{cases} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{M_n(\theta)}{m_n(\theta)} r$$

Supondremos que el denominador  $m_n(\theta) = b_{n0}c^{n+1} + \dots - a_{0n}s^{n+1}$  no se anula para ningún  $\theta$  (por tanto, debe ser el producto  $b_{n0} \cdot a_{0n} < 0$  ). Entonces sabemos por el capítulo 3 que no existen variedades que lleguen al origen con pendiente definida y por tanto [H] tiene un centro o un foco en el origen. Recordemos que para que  $m_n$  no tenga raíces reales es necesario que  $n$  sea impar. Como  $M_n$  y  $m_n$  son entonces  $\pi$ -periódicas, está claro que la  $r$  de las órbitas tenderá a infinito con  $\theta$  , será función periódica de  $\theta$  o tenderá hacia 0 al tender  $\theta$  hacia infinito, según sea mayor, igual o menor que cero, respectivamente, la integral:

$$I_1 \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{M_n(\theta)}{m_n(\theta)} d\theta$$

[H] tendrá entonces un centro en el segundo caso y un foco en los otros dos. Para precisar la estabilidad del foco no basta precisar el signo de la integral. Es necesario conocer, además, el signo de  $m_n(\theta)$  , o lo que es lo mismo, el signo de  $b_{n0}$  o el de  $a_{0n}$  ( si  $a_{0n} > 0$  ,  $\theta$  decrece con  $t$  , y crece si  $a_{0n} < 0$  ):



Hagamos algunas operaciones para facilitar el cálculo de la integral. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} m_n &= -csB^n_x + c^2B^n_y + s^2A^n_x - csA^n_y - B^n_s - A^n_c = \\ &= A^n_x + B^n_y - c(cA^n_x + sA^n_y) - A^n_c - s(cB^n_x + sB^n_y) - B^n_s = A^n_x + B^n_y - (n+1)M_n \end{aligned}$$

puesto que para cualquier polinomio homogéneo  $P(x,y)$  de grado  $n$  se cumple que:

$$xP_x(x,y) + yP_y(x,y) = nP(x,y)$$

Por tanto, si llamamos  $E_{n-1}(x,y) \equiv A^n_x(x,y) + B^n_y(x,y)$ , se tiene:

$$I_1 = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c,s)}{m_n} d\theta - \frac{1}{n+1} [\ln m_n]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c,s)}{m_n} d\theta$$

Olvidamos la constante positiva, hacemos el cambio de variable  $z = \tan \theta$  en esta última integral, utilizamos para su denominador la notación del capítulo anterior y definimos:

$$I \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c,s)}{m_n(\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}(1,z)}{P_{n+1}(z)} dz, \quad P_{n+1}(z) = B^n(1,z) - zA^n(1,z)$$

[Si no hay ninguna órbita de [H] que llegue al origen con pendiente definida es  $P_{n+1}(z) \neq 0 \forall z$ ].

Recopilando lo anterior se tiene el siguiente teorema:

#### Teorema 4.1

Supongamos que  $P_{n+1}(z) \neq 0 \forall z$ . Entonces:

Si la integral  $I=0$ , el origen de [H] es un centro.

Si  $I \cdot a_{0n} > 0$ , el origen de [H] es un foco estable.

Si  $I \cdot a_{0n} < 0$ , el origen de [H] es un foco inestable.

[Si el sistema es exacto se tiene  $I=0$  y el origen es un centro, como debía ocurrir].

Veamos la forma particular que adopta el teorema para los dos casos más sencillos:  $n=1$  y  $n=3$ .

Si  $n=1$ , el sistema es lineal: 
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = ex + fy \end{cases}$$

y se tiene:

$$P_2(z) = -bz^2 + (f-a)z + e, \quad E_0 = a+f.$$

Para que tenga centro o foco debe ser  $P_2(z) \neq 0 \forall z \Leftrightarrow (f-a)^2 + 4be < 0$  [ $\Rightarrow be < 0$ ]. Como

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a+f}{-bz^2 + (f-a)z + e} dz = -\text{sg}(b) \frac{2\pi(a+f)}{\sqrt{-(f-a)^2 - 4be}} \rightarrow \text{sg}[I \cdot b] = -\text{sg}[a+f]$$

y por tanto:

si  $a+f=0$  el origen es un centro,  
 si  $a+f < 0$  el origen es un foco estable  
 si  $a+f > 0$  el origen es un foco inestable

( Resultado inmediato a partir de los autovalores del sistema:  $\lambda = \frac{1}{2} [ f+a \pm \sqrt{(f-a)^2 + 4be} ]$  ).

Si  $n=3$ , nuestro sistema es [H3]  $\begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$

Para que tenga centro o foco debe ser:

$$P_4(z) = -dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e \neq 0 \quad \forall z \quad (\Rightarrow de < 0).$$

Ahora

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c+3h)z^2 + (2b+2g)z + (3a+f)}{-dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e} dz$$

es la integral que informa sobre la estabilidad. Para calcular  $I$  necesitamos factorizar el denominador. Esto, en teoría, se puede hacer ya que, como vimos en 3.5, existen fórmulas para el cálculo de las raíces de un polinomio de cuarto orden. Pero son poco útiles en la práctica. En la sección siguiente abordaremos el problema de precisar con detalle cuándo el denominador no tiene raíces reales y el problema general de determinar el signo de  $I$ . Pero por ahora, nos limitamos a hallar directamente  $I$  en dos casos en los que la descomposición del denominador es especialmente sencilla.

Primero, supongamos que  $P_4(z) = -d[z^2 + Az + C]^2$ , siendo  $4C - A^2 > 0$ .

Debe ser entonces:

$$h-c = -2dA, \quad g-b = -d(A^2 + 2C), \quad f-a = -2dAC, \quad e = -dC^2$$

Por tanto:

$$A = \frac{c-h}{2d}, \quad C = \frac{1}{8d^2} [4d(b-g) - (c-h)^2] \rightarrow 4C - A^2 = \frac{1}{4d^2} [8d(b-g) - 3(c-h)^2]$$

y han de satisfacerse las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$f = a - \frac{c-h}{8d^2} [4d(b-g) - (c-h)^2], \quad e = -\frac{1}{64d^3} [4d(b-g) - (c-h)^2]^2 \quad (1)$$

Es fácil de calcular una integral de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2z^2 + a_1z + a_0}{[z^2 + Az + C]^2} dz = 2\pi \frac{2a_2C + 2a_0 - a_1A}{[4C - A^2]^{3/2}} \quad (2)$$

De lo anterior se deduce que:

$$I = -\operatorname{sg}(d) 16\pi \frac{8d^2a + d(5bh - 3gh - bc - gc) - h(c-h)^2}{[8d(b-g) - 3(c-h)^2]^{3/2}}$$

Así pues, si  $8d(b-g) > 3(c-h)^2$  y los coeficientes del sistema satisfacen las relaciones (1), concluimos que el origen de [H3] es del tipo esquematizado a continuación:

$$\begin{array}{l} 8d^2a + d(5bh - 3gh - bc - gc) - h(c-h)^2 < 0 \rightarrow \text{foco E} \\ \phantom{8d^2a + d(5bh - 3gh - bc - gc) - h(c-h)^2} = 0 \rightarrow \text{centro} \\ \phantom{8d^2a + d(5bh - 3gh - bc - gc) - h(c-h)^2} > 0 \rightarrow \text{foco I} \end{array}$$

Otro caso fácilmente resoluble aparece si  $a=f$  y  $c=h$ , entonces:

$$P_4(z) = -dz^4 + (g-b)z^2 + e = 0 \rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{g-b}{d} \pm \sqrt{\left[\frac{b-g}{d}\right]^2 + 4\frac{e}{d}} \right]$$

Las cuatro raíces de  $P_4(z)$  han de ser complejas. Esto puede darse en dos casos que conducen a las dos posibles factorizaciones diferentes del polinomio bicuadrado  $P_4$ :

Si  $\frac{b-g}{d} > 2\sqrt{-\frac{e}{d}} \equiv 2S$ , el corchete es real y negativo y hay cuatro raíces imaginarias puras. Así:

$$P_4(z) = -d[z^2+C][z^2+D], \quad C, D > 0$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{[z^2+C][z^2+D]} dz = \pi \frac{a_0 + a_2 \sqrt{CD}}{\sqrt{CD}(\sqrt{C} + \sqrt{D})} \quad (3)$$

y se tiene que

$$\sqrt{CD} = S, \quad C+D = \frac{b-g}{d} \rightarrow \sqrt{C} + \sqrt{D} = \sqrt{\frac{b-g}{d} + 2S}$$

deducimos que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4cz^2 + 2(b+g)z + 4a}{-d[z^2+C][z^2+D]} dz = -4\pi \frac{a+cS}{dS\sqrt{\frac{b-g}{d} + 2S}} \quad (4)$$

Así pues,

$$\text{sg}[d \cdot I] = -\text{sg}[a + cS]$$

Si  $-2S < \frac{b-g}{d} < 2S$ ,  $z^2$  es complejo, las raíces de  $P_4$  tienen parte real y entonces:

$$P_4(z) = -d[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C], \quad 4C - A^2 = \frac{b-g}{d} + 2S > 0, \quad C = S$$

Ahora:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C]} dz = \pi \frac{a_0 + a_2 C}{C\sqrt{4C - A^2}} \quad (5)$$

y obtenemos para  $I$  exactamente la misma expresión (4) que en el subcaso anterior.

Si  $\frac{b-g}{d} = 2S$ , es  $P_4(z) = -d[z^2 + C]^2$ ,  $C > 0$  y el valor de  $I = -2\pi \frac{a+cS}{dS^{3/2}}$  está recogido en (4).

Y, por último, si  $\frac{b-g}{d} \leq -2S$ , el denominador  $P_4(z)$  posee raíces reales.

Resumiendo, en el caso de que sea

$$a=f, \quad c=h \quad \text{y} \quad \frac{b-g}{d} > -2\sqrt{-\frac{e}{d}}$$

deducimos del teorema 4.1 que el origen del sistema [H3] tiene la siguiente estabilidad:

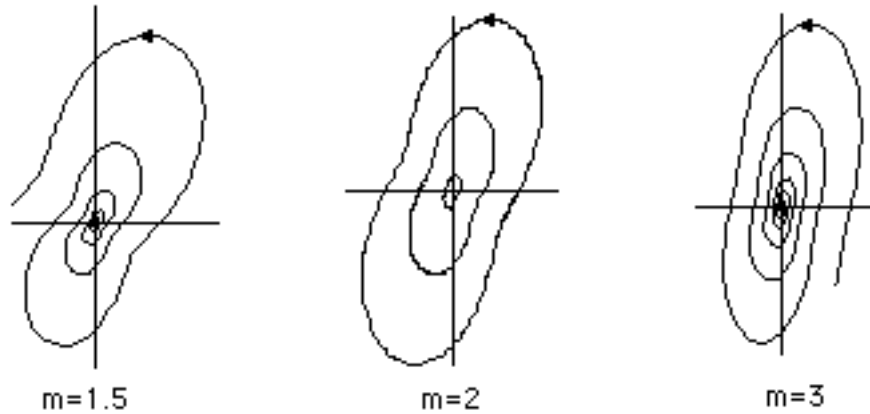
$c\sqrt{ e } + a\sqrt{ d }$	$< 0 \rightarrow$ foco E
	$= 0 \rightarrow$ centro
	$> 0 \rightarrow$ foco I

**Ejemplo 1.**  $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = m^2x^3 + 2x^2y + 2mxy^2 - y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 2mz^2 + m^2 = [z^2 + m]^2$

Este sistema posee un centro o un foco si  $m > 0$ . Para precisar su estabilidad podemos acudir a las fórmulas de los dos casos analizados. De cualquiera de ellas deducimos que:

$$0 < m < 2 \rightarrow \text{foco I} \quad m = 2 \rightarrow \text{centro} \quad m > 2 \rightarrow \text{foco E}$$

Integrando gráficamente con el ordenador para los tres valores de  $m$  indicados abajo:



**Ejemplo 2.**  $\begin{cases} x' = -x^4y + ax^3y^2 - y^5 \\ y' = 3x^5 + 6x^4y + 2x^3y^2 + ax^2y^3 \end{cases} \rightarrow P_6(z) = z^6 + 3[z+1]^2 > 0 \text{ para todo } z.$

Tenemos que  $a_{05} = -1 < 0$  y que  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_4(1,z)}{P_6(z)} dz = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{az^2 + 1}{P_6(z)} dz.$

Por el teorema 4.1 está claro que si  $a \geq 0$  el origen es un foco inestable. Pero para discutir lo que sucede si  $a < 0$ , al no disponer de una expresión exacta de  $I$  (que es lo habitual), tenemos que evaluar numéricamente las integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{P_6(z)} dz \approx 1.7456, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P_6(z)} dz \approx 1.0857$$

El cambio de estabilidad (el centro) se da, pues, aproximadamente para  $a \approx -1.615$ .

## 4.2 Cálculo de la integral I para n=3 .

En la sección 4.1 vimos que, si no existen variedades que lleguen al origen, la distinción entre centros y focos de un sistema con aproximación homogénea de tercer orden se reducía al cálculo de una integral de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2(z)}{P_4(z)} dz$$

siendo  $E_2$  un polinomio de segundo grado y  $P_4$  uno de cuarto sin raíces reales. Denotaremos:

$$E_2(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad \text{y} \quad P_4(z) = m z^4 + p z^3 + q z^2 + r z + s$$

y usaremos la notación introducida en la sección 3.5 para el estudio del  $P_4(z)$ . Allí vimos que dicho polinomio tenía cuatro raíces complejas si  $D_4 > 0$  y  $V_2 \leq 0$  ó  $Q \leq 0$  o bien si  $D_4 = V_2 = 0$ ,  $Q < 0$  y  $R \neq 0$  ( $\Leftrightarrow F = V_2 = 0$ ,  $Q < 0$  y en ese caso las raíces eran dobles). Una condición necesaria para que esto suceda es que sea  $ms > 0$ . Suponemos desde ahora que ambos coeficientes son positivos:  $m, s > 0$ . El valor de  $I$  sería fácil de hallar si tuviésemos factorizado el denominador:

$$P_4(z) = m[z^2 + Az + C][z^2 + Bz + D] = m[z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2][z^2 - (z_3 + z_4)z + z_3 z_4]$$

Damos los siguientes nombres a las partes reales e imaginarias, a los módulos y a los argumentos de las parejas de raíces complejas conjugadas  $z_1, z_2$  y  $z_3, z_4$ :

$$z_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{4C - A^2} = \alpha \pm i\beta = r_1 [\cos \theta_1 \pm i \sin \theta_1], \quad 4C > A^2, \quad \beta > 0, \quad \theta_1 \in (0, \pi)$$

$$z_{3,4} = -\frac{B}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{4D - B^2} = \gamma \pm i\delta = r_2 [\cos \theta_2 \pm i \sin \theta_2], \quad 4D > B^2, \quad \delta > 0, \quad \theta_2 \in (0, \pi)$$

Teóricamente, utilizando las técnicas de la sección 3.5, podríamos llegar a calcular  $A, B, C, D$  y las raíces, pero obtendríamos una expresión nada manejable para  $I$ . Lo primero que vamos a hacer será escribir  $I$  en función de las raíces de los polinomios de tercer grado que nos surgieron en el cálculo de las raíces de los polinomios de cuarto grado. A partir de ahí podremos expresar  $I$  en función de los coeficientes de los polinomios del integrando en varios casos particulares. Recordemos que:

$$Z = m[C + D] = m[\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2], \quad X = m[AB] = m[4\alpha\gamma],$$

$$Y = m[2(C + D) - AB] = 2m[(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2 + \delta^2]$$

satisficían, respectivamente, las ecuaciones:

$$Z^3 - qZ^2 + K_L Z - N_L = 0, \quad X^3 - 2qX^2 + q_L X - q_N = 0, \quad Y^3 - 3RY - S = 0$$

A partir de cada una de ellas podíamos calcular las otras:

$$X + Z = q, \quad X = \frac{2q - Y}{3}, \quad Z = \frac{q + Y}{3}$$



Puesto que los discriminantes de los polinomios de tercer orden son positivos (al serlo  $D_4$ ), sus raíces son reales.  $Z=Z_1$ ,  $X=X_1$  e  $Y=Y_1$  serán las descritas arriba y las otras tres parejas  $Z_{2,3}$ ,  $X_{2,3}$  e  $Y_{2,3}$  aparecerán al agrupar de forma diferente las raíces de  $P_4(z)$ :

$$\begin{aligned} [z-(\alpha+i\beta)] [z-(\gamma+i\delta)] &= z^2 - [\alpha+\gamma+i(\beta+\delta)] z + [\alpha\gamma - \beta\delta+i(\beta\gamma+\alpha\delta)] \\ [z-(\alpha-i\beta)] [z-(\gamma-i\delta)] &= z^2 - [\alpha+\gamma-i(\beta+\delta)] z + [\alpha\gamma - \beta\delta-i(\beta\gamma+\alpha\delta)] \\ [z-(\alpha+i\beta)] [z-(\gamma-i\delta)] &= z^2 - [\alpha+\gamma+i(\beta-\delta)] z + [\alpha\gamma + \beta\delta+i(\beta\gamma-\alpha\delta)] \\ [z-(\alpha-i\beta)] [z-(\gamma+i\delta)] &= z^2 - [\alpha+\gamma-i(\beta-\delta)] z + [\alpha\gamma + \beta\delta-i(\beta\gamma-\alpha\delta)] \end{aligned}$$

Así pues las otras raíces, si llamamos  $E \equiv \sqrt{4C-A^2}\sqrt{4D-B^2} = 4\beta\delta$ , son:

$$\begin{aligned} Z_3 &\equiv m[2\alpha\gamma-2\beta\delta] = \frac{m}{2} [AB-E] < Z_2 \equiv m[2\alpha\gamma+2\beta\delta] = \frac{m}{2} [AB+E] \leq Z_1 \\ X_3 &\equiv m[(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2] = \frac{m}{2} [2(C+D)+AB+E] > X_2 \equiv m[(\alpha+\gamma)^2+(\beta-\delta)^2] = \frac{m}{2} [2(C+D)+AB-E] \geq X_1 \\ Y_3 &\equiv m[-6\beta\delta-(\alpha-\gamma)^2-\beta^2-\delta^2] < Y_2 \equiv m[6\beta\delta-(\alpha-\gamma)^2-\beta^2-\delta^2] \leq Y_1 \end{aligned}$$

satisfaciéndose:

$$\begin{aligned} Z_2-Z_3 &= X_3-X_2 = \frac{1}{3} [Y_2-Y_3] = m[4\beta\delta] = mE > 0 \\ Z_1-Z_3 &= X_3-X_1 = \frac{1}{3} [Y_1-Y_3] = m[(\alpha-\gamma)^2+(\beta+\delta)^2] = \frac{m}{2} [2(C+D)-AB+E] > 0 \\ Z_1-Z_2 &= X_2-X_1 = \frac{1}{3} [Y_1-Y_2] = m[(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2] \geq 0 \quad (=0 \text{ si raíces dobles}) \end{aligned}$$

Otras relaciones que utilizaremos y que se comprueban sin dificultad son:

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_2+Z_3, \quad X_2 = Z_1+Z_3, \quad X_3 = Z_1+Z_2, \quad q = Z_1+Z_2+Z_3, \quad 2q = X_1+X_2+X_3 \\ K-L &= Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3, \quad Z_1Z_2 = K-L-Z_3X_3 \\ Y_1+Y_2 &= -Y_3, \quad Y_1Y_2 = Y_3^2-3R, \quad (Y_1-Y_3)(Y_2-Y_3) = 3(Y_3^2-R), \quad (Y_2-Y_3)^2 = 3(4R-Y_1^2) \end{aligned}$$

Pasemos ya al cálculo de la integral. Si tuviésemos factorizado  $P_4(z)$ , podríamos hallar  $I$  utilizando, por ejemplo, integración por residuos. Tras unas pocas cuentas se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{m} \left[ \frac{E_2(z_1)}{[z_1-z_2][z_1-z_3][z_1-z_4]} + \frac{E_2(z_2)}{[z_3-z_1][z_3-z_2][z_3-z_4]} \right] = \\ &= \frac{2\pi i}{m} \left[ \frac{a_2[z_1z_2(z_3-z_4)+(z_1-z_2)z_3z_4] + a_0[z_1-z_2+z_3-z_4] + a_1[z_1z_3-z_2z_4]}{[z_1-z_2][z_3-z_4]|z_1-z_4|^2} \right] = \\ &= \frac{\pi}{m} \frac{a_2[(\alpha^2+\beta^2)\delta+(\gamma^2+\delta^2)\beta] + a_0[\delta+\beta] + 2a_1[\alpha\delta+\beta\gamma]}{\beta\gamma [(\alpha-\gamma)^2+(\beta+\delta)^2]} = \\ &= \frac{\pi}{m} \frac{a_2r_1r_2[r_1\sin\theta_2+r_2\sin\theta_1] + a_0[r_2\sin\theta_2+r_1\sin\theta_1] + 2a_1r_1r_2[\sin(\theta_1+\theta_2)]}{r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2 [r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)]} \rightarrow \end{aligned}$$

$$I = \frac{2\pi}{m} \frac{2a_2[C\sqrt{4D-B^2}+D\sqrt{4C-A^2}] + 2a_0[\sqrt{4D-B^2}+\sqrt{4C-A^2}] - a_1[A\sqrt{4D-B^2}+B\sqrt{4C-A^2}]}{\sqrt{4D-B^2}\sqrt{4C-A^2}[2(C+D)-AB+\sqrt{4D-B^2}\sqrt{4C-A^2}]} \quad (6)$$

Observemos que, puesto que los denominadores de las fracciones largas son positivos, para determinar el signo de  $I$  bastaría determinar el signo de sus numeradores. Observemos también que dichos denominadores los tenemos ya expresados en función de las  $X$ , las  $Z$  o las  $Y$ . Veamos que el numerador también se pueden escribir en función de dichas variables y de los coeficientes de  $P_4$ . Esto se puede hacer de varias formas. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\square_0^2 &= [\sqrt{4D-B^2} + \sqrt{4C-A^2}]^2 = 4(C+D)+2AB+2E - (A+B)^2 \\ \square_2^2 &= [C\sqrt{4D-B^2} + D\sqrt{4C-A^2}]^2 = 2CD[2(C+D)+AB+E] - (AD+BC)^2 \\ \square_1^2 &= [A\sqrt{4D-B^2} + B\sqrt{4C-A^2}]^2 = 4(A+B)(AD+BC) - 2AB[2(C+D)+AB+E]\end{aligned}$$

deducimos:

$$\begin{aligned}m^2 \square_0^2 &= 4mX_3 - p^2 = 4mZ_3 + 4mq - p^2 = \frac{1}{3} [8mq - 3p^2 - 4mY_3] \\ m^2 \square_2^2 &= 4sX_3 - r^2 = 4sZ_3 + 4qs - r^2 = \frac{1}{3} [8qs - 3r^2 - 4sY_3] \\ m^2 \square_1^2 &= 4[K - X_1X_2] = 4[L - Z_3^2] = \frac{4}{9} [9L - (q+Y_3)^2]\end{aligned}$$

Los corchetes  $\square_0$  y  $\square_2$  son positivos. Por tanto:

$$\square_0 = \frac{1}{m} \sqrt{4mX_3 - p^2}, \quad \square_2 = \frac{1}{m} \sqrt{4sX_3 - r^2}$$

El tercero, sin embargo, no tiene signo definido, pero puesto que:

$$\text{sg } \square_1 = -\text{sg} [\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] = -\text{sg} [\cos\theta_1 + \cos\theta_2] = \text{sg} [A\sqrt{D} + B\sqrt{C}]$$

y como

$$m^{3/2} [A\sqrt{D} + B\sqrt{C}] [\sqrt{D} + \sqrt{C}] = m^{3/2} [(A+B)\sqrt{CD} + (AC+BD)] = [p\sqrt{s} + r\sqrt{m}]$$

deducimos que

$$\square_1 = \frac{\text{sg}[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}]}{m} \sqrt{K - X_1X_2}$$

Hemos encontrado, pues, una primera expresión de  $I$  en función de las  $X$ :

$$I = 2\pi \frac{a_2 \sqrt{4sX_3 - r^2} + a_0 \sqrt{4mX_3 - p^2} - \text{sg}[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}] a_1 \sqrt{K - X_1X_2}}{[X_3 - X_2][X_3 - X_1]} \quad (7)$$

Podemos también expresarla utilizando exclusivamente del  $Y_3$  (la menor de las raíces), cuya expresión en función de los coeficientes del  $P_4(z)$  conocemos desde la sección 3.3:

$$I = 2\pi \frac{a_2 \sqrt{3\sqrt{-P-4sY_3}} + a_0 \sqrt{3\sqrt{-Q-4mY_3}} - \text{sg}[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}] a_1 \sqrt{9L - (q+Y_3)^2}}{Y_3^2 - R} \quad (8)$$

$$\text{con } Y_3 = 2\sqrt{R} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3}, \text{ siendo } \phi = \arccos \frac{S}{2R^{3/2}}$$

Otras expresiones pueden deducirse del hecho de que también los productos de unos corchetes del numerador por los otros pueden también expresarse en función de las X, Y o Z:

$$\Delta_0 \Delta_2 = 8CD - (A+B)(AD+BC) + (C+D)(AB+E)$$

$$\Delta_0 \Delta_1 = 4(AD+BC) - (A+B)(AB-E)$$

$$\Delta_2 \Delta_1 = 4CD(A+B) - (AD+BC)(AB-E)$$

Por tanto:

$$m^2 \Delta_0 \Delta_2 = 2L - K + 2Z_1 Z_2 = K - 2qZ_3 - Z_3^2 = \frac{1}{9} [2Y_3^2 - 2qY_3 - 4q^2 + 9K]$$

$$m^2 \Delta_0 \Delta_1 = 4mr - 2pZ_3 = \frac{2}{3} [6mr - pq - pY_3]$$

$$m^2 \Delta_2 \Delta_1 = 4ps - 2rZ_3 = \frac{2}{3} [6ps - qr - rY_3]$$

Así, multiplicando el numerador y el denominador de (6) por  $\Delta_0$  obtenemos:

$$I = 2\pi \frac{a_2 [2L - K + 2Z_1 Z_2] + a_0 [4mZ_3 + 4mq - p^2] - a_1 [2mr - pZ_3]}{[Z_3 - Z_2] [Z_3 - Z_1] \sqrt{4mZ_3 + 4mq - p^2}} = \quad (9)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{a_2 [2Y_3^2 - 2qY_3 - 4q^2 + 9K] + 3a_0 [-Q - 4mY_3] - 3a_1 [V - pY_3]}{[Y_3^2 - R] \sqrt{-Q - 4mY_3}} \quad (10)$$

Podríamos obtener fórmulas análogas multiplicando por  $\Delta_2$ . Y, por último, en el caso de que sea  $\Delta_1 \neq 0$  (es decir si  $p\sqrt{s} + r\sqrt{m} \neq 0$ ), podemos multiplicar también arriba y abajo por dicho corchete para obtener una nueva expresión (en función sólo del  $Z_3$ ):

$$I = \text{sg}[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}] 2\pi \frac{a_2 [2ps - rZ_3] + a_0 [2mr - pZ_3] - a_1 [L - Z_3^2]}{[3Z_3^2 - 2qZ_3 + K - L] \sqrt{L - Z_3^2}} = \quad (11)$$

$$= \text{sg}[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}] 2\pi \frac{3a_2 [W - rY_3] + 3a_0 [V - pY_3] - a_1 [9L - (q + Y_3)^2]}{[Y_3^2 - R] \sqrt{9L - (q + Y_3)^2}} \quad (12)$$

A partir de ahora deduciremos fórmulas para casos particulares en los que las ecuaciones de tercer orden son resolubles. En primer lugar, vamos a volver a hallar el valor de  $I$  en los dos casos sencillos analizados ya en la sección 4.1: si existen raíces complejas dobles y si  $p=r=0$ .

De 3.5 sabemos que hay raíces dobles si  $F=V_2=0$  (si  $Q<0$  son complejas, si  $Q>0$  reales y si  $Q=0$  hay raíz cuádruple). Otra caracterización de esta situación se obtiene definiendo:

$$M = mr^2 - p^2s$$

y observando que:

$$p^2V_2 = 2mQM - (rQ + qV)F \quad (13)$$

pues entonces:

$$\text{si } p \neq 0, \text{ hay raíces complejas dobles} \Leftrightarrow Q < 0 \text{ y } M = F = 0 \quad (14)$$

[si  $p=0$ , las complejas dobles aparecen si además  $r=0$  y  $q=\sqrt{L}$ ]

Sea  $F = V_2 = 0 = p^3 - 4mpq + 8m^2r = 16m^2qs - 6p^2ms - 18m^2r^2 - 3p^3r + 14mpqr + p^2q^2 - 4mq^3$

$$\Leftrightarrow r = \frac{p}{8m^2} [4mq - p^2], \quad s = \frac{1}{64m^3} [4mq - p^2]^2 \Leftrightarrow \text{raíces dobles.}$$

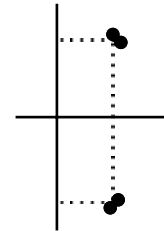
[y si  $p \neq 0$ , si y sólo si  $M = F = 0$ ]

Las raíces de  $P_4(z)$  son **complejas**  $\Leftrightarrow Q < 0 \Leftrightarrow 8mq > 3p^2$

Haciendo  $B=A$  y  $D=C$  en (6) obtenemos (si  $m=1$ ) de nuevo (2):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{m[z^2 + Az + C]^2} dz = \frac{2\pi}{m} \frac{2a_2 C + 2a_0 - a_1 A}{[4C - A^2]^{3/2}} \rightarrow I = 4\pi \frac{[4mq - p^2]a_2 + 8m^2 a_0 - 2mpa_1}{[-Q]^{3/2}} \quad (15)$$

puesto que  $A = p/2m$ ,  $C = \sqrt{s/m} = [4mq - p^2]/8m^2$



Si ahora es  $p = r = 0$ , entonces  $D_4 = 4L[q^2 - L]^2$ ,  $V_2 = 4mq[L - q^2]$ ,  $Q = -8mq$ . Así:

$$q > \sqrt{L} \rightarrow D_4 > 0, V_2 < 0; \quad q = \sqrt{L} \rightarrow D_4 = V_2 = 0, Q < 0; \quad 0 \leq q < \sqrt{L} \rightarrow D_4 > 0, Q \leq 0; \\ -\sqrt{L} < q \leq 0 \rightarrow D_4 > 0, V_2 \leq 0; \quad q = -\sqrt{L} \rightarrow D_4 = V_2 = 0, Q > 0; \quad q < -\sqrt{L} \rightarrow D_4, V_2, Q > 0$$

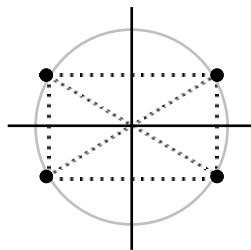
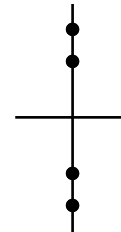
En los cuatro primeros casos hay raíces complejas (dobles si  $q = \sqrt{L}$ ). Así pues:

$$\text{Si } p = r = 0 \text{ las raíces son complejas } \Leftrightarrow q > -\sqrt{L} \Leftrightarrow \begin{cases} s > q^2/4m, \text{ si } q \leq 0 \\ s > 0, \text{ si } q \geq 0 \end{cases}$$

Las dos posibles factorizaciones del  $P_4(z)$  nos llevan a las fórmulas vistas en 4.1.

Haciendo  $A=B=0$  en (6) obtenemos (3) cuando  $m=1$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{m[z^2 + C][z^2 + D]} dz = \frac{2\pi}{m} \frac{4a_2[C\sqrt{D} + D\sqrt{C}] + 4a_0[\sqrt{D} + \sqrt{C}]}{4\sqrt{D}\sqrt{C} 2[C + D + 2\sqrt{D}\sqrt{C}]} = \frac{\pi}{m} \frac{a_0 + a_2\sqrt{CD}}{\sqrt{CD}[\sqrt{C} + \sqrt{D}]}$$

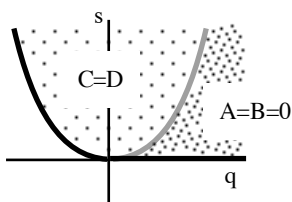


Y si  $B=-A$  y  $D=C$  aparece (5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{m[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C]} dz = \frac{\pi}{m} \frac{a_0 + a_2 C}{C\sqrt{4C - A^2}}$$

El valor de  $I$  lo podemos deducir de las fórmulas anteriores o a partir, por ejemplo, de (7). La ecuación para las  $X$  es ahora:

$$X^3 - 2qX^2 + (q^2 - L)X = 0 \rightarrow X_{1,2} = 0 \text{ ó } q - \sqrt{L}, \quad X_3 = q + \sqrt{L} \rightarrow I = 2\pi \frac{a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m}}{\sqrt{L}\sqrt{q + \sqrt{L}}} \quad (16)$$



[Las cuatro raíces están en el eje imaginario cuando  $A=B=0$ , o lo que es lo mismo, si la menor de las  $X$  es 0. Esto ocurre cuando  $q \geq \sqrt{L}$ , es decir, si  $0 < s < q^2/4m$ ,  $q > 0$ . Si  $-\sqrt{L} < q \leq \sqrt{L}$  (si  $s > q^2/4m$ ) estaremos en el otro caso: las  $z$  se sitúan sobre una circunferencia. Si  $q = \sqrt{L}$  hay dos raíces imaginarias dobles].

Consideremos otras situaciones en las que podemos dar una expresión algebraica de la integral I. La caracterización (14) de las raíces dobles sugiere estudiar las dos siguientes.

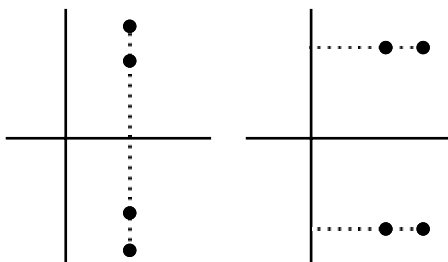
En 3.5 vimos que haciendo  $z = \frac{x-p}{4m}$  en  $P_4(z)$  se llegaba a  $P_4(x) = x^4 - 2Qx^2 + 8Fx + G = 0$ .

Si  $\boxed{F = 0}$   $= p^3 - 4mpq + 8m^2r \Leftrightarrow r = \frac{p}{8m^2} [4mq - p^2]$ , es inmediato comprobar que entonces:

$$G = 256m^3s - 16mp^2q + 5p^4, \quad G - Q^2 = 256m^3s - 4[4mq - p^2]^2, \quad p^2[G - Q^2] = -256m^3M$$

Como las raíces de  $P_4(z)$  son complejas si lo son las de  $P_4(x)$ , deducimos del caso  $p=r=0$ :

$$\text{Las } z \text{ son complejas} \Leftrightarrow \begin{cases} G > Q^2, & \text{si } Q \geq 0 \\ G > 0, & \text{si } Q \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s > \frac{1}{4m} [q - \frac{p^2}{4m}]^2, & \text{si } q \leq q_Q \\ s > \frac{p^2}{4m^2} [q - \frac{5p^2}{16m}], & \text{si } q \geq q_Q \end{cases}, \quad q_Q = \frac{3p^2}{8m}$$



Las raíces de  $P_4(z)$  [traslaciones de las de  $P_4(x)$ ] tienen iguales, o bien las partes reales (si  $0 < G < Q^2$ ,  $Q < 0$ ) o bien las imaginarias (si  $G > Q^2$ ).

(si escribimos  $p, q, r$  en función de  $A, B, C, D$  se llega a las mismas dos posibilidades, pues se tiene:

$$F = m^3 [B-A] [ (4C-A^2) - (4D-B^2) ]$$

Para calcular I basta hacer explícitamente el cambio  $z = \frac{x-p}{4m}$  y utilizar la fórmula (16). Se obtiene:

$$I = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2x^2 + [4ma_1 - 2pa_2]x + [16m^2a_0 - 4ma_1 + p^2a_2]}{x^4 - 2Qx^2 + G} dx = 2\sqrt{2\pi} \frac{a_2[\sqrt{G+p^2}] + 16a_0m^2 - 4a_1mp}{\sqrt{G} \sqrt{\sqrt{G}-Q}} \quad (17)$$

Podemos obtener (17) por un camino más largo, pero que permite relacionar este caso con el siguiente ( $M=0$ ). Si fuese  $p=0$ , sería también  $r=0$ , caso conocido. Sea  $p \neq 0$  y definamos:

$$f = \frac{F}{p} = p^2 + 8m^2 \frac{r}{p} - 4mq, \quad h = Q - 2f = p^2 - 16m^2 \frac{r}{p}$$

En estos términos se tiene que si  $f=0$  las  $z$  son complejas si:

$$\begin{cases} M < 0, & \text{si } h \geq 0 \\ G > 0, & \text{si } h \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s > m[\frac{r}{p}]^2, & \text{si } h \geq 0 \\ s > \frac{pr}{16m^2} [2 - \frac{p^2}{16m}], & \text{si } h \leq 0 \end{cases}$$

Se ve sin dificultad que las raíces de  $P_3(Z)$  son:

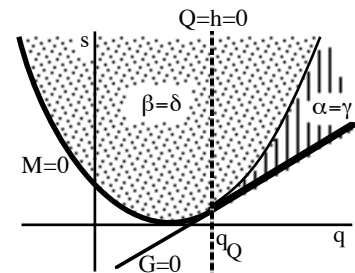
$$Z_0 = 2m \frac{r}{p}, \quad Z_{\pm} = \frac{1}{8m} [p^2 \pm \sqrt{G}] \Rightarrow Z_0 - Z_- = \frac{1}{8m} [\sqrt{G} - h]$$

Así, la menor de las  $Z$  es  $Z_-$  tanto si  $h < 0$ , como si  $h \leq 0$  y  $M < 0$  (pues  $G = h^2 - 256m^3M/p^2$ ).

(si  $h < 0$  y  $M=0$ ,  $Z_0 = Z_+ > Z_-$  y volvemos a comprobar que hay raíces dobles complejas).

Se podría calcular (17), por ejemplo, a partir de (10). Usaríamos que  $Y_3 = 3Z_3 - q = \frac{1}{8m} [Q - 3\sqrt{G}]$ ,

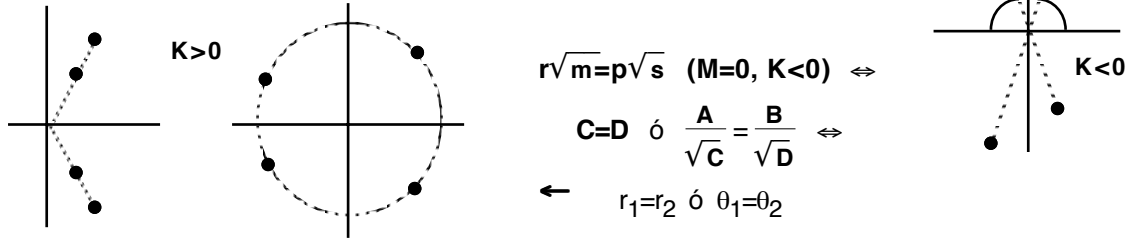
y otras identidades que se deducen de (3-12) como  $V = -\frac{pQ}{4m}$ ,  $R = \frac{1}{64m^2} [Q^2 + 3G]$ .



Sea  $M = 0 = mr^2 - p^2s$ . Busquemos primero la geometría de las raíces. Se comprueba que:

$$M = m^3[C-D][B^2C-A^2D], \quad r\sqrt{m} \pm p\sqrt{s} = m^{3/2}[\sqrt{C} \pm \sqrt{D}][B\sqrt{C} \pm A\sqrt{D}]$$

Por tanto,  $r\sqrt{m} + p\sqrt{s} = 0$  ( $M=0, K<0$ )  $\Leftrightarrow \frac{A}{\sqrt{C}} = -\frac{B}{\sqrt{D}} \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 = \pi \rightarrow$



¿Cuándo las  $z$  son complejas? Sean las  $f$  y  $h$  de antes. Se tiene:  $Q = 2f+h, V = \frac{f-h}{4m}$ .

Supongamos que  $p \neq 0$  ( $\Leftrightarrow r \neq 0$ ) y despejemos  $s = m(r/p)^2$ . Sustituyendo se llega a:

$$V_2 = fV_M, \quad V_M = q^2 + 2m\frac{r}{p}q - 3pr; \quad D_4 = \left(\frac{r}{p}\right)^2 D_M, \quad D_M = [q + 2m\frac{r}{p}]^2 - 4pr = \left(\frac{V}{p}\right)^2 - \frac{4r}{p}f$$

Las raíces de  $P_3(X)$  son:

$$X_0 = q - 2m\frac{r}{p}, \quad X_{\pm} = \frac{1}{2}[q + 2m\frac{r}{p} \pm \sqrt{D_M}] \rightarrow X_0 - X_{\pm} = \frac{1}{2}[-\frac{V}{p} - \sqrt{D_M}]$$

Y las de  $P_3(Z)$ :

$$Z_0 = 2m\frac{r}{p}, \quad Z_{\pm} = \frac{1}{2}[q - 2m\frac{r}{p} \pm \sqrt{D_M}] \rightarrow Z_{\pm} - Z_0 = \frac{1}{2}[-\frac{V}{p} \pm \sqrt{D_M}]$$

Si  $K < 0$  ( $\Rightarrow p\sqrt{s} + r\sqrt{m} = 0, 2m\frac{r}{p} = -\sqrt{L}$ ) es  $h > 0, D_M > 0, D_4 \geq 0$  ( $= 0$  si  $f = 0$ ).

Comprobemos que las  $z$  son complejas  $\Leftrightarrow f < 0 \Leftrightarrow q > \frac{p^2}{4m} - \sqrt{L}$ :

Si  $f > 0 \rightarrow Q > 0, V_M = q^2 + (2m\frac{r}{p})^2 - \frac{5}{2}pr - \frac{r}{2p}f > 0, V_2 > 0, D_4 > 0 \rightarrow$  las cuatro  $z$  son reales.

Si  $f = 0$  se tiene que  $Q > 0, V_2 = D_4 = 0$ . Raíces reales y dobles.

Sea  $f < 0$ . Si fuese  $Q \leq 0$ , todas las  $z$  serían complejas.

Si  $Q > 0 \rightarrow V_M = q^2 - \frac{9}{4}pr - \frac{r}{4p}Q > 0 \rightarrow V_2 < 0, D_4 > 0$  y todas complejas.

Para calcular  $I$  podemos usar (7). Se tiene que:  $\sqrt{4sX_3 - r^2} = -\frac{r}{p}\sqrt{4mX_3 - p^2}$ .

Si  $f < 0 \rightarrow \frac{V}{p} < 0 \rightarrow X_3 = X_0 > X_+ > X_-$ . Entonces  $4mX_3 - p^2 = -f$  y  $[X_0 - X_+][X_0 - X_-] = \frac{r}{p}f$ .

Así pues:

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{-f}} [a_2 - a_0 \frac{p}{r}] \tag{18}$$

Podemos dar una expresión válida también si  $p=r=0$ . Como  $-\frac{p}{r} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{s}}$  y  $-f = 4m[q + \sqrt{L} - \frac{p^2}{4m}]$

$$I = 2\pi \frac{a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m}}{\sqrt{L}\sqrt{\sigma}}, \quad \text{siendo } \sigma = q + \sqrt{L} - \frac{p^2}{4m} \tag{19}$$

Sea ahora  $K > 0$  ( $\Rightarrow p\sqrt{s}=r\sqrt{m} \neq 0$ ,  $\sqrt{L} = 2m\frac{r}{p}$ ,  $h = \frac{2m}{\sqrt{L}} [K-4L]$ ,  $-f = 4m[q-\sqrt{L}-\frac{p^2}{4m}]$ ).

La situación es más complicada. Probemos que las cuatro  $z$  son **complejas** si y sólo si:

$$\begin{cases} q > \frac{p^2}{4m} + \sqrt{L} \text{ (f<0), si } K \geq 4L \text{ (h} \geq 0) \\ q > 2\sqrt{K}-\sqrt{L} \text{ , si } K \leq 4L \text{ (h} \leq 0) \end{cases}$$

Recordamos que  $Q = 2f+h$ . Además es  $V_M = \left(\frac{V}{p}\right)^2 + \frac{r}{2p} [h-7f] \rightarrow V_M - D_M = \frac{r}{2p} [f+h]$ .

Sea  $h \geq 0$ : si  $f > 0 \Rightarrow Q > 0$ ; si además  $D_M < 0$ , es  $D_4 < 0$  y hay raíces reales.  
si  $D_M \geq 0$  entonces  $D_4 \geq 0$ ,  $V_M > 0$ ,  $V_2 > 0$  y reales.

si  $f = 0 \Rightarrow D_4 = V_2 = 0$  y como  $Q \geq 0$  hay  $z$  reales.

si  $f < 0 \Rightarrow D_M > 0 \Rightarrow D_4 > 0$ ,  $V_M > 0$ ,  $V_2 < 0$  y todas son complejas.

Ahora supongamos  $h < 0 \Leftrightarrow 4m\sqrt{K} > p^2$ . Resolviendo  $Q$ ,  $f$ ,  $V$ ,  $V_M$  y  $D_M$  en  $q$  se tiene que:

$$Q=0 \Leftrightarrow q = q_Q = \frac{3p^2}{8m}; \quad F=0 \Leftrightarrow q = q_f = \frac{p^2}{4m} + 2m\frac{r}{p}; \quad V=0 \Leftrightarrow q = q_V = 6m\frac{r}{p}$$

$$V_M=0 \Leftrightarrow q = q_{V_{\pm}} = -m\frac{r}{p} \pm \sqrt{(mr/p)^2 + 3K}; \quad D_M=0 \Leftrightarrow q = q_{D_{\pm}} = \pm 2\sqrt{K} - 2m\frac{r}{p}$$

Se comprueba que si  $h < 0$ :  $q_{D_-} < q_{V_-} < 0 < q_Q < q_{V_+} < q_f < q_V$  y  $q_{D_+} < q_{V_+}$ . Y además:

Si  $q > q_f$ ,  $Q < 0$ ,  $f < 0$ ,  $D_M > 0$ ,  $D_4 > 0 \rightarrow$  complejas

Si  $q = q_f$ ,  $f = 0$ ,  $V_2 = D_4 = 0$ ,  $Q < 0 \rightarrow$  complejas y dobles ( $M = F = 0$ )

Si  $q_{D_+} < q < q_f$ ,  $f > 0$ ,  $D_4 > 0$  y ó  $Q$  ó  $V_2$  son  $\leq 0 \rightarrow$  complejas

En los demás casos ó  $D_4 < 0$  ó  $D_4 = 0$  y  $V_2 \neq 0$  ó  $D_4, V_2, Q > 0$  y las  $z$  son reales.

Por tanto son complejas si  $q > q_{D_+}$ . Reescribiendo  $h$ ,  $q_f$  y  $q_{D_+}$  en función de  $K$  y  $L$  se llega al resultado. Y se ve que en los distintos casos con  $z$  complejas las  $Z$  están ordenadas así:

Si  $f < 0$ :  $Z_+ > Z_0 > Z_- = Z_3$ ; si  $f = 0, h < 0$ :  $Z_+ = Z_0 > Z_- = Z_3$ ; si  $f > 0, h < 0$ :  $Z_0 > Z_+ > Z_- = Z_3$

(cuando  $C = D \Leftrightarrow r_1 = r_2$  debe ser  $Z = Z_1 = 2m\frac{r}{p}$ ; esto ocurre si  $f \geq 0$ ; si  $f \leq 0$ , se tendrá  $\theta_1 = \theta_2$ )

El valor de  $I$  lo podemos deducir de (11):

$$I = \text{sg}[p] 2\pi \frac{[a_2 r + a_0 p] [2m\frac{r}{p} - Z_3] - a_1 [4m^2 (\frac{r}{p})^2 - Z_3^2]}{[Z_1 - Z_3][Z_2 - Z_3] \sqrt{4m^2 (\frac{r}{p})^2 - Z_3^2}} = \text{sg}[p] 2\pi \frac{a_2 r + a_0 p - a_1 [Z_0 + Z_-]}{\sqrt{D_M} \sqrt{Z_0 - Z_-} \sqrt{Z_0 + Z_-}} \quad (20)$$

Y tras unas cuantas cuentas se puede dar una expresión válida también cuando  $p = r = 0$ :

$$I = \pi \sqrt{2} \frac{[a_2 \sqrt{s} + a_0 \sqrt{m}] [q + \sqrt{L} + \sqrt{\omega}] - 2a_1 p \sqrt{s}}{\sqrt{\omega} \sqrt{L} \sqrt{q + \sqrt{L} - \frac{K}{\sqrt{L}} + \sqrt{\omega}}}, \text{ siendo } \omega = (q + \sqrt{L})^2 - 4K \quad (21)$$

Antes de seguir con los demás casos particulares vamos a dar algún resultado general. Una condición necesaria para que las raíces de  $P_4(z)$  sean complejas es que sea su discriminante  $D_4 > 0$ . Miremos este  $D_4$  como un polinomio de tercer grado en  $s$ :

$$D_4(s) = p_s s^3 + q_s s^2 + r_s s + s_s = 256m^3 s^3 - (128m^2 q^2 - 144mp^2 q + 27p^4 + 192m^2 pr) s^2 + 2(8mq^4 - 2p^2 q^3 + 72m^2 r^2 q + 9p^3 r q - 40mprq^2 - 3mp^2 r^2) s - r^2(4mq^3 - p^2 q^2 - 18mprq + 27m^2 r^2 + 4p^3 r)$$

Con el ordenador es fácil comprobar que este polinomio tiene por discriminante:

$$D_{3s} = -16F^2 H^3, \text{ con } H = 32mq^3 - 9p^2 q^2 - 108mprq + 27r(4m^2 r + p^3) = \frac{27F^2 - Q^3}{16m^2} = 4mS - 3QR$$

Si es  $F \neq 0$ , el signo de  $H$  nos dirá si  $D_4(s)$  tiene 3, 2 ó 1 raíces reales. Probemos que:

Si  $F \neq 0$ , las raíces de  $P_4(z)$  son todas complejas  $\Leftrightarrow s > s_M$ , siendo  $s_M$  la raíz mayor de  $D_4(s)$

Como  $F \neq 0$  no puede haber raíces dobles complejas. Así si  $D_4 \leq 0$  hay raíces reales.

Si es  $Q \leq 0 \Rightarrow H > 0$  sólo hay una raíz real ( $s_M$ ) de  $D_4$ . Si  $s > s_M$  es  $D_4 > 0$ ,  $Q \leq 0$  y son complejas.

Si  $Q, H > 0$  y  $s > s_M \Rightarrow \frac{4R^3 - S^2}{27} = D_4 > 0 \Rightarrow R \geq 0 \Rightarrow$  [por (3-12)]  $V_2 = \frac{-H - 16m^2 QR}{96m^2} < 0$ . Complejas.

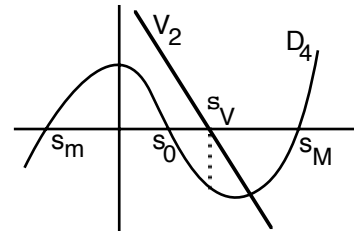
Si  $Q > 0, H = 0 \Rightarrow V_2 = -\frac{QR}{6}$ ,  $S = \frac{3QR}{4m}$ ,  $D_4 = \frac{R^2}{27} [R - \frac{9Q^2}{16m^2}]$ . Así  $D_4$  tiene una raíz simple  $s_M$  y una doble  $s_d < s_M$ . Si  $s > s_M \Rightarrow D_4 > 0 \Rightarrow R \geq 0 \Rightarrow V_2 \leq 0$  y complejas. Si  $s \leq s_M$  es  $D_4 \leq 0$ .

En fin, si  $Q > 0, H < 0$  hay tres raíces reales de  $D_4$ :  $s_M > s_0 > s_m$ .

Si  $s_V$  es la única raíz de  $V_2 = 0$  se puede comprobar que:

$$D_4(s_V) = -\frac{H^2 F^2}{4m^2 Q^3} < 0, \quad D_4'(s_V) = \frac{9HF^2}{mQ^2} < 0$$

La posición relativa de  $V_2$  y  $D_4$  es la de la derecha, y por tanto, sólo son complejas las  $z$  si  $s > s_M$  (si  $s \in (s_m, s_0)$  hay cuatro reales).



Podemos deducir la expresión general del  $s_M$  a partir de las fórmulas de 3.3:

$$s_M = \begin{cases} \frac{1}{768m^3} [(S_s + 8d_s^{3/2})^{1/3} + (S_s - 8d_s^{3/2})^{1/3} - q_s], & \text{si } H \geq 0 \\ \frac{1}{768m^3} [2\sqrt{R_s} \cos(\frac{1}{3} \arccos \frac{S_s}{R_s^{3/2}}) - q_s], & \text{si } H \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{donde } R_s = Q[8(27F^2) + Q^3], \quad S_s = 8(27F^2)^2 + 20(27F^2)Q^3 - Q^6, \quad d_s = 3F^{2/3}[(27F^2) - Q^3].$$

Para  $q$  grande la expresión del  $s_M$  es la primera ( $H > 0$ ). Si  $q$  es muy negativo ( $H < 0$ ) la segunda (y  $D_4(s)$  tiene 3 raíces reales) ¿Y en general? El discriminante de  $H$  respecto a  $q$  resulta ser:

$$D_{3q} = 4r(27ph)^3$$

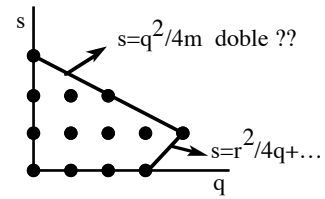
Así, si  $Kh < 0$  hay un único cero  $q_H$  de  $H(q)$ , con lo que hay sólo una raíz real de  $D_4(s)$  para  $q > q_H$ , una doble y una simple si  $q = q_H$  y tres raíces si  $q < q_H$ . Si  $Kh > 0$ ,  $H(q)$  tiene tres ceros  $q_1 < q_2 < q_3$  y  $D_4(s)$  tiene un único cero para  $q \in (q_1, q_2)$  y  $q > q_3$ . No es difícil ver que  $q_F$ , único cero de  $F$ , está situado respecto de los de  $H$  de la siguiente forma: si  $K < 0$  ( $\Rightarrow h > 0$ ) es  $q_F < q_H$ ; si  $K > 0, h < 0$  es  $q_H < q_F$ ; y si  $K, h > 0$  se tiene que  $q_1 < 0 < q_2 < q_F < q_3$ . Los casos  $h = 0, p = 0$  y  $r = 0$  son más fáciles de tratar por la presencia de raíces dobles (si  $r = 0$  además es  $s = 0$  raíz de  $D_4$ ).



Viendo  $s_M$  como función de  $q$ , ¿qué aspecto tiene  $s_M(q)$  ?

Para hallar su forma asintótica podemos utilizar la poligonal de Newton del  $D_4$  considerado función de  $q$  y  $s$ . Los términos de  $D_4$  en negrita son los relevantes para este estudio. Para  $q$  grande, la única raíz de  $D_4=0$  es entonces de la forma:

$$s_M(q) = [r^2/4]/q + o(1/q) .$$



El otro segmento exterior, por la duplicidad, aún no nos aporta información.

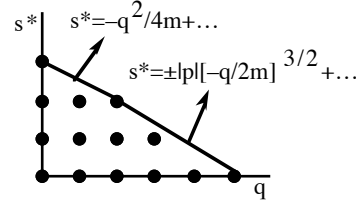
Pero haciendo  $s = s^* + q^2/4m$ , se obtiene el nuevo polinomio:

$$D_4(q, s^*) = 8q^2(8m^3s^{*2} + p^2q^3)/m + 256m^3s^{*3} + \dots$$

Y su poligonal permite concluir que para  $-q$  grande se tiene:

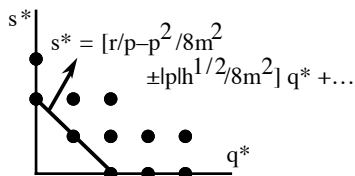
$$s_M(q) = q^2/4m + |p|[-q/2m]^{3/2} + o([-q]^{3/2})$$

(además es  $s_0 = q^2/4m - |p|[-q/2m]^{3/2} + \dots$ ,  $s_m = r^2/4q + \dots$ )



Analicemos, si  $p \neq 0$ , la forma de  $D_4=0$  cerca del  $(q_0, s_0) = (\frac{p^2}{4m} + 2m\frac{r}{p}, m\frac{r^2}{p^2})$  en el que  $F=M=0$ .

El  $(q_0, s_0)$  es un punto singular de la gráfica de  $D_4=0$  porque anula también las derivadas de  $D_4$  respecto a  $q$  y  $s$ . Trasladamos al origen haciendo:  $q = q^* + q_0$ ,  $s = s^* + s_0 \rightarrow$



$$D_4(q^*, s^*) = h^2(s^{*2} + [p^2/4m^2 - 2r/p]q^*s^* + (r/p)^2q^{*2}) + \dots$$

Por tanto,  $(q_0, s_0)$  es un punto aislado de la gráfica si  $h < 0$ .

Si  $h > 0$ ,  $D_4=0$  consiste en dos curvas que se cortan en  $(q_0, s_0)$  con las tangentes distintas dadas por la poligonal.

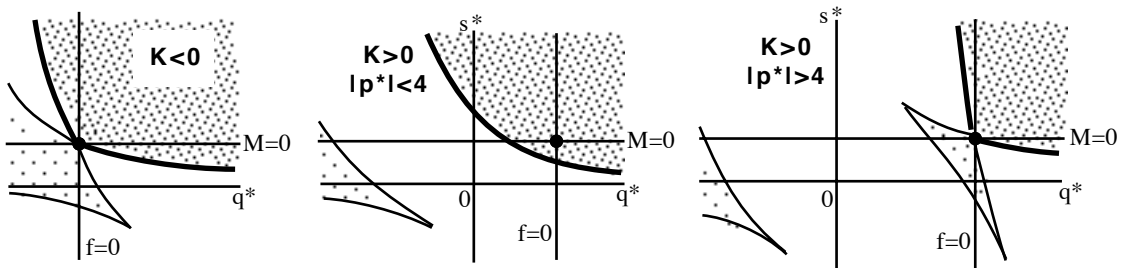
[si  $h=0$ , se puede ver que  $D_4=0$  es una curva derivable].

Para hacer dibujos globales de  $D_4=0$  simplificamos  $P_4(z)$  haciendo (si  $p, r \neq 0$ ) los cambios de variable  $z = y\sqrt{r/p}$  si  $K > 0$ ,  $z = y\sqrt{-r/p}$  si  $K < 0$  que lo convierten en polinomios de la forma:

$$P_{4M}(y) = y^4 + p^*y^3 + q^*y^2 + p^*y + s^* \text{ si } K > 0, \quad P_{4m}(y) = y^4 + p^*y^3 + q^*y^2 - p^*y + s^* \text{ si } K < 0$$

[es  $p^* = p\sqrt{p/r/m}$ ,  $q^* = pq/mr$  si  $K > 0$ ,  $p^* = p\sqrt{-p/r/m}$ ,  $q^* = -pq/mr$  si  $K < 0$  y  $s^* = p^2s/mr^2$  en los dos casos]

Para ambos polinomios los  $K^* = \pm p^*2$ ,  $f^* = p^*2 \pm 8 - 4q^*$  ( $K >, < 0$ ),  $h^* = p^*2 \pm 16$  ( $K <, > 0$ ) y  $M^* = 1 - s^*$  tienen el mismo signo que los  $K$ ,  $f$ ,  $h$  y  $M$  iniciales. Las zonas del plano  $q^*s^*$  en que las  $y$  sean complejas describen así donde lo son las  $z$ . De lo visto hasta ahora se deduce que estas zonas son, en esencia, las del dibujo de abajo en trama más densa (en las menos densas las cuatro raíces son reales y hay dos reales y dos complejas en el resto), limitadas por la o las curvas (en trazo grueso) que forman el  $s^*_M(q^*)$ . Las curvas de trazo fino son las otras ramas de  $D_4=0$  (sus puntos singulares saldrían de  $H^*=0$ ). En el punto con  $f=M=0$  hay raíces dobles.



Volvamos a hallar  $I$  en casos factorizables. La forma de las ecuaciones en  $Z$ ,  $X$  e  $Y$  nos lleva a considerar, respectivamente, los tres últimos:

$$\boxed{N_L = 0} = mr^2 + p^2s - 4msq \Rightarrow q = \frac{N}{L} \geq 0 \Rightarrow F = \frac{mr}{s} [2L - K]. \text{ Comprobemos que:}$$

todas las  $z$  son **complejas**  $\Leftrightarrow K_L \neq 0$ .

Llamemos  $\Psi = q^2 - 4K_L$ . Se satisface:  $L^2\Psi = N^2 - 4L^2(K-L)^2 = M^2 + L(2L-K)^2 \geq 0$ .

Como  $R = q^2 - 3K_L$ ,  $S = 2q^3 - 9qK_L$  deducimos que:

$$D_4 = \frac{1}{27} [4R^3 - S^2] = K_L^2\Psi \Rightarrow D_4 \geq 0$$

Si  $K_L = 0 \Leftrightarrow pr = 4ms \neq 0 \Rightarrow F = 4m^2r \neq 0$  y las raíces múltiples son reales.

Si  $\Psi = 0 \Leftrightarrow M = 0, K = 2L \Rightarrow F = M = 0, p^2 = 2mq \neq 0 (\Rightarrow Q < 0)$ . Raíces dobles complejas (y  $K_L < 0$ ).

Si  $r = 0 \Rightarrow 4mq = p^2$ . Si  $p = 0$  es  $q = 0$ . Si  $p \neq 0$  es  $F = 0, h > 0, M < 0$ . Complejas y  $K_L < 0$ .

Si  $r \neq 0 \Rightarrow s = mr^2 / [4mq - p^2]$  con  $q > p^2 / 4m$ , describe una curva continua en el primer cuadrante del plano  $qs$ . Esta curva, formada por puntos con  $D_4 \geq 0$ , ha de estar dentro de cualquiera de las regiones de  $z$  complejas del dibujo de la página anterior. Sólo tocará  $s_M$  (si  $K > 0$ ) en el punto de  $z$  reales en que sea  $K_L = 0$ . En los demás puntos serán, pues, complejas.

Obtendremos dos expresiones para  $I$  dependiendo del signo de  $K_L$ . Las raíces de  $P_3(Z)$  son

$$Z_0 = 0 \text{ y } Z_{\pm} = \frac{1}{2} [q \pm \sqrt{\Psi}]$$

Si  $K_L > 0$ , la menor de las tres raíces ( $Z_3$ ) es 0 y como  $sg[p\sqrt{s} + r\sqrt{m}] = sg(p)$  deducimos de (11):

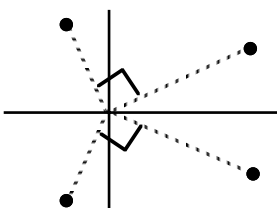
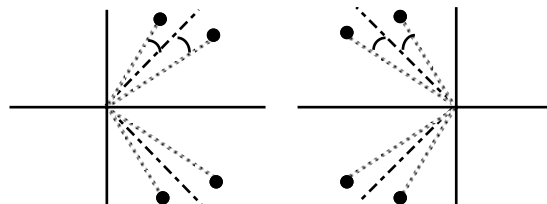
$$I = sg(p) 4\pi \frac{a_2ps + a_0mr - 2a_1ms}{\sqrt{L} K_L} \tag{22}$$

Si  $K_L < 0$ , la menor es  $Z_-$  y se obtiene a partir de (9):

$$I = 2\pi \frac{2a_2[2L-K] + 2a_0[2m\sqrt{\Psi} + 2mq - p^2] - a_1[p\sqrt{\Psi} - pq + 4mr]}{\sqrt{\Psi} [\sqrt{\Psi} - q] \sqrt{2m\sqrt{\Psi} + 2mq - p^2}} \tag{23}$$

¿Cómo están situadas las  $z$  en el plano complejo? Poniendo  $p = m[A+B]$ ,  $q = m[AB+C+D]$ ,  $r = m[AD+BC]$ ,  $s = m[CD]$ ,  $A = -2r_1 \cos \theta_1$ ,  $B = -2r_2 \cos \theta_2$ ,  $C = r_1^2$ ,  $D = r_2^2$  y factorizando:

$$\begin{aligned} 0 = N_L &= m^3[C+D][A^2D+B^2C-4CD] = \\ &= 4m^3r_1^2r_2^2[r_1^2+r_2^2][\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1] \\ \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

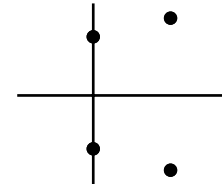


Como  $Z_3 = m[2\alpha\gamma - 2\beta\delta] = 2mr_1r_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$ , las primeras dos situaciones se darán cuando sea  $Z_3 = 0$ , lo que sucede, como hemos visto, cuando es  $K_L > 0$  (estarán a la izquierda o a la derecha dependiendo del signo de  $p$ ). Cuando  $K_L < 0$ , se dará la tercera,  $\theta_1 - \theta_2 = \pm\pi/2$ , dibujada a la izquierda.

$q_N = 0$  =  $mr^2 + p^2s - prq$ . Si  $p=0 \Leftrightarrow r=0$  y el valor de  $I$  nos lo da la fórmula (16). Sea  $p, r \neq 0$ .

Despejando  $s$  y sustituyendo en  $P_4(z)$ :

$$s = \frac{r}{p} [q - m \frac{r}{p}] \Rightarrow P_4(z) = m[z^2 + \frac{r}{p}] [z^2 + \frac{p}{m}z + \frac{q}{m} - \frac{r}{p}]$$



Las raíces del primer corchete son complejas si y sólo si  $K > 0$ .

El discriminante del otro es  $D_2 = \frac{p}{m^2r} [K - L]$ .

Concluimos que, cuando  $K \neq 0$ , las cuatro raíces de  $P_4(z)$  son **complejas**  $\Leftrightarrow 0 < K < L$ .

Para el cálculo de  $I$  podemos basarnos en la expresión (6), pues conocemos

$$A=0, C = \frac{r}{p}, B = \frac{p}{m}, D = \frac{q}{m} - \frac{r}{p} = \frac{ps}{mr}, 4D - A^2 = \frac{p}{m^2r} [L - K]$$

Tras unas pocas cuentas, y llamando  $\Sigma = -K_L$ , se llega a:

$$I = \text{sg}(p) \pi \frac{a_2[2ps+r\sqrt{\Sigma}] + a_0[2mr+p\sqrt{\Sigma}] - a_1K}{\sqrt{\Sigma} [q+\sqrt{\Sigma}] \sqrt{K}} = \pi \frac{a_2 \frac{r}{p} [2q-2m \frac{r}{p} + \sqrt{\Sigma}] + a_0 [2m \frac{r}{p} + \sqrt{\Sigma}] - a_1r}{\sqrt{\Sigma} [q+\sqrt{\Sigma}] \sqrt{r/p}} \tag{24}$$

$S = 0$  =  $2q^3 - 9qK - 18qL + 27N$ . Se deduce de las fórmulas (3-12) que entonces:

$$D_4 = \frac{4}{27} R^3, V_2 = \frac{1}{3} RQ, m^2QR = \frac{1}{48} [Q^3 - 27F^2]$$

Por tanto, si  $Q < 0$ , todas las raíces de  $P_4(z)$  son **complejas**. Si  $Q > 0$  hay raíces reales.

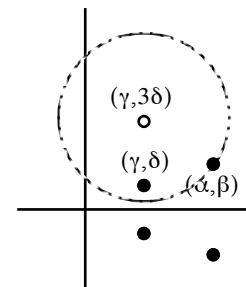
Y si también  $Q=0 \Rightarrow q = \frac{3p^2}{8m}, r = \frac{p^3}{16m^2} \Rightarrow R = \frac{3}{4} [4L - K]$  y las  $z$  son complejas si  $4L > K$ .

Como las raíces de  $P_3(Y)$  son:

$$Y_1 = \sqrt{3R} \geq Y_2 = 0 \geq Y_3 = -\sqrt{3R}$$

concluimos a partir de (10) que:

$$(25) \quad I = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{a_2[2q\sqrt{3R} + 6R - 4q^2 + 9K] + 3a_0[4m\sqrt{3R} - Q] - 3a_1[p\sqrt{3R} + V]}{R \sqrt{4m\sqrt{3R} - Q}}$$



La geometría de las raíces es menos clara. Se comprueba que

$$S = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \gamma)^2 + \beta^2 - 6\beta\delta + \delta^2 = 0$$

Y así la raíz  $(\alpha, \beta)$  se halla sobre la circunferencia de centro  $(\gamma, 3\delta)$  y radio  $2\sqrt{2}\delta$  (o viceversa). [Si  $R=0$  también es fácil resolver la ecuación en  $Y$ , pero hay raíces reales por ser  $D_4 \leq 0$ ].

Una vez analizados los casos particulares prometidos, vamos a resumir los valores hallados de  $I$ . Como sabemos, lo que nos interesará para analizar centros y focos será únicamente su signo (es decir, el del numerador de las fórmulas que hemos ido obteniendo). En las páginas anteriores ha quedado precisado en cada caso cuando las  $z$  eran complejas. Tenemos pues:

(26) Sean  $P_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s$  sin raíces reales,  $E_2(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$  e  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2(z)}{P_4(z)} dz$ .

Entonces:

$$\text{Si } F=0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg} \left( a_2[\sqrt{G+p^2}] + 16a_0m^2 - 4a_1mp \right)$$

$$\text{Si } M=0, K \leq 0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg} \left( a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m} \right)$$

$$\text{Si } M=0, K \geq 0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg} \left( [a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m}] [q + \sqrt{L} + \sqrt{\omega}] - 2a_1p\sqrt{s} \right), \omega = (q + \sqrt{L})^2 - 4K$$

$$\text{Si } N_L=0, K_L > 0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}(p) \text{sg} \left( a_2ps + a_0mr - 2a_1ms \right)$$

$$\text{Si } N_L=0, K_L < 0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg} \left( 2a_2[2L-K] + 2a_0[2m\sqrt{\psi} + 2mq - p^2] - a_1[p\sqrt{\psi} - pq + 4mr] \right), \psi = q^2 - 4K_L$$

$$\text{Si } q_N=0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg}(p) \text{sg} \left( a_2[2ps + r\sqrt{\Sigma}] + a_0[2mr + p\sqrt{\Sigma}] - a_1K \right), \Sigma = -K_L$$

$$\text{Si } S=0 \Rightarrow \text{sg}(I) = \text{sg} \left( a_2[2q\sqrt{3R} + 6R - 4q^2 + 9K] + 3a_0[4m\sqrt{3R} - Q] - 3a_1[p\sqrt{3R} + V] \right)$$

En estos casos podemos ver cuándo la integral se hace cero. Aunque no estemos en ninguno de ellos, disponemos de fórmulas (trascendentes) como la (8) para el cálculo de  $I$ . Vamos a acabar la teoría de esta sección probando la siguiente condición general (por desgracia, únicamente necesaria) para la anulación de  $I$ :

(27) Si  $F \neq 0$ ,  $I = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv sp^2(6a_0a_2a_1 + a_1^3) + (rK + 2rL - 4spq)(a_2a_1^2 + a_2^2a_0) + (4sq^2 - r^2q - 2sK - 4sL)a_2^2a_1 + (r^3 + 8s^2p - 4rsq)a_2^3 - \\ &- mr^2(6a_0a_2a_1 + a_1^3) - (pK + 2pL - 4mrq)(a_0a_1^2 + a_0^2a_2) - (4mq^2 - p^2q - 2mK - 4mL)a_0^2a_1 - (p^3 + 8m^2r - 4mpq)a_0^3 = \\ &= [ra_2 - pa_0] [(ra_2 + pa_0)^2 - q(ra_2 + pa_0)a_1 + pra_1^2] + \\ &+ [4qa_0^2(ra_2 + pa_0) + 2ra_0(pa_0 - 3ra_2)a_1 - a_1(2qa_0 - ra_1)^2] m - \\ &- [4qa_2^2(ra_2 + pa_0) + 2pa_2(ra_2 - 3pa_0)a_1 - a_1(2qa_2 - pa_1)^2] s + \\ &+ 8[ra_2 - pa_0] [a_2a_0 + a_1^2] ms + 8pa_2^3 s^2 - 8ra_0^3 m^2 + 16a_0^2a_1 m^2s - 16a_2^2a_1 s^2m = 0 \end{aligned}$$

En efecto, partamos, por ejemplo, de (9). Si  $I=0$  debe anularse su numerador cuando  $Z_3$  sea la menor de las raíces de  $P_3(Z)$ . Así pues,  $Z_3$  es raíz común de este polinomio y del:

$$R_2(Z) = 2a_2Z^2 + [pa_1 - 2qa_2 - 4ma_0]Z + [Ka_2 + (4mq - p^2)a_0 - 2mra_1] \quad (28)$$

Debe anularse la resultante en  $Z$  de ambos polinomios. Calculándola y factorizándola (mejor con el ordenador), se obtiene que esa resultante es el producto  $F \cdot I_0$  y de ahí el resultado.

[Se llega a la misma expresión del  $I_0$ , suponiendo que  $M \neq 0$  y partiendo del numerador de (11); la condición  $F \neq 0$  (ó  $M \neq 0$ ) no causa problemas, pues en ese caso sabemos calcular  $I$ ; que  $I_0$  se anule no implica, desde luego, que lo haga  $I$ , pues el  $R_2$  puede ser anulado por otras raíces de  $P_3(Z)$ ; era esperable la simetría con que aparecen en  $I_0$  las parejas  $r-p$ ,  $m-s$  y  $a_0-a_2$ ]

Es claro que si  $P_3(Z)$  es factorizable (como en los casos de arriba) también lo será  $I_0$ . Sin embargo, precisamente entonces no es necesario hallar  $I_0$ . Pero, aunque no podamos hallar  $I$  (sin fórmulas trascendentes), el conocimiento de  $I_0$  nos puede garantizar que  $I \neq 0$ .

**Ejemplo 3.**  $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 \rightarrow F=0, M=-4, N_L=-12, q_N=0, S=-162$ .

Puesto que  $M < 0$  (o bien porque  $0 < K=4 < L=8$ ) las  $z$  son complejas.

Podemos hallar  $I$  a través de (17) ó (24). Sustituyendo en ellas  $\sqrt{G} = 20, \sqrt{\Sigma} = 2$ :

$$I = 2\sqrt{2}\pi \frac{a_2[20+4] + 16a_0 - 4a_1^2}{20\sqrt{20+12}} = \pi \frac{a_2[6-2+2] + a_0[2+2] - a_1^2}{2[3+2]\sqrt{1}} = \frac{\pi}{5} [3a_2 + 2a_0 - a_1^2]$$

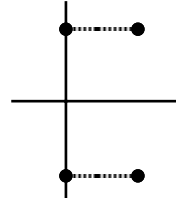
Factorizar  $P_4(z)$  es inmediato por ser  $q_N=0$ :  $P_4(z) = [z^2+1][z^2+2z+2]$ .

Más largo sería resolver  $P_4(x) = x^4 + 24x^2 + 400 = 0$  y hacer  $z = x/4 - 1/2$ ,

o resolver  $P_3(Z) = Z^3 - 3Z^2 - 4Z + 12 \rightarrow Z_1=C+D=3, Z_2=2, Z_3=-2$

y calcular  $A, B, C$  y  $D$  (sabiendo que  $A+B=2$  ó  $AD+BC=2$  ó  $CD=2$ )

Las  $z$  son las del dibujo de la derecha ( $\alpha=0, \beta=\delta=1, \gamma=1$ ):

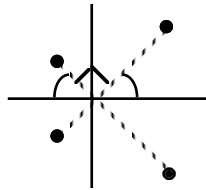


**Ejemplo 4.**  $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 8z + 16 \rightarrow F=72, M=0, N_L=0, q_N=-160, S=1456$ .

Como  $K=-16 < 0, f=-36 < 0$  (o porque  $K_L=-80 \neq 0$ ) todas las  $z$  son complejas.

Para el cálculo de  $I$  podemos usar la fórmula (18) [ó la (19)] y la (23).  $\sqrt{-f}=6, \sqrt{\Psi}=18$ .

$$I = \frac{2\pi}{6} [a_2 + a_0 \frac{2}{8}] = 2\pi \frac{2a_2 [2.64+16] + 2a_0 [2(18+2)-4] - a_1 [4.8-2(18-2)]}{18[18-2]\sqrt{2(18+2)-4}} = \frac{\pi}{12} [4a_2 + a_0]$$



Las raíces de  $P_3(Z)$  son  $Z=C+D=10$  ( $Z_2=0, Z_3=-8$ ) y  $CD=s=16$ .

Por tanto  $C=2, D=8$ . Así  $8A+2B=r=8, A+B=p=-2 \rightarrow A=2, B=-4$ :

$$P_4(z) = [z^2 + 2z + 2][z^2 - 4z + 8] \rightarrow z_{1,2} = -1 \pm i, z_{3,4} = 2 \pm 2i$$

[como  $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$  y  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$  debía ser  $\alpha = \beta, \gamma = -\delta$ ]

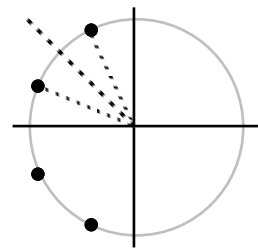
**Ejemplo 5.**  $P_4(z) = z^4 + 6z^3 + 18z^2 + 36z + 36 \rightarrow F=72, M=0, N_L=0, q_N=1296, S=0$ .

Las  $z$  son complejas:  $K=216 > 0, h=-60 < 0, q=18 > 12\sqrt{6}-12, K_L=72 \neq 0, Q=-36 < 0$ .

Utilizamos (21) [ó (20)], (22) y (25).  $\sqrt{\omega}=6, \sqrt{3R}=18$ .

$$I = \pi\sqrt{2} \frac{[a_2 6 + a_0] 36 - 2a_1 36}{6.12\sqrt{18}} = +4\pi \frac{a_2 6.36 + a_0 36 - 2a_1 36}{12.72} =$$

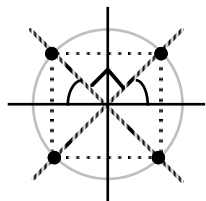
$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{a_2 72.36 + 3a_0 3.36 - 3a_1 6.36}{3.36\sqrt{3.36}} = \frac{\pi}{6} [6a_2 + a_0 - 2a_1]$$



Con  $Z=C+D=12$  se llega a  $P_4(z) = [z^2 + (3+\sqrt{3})z + 6][z^2 + (3-\sqrt{3})z + 6]$

[Si factorizamos  $I_0$  tenemos:  $I_0 = 72[6a_2 - a_0][6a_2 + a_0 - 2a_1][6a_2 + a_0 - 3a_1]$ . Si son no nulos los tres corchetes debe ser  $I \neq 0$ , pero si alguno es cero no sabemos (sin calcularla) si  $I$  se anula o no (como no tienen el mismo signo los coeficientes de  $a_0$  y  $a_2$ , el primer corchete no puede ser el numerador de  $I$ , pero no sabríamos si lo es el segundo o el tercero)].

**Ejemplo 6.**  $P_4(z) = z^4 + 4 \rightarrow F=M=N_L=q_N=S=0, z_{1,2}=-1 \pm i, z_{3,4}=1 \pm i$  (complejas).



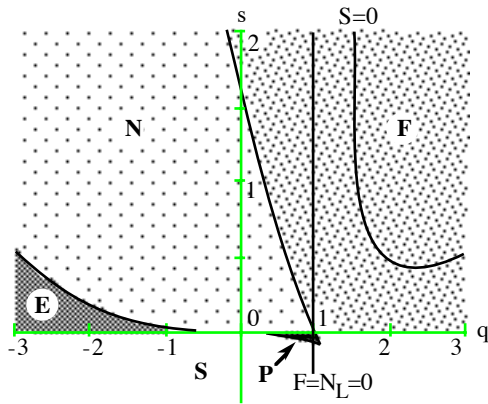
Usando (16), (17), (19), (21), (23) o (25)  $\rightarrow I = \frac{\pi}{4} [2a_2 + a_0]$

Se tiene, como debía ser:

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}, (\alpha - \gamma)^2 + \beta^2 - 6\beta\delta + \delta^2 = 0, \beta = \delta, \theta_1 + \theta_2 = \pi \text{ y } r_1 = r_2$$

**Ejemplo 7.**  $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + qz^2 + s$  [todo  $P_4$  con  $r=0, p \neq 0$  toma esa forma haciendo  $z = \frac{py}{2m}$ ]

$$D_4 = 16s[16s^2 - (8q^2 - 36q + 27)s + q^4 - q^3] = 0 \quad \text{si } s=0 \text{ ó } s = \frac{1}{32} (8q^2 - 36q + 27 \pm [9 - 8q]^{3/2}) = s_{\pm}$$



Así, las  $z$  son complejas si  $s > 0$  para  $q \geq 1$  y si  $s > s_+$  para  $q \leq 1$  [región **F** del dibujo; en **E** y **P** hay 4 reales y 2+2 en **N** y **S**]. Además:

$$f = 4(1-q), \quad N_L = 4s(1-q), \\ q_N = M = -4s, \quad S = 2(q^3 - 36qs + 54s)$$

Por tanto, si  $q=1$  podemos calcular  $I$  (para  $s > 0$ ) a partir de las fórmulas (17) ó (23). Obtenemos:

$$I = \sqrt{2} \pi \frac{a_2[r_6+1] + 4a_0 - 2a_1}{r_6 \sqrt{r_6 - 1}}, \quad \text{con } r_6 = \sqrt{16s+1}$$

Si  $s = s_S = \frac{q^3}{18[2q-3]}$ , utilizando (25) obtenemos tras algunas simplificaciones que para  $q > \frac{3}{2}$ :

$$I = 3\sqrt{2}r_2 \pi \frac{a_2q^2 + 3a_0r_2[r_8 - r_2] - a_1qr_2[r_8 - 2r_2]}{q^2r_8^2\sqrt{r_8 - 2r_2}}, \quad \text{siendo } r_2 = \sqrt{2q-3}, \quad r_8 = \sqrt{8q-9}$$

Para los demás valores de  $q$  y  $s$  debemos calcular  $I$  mediante las fórmulas más generales en términos de raíces de ecuaciones de tercer orden. Así, por ejemplo, podríamos utilizar (11):

$$I = 2\pi \frac{a_2[4s] + a_0[-2Z_3] - a_1[4s - Z_3^2]}{[3Z_3^2 - 2qZ_3 - 4s] \sqrt{4s - Z_3^2}} \quad (29)$$

siendo  $Z_3$  la menor de las raíces de  $Z^3 - qZ^2 - 4sZ + 4s(q-1)$ , que podría calcularse así:

$$Z_3 = \frac{1}{3} \left[ q + 2\sqrt{R} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3} \right], \quad \phi = \arccos \left[ \frac{q^3 - 36qs + 54s}{R^{3/2}} \right], \quad R = q^2 + 12s$$

Además de esta fórmula trascendente disponemos de la condición algebraica (27): para que sea  $I=0$  es necesario que se anule:

$$I_0 = 4[4a_2^2(a_2 - a_1)s^2 + (a_1[qa_2 - a_1]^2 + a_0[4a_0a_1 - 4a_0a_2 - 4a_1^2 + 6a_2a_1 - 2qa_2^2])s - a_0^2(q-1)(qa_1 - 2a_0)]$$

Hallemos un valor exacto de  $I$  en un punto de **F** que no esté ni sobre  $q=1$  ni sobre  $s=s_S$ . Por ejemplo, sea  $q=0, s=2$ . Para esos valores  $P_3(z)$  e  $I_0$  resultan ser factorizables:

$$P_3(z) = [Z-2][Z^2 - 2Z - 4], \quad I_0 = -8[2a_2 + a_0 - a_1][a_1^2 - 3a_0a_1 + 2a_2a_1 + a_0^2 + 2a_2a_0 - 4a_2^2]^2$$

Como la  $Z$  menor es  $Z_3 = -2 \left[ = \frac{4\sqrt{6}}{3} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3}, \phi = \arccos \frac{3\sqrt{6}}{8} (!) \right]$ , deducimos de (29) que:

$$I = \pi[2a_2 + a_0 - a_1]$$

La anulaci3n del factor de primer orden del  $I_0$  equivale, en este caso, a la anulaci3n de  $I$ .

### 4.3 Centros y focos homogéneos para $n=3$ .

Con las técnicas de la sección anterior, podemos atacar el problema de distinguir entre centro y foco, continuando el análisis iniciado en la 4.1 para los casos más sencillos. En esa sección vimos que, en el caso de no existir variedades que llegasen al origen, el sistema

$$[H3] \begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$$

tenía un foco estable, un centro o un foco inestable dependiendo de que el producto  $d \cdot l$ , con

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c+3h)z^2 + (2b+2g)z + (3a+f)}{-dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2(z)}{P_4(z)} dz$$

fuese mayor, igual o menor que cero. Supondremos que  $d < 0$ , para adecuarnos a lo supuesto en 4.2 (si no fuese así, se cambiaría el signo de los coeficientes y el sentido de las órbitas), con lo que  $l < 0$  implicará la estabilidad asintótica del foco. Resumamos algunos resultados de 4.2:

#### Teorema 4.2

Sean

$$m = -d, \quad p = h - c, \quad q = g - b, \quad r = f - a, \quad a_2 = c + 3h, \quad a_1 = 2(b + g), \quad a_0 = 3a + f$$

$$L = 4ms, \quad K = pr, \quad N = mr^2 + p^2s, \quad K_L = K - L, \quad N_L = N - qL, \quad R = q^2 - 3K_L, \quad S = 2q^3 - 9qK_L + 27N_L$$

$$Q = 3p^2 - 8mq, \quad F = p^3 - 4mpq + 8m^2r, \quad V_2 = \frac{1}{3}[RQ - 2mS], \quad D_4 = \frac{1}{27}[4R^3 - S^2], \quad G = \frac{1}{3}[64m^2R - Q^2]$$

Supongamos que o bien  $D_4 > 0$  y  $V_2 \leq 0$  ó  $Q \leq 0$  o bien  $F = V_2 = 0$  y  $Q < 0$ , y sea  $Z_3$  la menor de las raíces de  $P_3(Z) = Z^3 - qZ^2 + K_L Z - N_L$ . Entonces las raíces de  $P_4(z)$  son complejas y además:

$$\text{si } p\sqrt{s} + r\sqrt{m} = 0 \Rightarrow \text{sg}(l) = \text{sg}(a_2\sqrt{s} + a_0\sqrt{m})$$

$$\text{si } p\sqrt{s} + r\sqrt{m} \neq 0 \Rightarrow \text{sg}(l) = \text{sg}(p\sqrt{s} + r\sqrt{m}) \text{sg}(a_1 Z_3^2 - [ra_2 + pa_0]Z_3 + 2pa_2s + 2ra_0m - a_1L)$$

$$\text{si } F = 0 \Rightarrow \text{sg}(l) = \text{sg}(a_2[\sqrt{G} + p^2] + 16a_0m^2 - 4a_1mp)$$

$$\begin{aligned} \text{si } F \neq 0, \quad l = 0 \Rightarrow l_0 = & (fc + ac + fh - 3ah)(4[fh - ac]^2 - [b + g][abc + fbc + abh - 3fbh + fgc + fgh + agh - 3agc]) \\ & + 2([f^2hg + f^2cg + 3a^2cg + 3a^2hg - 8fahg + f^2cb - 2facb - 2fahb + 3f^2hb + 3a^2hb - 3a^2cb]a_0 + [bf + ba - 2ag]^2a_1)d \\ & + 2([c^2ab + c^2fb + 3h^2ab + 3h^2fb - 8cahb + c^2fg - 2cahg - 2cfhg + 3c^2ag + 3h^2ag - 3h^2fg]a_2 + [2hb - gc - hg]^2a_1)e \\ & - (f - a)a_0^3d^2 - (c - h)a_2^3e^2 - 2(fc + fh + ac - 3ah)(a_2a_0 + a_1^2)ed + 2a_2^2a_1e^2d + 2a_0^2a_1ed^2 = 0 \end{aligned}$$

Además de lo recogido en el teorema, en 4.2 hemos obtenido el valor de  $l$  en función de los coeficientes en otra serie de casos y hemos caracterizado las raíces complejas en términos de la mayor de las raíces del discriminante, visto como función de  $s$ . Analicemos una serie de ejemplos, que serán cada vez más complicados porque iremos introduciendo parámetros en el sistema. Estos ejemplos servirán también para repasar los resultados de 3.6 sobre la existencia de autovalores cero asociados a vectores propios múltiples.

**Ejemplo 8.**  $\begin{cases} x' = 5x^3 + 6x^2y + xy^2 - y^3 \\ y' = 8x^3 + 5x^2y + 9xy^2 + 5y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 8.$

F, M, N<sub>L</sub>, q<sub>N</sub>, S ≠ 0, pero Q=24, V<sub>2</sub>=-348, D<sub>4</sub>=53888, I<sub>0</sub>=171856 : hay un foco en el origen. Como el discriminante de E<sub>2</sub> es negativo y a<sub>0</sub>=20 el foco es inestable.

**Ejemplo 9.**  $\begin{cases} x' = -3xy^2 - y^3 \\ y' = 36x^3 + 36x^2y + 18xy^2 + 3y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 6z^3 + 18z^2 + 36z + 36.$

En el ejemplo 5 de la sección anterior calculamos el valor de  $I = \frac{\pi}{6} [6a_2 + a_0 - 2a_1]$ . Como a<sub>2</sub>=6, a<sub>0</sub>=36 y a<sub>1</sub>=36, deducimos que I=0 y, por tanto, el sistema posee un centro.

**Ejemplo 10.**  $\begin{cases} x' = ax^3 + 2xy^2 - y^3 \\ y' = 16x^3 + (8+a)x^2y + 2xy^2 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 8z + 16$ , para todo a.

Es el polinomio analizado en el ejemplo 4 de 4.2. De allí:  $I = \frac{\pi}{12} [4a_2 + a_0] = \frac{\pi}{3} [4+a]$ . Hay un foco estable, centro o foco inestable según sea a < -4, a = -4 ó a > -4.

**Ejemplo 11.**  $\begin{cases} x' = -x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \\ y' = sx^3 + 4x^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = 2z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + s.$

¿Cuándo sus raíces son complejas? Se tiene que:

$F = 0$ ,  $M = 16(2-s)$ ,  $N_L = 32(1-s)$ ,  $q_N = 16(4-s)$ ,  $S = 432(1-s)$   
 $Q = h = -48$ ,  $V_2 = 192(s-2)$ ,  $D_4 = 256(8s-7)(s-2)^2$ ,  $G = 256(8s-7)$

Así, si s <, =, > 7/8, P<sub>4</sub>(z) tiene respectivamente dos raíces complejas y dos reales, una real doble y dos complejas o cuatro raíces complejas. Primero, calculemos la I para este último caso. A partir de la expresión (21), siendo a<sub>2</sub>=0, a<sub>1</sub>=8, a<sub>0</sub>=4, obtenemos:

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{a_2[\sqrt{8s-7}+1] + 4a_0 - 2a_1}{\sqrt{8s-7} \sqrt{3+\sqrt{8s-7}}} = 0 \Rightarrow \text{centro en el origen si } s > 7/8.$$

[Para s=1 la expresión de I la podríamos obtener también a partir de (22) ó (25); para s=2, de (15), (20) o (21); para s=4, de (24), como hicimos (salvo un factor 2), en el ejemplo 3 de 4.2].

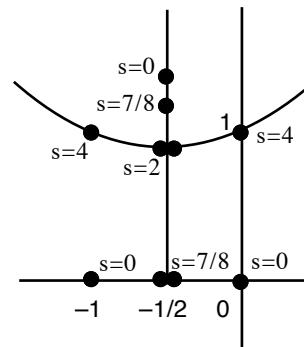
El hecho de que sea F=0 para todo s, nos permite además, utilizando lo visto en 4.2, factorizar P<sub>4</sub>(z) = 2[z<sup>2</sup>+Az+C][z<sup>2</sup>+Bz+D] y hallar exactamente sus raíces:

Conocemos las raíces de P<sub>3</sub>(Z) : Z<sub>0</sub> = 4 y Z<sub>±</sub> = 1 ± √(8s-7).

Las z del semiplano superior tendrán iguales las partes reales cuando sea M < 0; es decir, si s ≥ 2. A partir de la Z = 2[C+D], se pueden calcular los C, D, A y B y las z. En concreto, hagámoslo para s ≤ 2, y así tendremos las z reales para s ≤ 7/8.

Ahora, A=B=-1/2, C+D=2 y CD=s/2. Por tanto, si s ≤ 2:

$$P_4(z) = 2[z^2 + z + 1 + \sqrt{1-s/2}] [z^2 + z + 1 - \sqrt{1-s/2}]$$



Estudiemos la estructura del origen cuando no haya centro. El λ asociado a un z real es

$$\lambda = -z - 3z^2 - 2z^3 = -z(z+1)(2z+1)$$



Con esto y el dibujo anterior tendríamos el signo de los  $\lambda$ , pero repasemos los resultados de 3.6. La ecuación para los autovalores es en este caso:

$$P_4(\lambda) = 4\lambda^4 + 4(38-11s)\lambda^2 + s^2(8s-7) \rightarrow \text{existe } \lambda=0 \text{ si } s=0 \text{ y si } s=\frac{7}{8}$$

Por otra parte, los A y B introducidos en esa sección resultan ser  $A=0$  y  $B=64(8s-7)$ . Sólo pueden existir  $z$  múltiples con  $\lambda=0$  si  $s=7/8$ , como de hecho sucede:

$$s = \frac{7}{8} \rightarrow P_4(z) = \frac{1}{8}(2z+1)^2(4z^2+4z+7) \rightarrow z = -\frac{1}{2} \text{ doble asociado a } \lambda=0$$

En ese caso debe existir un factor común a los segundos miembros del sistema:

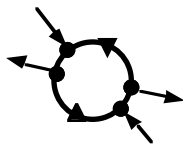
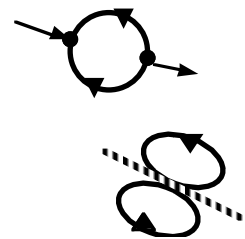
$$\begin{cases} x' = -y(x+y)(x+2y) \\ y' = \frac{1}{8}(7x^2+18xy+4y^2)(x+2y) \end{cases}$$

El análisis de este sistema se reduce, pues, al de:

$$\begin{cases} x' = -y(x+y) \\ y' = (7x^2+18xy+4y^2)/8 \end{cases} \rightarrow P_3(z) = \frac{1}{8}(2z+1)(4z^2+4z+7)$$

Al  $z=-1/2$  está asociado un  $\lambda > 0$  y su estructura es la de la arriba.

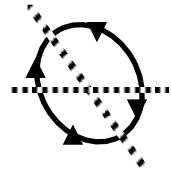
Para el sistema inicial basta incluir la recta de puntos críticos y cambiar el sentido de las órbitas en  $x+2y < 0$  (dibujo de abajo).



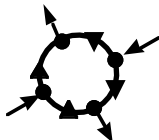
Sea ahora  $0 < s < \frac{7}{8}$ . Las dos  $z$  reales cumplen  $-1 < z_1 < -1/2 < z_2 < 0$ . Por tanto, sus  $\lambda$  asociados tienen los signos:  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ . La orientación dada por  $P_4(z)$  da lugar a cuatro sectores elípticos.

Si  $s=0 \rightarrow P_4(z) = 2z(z+1)(z^2+z+2) \rightarrow z=0, -1$  asociadas a  $\lambda = 0$ . Así

$$\begin{cases} x' = -y(x+y)(x+2y) \\ y' = y(x+y)(4x+y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -x-2y \\ y' = 4x+y \end{cases} \rightarrow \text{centro}$$

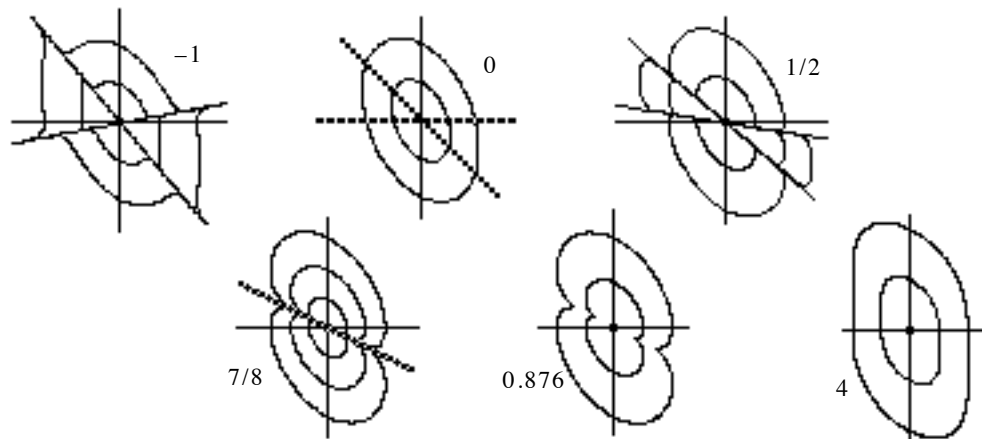


Incluyendo las rectas de puntos críticos y el cambio de orientaciones:



Si  $s < 0$ , las dos reales:  $z_1 < -1 < 0 < z_2 \rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Como  $P_4(z)$  es negativo entre las dos raíces hay un punto silla.

Integrando numéricamente se identifican las estructuras anteriores:



**Ejemplo 12.**  $\begin{cases} x' = -y^3 \\ y' = s x^3 + qxy^2 + 2y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 2z^3 + qz^2 + s.$

Este polinomio fue analizado en el ejemplo 7 de 4.2. Las  $z$  eran complejas en la región  $F$  allí descrita. La integral  $I$  para el sistema ( $a_2=6$ ,  $a_0=0$ ,  $a_1=2q$ ) es, según (29):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6z^2 + 2qz}{P_4(z)} dz = 4\pi \frac{12s - 4qs + qZ_3^2}{[3Z_3^2 - 2qZ_3 - 4s] \sqrt{4s - Z_3^2}} \quad (30)$$

Es fácil comprobar que si  $F=N_L=0$  o si  $S=0$  es  $I>0$ . ¿Y en los demás puntos de  $F$ ? Como:

$$I_0 = 128s[q^3 - 9qs + 27s]$$

sólo puede haber un centro si  $s = s_0 = \frac{q^3}{9[q-3]}$ ,  $q>3$ . Entonces el numerador de (30) es:

$$q \left[ Z_3^2 - \frac{4}{9}q^2 \right] = q \left[ Z_3 - \frac{2q}{3} \right] \left[ Z_3 + \frac{2q}{3} \right]$$

y además el  $P_3(Z)$  es factorizable:

$$P_3(Z) = \left[ Z - \frac{2q}{3} \right] \left[ Z^2 - \frac{q}{3}Z - \frac{2q^2[q-1]}{3[q-3]} \right] \rightarrow Z_3 = \frac{q}{6} [1 - r_5], \text{ con } r_5 = \sqrt{\frac{25q-27}{q-3}}$$

Como  $Z_3 \neq \pm 2q/3$  para todo  $q>3$  deducimos que para ningún  $(q,s)$  es  $I=0$ : no hay centro. Así pues, en todo  $F$  hay un foco del mismo tipo: inestable.

[tras alguna simplificación se llega a la expresión:  $I = \frac{6\sqrt{2}\pi}{r_5} \sqrt{r_5-5} > 0$ , si  $s=s_0$ ,  $q>3$ ]

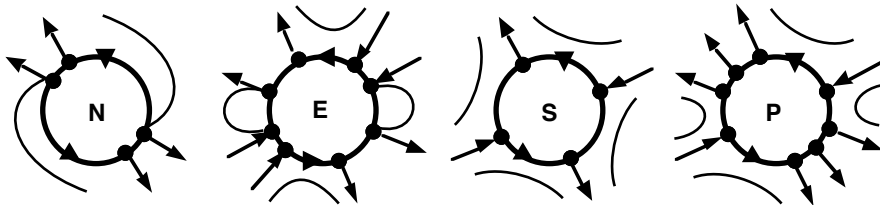
Analicemos ahora los mapas de fases en las demás regiones del dibujo de la página 74 (los casos genéricos con  $z$  reales). La estructura del punto crítico puede modificarse sólo por la aparición o desaparición de rectas invariantes (es decir, sobre  $s=0$  y las otras curvas con  $D_4=0$ ) o cuando algún autovalor cambie de signo. Como  $\lambda=z^3$ , esto último sólo pueden ocurrir al cruzar  $s=0$ . En cada región la estructura es, pues, la misma. Basta analizar el sistema en un  $(q,s)$  situado en cada una de ellas:

**N**:  $(0,1) \rightarrow P_4(z) = [z+1][z^3+z^2-z+1] \rightarrow z_1 \approx -1.8, z_2 = -1$

**E**:  $(-11,12) \rightarrow P_4(z) = [z+1][z-2][z^2+3z-6] \rightarrow z_1 \approx -4.4, z_2 = -1, z_3 \approx 1.4, z_4 = 2$

**S**:  $(1,-4) \rightarrow P_4(z) = [z+2][z-1][z^2+3z-6] \rightarrow z_1 = -2, z_2 = 1$

**P**:  $(1,-1/16) \rightarrow P_4(z) = [8z^2+4z-1][8z^2+12z+3]/64 \rightarrow z_1 \approx -1.2, z_2 \approx -0.7, z_3 \approx -0.3, z_4 \approx 0.2$



Los puntos de **N** corresponden, pues, a nodos inestables, los de **E** a puntos con dos sectores elípticos y dos hiperbólicos (separados por sectores parabólicos), los de **S** a sillas y los de **P** a puntos con cuatro sectores hiperbólicos (y dos parabólicos).

**Ejemplo 13.**  $\begin{cases} x' = cxy^2 - 2y^3 \\ y' = 6x^3 + rx^2y + cy^3 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} P_4(z) &= 2z^4 + rz + 6, Q=0, V_2 = -72r^2, \\ D_4 &= -108(r+8)(r-8)(r^2+64) \end{aligned}$

Hay, por tanto, cuatro  $z$  complejas si  $-8 < r < 8$  y dos reales y dos complejas para los demás valores de  $r$ . Las  $z$  reales serán dobles cuando sea  $r = \pm 8$ .

A diferencia del caso anterior no podemos calcular la  $I$  salvo si  $r=0$ , ya que:

$$N_L = 2r^2, q_N = -2r^2, S = 54r^2, F = 32r, M = 2r^2$$

[en ese caso sencillo resulta ser  $I = \pi 2^{1/2} 3^{-1/4} c$ , lo que da inmediatamente la estabilidad].

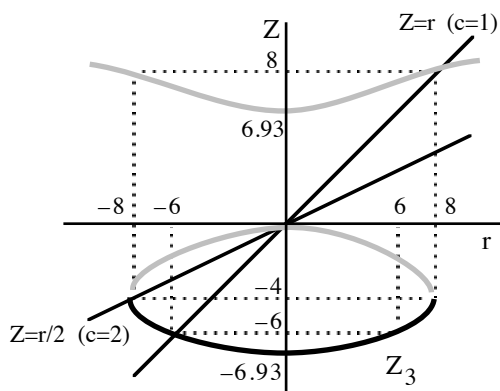
Para ver si para algún valor de  $r$  puede haber un centro hallamos

$$I_0 = -32r^2(r^2 - 2c^3r - 48c^2)$$

Tal vez si  $r = c^3 \pm c\sqrt{c^4 + 48}$  lo haya. Lo podemos precisar por otro camino. De 4.2 sabemos que el signo de  $I$  coincide con el numerador de (9) [es decir, con (28)] que resulta ser:

$$R_2(Z_3) = 8Z_3(cZ_3 - r)$$

con  $Z_3$  la menor de las raíces de  $P(Z) = Z^3 - 48Z - 2r^2$ , que representamos despejando la  $r$ :



Se tiene entonces que cuando  $c \in (-2, 2)$  habrá un centro para el  $r \in (-8, 8)$  intersección de la recta  $Z=r/c$  con la rama de la curva del dibujo en trazo continuo (ese  $r$  vendrá dado por uno de los dos signos de  $r = c^3 \pm c\sqrt{c^4 + 48}$ ).

Podemos deducir también la estabilidad de los focos a partir del dibujo. Por ejemplo, si  $c=1$ , se tiene que hay un foco estable si  $-8 < r < -6$ , un centro si  $r=-6$  y un foco inestable si  $-6 < r < 8$ . Para  $|c| \geq 2$  sólo hay focos (estable o inestable dependiendo del signo de  $c$ ).

Para analizar el resto de los  $r$  utilizamos los resultados de 3.6. Obtenemos en este caso:

$$\begin{aligned} P_4(\lambda) &= 4\lambda^4 - 12r\lambda^3 + 12(r^2 + 2c^2)\lambda^2 - (4r^3 + c^3r^2 - 12c^2r + 576c)\lambda + 36(4cr + 48 + c^4) \\ A &= 4r^2(r + c^3), \quad B = 9c^2(256c + r^3) \end{aligned}$$

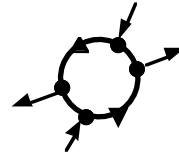
Existirán, por tanto, autovalores  $\lambda=0$  si  $r = -[48 + c^4]/4c$  que podrán estar asociados a  $z$  dobles cuando sea  $A=B=0$ , es decir si  $(c,r)$  es  $(0,0)$ ,  $(2,-8)$  ó  $(-2,8)$ .

La estructura del punto crítico puede modificarse sólo si  $D_4=0$  (aparición o desaparición de rectas invariantes), si  $s_\lambda=0$  (cambio de signo de algún  $\lambda$ ) o si  $I_0=0$  (el foco puede pasar de ser estable a ser inestable). El plano  $cr$  queda así dividido por estas curvas en regiones correspondientes a retratos de fase que son equivalentes. Basta analizar el origen para valores de  $c$  y  $r$  pertenecientes a las regiones del semiplano  $r > 0$  (las del  $r < 0$  son similares, pues al cambiar  $y \rightarrow -y$ ,  $c \rightarrow -c$ ,  $r \rightarrow -r$  resulta el mismo sistema con el sentido de las órbitas opuesto). Analizaremos sólo el caso  $c=1$ . Los demás serían parecidos.

Sea  $c=1$ . Ya hemos visto lo que ocurre si  $-8 < r < 8$ . A partir de  $\lambda = z^2(1-2z)$  y del dibujo de las gráficas de  $2z^4+6$  y las rectas  $-rz$  (tangentes en  $z=1$  si  $r=-8$ ) podemos deducir:

Si  $r < -\frac{49}{4}$ , las dos  $z$  reales distintas cumplen  $z_1 < \frac{1}{2} < z_2 \rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ .

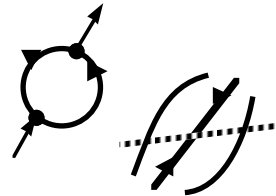
Como además el signo de  $P_4(z)$  es positivo en  $z=0$  se tiene un punto silla:



Si  $r = -\frac{49}{4} \rightarrow P_4(z) = \frac{1}{4}(2z-1)(4z^3+2z^2+z-24) \rightarrow z_1 = \frac{1}{2} < z_2$  asociadas a  $\lambda_1=0, \lambda_2 < 0$ .

$$\begin{cases} x' = y^2(x-2y) \\ y' = \frac{1}{4}(x-2y)(24x^2-xy-2y^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = y^2 \\ y' = \frac{1}{4}(24x^2-xy-2y^2) \end{cases}$$

$$\rightarrow P_3(z) = -\frac{1}{4}(4z^3+2z^2+z-24).$$

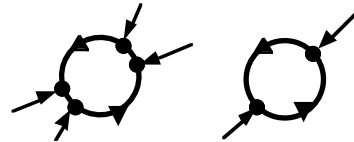


Su estructura es la de la izquierda y la del inicial la de la derecha.

Si  $-\frac{49}{4} < r < -8 \rightarrow \frac{1}{2} < z_1 < 1 < z_2 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$

$r = -8 \rightarrow P_4(z) = 2(z-1)^2(z^2+2z+3) \rightarrow z=1$  con  $\lambda=-1$

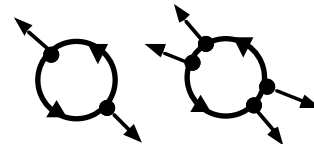
Ambos son nodos estables.



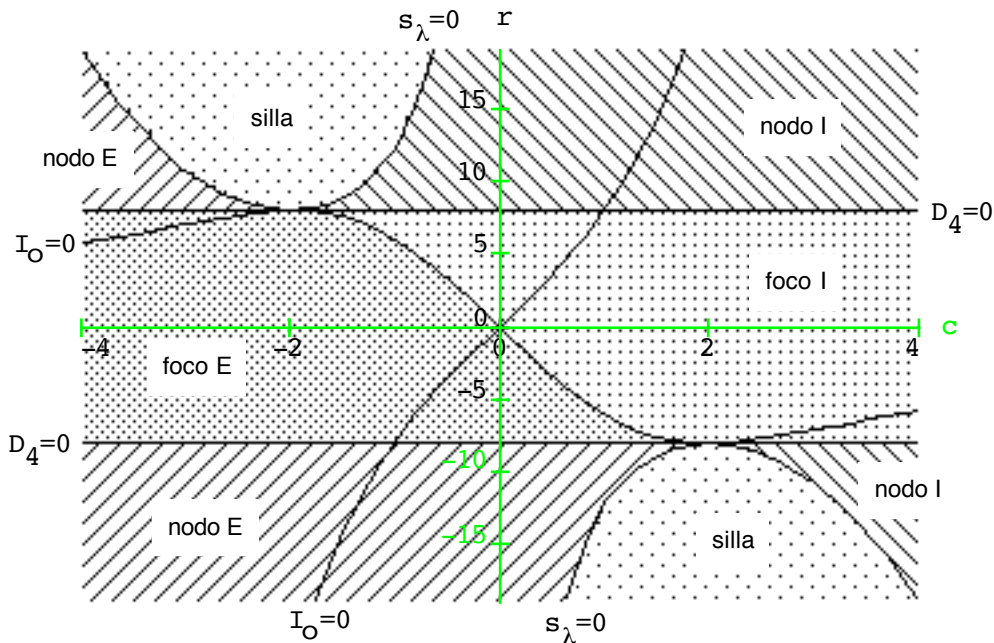
$r=8 \rightarrow P_4(z) = 2(z+1)^2(z^2-2z+3) \rightarrow z=-1$  doble con  $\lambda=3$

$r > 8 \rightarrow z_1, z_2 < 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$

Los dos son nodos inestables.



Tratando análogamente el resto de los casos se llega a la siguiente clasificación:



#### 4.4 Inestabilización de centros elementales.

Consideremos ahora un sistema para el que el origen  $\mathbf{0}$  sea un punto elemental cuya aproximación lineal tenga autovalores imaginarios puros. Este sistema, con cambios lineales y salvo un factor constante de los segundos miembros, se podrá escribir:

$$[S] \quad \begin{cases} x' = y + A_2(x,y) + A_3(x,y) + \dots = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots \\ y' = -x + B_2(x,y) + B_3(x,y) + \dots = -x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + \dots \end{cases}$$

Como se sabe,  $\mathbf{0}$  se trata de un centro, un foco estable o un foco inestable del sistema no lineal [S]. Escribiendo [S] en polares se tiene [ $C = \cos \theta$ ,  $S = \sin \theta$ ]:

$$[P] \quad \begin{cases} r' = [CA_2(C,S) + SB_2(C,S)]r^2 + [CA_3(C,S) + SB_3(C,S)]r^3 + \dots \equiv M_2r^2 + M_3r^3 + \dots \\ \theta' = -1 + [CB_2(C,S) - SA_2(C,S)]r + [CB_3(C,S) - SA_3(C,S)]r^2 + \dots \equiv -1 + m_2r + m_3r^2 + \dots \end{cases}$$

Desarrollando en serie de potencias de  $r$  la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema en polares obtenemos:

$$\begin{aligned} [e] \quad \frac{dr}{d\theta} &\equiv R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + R_4(\theta)r^4 + R_5(\theta)r^5 + R_6(\theta)r^6 + R_7(\theta)r^7 + \dots = \\ &= -\frac{M_2r^2 + M_3r^3 + M_4r^4 + \dots}{1 - [m_2r + m_3r^2 + \dots]} = -(M_2r^2 + M_3r^3 + M_4r^4 + \dots)(1 + m_2r + [m_3 + m_2^2]r^2 + \dots) = \\ &= -M_2r^2 - [M_3 + M_2m_2]r^3 - [M_4 + M_2m_3 + m_2M_3 + M_2m_2^2]r^4 - \\ &\quad - [M_5 + m_2M_4 + M_2m_4 + M_3m_3 + 2M_2m_2m_3 + m_2^2M_3 + M_2m_2^3]r^5 - \\ &\quad - [M_6 + m_2M_5 + M_2m_5 + M_3m_4 + m_3M_4 + m_2^2M_4 + 2M_2m_2m_4 + M_2m_3^2 + 2m_2M_3m_3 + \\ &\quad \quad + 3M_2m_2^2m_3 + m_2^3M_3 + M_2m_2^4]r^6 - \\ &\quad - [M_7 + m_2M_6 + M_2m_6 + M_3m_5 + m_3M_5 + M_4m_4 + \\ &\quad \quad + m_2^2M_5 + 2M_2m_2m_5 + 2M_2m_3m_4 + 2m_2M_3m_4 + 2m_2m_3M_4 + M_3m_3^2 + \\ &\quad \quad + m_2^3M_4 + 3m_2^2M_3m_3 + 3M_2m_2m_3^2 + 3M_2m_2^2m_4 + \\ &\quad \quad + m_2^4M_3 + 4M_2m_2^3m_3 + M_2m_2^5]r^7 - \dots \end{aligned}$$

La solución  $r(\theta)$  con  $r(0)=r_0$  de [e] será una función analítica de  $r_0$ , que se anula si  $r_0=0$ :

$$r(\theta) \equiv u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + u_3(\theta)r_0^3 + \dots$$

Haciendo  $\theta=0$ :

$$r_0 \equiv u_1(0)r_0 + u_2(0)r_0^2 + u_3(0)r_0^3 + \dots$$

Por tanto:

$$u_1(0) = 1, \quad u_k(0) = 0 \text{ si } k > 1.$$

Llevando la expresión de  $r(\theta)$  a [e] obtenemos:

$$u_1' r_0 + u_2' r_0^2 + u_3' r_0^3 + \dots = u_1^2 R_2 r_0^2 + [2u_1 u_2 R_2 + u_1^3 R_3] r_0^3 + \dots$$

Igualando potencias:  $u_1' = 0$ , que junto al dato inicial  $u_1(0) = 1$  nos lleva a que  $u_1(\theta) = 1$ .

Además:

$$u_2' = R_2$$

$$u_3' = 2u_2 R_2 + R_3$$

$$u_4' = [2u_3 + u_2^2] R_2 + 3u_2 R_3 + R_4$$

$$u_5' = 2[u_4 + u_3 u_2] R_2 + 3[u_2^2 + u_3] R_3 + 4u_2 R_4 + R_5$$

$$u_6' = [2u_5 + 2u_4 u_2 + u_3^2] R_2 + [3u_4 + 6u_3 u_2 + u_2^3] R_3 + 2[2u_3 + 3u_2^2] R_4 + 5u_2 R_5 + R_6$$

$$u_7' = 2[u_6 + u_5 u_2 + u_4 u_3] R_2 + 3[u_5 + 2u_4 u_2 + u_3^2 + u_3 u_2^2] R_3 + 4[u_4 + 3u_3 u_2 + u_2^3] R_4 + 5[u_3 + 2u_2^2] R_5 + 6u_2 R_6 + R_7$$

Este sistema, unido al dato  $u_k(0) = 0$  nos permitiría ir calculando sucesivamente los  $u_k(\theta)$ :

$$u_2(\theta) = \int_0^\theta R_2, \quad u_3(\theta) = \int_0^\theta [2u_2 R_2 + R_3], \quad u_4(\theta) = \int_0^\theta [(2u_3 + u_2^2) R_2 + 3u_2 R_3 + R_4], \dots$$

El hecho de que  $\mathbf{0}$  sea centro o foco dependerá de que, cerca de  $\mathbf{0}$ , el valor de la  $r(\theta)$  en  $\theta=2\pi$  sea igual o distinto que el valor para el inicial  $\theta=0$ . En concreto, como  $\theta$  decrece con  $t$  cerca de  $\mathbf{0}$ , será foco estable si  $r(2\pi) > r(0)$  e inestable si la desigualdad es la opuesta. Nos interesa, pues, hallar el signo de:

$$r(2\pi) - r(0) = u_2(2\pi) r_0^2 + u_3(2\pi) r_0^3 + u_4(2\pi) r_0^4 + \dots$$

Este signo, para  $r_0$  pequeño, nos lo proporcionará el primer término no nulo del último desarrollo ( $\mathbf{0}$  será un centro si y sólo si todos los  $u_k(2\pi)=0$ ). Veamos como calcular los primeros  $u_k(2\pi)$ , usualmente llamados valores focales o coeficientes de Lyapunov, con el menor número de cuentas posibles. Como  $M_k$  y  $m_k$  son polinomios homogéneos en  $C$  y  $S$  de grado  $k+1$ , los  $R_k$  resultan ser sumas de polinomios homogéneos de paridad opuesta a la de  $k$ . Está claro entonces que  $u_2(2\pi)=0$ . Para el  $u_3$ , tenemos que

$$2 \int_0^\theta u_2 R_2 = u_2^2 \rightarrow u_3 = u_2^2 + S_3, \text{ siendo } S_3 \equiv \int_0^\theta R_3.$$

Los términos de  $R_3$  que contengan potencias impares de  $S$  ó  $C$  tendrán promedio 0. Así:

$$u_3(2\pi) = S_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} [-a_{30} C^4 - (b_{21} + a_{12}) C^2 S^2 - b_{03} S^4 - a_{20} b_{20} C^6 + (2a_{20} a_{11} - 2b_{20} b_{11} - a_{11} b_{11} - a_{02} b_{20} - a_{20} b_{02} + a_{20} b_{20}) C^4 S^2 + (2a_{11} a_{02} - 2b_{11} b_{02} + a_{11} b_{11} + a_{02} b_{20} + a_{20} b_{02} - a_{02} b_{02}) C^2 S^4 + a_{02} b_{02} S^6] d\theta$$

La integral entre 0 y  $2\pi$  de  $C^4$ ,  $C^2 S^2$ ,  $S^4$ ,  $C^6$ ,  $C^4 S^2$ ,  $C^2 S^4$ ,  $S^6$

vale, respectivamente,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{8}$ ,  $\frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{5\pi}{8}$

Sustituyendo en la expresión de  $S_3(2\pi)$ , dividiendo por  $\pi/4$  y cambiando el signo del resultado para que el signo menos esté asociado a la estabilidad, concluimos que:

El origen de [S] es foco estable o inestable si, respectivamente, es menor o mayor que cero la expresión:

$$I_3 \equiv 3a_{30} + b_{21} + a_{12} + 3b_{03} + 2a_{20}b_{20} - 2a_{02}b_{02} + b_{11}b_{02} - a_{11}a_{02} + b_{11}b_{20} - a_{11}a_{20}$$

El  $I_3$  debe anularse (y así lo hace) si, por ejemplo, las órbitas son simétricas respecto a alguno de los ejes ( $\Rightarrow a_{20}=a_{02}=a_{30}=a_{12}=b_{11}=b_{21}=b_{03}=0$  ó  $a_{11}=a_{30}=a_{12}=b_{20}=b_{02}=b_{21}=b_{03}=0$ ) o si el sistema es exacto ( $\Rightarrow 3a_{30}+b_{21}=0$ ,  $a_{12}+3b_{03}=0$ ,  $2a_{20}+b_{11}=0$ ,  $a_{11}+2b_{02}=0$ ). Podemos dar una expresión de  $I_3$  más reducida, que nos será más útil en el futuro, escribiéndola en función de estos últimos binomios y de otros importantes en el estudio de los sistemas cuadráticos:

$$I_3 = e_{20} + e_{02} + Ae_{10} - Be_{01}, \text{ siendo } e_{kj} = (k+1)a_{k+1,j} + (j+1)b_{k,j+1}, A = a_{20} + a_{02}, B = b_{20} + b_{02}$$

En el caso de ser  $I_3=0$  (o sea, si  $S_3(2\pi)=0$ ) habrá que hallar el siguiente  $u_k(2\pi)$  no nulo.

Se podría demostrar en general que el primer  $u_k(2\pi) \neq 0$  es siempre impar (véase, por ejemplo, el A-L-G-M) pero nos interesa ir poco a poco. Comprobemos que, de hecho, si  $u_3(2\pi)=0$  se cumple también que  $u_4(2\pi)=0$ . Como  $u_3 = u_2^2 + S_3$ :

$$u_4 = \int_0^\theta [(2S_3 + 3u_2^2)R_2 + 3u_2R_3 + R_4] = u_2^3 + \int_0^\theta [2S_3R_2 + 3u_2R_3 + R_4]$$

Integrando por partes:

$$\int_0^\theta S_3R_2 = S_3u_2 - \int_0^\theta u_2R_3 \rightarrow u_4 = 2S_3u_2 + u_2^3 + \int_0^\theta [R_4 + u_2R_3]$$

Demos un nombre a esta última integral:  $S_4 \equiv \int_0^\theta [R_4 + u_2R_3]$

Puesto que  $R_4$  es impar en C y S, su promedio es cero. Por tanto,

$$u_4(2\pi) = S_4(2\pi) = \int_0^{2\pi} u_2R_3.$$

El  $R_3$  es par en C y S. Por otra parte, el  $u_2$  contendrá las potencias impares de la integración de  $R_2$  y además la constante  $K_2$  obtenida al evaluar la primitiva en  $\theta=0$ . En concreto:

$$u_2 \equiv \frac{1}{3} [U_2 - K_2] = \\ = \frac{1}{3} [(a_{11} + b_{20} + 2b_{02})C^3 - 3a_{20}C^2S + 3b_{02}CS^2 - (2a_{20} + a_{02} + b_{11})S^3 - (2a_{20} + a_{02} + b_{11})]$$

Como la integral de  $U_2R_3$  es 0 por su imparidad y la de  $K_2R_3$  lo es al estar suponiendo que  $I_3=0$ , hemos probado que  $u_4(2\pi)=0$ .

Se trata entonces de calcular el  $u_5(2\pi)$ . Comencemos escribiendo  $u_5'$  en función de  $S_3$  y  $S_4$ , en vez de  $u_3$  y  $u_4$ :

$$u_5' = 2[S_4+3S_3u_2+2u_2^3]R_2 + 3[S_3+2u_2^2]R_3 + 4u_2R_4 + R_5$$

Utilizando que

$$\int_0^\theta 4u_2^3R_2 = u_2^4, \quad \int_0^\theta 2S_3R_3 = S_3^2$$

e integrando por partes de nuevo:

$$\int_0^\theta S_4R_2 = S_4u_2 - \int_0^\theta [u_2^2R_3+u_2R_4], \quad \int_0^\theta 2S_3u_2R_2 = S_3u_2^2 - \int_0^\theta u_2^2R_3$$

obtenemos:

$$u_5 = 2S_4u_2 + \frac{3}{2}S_3^2 + 3S_3u_2^2 + u_2^4 + S_5, \quad \text{con } S_5 = \int_0^\theta [u_2^2R_3+2u_2R_4+R_5]$$

Por tanto:

$$u_5(2\pi) = S_5(2\pi) = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} [U_2^2R_3+6U_2R_4+9R_5] = \frac{1}{9} \int_0^{2\pi} Q_5$$

ya que  $U_2R_3$  y  $R_4$  son impares y la integral de  $R_3$  es nula por estar suponiendo que  $I_3=0$ .  
Reescribamos el  $Q_5$  de forma más compacta para reducir al máximo los cálculos finales.  
Sustituyendo los  $R_k$  y agrupando las potencias del mismo orden se llega a:

$$Q_5 = -9M_5 - (6U_2M_4+9M_2m_4+9m_2M_4+9M_3m_3) \\ - (U_2M_3+3m_2M_3+6M_2m_3)(U_2+3m_2) - M_2m_2(U_2+3m_2)^2$$

(los sumandos son polinomios homogéneos en  $C$  y  $S$  de orden, respectivo, 6, 8, 10 y 12).

O bien, llamando,

$$N = U_2+3m_2 = (a_{11}+4b_{20}+2b_{02})C^3 + (3b_{11}-6a_{20})C^2S - (3a_{11}-6b_{02})CS^2 - (2a_{20}+4a_{02}+b_{11})S^3$$

concluimos que:

$$Q_5 = -9M_5 - 9M_3m_3 - (6NM_4+9M_2m_4-9m_2M_4) - (NM_3+6M_2m_3)N - M_2m_2N^2$$

Para hallar su integral entre 0 y  $2\pi$  (para lo que será muy útil el ordenador), tal vez lo más sencillo sea sustituir  $C^2$  por  $1-S^2$  (obteniendo potencias 1,  $CS$ ,  $S^2$ , ...,  $CS^{11}$ ,  $S^{12}$ ), hacer  $C=0$  y después sustituir  $S^2$ ,  $S^4$ ,  $S^6$ ,  $S^8$ ,  $S^{10}$ ,  $S^{12}$  por sus promedios respectivos:  $1/2$ ,  $3/8$ ,  $5/16$ ,  $35/128$ ,  $63/256$ ,  $231/1024$  (como se ve, la única primitiva que ha sido necesario calcular explícitamente hasta ahora ha sido la de  $R_2$ ). Haciendo esto en cada uno de los sumandos de la última expresión de  $Q_5$ , multiplicando el resultado por 64 y reescribiéndolo en función de los  $e_{kj}$ , del  $A$  y del  $B$  se obtiene, respectivamente:

$$c_5 = -36 [ 3e_{40}+e_{22}+3e_{04} ]$$

$$c_{33} = 9(a_{03}-a_{21}-3b_{12}-5b_{30})e_{20}-9(b_{30}-b_{12}-3a_{21}-5a_{03})e_{02} + 36 [ a_{30}-b_{03} ] e_{11}$$

$$c_{24} = 12 [ (A+2a_{20})e_{21}-(B+2b_{02})e_{12}+(5A-2a_{20}+2e_{10})e_{03}-(5B-2b_{02}+2e_{01})e_{30} \\ +(3a_{40}+a_{22}+3a_{04})e_{01}-(3b_{40}+b_{22}+3b_{04})e_{10} ]$$



$$\begin{aligned}
c_7 = & - (e_{10}^2 + 13e_{01}^2 + 35e_{10}A - 13e_{01}B - 20a_{20}e_{10} - 68b_{02}e_{01} \\
& + 70A^2 + 10B^2 - 80a_{20}A + 16b_{02}B + 64a_{20}^2 + 64b_{02}^2) e_{02} \\
& - (e_{01}^2 + 13e_{10}^2 + 35e_{01}B - 13e_{10}A - 20b_{02}e_{01} - 68a_{20}e_{10} \\
& + 70B^2 + 10A^2 - 80b_{02}B + 16a_{20}A + 64b_{02}^2 + 64a_{20}^2) e_{20} \\
& + (-9a_{21} + 9a_{03} - 39b_{12} - 105b_{30})e_{10}B + (-9b_{12} + 9b_{30} - 39a_{21} - 105a_{03})e_{01}A \\
& + 12 [ (4a_{20}B + 4b_{02}A + AB) e_{11} + (3b_{03} - a_{30})e_{01}^2 - 2(b_{30} + a_{03})e_{10}e_{01} + (3a_{30} - b_{03})e_{10}^2 \\
& + (b_{02}a_{21} - b_{02}b_{12} + 3b_{02}a_{03} + 4a_{20}b_{03} + 5b_{02}b_{30} - 12a_{20}a_{30} - 3a_{30}A + 5b_{03}A) e_{10} \\
& + (a_{20}b_{12} - a_{20}a_{21} + 3a_{20}b_{30} + 4b_{02}a_{30} + 5a_{20}a_{03} - 12b_{02}b_{03} - 3b_{03}B + 5a_{30}B) e_{01} ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_8 = & (e_{10}^2 + 13e_{01}^2 + 35e_{10}A - 13e_{01}B - 56a_{20}e_{10} - 92b_{02}e_{01} \\
& + 70A^2 + 10B^2 - 140a_{20}A + 40b_{02}B + 160a_{20}^2 + 160b_{02}^2) e_{01}A \\
& - (e_{01}^2 + 13e_{10}^2 + 35e_{01}B - 13e_{10}A - 56b_{02}e_{01} - 92a_{20}e_{10} \\
& + 70B^2 + 10A^2 - 140b_{02}B + 40a_{20}A + 160b_{02}^2 + 160a_{20}^2) e_{10}B \\
& + 12 [ b_{02}e_{10}^2A - a_{20}e_{01}^2B + 5a_{20}e_{01}B^2 - 5b_{02}e_{10}A^2 ]
\end{aligned}$$

Así pues, el signo de  $u_5(2\pi)$  coincide con el signo de  $l_{51} = c_5 + c_{24} + c_{33} + c_7 + c_8$ .

Hallemos una expresión más reducida de  $u_5(2\pi)$  (y cambiemos otra vez el signo para que, como antes, el menos esté asociado a estabilidad). Al ser  $l_3=0$  podemos sumar cualquier múltiplo de  $l_3$  para anular el mayor número de términos (no son modificables aquellos de  $l_{51}$  que están entre corchetes). Una buena posibilidad es definir:

$$l_5 = -\frac{1}{12} [ l_{51} + l_3 (9b_{30} - 9a_{03} - 9b_{12} + 9a_{21} + 13e_{10}^2 + 13e_{01}^2 - 25e_{10}A - 25e_{01}B - 92a_{20}e_{10} - 92b_{02}e_{01} + 70A^2 + 70B^2 + 40a_{20}A + 40b_{02}B + 160b_{02}^2 + 160a_{20}^2) ]$$

Entonces resulta ser:

$$\begin{aligned}
l_5 = & 3e_{40} + e_{22} + 3e_{04} \\
& + 3 [ (b_{12} + b_{30})e_{20} - (a_{21} + a_{03})e_{02} - (a_{30} - b_{03})e_{11} ] \\
& - (A + 2a_{20})e_{21} + (B + 2b_{02})e_{12} - (5A - 2a_{20} + 2e_{10})e_{03} + (5B - 2b_{02} + 2e_{01})e_{30} \\
& - (3a_{40} + a_{22} + 3a_{04})e_{01} + (3b_{40} + b_{22} + 3b_{04})e_{10} \\
& - (e_{10}^2 - 5e_{10}A - e_{01}B - 6a_{20}e_{10} - 2b_{02}e_{01} + 5B^2 + 10a_{20}A + 2b_{02}B + 8a_{20}^2 + 8b_{02}^2) e_{02} \\
& - (e_{01}^2 - 5e_{01}B - e_{10}A - 6b_{02}e_{01} - 2a_{20}e_{10} + 5A^2 + 10b_{02}B + 2a_{20}A + 8b_{02}^2 + 8a_{20}^2) e_{20} \\
& - (4a_{20}B + 4b_{02}A + AB) e_{11} - (3b_{03} - a_{30})e_{01}^2 + 2(b_{30} + a_{03})e_{10}e_{01} - (3a_{30} - b_{03})e_{10}^2 \\
& - (b_{02}a_{21} - b_{02}b_{12} + 3b_{02}a_{03} + 4a_{20}b_{03} + 5b_{02}b_{30} - 12a_{20}a_{30} - 3a_{30}A + 5b_{03}A - 4b_{12}B - 8b_{30}B) e_{10} \\
& - (a_{20}b_{12} - a_{20}a_{21} + 3a_{20}b_{30} + 4b_{02}a_{30} + 5a_{20}a_{03} - 12b_{02}b_{03} - 3b_{03}B + 5a_{30}B - 4a_{21}A - 8a_{03}A) e_{01} \\
& + B [ 5B - e_{01} ] [ e_{10}(e_{01} - 3b_{02}) + (A - a_{20})e_{01} ] - A [ 5A - e_{10} ] [ e_{01}(e_{10} - 3a_{20}) + (B - b_{02})e_{10} ]
\end{aligned}$$

Concluimos que:

Si  $l_3=0$ ,  $l_5<0$  el origen es un foco estable y si  $l_3=0$ ,  $l_5>0$  es foco inestable

Si también el  $l_5$  fuese cero habría que hallar el  $l_7$  (lo calcularemos hasta el final en situaciones más particulares), ... Sólo se tendría un centro en el caso de que se anulasen los infinitos  $l_k$ . Como ocurría con el  $l_3$ , una buena prueba de que no se han cometido errores en las cuentas es la anulación del  $l_5$  para los sistemas exactos (aquellos con los  $e_{kj}=0$ ) o simétricos. Es fácil ver que así sucede. Otra propiedad del  $l_5$  es que debería ser invariante al intercambiar los papeles de  $x$  e  $y$  ( $a_{kj} \leftrightarrow b_{jk}$ ,  $e_{kj} \leftrightarrow e_{jk}$ ,  $A \leftrightarrow B$ ). Está escrito de forma que esto quede claro.

Antes de seguir, veamos la forma particular que adoptan  $l_3$  e  $l_5$  en el caso particular de que el sistema proceda de una ecuación, es decir, si todos los  $a_{kj}=0$ :

$$l_{3e} = 3b_{03} + b_{21} + b_{11}B$$

$$l_{5e} = 3(b_{41} + b_{23} + 5b_{05}) + 3(b_{30}b_{21} + b_{21}b_{12} + 2b_{12}b_{03}) \\ + 3b_{11}b_{40} + 2b_{02}b_{31} + b_{11}b_{22} + 6b_{02}b_{13} - 5b_{11}b_{04} + b_{11}b_{02}b_{12} - b_{11}b_{02}b_{30} - 2b_{11}^2b_{03} \\ + (5b_{31} + 3b_{13} + 6b_{02}b_{03} + 8b_{11}b_{30} + 4b_{11}b_{12} + 2b_{11}b_{02}^2) B - 5(b_{11}b_{02} + 3b_{03}) B^2$$

Supongamos ahora que  $l_3=l_5=0$ .

Para comprobar que  $u_6(2\pi)=0$  reescribimos  $u_6'$  en función de los  $S_k$  anteriores:

$$u_6' = [2S_5 + 6S_4u_2 + 4S_3^2 + 12S_3u_2^2 + 5u_2^4]R_2 + [3S_4 + 12S_3u_2 + 10u_2^3]R_3 \\ + [4u_3 + 10u_2^2]R_4 + 5u_2R_5 + R_6$$

y utilizamos que:

$$\int_0^\theta S_5R_2 = S_5u_2 - \int_0^\theta (u_2^3R_3 + 2u_2^2R_4 + u_2R_5) \\ \int_0^\theta 2S_4u_2R_2 = S_4u_2^2 - \int_0^\theta (u_2^3R_3 + u_2^2R_4), \quad \int_0^\theta 3S_3u_2^2R_2 = S_3u_2^3 - \int_0^\theta u_2^3R_3 \\ \int_0^\theta S_3^2R_2 = S_3^2u_2 - \int_0^\theta 2S_3u_2R_3, \quad \int_0^\theta [u_2R_3 + R_4]S_3 = S_4S_3 - \int_0^\theta S_4R_3$$

De ello obtenemos:

$$u_6 = 2S_5u_2 + 4S_4S_3 + 3S_4u_2^2 + 4S_3^2u_2 + 4S_3u_2^3 + u_2^5 + \int_0^\theta (u_2^3R_3 + 3u_2^2R_4 + 3u_2R_5 + R_6 - S_4R_3)$$

Que  $u_6(2\pi)=0$  se deduce entonces sin dificultad de la última integral, que denotaremos  $S_6$ . Basta utilizar la paridad de los  $R_k$ , que  $u_2$  y  $S_4$  son polinomios impares más una constante y el hecho de estar suponiendo que los promedios de  $R_3$  y  $[u_2^2R_3 + 2u_2R_4 + R_5]$  son cero.

Pasemos a buscar la integral más sencilla posible que nos proporcione el  $u_7(2\pi)$ . Si para el cálculo del  $I_3$  no necesitamos calcular ninguna primitiva (bastó sustituir promedios de potencias pares) y para el  $I_5$  necesitamos integrar simplemente el  $R_2$ , vamos a ver que a pesar de la larga expresión inicial de  $u_7'$  sólo necesitamos conocer  $u_2$  y  $S_3$ .

Primero reescribimos como siempre  $u_7'$ :

$$\begin{aligned} u_7' = & 2[S_6+3S_5u_2+5S_4S_3+6S_4u_2^2+\frac{15}{2}S_3^2u_2+10S_3u_2^3+3u_2^5]R_2 + \\ & +3[S_5+4S_4u_2+\frac{5}{2}S_3^2+10S_3u_2^2+5u_2^4]R_3 + \\ & +4[S_4+5S_3u_2+5u_2^3]R_4 + 5[S_3+3u_2^2]R_5 + 6u_2R_6 + R_7 \end{aligned}$$

Hacemos ahora desaparecer los primeros sumandos integrando por partes:

$$\int_0^\theta S_6R_2 = S_6u_2 - \int_0^\theta ([u_2^4 - S_4u_2]R_3 + 3u_2^3R_4 + 3u_2^2R_5 + u_2R_6)$$

$$\int_0^\theta 2S_5u_2R_2 = S_5u_2^2 - \int_0^\theta (u_2^4R_3 + 2u_2^3R_4 + u_2^2R_5)$$

$$\int_0^\theta S_4S_3R_2 = S_4S_3u_2 - \int_0^\theta ([S_4u_2 + S_3u_2^2]R_3 + S_3u_2R_4)$$

$$\int_0^\theta 3S_4u_2^2R_2 = S_4u_2^3 - \int_0^\theta (u_2^4R_3 + u_2^3R_4)$$

$$\int_0^\theta 4S_3u_2^3R_2 = S_3u_2^4 - \int_0^\theta u_2^4R_3$$

$$\int_0^\theta 2S_3^2u_2R_2 = S_3^2u_2^2 - \int_0^\theta 2S_3u_2^2R_3$$

$$\int_0^\theta 2(u_2S_3 + R_4)S_4 = S_4^2$$

$$\int_0^\theta S_5R_3 = S_5S_3 - \int_0^\theta (S_3u_2^2R_3 + 2S_3u_2R_4 + S_3R_5)$$

Así llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} u_7(2\pi) = & 2S_6u_2+3S_5S_3+3S_5u_2^2+2S_4^2+10S_4S_3u_2+4S_4u_2^3+\frac{5}{2}S_3^3+\frac{15}{2}S_3^2u_2^2+5S_3u_2^4+u_2^6 \Big]_0^{2\pi} + \\ & + \int_0^{2\pi} ([u_2^4R_3 + 4u_2^3R_4 + 6u_2^2R_5 + 4u_2R_6 + R_7] + 2S_3[u_2^2R_3 + 2u_2R_4 + R_5]) \end{aligned}$$

Como hicimos con el  $I_5$  veamos que los valores en cero de las primitivas de  $R_2$  y  $R_3$  no son relevantes. Ya escribimos  $u_2 = [U_2 - K_2]/3$  y pongamos  $S_3 = U_3 - K_3$ , con las  $K_j$  constantes, la  $U_2$  polinomio impar y la  $U_3$  par. Mirando las paridades y utilizando

$$\int_0^{2\pi} R_3 = \int_0^{2\pi} U_3R_3 = \int_0^{2\pi} [U_2^2R_3 + 6U_2R_4 + 9R_5] = 0$$

concluimos que:

$$u_7(2\pi) = \frac{1}{81} \int_0^{2\pi} ([U_2^4R_3 + 12U_2^3R_4 + 54U_2^2R_5 + 108U_2R_6 + 81R_7] + 18U_3[U_2^2R_3 + 6U_2R_4 + 9R_5])$$

Para el cálculo de esta integral de este polinomio de grado 18 procederíamos como hicimos con el  $I_5$ : tras sustituir  $C^2$  por  $1-S^2$ , haríamos  $C=0$  y sustituiríamos  $S^2, S^4, S^6, S^8, S^{10}, S^{12}, S^{14}, S^{16}, S^{18}$  por sus promedios respectivos:  $1/2, 3/8, 5/16, 35/128, 63/256, 231/1024, 429/2048, 6435/32768, 12155/65536$ . La expresión final para el sistema general [S] sería monstruosamente larga. Nos limitaremos a calcularla en dos casos particulares: si en el sistema la parte no lineal sólo contiene términos cúbicos o sólo contiene términos cuadráticos. Estos son los sistemas que tratamos a continuación.

$$\text{Sea } [S_3] \begin{cases} x' = y + A_3(x,y) = y + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = -x + B_3(x,y) = -x + ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$$

y llamemos  $e_{20}=3a+f=m$ ,  $e_{11}=2b+2g=n$ ,  $e_{02}=c+3h=p$ . Los valores focales ya calculados son:

$$I_3 = m+p$$

$$I_5 = 3 [(e+g)m - (d+b)p - (a-h)n]$$

y la ecuación [e] se reduce a:

$$\frac{dr}{d\theta} = R_3(\theta) r^3 + R_5(\theta) r^5 + R_7(\theta) r^7 + \dots = -M_3 r^3 - M_3 m_3 r^5 - M_3 m_3^2 r^7 - \dots$$

Como  $u_2=0$ , tenemos que:

$$u_7(2\pi) = \int_0^{2\pi} (R_7 + 2U_3 R_5) = - \int_0^{2\pi} (m_3 + 2U_3) M_3 m_3$$

Calculando una primitiva adecuada de  $R_3=-M_3$  y utilizando que  $I_3=0$  se llega a la expresión:

$$U_3 = \frac{1}{4} [(b+e)C^4 - (d+g)S^4 + 4hS^3C - 4aC^3S]$$

Operando como se dijo se halla  $u_7(2\pi)$ , que, salvo constante (positiva) multiplicativa, se puede escribir en términos de  $a, b, d, e, g, h, m, n$  y  $p$  en la forma:

$$I_{71} = 2(35ae+35hd-15ad-15he+9ag+9hb-5ab-5hg)n$$

$$+ 2(-7d^2+5de-42e^2+2bd+9gd-21be-22ge+b^2-bg-4g^2-84a^2+80ah-44h^2)m$$

$$+ 2(-7e^2+5de-42d^2+2ge+9be-21gd-22bd+g^2-bg-4b^2-84h^2+80ah-44a^2)p$$

$$+ 2(35a-17h)m^2 + 2(35h-17a)p^2 + 4(a+h)pm - (m+p)(7m^2-10mp+7p^2)$$

Que simplificamos sumando múltiplos adecuados de  $I_3$  e  $I_5$  (y cambiamos su signo):

$$I_7 = -\frac{1}{8} \left( I_{71} + \left[ \frac{70}{3}(e-d) + 6(b-g) \right] I_5 + \right.$$

$$+ [7m^2-10mp+7p^2 - 2(35a-17h)m - 2(35h-17a)p + 14(e^2+d^2) +$$

$$+ 60de - 4(11b-15g)d - 4(11g-15b)e - 10(b-g)^2 + 168(a^2+h^2) - 160ah ] I_3 \left. \right)$$

Obtenemos por fin:

$$I_7 = 4(a+h)mp + (5bd-gd+b^2-10h^2)m + (5ge-be+g^2-10a^2)p - (5ad+5he+ab+hg)n$$

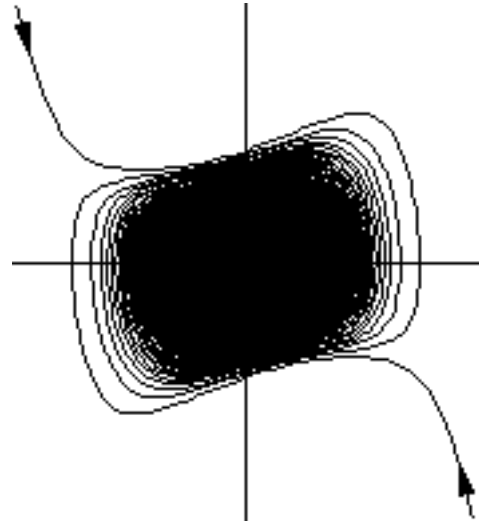
(observemos que el  $I_7$  también se anula cuando el sistema es exacto o simétrico y que resta invariante al cambiar  $a \leftrightarrow h$ ,  $b \leftrightarrow g$ ,  $d \leftrightarrow e$ ,  $m \leftrightarrow p$ ).

Veamos un ejemplo de este ejemplo: la ecuación

$$x'' = -x + ex^3 - 3hx^2y - 3exy^2 + hy^3$$

Entonces  $I_3 = I_5 = 0$  e  $I_7 = -6h(e^2 + h^2)$ .

Así, para cualquier  $e$ , si  $h < 0$  hay un foco inestable en el origen y si  $h > 0$  uno estable (y si  $h = 0$  hay un centro: la ecuación es simétrica). El hecho de que sean los términos en  $r_0^7$  los que marquen la estabilidad sugiere que las órbitas saldrán o entrarán con muy poca decisión del origen. Por ejemplo, integrando gráficamente para  $h = 1$ ,  $e = -1$  (el único punto crítico será el foco estable del origen) se obtiene el oscuro dibujo de la derecha.



Sea ahora  $[S_2] \begin{cases} x' = y + A_2(x,y) = y + ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = -x + B_2(x,y) = -x + ex^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$  y sean  $m = 2a + f$ ,  $q = b + 2g$ .

La ecuación [e] y los coeficientes  $I_3$  e  $I_5$  son entonces ( $A = a + c$ ,  $B = e + g$  ya definidos) :

$$\frac{dr}{dt} = -M_2 r^2 - M_2 m_2 r^3 - M_2 m_2^2 r^4 - M_2 m_2^3 r^5 - M_2 m_2^4 r^6 - M_2 m_2^5 r^7 - \dots$$

$$I_3 = mB - qA$$

$$I_5 = B [ 5B - q ] [ m(q - 3g) + (A - a)q ] - A [ 5A - m ] [ q(m - 3a) + (B - g)m ]$$

Por tanto:

$$u_7(2\pi) = -\frac{1}{81} \int_0^{2\pi} ( [ U_2 + 3m_2 ]^4 + 18U_3 [ U_2 + 3m_2 ]^2 ) M_2 m_2 = -\frac{1}{81} \int_0^{2\pi} ( N^2 + 18U_3 ) N^2 M_2 m_2$$

Una buena expresión de  $U_3$  es:

$$U_3 = \frac{1}{12} [ (f^2 + af - 2a^2 + [b + 2g]e + 2e^2) C^6 + (b^2 + bg - 2g^2 + [2a + f]c + 2c^2) S^6 + (3f^2 - 3af - 3[b - 2g]e) C^4 S^2 + (3b^2 - 3bg - 3[f - 2a]c) C^2 S^4 + 4(ab - ag + fg - bf - [b + 2g]c - [2a + f]e - ce) C^3 S^3 - 12ae C^5 S - 12gc CS^5 ]$$

Sustituyendo los promedios adecuados en la integral y sustituyendo  $c, e, b$  y  $f$  por  $A-a, B-g, q-2g, m-2a$  se llega, salvo constante positiva, a la larga expresión siguiente para  $u_7(2\pi)$  :

$$\begin{aligned}
I_{71} = & - [ m(4a-m)(18304a^3 - 17808a^2m + 5828am^2 - 645m^3) \\
& + 9024a^3q^2 + 64ma^2q^2 - 62464ma^2qg + 146432ma^2g^2 \\
& - 2432am^2q^2 + 39008am^2qg - 89536am^2g^2 + 474m^3q^2 - 6128m^3qg + 14176m^3g^2 \\
& + 696aq^4 - 51mq^4 - 5088aq^3g - 1232mq^3g + 9024aq^2g^2 + 16832mq^2g^2 - 62464mqg^3 + 73216mg^4 ] B \\
& + [ q(4g-q)(18304g^3 - 17808qg^2 + 5828q^2g - 645q^3) \\
& + 9024m^2g^3 + 64m^2qg^2 - 62464maqg^2 + 146432a^2qg^2 \\
& - 2432m^2q^2g + 39008maq^2g - 89536a^2q^2g + 474m^2q^3 - 6128maq^3 + 14176a^2q^3 \\
& + 696m^4g - 51m^4q - 5088m^3ag - 1232m^3aq + 9024m^2a^2g + 16832m^2a^2q - 62464ma^3q + 73216a^4q ] A \\
& - 8 [ 6720mg^3 + 15584aqg^2 - 7088mqg^2 - 9004aq^2g + 2662mq^2g - 349mq^3 + 1396aq^3 \\
& + 15584a^3q + 6720ma^2g - 11016ma^2q + 2432m^2aq - 3156m^2ag + 366m^3g - 163m^3q ] A^2 \\
& + 8 [ 6720a^3q + 15584ma^2g - 7088ma^2q - 9004m^2ag + 2662m^2aq - 349m^3q + 1396m^3g \\
& + 15584mg^3 + 6720aqg^2 - 11016mqg^2 + 2432mq^2g - 3156aq^2g + 366aq^3 - 163mq^3 ] B^2 \\
& - 16 [ (gm-qa)(261mq - 830gm - 830qa + 2288ag) \\
& + 58q^4 - 593q^3g + 2022q^2g^2 - 2288qg^3 - 58m^4 + 593m^3a - 2022m^2a^2 + 2288ma^3 ] BA \\
& + 2 [ 4337q^3 - 30020q^2g + 53488qg^2 + 3265m^2q - 1260m^2g - 33960maq + 13440mag + 74640a^2q ] A^3 \\
& - 2 [ 4337m^3 - 30020m^2a + 53488ma^2 + 3265mq^2 - 1260aq^2 - 33960mqg + 13440aqg + 74640mg^2 ] B^3 \\
& + 2 [ 541q^3 - 4116q^2g + 7440qg^2 + 301m^2q + 1924m^2g - 4552maq - 5440mag + 13168a^2q ] AB^2 \\
& - 2 [ 541m^3 - 4116m^2a + 7440ma^2 + 301mq^2 + 1924aq^2 - 4552mqg - 5440aqg + 13168mg^2 ] A^2B \\
& - 88 [ 210mg - 229mq + 916aq ] A^4 + 88 [ 210aq - 229mq + 916mg ] B^4 - 6800 [ mg - aq ] A^2B^2 \\
& + 16 [ 269m^2 - 1055ma + 107qg - 53q^2 ] AB^3 - 16 [ 269q^2 - 1055qg + 107ma - 53m^2 ] A^3B \\
& + 1969qAB^4 + 1610qA^3B^2 + 20449qA^5 - 1969mBA^4 - 1610mB^3A^2 - 20449mB^5
\end{aligned}$$

Pero sumando múltiplos de  $I_3$  e  $I_5$  para anular los términos en  $A$  y  $B$  de ordenes más altos:

$$\begin{aligned}
I_7 = & - \frac{25}{1728} [ I_{71} + ( 20449[A^4+B^4] + 20090A^2B^2 + 88[19m-286a]A^3 + 88[19q-286g]B^3 \\
& - 80[100q-211g]A^2B - 80[100m-211a]B^2A - 16/5 [ 2267mq - 7460gm - 7460aq + 21800ag ] AB \\
& + 2[2005m^2 - 16740am + 34320a^2 + 4337q^2 - 30020qg + 53488g^2 ] A^2 \\
& + 2[2005q^2 - 16740qg + 34320g^2 + 4337m^2 - 30020am + 53488a^2 ] B^2 \\
& - 8/5 [ 1015m^3 - 9110am^2 + 25860a^2m - 22880a^3 \\
& + 862mq^2 - 841aq^2 - 8437mqg + 12400agq + 17300mg^2 - 22880ag^2 ] A \\
& - 8/5 [ 1015q^3 - 9110qg^2 + 25860g^2q - 22880g^3 \\
& + 862qm^2 - 841gm^2 - 8437qam + 12400gam + 17300gm^2 - 22880ga^2 ] B \\
& + (m-4a)(645m^3 - 5828am^2 + 17808a^2m - 18304a^3) + (q-4g)(645q^3 - 5828gq^2 + 17808g^2q - 18304g^3) \\
& + 14176a^2q^2 + 14176g^2m^2 - 89536a^2qg - 89536g^2am \\
& - 8216amq^2 - 8216gqm^2 + 1170m^2q + 54272amgq + 146432a^2g^2 ) I_3 + \\
& + ( 3696[A^2+B^2] + 168/5 [ 37m-160a ] A + 168/5 [ 37q-160g ] B \\
& + 24/25 [ 869(m^2+q^2) - 6380(am+bq) + 11200(a^2+g^2) ] ) I_5 ]
\end{aligned}$$

se acaba obteniendo para el  $I_7$  una expresión factorizable sorprendentemente sencilla:

$$I_7 = [qB[m(q-3g)+(A-a)q] - mA[q(m-3a)+(B-g)m]] [(5a-2m)(5a-m)+(5g-2q)(5g-q)] \equiv G_7 F_7$$

(que se anula si hay simetría o exactitud y es invariante al permutar coeficientes como debía)

Veamos que conclusiones podemos sacar de los tres coeficientes obtenidos. En primer lugar consideremos el caso de la ecuación:

$$x'' = -x + ex^2 + fxy + gy^2$$

Sustituyendo se obtiene:

$$I_3 = fB, \quad I_5 = (2g-5B)gfB, \quad I_7 = -2g^2fB(2f^2+3g^2)$$

Por tanto, si  $I_3=fB=f(g+e)<0$  en el origen hay un foco estable y habrá uno estable si ese producto es mayor que cero. Pero ¿qué ocurre cuando se anula? También se hacen cero el  $I_5$  y el  $I_7$ . Esto no prueba, desde luego, que haya un centro en el origen. Deberían ser cero todos los  $I_k$ . Pero vamos a comprobar que de hecho lo hay en todos los casos:

Si  $f=0$ , las órbitas son simétricas respecto al eje  $y=0$ .

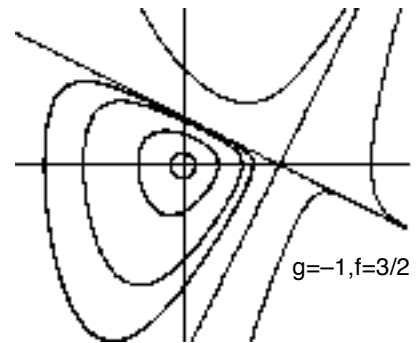
Si  $g=e=0$ , lo son respecto a  $x=0$ .

Más difícil es probar la conservación del centro si  $e=-g \neq 0$ : [ef]  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - gx^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$

Entonces hay también un punto silla en  $(-1/g, 0)$  de autovalores:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2g} [f \pm \sqrt{f^2 + 4g^2}] \quad (\text{raíces de } g\lambda^2 + f\lambda - g = 0)$$

La integración numérica para  $g=-1, f=3/2$  ( $\lambda_{\pm} = 2, -1/2$ ) sugiere que además de conservarse el centro parecen no deformarse las separatrices del punto silla. Esto es fácil de comprobar en general: el campo sobre las rectas  $y = \lambda_{\pm}(x+1/g)$  está contenido en ellas. Tal vez un cambio lineal de variables que lleve estas rectas a los ejes convierta [ef] en un sistema más sencillo.



En efecto, haciendo  $\begin{cases} p = x + \lambda_+ y + 1/g \\ n = x + \lambda_- y + 1/g \end{cases}$  (y utilizando que  $\lambda_+ \lambda_- = -1, \lambda_+ + \lambda_- = -f/g$ )

nuestro sistema se transforma en el sistema integrable:  $\begin{cases} p' = \lambda_+ p(1 - gn) \\ n' = \lambda_- n(1 - gp) \end{cases}$ .

Así, una integral primera del sistema [ef] es:

$$|x + \lambda_+ y + 1/g|^{\lambda_+} |x + \lambda_- y + 1/g|^{-\lambda_-} \exp[g(\lambda_- - \lambda_+)x] = K.$$

Volvamos al sistema general  $[S_2]$ . Como en el caso particular de la ecuación, es conocido (se deduce del teorema de la base de Hilbert) que para que tenga un centro en el origen basta que se anulen un número finito de  $I_k$  (tres, como probó Bautin en 1952). Aunque no podamos completar la discusión con los cálculos hechos hasta ahora, vamos a obtener una expresión compacta de las únicas relaciones entre coeficientes para las que se tiene el centro.

Supongamos que  $I_3=0$  y, por ahora, que  $q \neq 0$ . Debe ser entonces  $A = \frac{mB}{q}$ .

Llevando este valor de  $A$  a las expresiones de  $I_5$  y  $G_7$  y factorizando el resultado se tiene:

$$I_{5A} = \frac{1}{q^2} B [5B-q] H \quad , \quad G_{7A} = \frac{1}{q} B H$$

donde podemos escoger:

$$H = q^2(qm-3gm+aq-qa) - m^2(mq-3aq+Bm-gm)$$

Si  $I_{5A} \neq 0$ , el origen sería un foco. Estudiemos lo que sucedería si cada factor suyo se anulase:

i) Sea  $H=0$ , y supongamos que también:  $m \neq 0$ ,  $m \neq q$ ,  $m \neq -q$ .

Utilizando que  $qA=mB$  es fácil despejar los coeficientes  $e$  y  $c$ :

$$e = e_H = \frac{q}{m} \frac{q[qm-2gm-qa]+[3a-m]m^2}{m^2-q^2} \quad \rightarrow \quad c = c_H = \frac{m}{q} \frac{m[mq-2aq-gm]+[3g-q]q^2}{q^2-m^2}$$

Si  $e=e_H$ ,  $c=c_H$ , tanto  $I_5 = I_7 = 0$ , con lo que  $0$  podría ser un centro. Demostremos que lo es viendo que entonces  $[S_2]$  es simétrico respecto de una recta de la forma  $y = kx$ . Hagamos un cambio en  $[S_2]$  que lleve esta recta y su perpendicular  $y = -x/k$  a los ejes. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x = kp+n \\ y = kn-p \end{cases} \quad \text{convierte } [S_2] \text{ en } [S_2^*] \quad \begin{cases} p' = n + \frac{1}{k^2+1}[Up^2+Vpn+Cn^2] \\ n' = -p + \frac{1}{k^2+1}[Ep^2+Fpn+Gn^2] \end{cases} \quad \text{donde:}$$

$$U = ak^3 - (b+e)k^2 + (c+f)k - g \quad , \quad G = gk^3 + (c+f)k^2 + (b+e)k + a \quad ,$$

$$C = ck^3 - (g-b)k^2 + (a-f)k - e \quad , \quad E = ek^3 + (a-f)k^2 + (b-g)k + c \quad ,$$

$$F = fk^3 - (2g-b-2e)k^2 + (2a-f-2c)k - b \quad , \quad V = bk^3 + (2a-f-2c)k^2 + (2g-b-2e)k + f$$

Si  $U=C=F=0$  ó bien si  $V=E=G=0$ ,  $[S_2^*]$  es simétrico respecto a algún eje. Como se tiene que:

$$F+2U = (k^2+1)(mk-q) \quad , \quad U+C = (k^2+1)(Ak-B) \quad , \quad V+2G = (k^2+1)(qk+m) \quad , \quad G+E = (k^2+1)(Bk+A)$$

podemos concluir que el sistema inicial es **simétrico** respecto a alguna recta  $y=mx$  si existe algún  $m$  para el que se satisfaga alguno de los dos tríos de condiciones siguientes:

$$\text{o bien} \quad mk-q = Ak-B = ck^3 - (g-b)k^2 + (a-f)k - e = 0 \quad [c1]$$

$$\text{o bien} \quad qk+m = Bk+A = ek^3 + (a-f)k^2 + (b-g)k + c = 0 \quad [c2]$$

Si  $e=e_H$ ,  $c=c_H$ ,  $k=q/m$  se cumple  $[c1]$  y si  $e=e_H$ ,  $c=c_H$ ,  $k=-m/q$  se cumple  $[c2]$ .

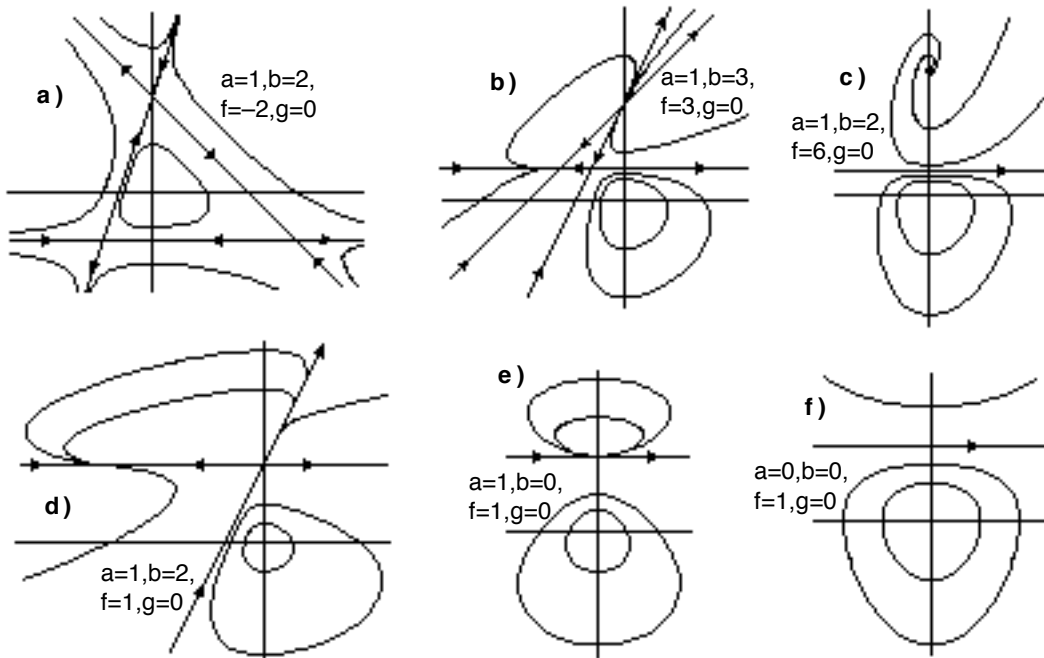
[observemos que la anulación de los binomios lineales en  $k$  de  $[c1]$  o  $[c2]$  implica que una condición necesaria para la simetría es que sea  $qA-mB = I_3 = 0$ ]



ii) Anulemos otro factor de  $I_{5c}$ : Sea  $\mathbf{B=0}$  ( $e=-g$ ) [y, por tanto,  $\mathbf{A=0}$  ( $c=-a$ )].

El sistema es [Sii]  $\begin{cases} x' = y + ax^2 + bxy - ay^2 \\ y' = -x - gx^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$ . Se tiene que  $I_3=I_5=I_7=0$ .

Puede tratarse de un centro (si  $a=b=0$  ya vimos que lo es). La integración numérica para varios valores de  $a, b, f$  y  $g$  muestra la presencia de rectas invariantes, pero también aparecen atractores y, en general, no hay simetría. Por ejemplo, para los valores indicados se tiene:



Probemos que salvo en el caso trivial  $a=b=f=g=0$  existen 1, 2 ó 3 rectas invariantes de [Sii]. La recta  $F \equiv Mx+Ny-1=0$  es una órbita del sistema si y sólo si  $M$  y  $N$  satisfacen las relaciones:

$$aM-gN-MN=0, \quad M^2+bM+fN-N^2=0$$

pues entonces se cumple que  $\dot{F} = F \cdot G$ , siendo  $G \equiv Nx-My$ .

En el caso de que sea  $g=0$  hay recta invariante horizontal  $fy=1$  (si  $f \neq 0$ ) y además 2, 1 ó 0 de la forma  $Mx+ay=1$ , donde  $M$  es solución de  $M^2+bM+fa-a^2=0$  (salvo si  $a=b=0$ ).

Si  $a=0$  se tiene  $-bx=1$  y además  $-gx+Ny=1$  con  $N^2-fN+bg-g^2=0$ .

Si  $a, g \neq 0$ , no hay rectas invariantes paralelas a los ejes ( $M, N \neq 0$ ). Llamando  $k=M/N$  es fácil ver que hay 3, 2 ó 1 valores válidos para  $M$  y  $N$  dados por:

$$M=ak-g, \quad N=a-g/k, \quad \text{siendo } k \text{ las raíces de } ak^3+(b-g)k^2+(f-a)k+g=0.$$

Conociendo las rectas invariantes sería posible dar, en todos los casos, una integral primera de [Sii] regular en un entorno del origen, con lo que siempre hay un centro en ese punto:

Si existen tres  $F_k$  distintas, existen  $\alpha_k$  tales que  $\sum \alpha_k G_k=0$ . Una integral es entonces:

$$H = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} F_3^{\alpha_3}, \quad \text{pues } \dot{H} = H [\sum \alpha_k G_k] = 0$$

[se puede ver que esta  $H$  es válida y acaba siendo real aunque dos de las  $F$  sean complejas].

Por ejemplo, para los **a)**, **b)** y **c)** de antes se hallan así, respectivamente, las H siguientes:

$$H = [y-3x-1][y+x-1]^3 [2y+1]^2, \quad H = [y-2x-1]^3 [y-x-1]^{-6} [3y-1],$$

$$H = \frac{[y^2-2xy+5x^2-2y+2x-1]^3}{6y-1} \exp\left(\frac{3}{2} \arctan \frac{4x[y-x-1]}{[y-3x-1][y+x-1]}\right)$$

En el caso de que existan rectas dobles [como en **d)**] o triples [**e)**] o que una o dos rectas se vayan al infinito [como en la ecuación o el ejemplo **f)**] las H contienen términos logarítmicos. Por ejemplo, para los **d)**, **e)** y **f)** se tienen las siguientes integrales primeras:

$$H = \log \frac{[y-1]^5}{y-2x-1} - 2 \frac{2y+x}{y-1}, \quad H = 2 \log[y-1] + \frac{x^2-2y+2}{[y-1]^2}, \quad H = 2 \log[y-1] + 2y - x^2$$

Las dos últimas se calculan fácilmente a partir del sistema. La de **d)** se puede obtener hallando la H(f) del sistema con a=1, b=2, g=0 (en general con tres rectas invariantes), derivando esta H con respecto a f y sustituyendo el resultado en f=1. Para sistemas generales de estos tipos se trabajaría como aquí, tras tal vez un giro adecuado para hacer la g=0.

El último factor de  $I_{5c}$  sí nos permite asegurar que no basta la anulación de los primeros dos coeficientes para tener un centro:

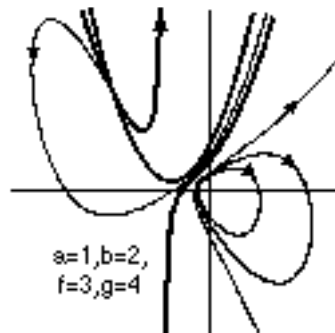
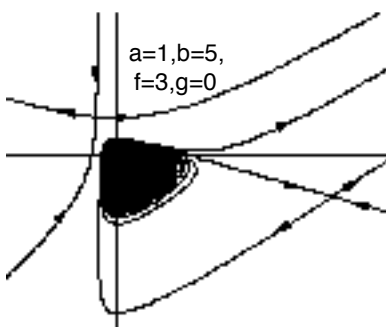
iii) Sea  $5B=q$  (  $e = \frac{1}{5}[b-3g]$  ) [  $\Rightarrow 5A=m$  (  $c = \frac{1}{5}[f-3a]$  ) ] .

Siendo  $I_3=I_5=0$ , el  $I_7$  puede no ser cero:

$$I_7 = \frac{1}{5} F_7 H = \frac{1}{25} F_7 ( q^2[6qm-15gm-5aq]-m^2[6ma-15aq-5gm] )$$

Esto ocurre, por ejemplo, si a=1, b=5, c=0, e=1, f=3, g=0 [ B=1, q=5, A=1, m=5,  $I_7=2500$  y hay un foco inestable (dibujo de la izquierda)]. Pero la anulación de  $F_7$  sí implica que todos los demás  $I_k$  se anulan, pues se puede probar que entonces el sistema posee curvas invariantes  $P_2=0$  y  $P_3=0$  (de segundo y tercer orden, respectivamente) y que una integral primera es de la forma  $H = P_2^3 P_3^{-2}$ . Así, para a=1, b=2, c=0, e=-2, f=3, g=4 [ B=2, q=10, A=1, m=5,  $F_7=0$  ] las curvas invariantes (de trazo grueso en el dibujo de la derecha) son  $P_2 = 5x^2 + 4x + 1 - 2y = 0$  y  $P_3 = 10x^3 + 12x^2 - 6xy + 6x - 3y + 1 = 0$ . Para ellas se tiene que:

$$\dot{P}_2 = 2(x+2y)P_2, \quad \dot{P}_3 = 3(x+2y)P_3 \quad \rightarrow \quad \dot{H} = 0$$



Nos quedan por analizar los casos en que se anulan los denominadores que han ido saliendo en la discusión anterior.

Sea  $q=0$ , entonces  $l_3 = mB$ , así que si  $l_3=0$  o bien es  $m=0$  o bien  $B=0$ .

Si  $q=m=0$ , el sistema es **exacto** y desde luego hay un centro en el origen.

Este es el caso **iv)** y último en que hay un centro.

Si fuese  $q=B=0$ , sería  $l_5 = gmA(5A-m)$ .

Así, si  $l_3=l_5=0$  aparecen situaciones ya analizadas:

si  $g=0=e=b$ , es  $H=0$  [caso i)]: las órbitas son simétricas respecto al eje  $y$ ,

si  $m=0$  hay exactitud [iv)], si  $A=0$  estamos en el caso ii) y si  $5A-m=0$  en el iii).

Si  $m=0$ , el resultado es totalmente análogo.

Si  $q=m$ , se tiene que  $l_3 = m(B-A)$ . Si  $l_3=0$  el sistema es exacto ó  $B=A$ .

Sustituyendo si se da lo último:  $l_5 = mA(5A-m)(a-g)$ .

$l_3=l_5=0$  da, a parte de los evidentes casos ii), iii) y iv), la relación:  $g=a$ ,  $e=c$ ,  $f=b$ .

Para ella es también  $l_7=0$ , como debe, pues hay simetría respecto de la recta  $y=-x$ .

Se anula  $H$  y estamos en el caso i).

Si  $q=-m$ ,  $l_3=l_5=0$  implica ii), iii), iv) y  $g=-a$ ,  $e=-c$ ,  $f=-b$ : simetría respecto de  $y=x$ .

#### 4.5 Centros y focos no homogéneos y no elementales.

Consideremos ahora un sistema para el que la aproximación homogénea posea un centro o un foco. Es decir, sea:

$$[S] \quad \begin{cases} x' = A^n(x,y) + A^{n+1}(x,y) + \dots = a_{n0}x^n + \dots + a_{0n}y^n + a_{n+1,0}x^{n+1} + \dots \\ y' = B^n(x,y) + B^{n+1}(x,y) + \dots = b_{n0}x^n + \dots + b_{0n}y^n + b_{n+1,0}x^{n+1} + \dots \end{cases}$$

con  $n$  impar y con:

$$P_{n+1}(z) = B^n(1,z) - zA^n(1,z) \neq 0 \quad \forall z$$

Suponemos para fijar ideas que  $a_{0n} < 0$ , sin perder generalidad (si no cambiamos de signo los segundos términos e invertimos el sentido de las órbitas). Para saber si  $0$  se trata de un centro, un foco estable o un foco inestable de [S] intentamos seguir los pasos de la sección anterior. Pero pronto veremos que aparecen muchas más dificultades. Escribimos [S] en polares:

$$[P] \quad \begin{cases} r' = M_n r^n + M_{n+1} r^{n+1} + \dots, & M_k = CA^k(C,S) + SB^k(C,S) \\ \theta' = m_n r^{n-1} + m_{n+1} r^n + \dots, & m_k = CB^k(C,S) - SA^k(C,S) \end{cases}$$

y desarrollamos la ecuación de las órbitas de este sistema (lo que es posible cerca de  $r=0$  por estar suponiendo que la función continua  $m_n(C,S) > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$ ):

$$[e] \quad \frac{dr}{d\theta} = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + \dots = \frac{M_n r + M_{n+1} r^2 + M_{n+2} r^3 + \dots}{m_n + m_{n+1}r + m_{n+2}r^2 + \dots} =$$

$$= \frac{M_n}{m_n} r + \frac{m_n M_{n+1} - M_n m_{n+1}}{m_n^2} r^2 + \left[ \frac{m_n M_{n+2} - M_n m_{n+2}}{m_n^2} + \frac{m_{n+1} [M_n m_{n+1} - m_n M_{n+1}]}{m_n^3} \right] r^3 + \dots$$

Desarrollamos la solución analítica  $r(\theta)$  con  $r(0)=r_0$  de [e]:

$$r(\theta) = u_1(\theta) r_0 + u_2(\theta) r_0^2 + u_3(\theta) r_0^3 + \dots$$

Hacemos  $\theta=0$  para deducir los datos iniciales para las  $u_k(\theta)$ :

$$r_0 = u_1(0) r_0 + u_2(0) r_0^2 + u_3(0) r_0^3 + \dots \rightarrow u_1(0) = 1, \quad u_k(0) = 0 \text{ si } k > 1$$

Sustituyendo  $r(\theta)$  en [e] se obtiene el siguiente sistema recursivo para el cálculo de los  $u_k(\theta)$ :

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 R_1, & u_1(0) &= 1 \\ u_2' &= u_2 R_1 + u_1^2 R_2, & u_2(0) &= 0 \\ u_3' &= u_3 R_1 + 2u_1 u_2 R_2 + u_1^3 R_3, & u_3(0) &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

El  $u_1$  resulta ser mucho más complicado que la sencilla constante del caso no degenerado:

$$u_1(\theta) = e^{S_1(\theta)}, \text{ con } S_1(\theta) = \int_0^\theta R_1$$

Resolviendo las siguientes ecuaciones lineales:

$$u_2(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta u_1 R_2$$

$$u_3(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta [u_1^2 R_3 + 2u_2 R_2]$$

.....

vamos obteniendo los  $u_k$  en términos de primitivas, que, por desgracia, no se pueden calcular elementalmente. Para ver si  $\mathbf{0}$  es centro o foco debemos hallar, para  $r_0$  pequeño, el signo de:

$$r(2\pi) - r(0) = [u_1(2\pi) - 1] r_0 + u_2(2\pi) r_0^2 + u_3(2\pi) r_0^3 + \dots$$

Este signo nos lo daría  $S_1(2\pi)$ , si fuese menor o mayor que cero. Como  $\theta$  crece con  $t$  cerca de  $\mathbf{0}$ , y a la vista de los cálculos de 4.1, podemos obtener la siguiente primera conclusión:

**Teorema 4.3**

$$\text{Sea } I = \frac{n+1}{2} \int_0^{2\pi} R_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}(1,z)}{P_{n+1}(z)} dz, \text{ con } E_{n-1} = A^n x + B^n y.$$

Entonces: si  $I < 0$  el origen de [S] es un foco estable y si  $I > 0$  es un foco inestable.

[el sistema se comporta como la aproximación homogénea si la estabilidad es fuerte]

En lo que sigue suponemos que  $I = 0$  (que en la aproximación homogénea hay un centro).

Nuestro objetivo es hallar el signo de  $u_2(2\pi) = \int_0^{2\pi} u_1 R_2$ ,  $u_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} [u_1^2 R_3 + 2u_2 R_2]$ , ...

Como era de esperar  $u_2(2\pi) = 0$ . En efecto,  $R_1$  es  $\pi$ -periódica de promedio 0, con lo que son  $\pi$ -periódicas también  $S_1$  y  $u_1$ . Además, por las paridades de  $M_k$  y  $m_k$  es  $R_2(\theta + \pi) = -R_2(\theta)$ . Por tanto:

$$\int_0^{2\pi} u_1 R_2 = \int_{-\pi}^0 + \int_0^\pi = -\int_0^\pi + \int_0^\pi = 0$$

Veamos cuánto podemos avanzar en el cálculo de  $u_3(2\pi)$ . Aunque es fácil generalizar muchos pasos, vamos a centrarnos desde ahora en el caso  $n=3$ . En primer lugar:

$$\int_0^{2\pi} 2u_2 R_2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2u_1 R_2 \left[ \int_0^\theta u_1 R_2 \right] d\theta = \left[ \int_0^\theta u_1 R_2 \right]^2 \Big|_0^{2\pi} = 0 \rightarrow u_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} u_1^2 R_3$$

Recordando 4.1:

$$S_1(\theta) = -\frac{1}{4} \ln(m_3) + \frac{1}{4} \int_0^\theta \frac{E_2}{m_3} \rightarrow u_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} R_3 m_3^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{E_2}{m_3}\right] d\theta$$

Por otra parte:

$$m_k M_j - M_k m_j = [B^k A^j - A^k B^j][C^2 + S^2]$$

Por tanto:

$$u_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{B^3 A^5 - A^3 B^5}{m_3^{5/2}} + \frac{m_4 [A^3 B^4 - B^3 A^4]}{m_3^{7/2}} \right] \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{E_2}{m_3} \right] d\theta$$

Pasando a cartesianas con el cambio  $z = \tan \theta$  y teniendo en cuenta que los numeradores y denominadores son pares en  $C$  y  $S$  (de orden menor en dos unidades los primeros) acabamos obteniendo el siguiente teorema:

#### Teorema 4.4

$$\text{Sea } I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2}{P_4} = 0 \text{ y sea } J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{Q_8}{P_4^{5/2}} + \frac{Q_{12}}{P_4^{7/2}} \right] E dz, \text{ con}$$

$$E(z) = \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{P_4} \right], \quad Q_8(z) = B^3 A^5 - A^3 B^5 \Big|_{(1,z)}, \quad Q_{12}(z) = [B^4 - z A^4][A^3 B^4 - B^3 A^4] \Big|_{(1,z)}.$$

Entonces: si  $J < 0$  el origen de  $[S]$  para  $n=3$  es un foco estable y si  $J > 0$  es un foco inestable.

Esta expresión de  $J$  no deja claro que debe anularse en el caso de que  $[S]$  sea exacto. Pero:

$$\frac{d}{dz} P_{k+1} = E_{k-1} - (k+1)A^k, \quad A^k P_{j+1} - A^j P_{k+1} = A^k B^j - A^j B^k \rightarrow$$

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{P_6}{P_4^{5/2}} E \right] = \frac{R_8}{P_4^{5/2}} E - \frac{6Q_8}{P_4^{5/2}} E, \quad \frac{d}{dz} \left[ \frac{P_5^2}{P_4^{5/2}} E \right] = \frac{10Q_{12}}{P_4^{7/2}} E - \frac{2R_{12}}{P_4^{7/2}} E$$

siendo

$$R_8 = P_4 E_4 - P_6 E_2, \quad R_{12} = P_5 [P_5 E_2 - P_4 E_3]$$

De esto obtenemos una expresión alternativa para la  $J$ :

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{R_8}{6P_4^{5/2}} + \frac{R_{12}}{5P_4^{7/2}} \right] E dz$$

La primitiva que figura en la exponencial es calculable si podemos factorizar  $P_4$ . Pero, aunque consigamos hacerlo, es imposible en general hallar analíticamente la mucho más complicada  $J$ . Lo que vamos a hacer es, restando integrales de valor cero, reducir su cálculo al de otras similares en las que los numeradores serán polinomios de grado dos que, en ocasiones, tendrán signo definido. En ese caso habremos conseguido precisar algebraicamente el signo de  $J$  y la estabilidad del foco.

Para abreviar, a partir de ahora llamaremos  $P_4 = P$ , supondremos  $a_{03} = -1$  y denotaremos los coeficientes de los términos cúbicos  $A^3$  y  $B^3$  por:

$$A^3(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 - y^3, \quad B^3(x,y) = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3$$

Como se tiene que:

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{z^n E}{p^{k+1/2}} \right] = \frac{E}{p^{k+3/2}} \left[ (n-4k-2)z^{n+3} + ([n-3k]h+[3k+2-n]c)z^{n+2} + \right. \\ \left. + ([n-2k]g+[2k+2-n]b)z^{n+1} + ([n-k]f+[k+2-n]a)z^n + nez^{n-1} \right]$$

la integral del segundo miembro de  $-\infty$  a  $+\infty$  se anula si  $n=0, \dots, 4k+2$ . Cada  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{n+3} E}{p^{k+3/2}} dz$ , con  $n=0, \dots, 4k+1$ , queda en función de otra similar en que el numerador es de un grado menor.

Así, si en el numerador hay inicialmente un polinomio  $Q_{4k+4}$  (como los de  $J$ ), eliminando de forma sucesiva el coeficiente de mayor orden, se acaba teniendo un polinomio  $R_2$  de segundo grado en el numerador:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{4k+4}}{p^{k+3/2}} Edz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2}{p^{k+3/2}} Edz$$

Si se tiene la suerte de que  $R_2$  tiene signo definido, queda precisado algebraicamente el signo de la integral inicial. Aunque el  $R_2$  corte el eje  $z$ , aun se puede salvar la situación. En efecto:

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{z^{4k+2} E}{p^{k+1/2}} \right] = \frac{E}{p^{k+3/2}} \left[ ([k+2]h-kc)z^{4k+4} + \dots \right], \quad \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^{4k+1} E}{p^{k+1/2}} \right] = \frac{E}{p^{k+3/2}} \left[ -z^{4k+4} + \dots \right]$$

y de aquí:

$$0 = \left[ \left( z^{4k+2} + ([k+2]h-kc)z^{4k+1} \right) \frac{E}{p^{k+1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{4k+3} E}{p^{k+3/2}} dz$$

Reduciendo el orden de  $Q_7$  como antes acabamos hallando un polinomio  $N_2 = n_2 z^2 + n_1 z + n_0$ , con los  $n_k$  dependientes exclusivamente de los coeficientes de  $A^3$  y  $B^3$ , y tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2 E}{p^{k+3/2}} dz = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{4k+4}}{p^{k+3/2}} Edz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2 + mN_2}{p^{k+3/2}} Edz \quad \forall m$$

Por tanto, si para algún valor de la constante  $m$  es  $M_2 = R_2 + mN_2 \neq 0 \quad \forall z$  (o que es lo mismo, si es negativo su discriminante o si las raíces de  $R_2$  y  $N_2$  no están intercaladas), el signo de la integral con el  $Q_{4k+4}$  será el de este polinomio  $M_2$ . En el peor de los casos, eligiendo un  $m$  adecuado podremos suprimir el término lineal o el cuadrático de  $R_2$ , con lo que la integral se reduce al cálculo (numérico) de sólo dos de las tres integrales siguientes  $J_0$ ,  $J_1$  ó  $J_2$ :

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^{k+3/2}} dz, \quad J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zE}{p^{k+3/2}} dz, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 E}{p^{k+3/2}} dz$$

A la  $J$  del teorema 4.4 se le pueden aplicar las reducciones anteriores con  $k=2$  (pues  $Q_8/P^{5/2}$  es también un  $Q^*_{12}/P^{7/2}$ ). Si los términos de orden 4 son nulos, las reducciones son con  $k=1$ , lo que simplifica los cálculos. Pero incluso en este caso las expresiones generales del  $R_2$  y del  $N_2$  son tan largas que no merece la pena reproducirlas. Se puede probar que se llega a la misma expresión reducida de la  $J$  partiendo de los  $Q_8$  y  $Q_{12}$  o partiendo de los  $R_8$  y  $R_{12}$ .

Desarrollamos los cálculos hasta el final en el ejemplo siguiente (continuación del ejemplo 1 de 4.1). Otros ejemplos aparecerán en capítulos posteriores.

**Ejemplo 14.**  $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + 2x^2y + 4xy^2 - y^3 - qx^4 - sy^4 \end{cases}$ ,  $P_4 = [z^2 + 2]^2 = p(z)^2$ ,  $E_2 = 8 + 8z - 4z^2$ .

Además del centro o foco del origen tiene, si  $q+s \neq 0$ , una silla en  $(9/[q+s], 9/[q+s])$ . Si  $q=s=0$ , ya vimos en 4.1 que era  $l=0$ , pero nos conviene volver a hallar  $l$  calculando una primitiva:

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2}{p^2} dz = 4 \left[ \frac{z-1}{p} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Para analizar origen del no homogéneo habrá que hallar el signo de:

$$J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{12}}{p^7} Edz, \text{ con } Q_{12} = [q+sz^4]^2 [2-z^2-z^3] \text{ y } E \equiv \exp\left[\frac{2[z-1]}{p}\right]$$

Para reducir  $J$  utilizamos que:

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{z^n E}{p^5} \right] = \frac{E}{p^7} [ (n-10)z^{n+3} - 2z^{n+2} + 4(n-4)z^{n+1} + 4z^n + 4nz^{n-1} ]$$

y que la integral entre  $-\infty$  e  $\infty$  del segundo miembro es 0 si  $n=0 \dots 10$ . Haciendo desaparecer los coeficientes de mayor orden del numerador de  $J$  (desde, tal vez, 12 hasta 3) se acaba con un polinomio de segundo grado en el numerador. La situación favorable de que este polinomio tenga signo definido se da, por ejemplo, si:

$q=0, s=9 \rightarrow Q_{12} = 81z^8 [2-z^2-z^3]$ . Entonces:

$$\frac{Q_{12}}{p^7} E - \frac{d}{dz} \left[ \frac{9E}{p^5} \left( \frac{9}{2} z^8 + 18z^6 - \frac{36}{5} z^5 + \frac{252}{5} z^4 - \frac{288}{35} z^3 + \frac{1836}{35} z^2 - \frac{8}{5} z + \frac{6248}{175} \right) \right] = \frac{576}{175} \frac{E}{p^7} R_2$$

con  $R_2 = -161z^2 + 432z - 373 \rightarrow J = \frac{576}{175} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2}{p^7} Edz < 0$

pues el discriminante del  $R_2$  es negativo. Hay, por tanto, un foco estable en origen.

[Integrando numéricamente se tiene que  $J \approx -3.72$ ].

Hallamos ahora el  $N_2$ , dependiente sólo de los términos cúbicos, y con integral cero:

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{E}{p^5} \left( \frac{1}{2} z^{10} - z^9 + 7z^8 - \frac{32}{3} z^7 + \frac{112}{3} z^6 - \frac{632}{15} z^5 + \frac{4232}{45} z^4 - \frac{22768}{315} z^3 + \frac{34336}{305} z^2 - \frac{17792}{405} z + \frac{6115522}{14175} \right) \right] =$$

$$= \frac{128}{14175} \frac{E}{p^7} N_2, \text{ con } N_2 = 1057z^2 + 666z - 349 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2}{p^7} E dz = 0$$

Aproximadamente,  $N_2$  tiene por raíces  $-0.97$  y  $0.34$ . Si para otros  $q$  y  $s$  tiene raíces reales el  $R_2$  pero dentro o fuera del intervalo  $[-0.97, 0.34]$ , la estabilidad del foco queda precisada algebraicamente, pues existirá un  $m$  para el  $M_2 = R_2 + mN_2$  tiene signo definido.

Esto sucede, por ejemplo, en el segundo caso que tratamos:

$q=5, s=4 \rightarrow Q_{12} = [5+4z^4]^2 [2-z^2-z^3] \rightarrow J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{12}}{p^7} Edz = \dots = -\frac{64}{945} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2}{p^7} Edz$

con  $R_2 = 4109z^2 - 10818z + 5632$ , de raíces reales aproximadas  $0.71$  y  $1.92$ . Existe algún  $m$  tal que  $M_2$  tiene signo definido (si  $m \in [0.79, 16.1]$  aproximadamente). Por ejemplo, si  $m=16$ ,  $M_2 = R_2 + 16N_2 = 2835(7007z^2 - 54z + 16) > 0$  para todo  $z$ . Foco estable [ $J \approx -1.09$ ].



Lo más desfavorable es que tengamos que utilizar el valor de dos de las integrales:

$$J_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^7} dz \approx 0.00331, \quad J_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zE}{p^7} dz \approx 0.000525, \quad J_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 E}{p^7} dz \approx 0.000762$$

Por ejemplo, no queda con lo anterior precisado el signo de J algebraicamente si:

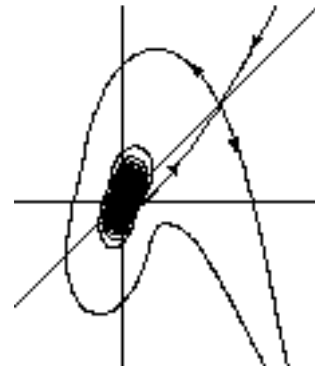
$$q = 9, \quad s = 0 \rightarrow Q_{12} = 81[2-z^2-z^3] \rightarrow \frac{Q_{12}}{p^7} E - \frac{d}{dz} \left[ \frac{81}{10} \frac{E}{p^5} \right] = \frac{324}{5} \frac{E}{p^7} [2+2z-z^2]$$

ya que las raíces de R<sub>2</sub> son -0.73 y 2.73.

Tenemos que hallar numéricamente:

$$J = \frac{36}{37} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{203-278z^2}{p^7} Edz \quad \text{ó} \quad J = \frac{324}{1057} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{353+556z}{p^7} Edz$$

Utilizando los valores de arriba de las J<sub>m</sub>, tenemos que J ≈ 0.45 y así se tendría un foco inestable en el origen. Esto concuerda con el dibujo aproximado de la derecha (la silla está en (1,1) y sobre y=x las órbitas son verticales).



Una idea que nos permite resolver algebraicamente el problema en el último caso (y que se muestra productiva en otros ejemplos) es considerar el integrando de J también como un cociente de polinomios de orden superior y reducir, con las técnicas descritas, estos polinomios más complicados. Podemos utilizar, por ejemplo, que:

$$\frac{[203-278z^2]p^2}{p^9} E - \frac{d}{dz} \left[ \frac{E}{p^7} \left( \frac{278}{11} z^3 - \frac{139}{33} z^2 + \frac{1559}{33} z + \frac{37}{7} \right) \right] = \frac{2}{331} \frac{E}{p^9} R^*_2 \rightarrow J = \frac{24}{2849} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R^*_2}{p^9} Edz$$

siendo  $R^*_2 = 42619z^2 - 3282z + 60518$

y como R<sup>\*</sup><sub>2</sub> es siempre positivo está probada la inestabilidad. No se ha necesitado siquiera hallar un N<sup>\*</sup><sub>2</sub> de integral cero, cuyo cálculo es aún más largo que el del N<sub>2</sub>:

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{E}{p^7} \left( -\frac{1}{2} z^{14} + z^{13} + \dots \right) \right] = \frac{256}{42567525} \frac{E}{p^7} N^*_2, \quad \text{con } N^*_2 = 324683z^2 - 525018z + 11182$$

Otra forma (no generalizable) de ver que J > 0 en este caso es escribir  $J_m = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^7 \frac{A_n z + B_n}{p^n} Edz$ , utilizar que cada sumando para n ≥ 3 se puede escribir en función de los posteriores:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{zE}{p^n} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(n-1)z+2n-3}{6p^{n-1}} + \frac{2n-5}{12p^{n-2}} \right] Edz, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^n} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(2n-5)z+2n}{12p^{n-1}} - \frac{2n-5}{24p^{n-2}} \right] Edz$$

y que además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2z}{p^2} + \frac{4}{p^2} - \frac{1}{p} \right] Edz = \frac{E}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Operando:

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{115}{1296p^2} - \frac{13}{864p} \right] Edz, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{211}{1728p} - \frac{409}{648p^2} \right] Edz \rightarrow J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{753}{4p^2} - \frac{36}{p} \right] Edz$$

Esto no precisa el signo de J. Pero haciendo en la última expresión  $z = \sqrt{2} \tan u$ , desarrollando la exponencial, quedándonos con las potencias pares y escribiendo todo en función de  $c = \cos u$ :

$$J = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{753}{16} c^2 - 18 \right] \left[ 1 - c^2 + \frac{1}{2} (2c^2 - c^4) - \frac{1}{6} (6c^4 - 5c^6) + \frac{1}{24} (4c^4 + 4c^6 - 7c^8) - \dots \right] du$$

Así expresamos J como una serie numérica cuya suma se puede probar que es positiva.



## 5. Utilizando la poligonal.

Consideraremos en este capítulo de nuevo el sistema analítico:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + A^p(x,y) + \dots \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + B^p(x,y) + \dots \end{cases}$$

y analizaremos los casos pendientes del teorema 3.2, especialmente el estudio de  $v_i$  múltiples con  $\lambda_i$  asociado igual a cero [siendo  $y=v_i x$  raíz de  $\Delta(x,y) = xB^n(x,y) - yA^n(x,y)$  y  $\lambda_i = A(1, v_i)$ ], generalizando los resultados de dicho teorema.

Comenzaremos en la sección 5.1 estudiando algunos ejemplos de ese tipo ( $v_i=0$  en todos ellos) para sugerir las técnicas y las dificultades de los resultados generales que se darán en 5.2. Estos resultados los emplearemos en el estudio de sistemas concretos en 5.3 y acabaremos tratando en 5.4 el caso  $\Delta=0$  (y similares) y los centros y focos que no son analizables con las técnicas del capítulo 4. Demostraremos que con una utilización adecuada de la poligonal de Newton, casi nunca será necesario realizar explícitamente ningún blow-up para precisar la estructura local de estos puntos 'más degenerados' que los del capítulo 3.

Veremos en 5.1 que buscar variedades de [S] cuyo desarrollo comience por términos  $x^s$  es equivalente a buscar ramas de esa forma de la curva algebraica  $H_s(x,y) = xg - syf = 0$ . Esta es la razón que lleva a utilizar de forma natural la poligonal en el análisis de estos sistemas (la  $s$  será diferente para cada potencia, es decir, para cada segmento de la poligonal). El primer teorema que probaremos (el 5.1) asegurará que a cada rama simple o múltiple con el nuevo 'autovalor' asociado distinto de cero corresponde una variedad de la misma forma que pasa por el origen.

Mejorando un primer teorema 5.2 (y a la vista de su demostración) establecemos el aún más útil **teorema 5.3** que permitirá analizar el origen con pocos cálculos (y sin cambios de variable): si ningún polinomio asociado a un segmento de la poligonal se anula idénticamente para el  $s$  correspondiente, si existe alguna rama real y las asociadas a cada segmento son del tipo de las del teorema 5.1, estas ramas (y tal vez otras asociadas a los vértices) dan todas las variedades que pasen por el origen, y la estructura queda determinado con el flujo sobre ellas, el signo de  $\Delta$  y, excepcionalmente, el de algún polinomio más. Este resultado generaliza el teorema 3.2 (y el estudio de los puntos elementales): los términos homogéneos se sitúan sobre un segmento de pendiente  $-1$  y las ramas son los 'vectores propios'. El papel de la aproximación homogénea lo cumplen ahora los términos que proporcionan puntos sobre la poligonal y son, si todos los nuevos 'autovalores' son no nulos, los únicos necesarios para fijar la estructura del origen.

Los teoremas son de demostración larga y exigen la realización de sucesivos blow-ups, pero insistimos en que una vez probados hacen, en general, innecesarios los cambios. Sólo dejan por analizar los casos con polinomios idénticamente nulos, las ramas múltiples con 'autovalor' cero y la distinción entre centros y focos. En 5.4 se darán ideas de cómo atacar los dos primeros casos sin cambios de variable y se estudiarán los centros y focos. Para estos se verá que si la poligonal se reduce a un segmento, uno o dos cambios de variable reduce el problema a uno o dos de los estudiados en el capítulo 4.

La explotación intensiva de la poligonal de Newton en la forma presentada aquí para el análisis del origen no se encuentra en la literatura sobre el tema. El clásico [1] (ver las páginas 295-302 de [3]) ya utiliza la poligonal para estudiar las soluciones de  $dy/dx=g(x,y)/f(x,y)$ , con  $g$  y  $f$  analíticas que se anulan en el origen. También se utiliza en [5], aunque en un método de estudio de puntos críticos que más bien se basa en la determinación de las curvas  $f=0$  y  $g=0$ . Nuestras primeras ideas sobre el tema se mostraron en [13]. El método local de análisis de [18] (en el que es omnipresente la poligonal) consiste en dividir un entorno del origen en sectores (asociados a cada segmento y cada vértice), en utilizar formas normales para el estudio de las órbitas en cada uno de ellos y en 'pegar' las órbitas de cada sector. Su ejemplo erróneo citado en la introducción es  $x'=4y^2+xy-2x^2$ ;  $y'=y^2+2xy+2x^3$ , al que asigna dos sectores parabólicos y dos hiperbólicos, pero el teorema 3.2 ya asegura que consiste en seis sectores hiperbólicos.

Más próximo a nuestras ideas es el trabajo de Berezovskaya recogido en el libro [21]: "The main topological part of plane vector fields with fixed Newton diagram". En él caracteriza los sistemas 'no degenerados' para los que bastan los términos sobre la poligonal (su 'parte principal') para fijar la estructura (descarta entonces la posibilidad de 'autovalores cero' recogida por nuestros teoremas). Su método de análisis (mucho más complicado que el nuestro) simplifica el de [18] realizando en cada sector blow-ups de la forma  $x=x, y=x^S v$  (no parece detectar las dificultades que citaremos en la página 123). Tal vez existan más detalles en su preprint de 1978 ("A complicated stationary point of a system on the plane: structure of a neighborhood and index"), uno de cuyos teoremas se reproduce en la página 88 de [17]. El artículo [20] también caracteriza cuando basta considerar la 'parte principal'. Para el análisis de los sistemas asociados a cada segmento sustituye los blow-ups sucesivos por un único cambio a las coordenadas quasi-polares introducidas por Lyapunov ([2]). Como aplicación clasifica, como nosotros en el ejemplo 17, los mapas de fases de las ecuaciones de segundo orden, aunque no reproduce los cálculos y no podemos comparar los métodos (por otros caminos más largos estas ecuaciones habían sido ya estudiadas en [4], [7] o [10]).

Los resultados para el caso  $\Delta=0$  están basados en [7]. Sobre el problema complicado de distinguir centros y focos de los tratados en 5.4 se puede consultar [17] (para una visión global), [18] y sobre todo [22] ya que ataca el caso (para el que 5.4 sólo sugiere sus dificultades) de que haya más de un segmento de la poligonal, 'pegando' las órbitas de los sectores asociados a cada segmento. Su caracterización de los sistemas 'no degenerados' con centro o foco a partir de la poligonal es similar a la nuestra de la página 136 (o de [26]). Sistemas de forma particular con este tipo de centros o focos se estudian en [2], [6], [20], [24] y [25].

El proceso habitual de análisis de los puntos de este capítulo mediante cambios de variable (llamado proceso de desingularización o  $\sigma$ -proceso) precisado por Dumortier en [9] se puede encontrar descrito también en [10], [12], [15], [17], [19], [20] o [23]. [Se podrían dar muchos ejemplos de lo largo que puede resultar este proceso; por citar uno: en las páginas 361–364 de [12] se analiza  $x'=y+ax^2+\dots$ ;  $y'=bx^2+\dots$  con tres blow-ups sucesivos; basta una línea para estudiarlo con nuestro teorema 5.3 (expuesto en [16]).

En nuestros estudios no hemos considerado el índice de los puntos críticos, del que otros autores sí obtienen abundante información, como [8], [11] o [14].

## Referencias del capítulo 5

- [1] Briot - Bouquet. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'Ecole Polytechnique [1856].
- [2] A. M. Lyapunov. Investigation of one of the singular cases of the theory of stability of motion. *Mathematicheskii Sbornik*, **17** [1893].
- [3] E. L. Ince. Ordinary differential equations. Longman [1927].
- [4] A.F. Andreev. Investigation of the behavior of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point. *Annals of the U. of Leningrad* [1955], 183-207.
- [5] S. Barocio. Singularidades de sistemas diferenciales analíticos en el plano. *Bol. S. Mat. Mexicana* [1959], 1-25.
- [6] A. P. Sadovskii. The center and focus problem. *Differential Equations* **4** [1968], 1034-1037.
- [7] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [8] M. E. Sagalovich. Topological structure of the neighborhood of a critical point of a differential equation. *Diff. Equations* **11** [1975], 1498-1503.
- [9] F. Dumortier. Singularities of vector fields on the plane. *J. of Diff. Eq.* **23** [1977], 53-106.
- [10] D. K. Arrowsmith. The singularity  $x(\partial/\partial y)$ . *J. of Diff. Eq.* **34** [1979], 153-166.
- [11] M. E. Sagalovich. Classes of local topological structures of an equilibrium state. *Diff. Equations* **15** [1979], 253-255.
- [12] J. Guckenheimer - P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag [1983].
- [13] J.I.Aranda. Métodos simples para el estudio de puntos singulares degenerados. *Actas VII CEDYA* [1984], 11-14.
- [14] B. Coll - J. Llibre. Singularidades sobre el plano real de un sistema analítico de orden dos. *Actas IX CEDYA* [1986], 135-139.
- [15] Yu. S. Il'yashenko. Algebraically and analytically solvable problems in theory of ordinary differential equations. *J. Soviet Math.* **47** [1987], 2570-2584.
- [16] J.I.Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos. *Actas X CEDYA* [1987], 20-25.
- [17] V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations. *Encyclopaedia of Math. Sci.*, vol 1. Springer- Verlag [1989].
- [18] A. D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer- Verlag [1989].
- [19] D. K. Arrowsmith - C. M. Place. An introduction to dynamical systems. Cambridge U.P. [1990].
- [20] M. Brunella - M. Miari. Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra. *J. of Diff. Eq.* **85** [1990], 338-366.
- [21] D. T. Lê - K. Saito - B. Teissier. Singularity theory. World Scientific [1991].
- [22] F. S. Berezovskaya - N. B. Medvedeva. A complicated singular point of "center-focus" type and the Newton diagram. *Selecta Mathematica* **13** [1994], 1-15.
- [23] Yu.S.Il'yashenko - S.Yakovenko. Concerning the Hilbert 16th problem. *AMS Translations, Ser 2, vol 165* [1995].
- [24] A. Cima - A. Gasull - F. Mañosas. Cyclicity of a family of vector fields. *J. of Math. Anal. and Appl.* **196** [1995], 921-937.
- [25] J. Chavarriga - I.García - J. Giné. Integrability of centers perturbed by quasi-homogeneous polynomials. *J. of Math. Anal. and Appl.* **210** [1997], 268-278.
- [26] J.I.Aranda. Centros y focos degenerados de sistemas analíticos planos. *Actas XV CEDYA* [1997] (aún no publicadas).

### 5.1. Ejemplos introductorios.

**Ejemplo 1.**  $\begin{cases} x' = ax^3 \\ y' = y^2 + x^4 \end{cases} \rightarrow \Delta = xy^2 \rightarrow \begin{matrix} x=0, \lambda=1 \\ y=0 \text{ doble}, \lambda=0 \end{matrix}$



Aunque no sabemos si existen, busquemos variedades horizontales que pasen por el origen probando en la ecuación de las órbitas soluciones de la forma :

$$y = c_s x^s + o(x^s) \text{ con } s > 1 \rightarrow [c_s^2 x^{2s} + \dots] + x^4 = ax^3 [sc_s x^{s-1} + \dots]$$

El valor más pequeño de  $s$  para el que  $c_s$  puede ser no nulo es  $s=2$  . Así que:

$$c_2^2 - 2ac_2 + 1 = 0 \rightarrow c_2 = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Si  $|a| < 1$  no pueden existir variedades reales que comiencen por términos de orden 2.

Si  $a=1$  ( $c_2=1$  doble) y  $a=-1$  ( $c_2=-1$  doble) , las posibles variedades serían, respectivamente, de la forma:  $y=x^2+\dots$  e  $y=-x^2+\dots$

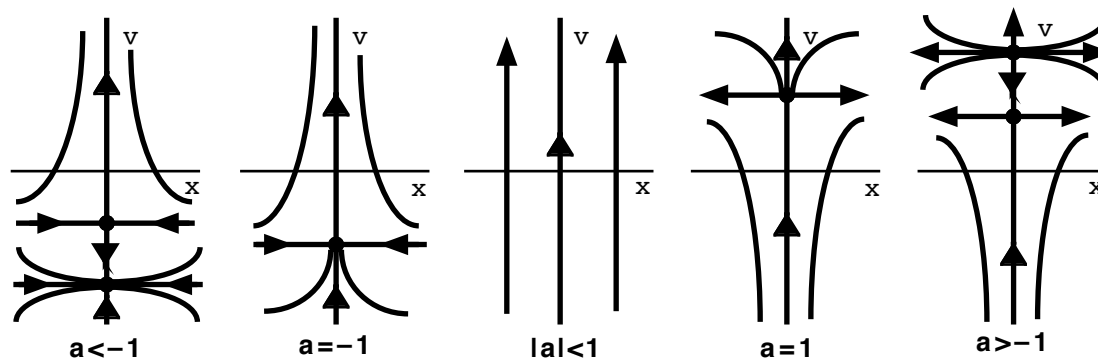
Si  $|a| > 1$  , tenemos dos posibles comienzos del desarrollo de las variedades horizontales.

El flujo sobre cada una de estas posibles variedades viene gobernado por  $x' = ax^3$  .

Comprobemos que en los cálculos anteriores reside toda la información necesaria para precisar la estructura local de  $\mathbf{0}$  . Para ello comenzamos haciendo el cambio  $x=x$  ;  $y=x^2v$  . Obtenemos:

$$\begin{cases} x' = ax^3 \\ v' = x^2(v^2 - 2av + 1) \end{cases} \text{ cuyas órbitas (salvo } x=0) \text{ son iguales a las de } \begin{cases} x' = ax \\ v' = v^2 - 2av + 1 \end{cases}$$

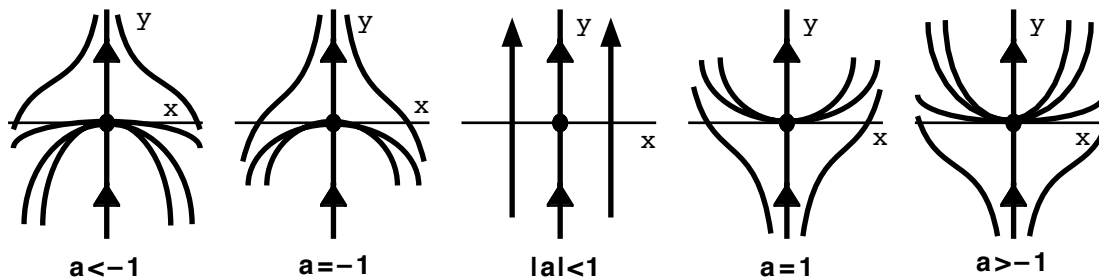
Este sistema tiene 0, 1 ó 2 puntos críticos en  $x=0$  dependiendo de que  $|a|$  sea menor, igual o mayor que 1. Los diferentes mapas de fases en el plano  $xv$  son:



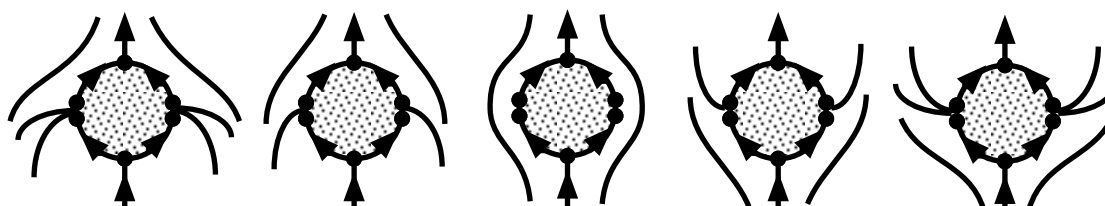
(los dos puntos son elementales si  $|a| > 1$  y uno de sus autovalores es 0 y el otro es  $a$  si  $|a|=1$  ).

Deshaciendo el cambio comprobamos que existen las variedades previstas [aunque haya infinitas, todas ellas son de la forma buscada  $y = c_2 x^2 + o(x^2)$  ].

Los posibles mapas locales del origen  $0$  serán los siguientes:



Observemos que al mismo resultado habríamos llegado simplemente reflejando las nuevas variedades descubiertas con su flujo correspondiente en la estructura homogénea:



Como muestra el ejemplo a un punto múltiple con  $\lambda=0$  pueden no llegar variedades o llegar más de una con primeros términos  $c_s x^s$  diferentes (e incluso, como veremos ya en el ejemplo siguiente, con diferentes  $s$ , que pueden ser fraccionarios, lo que complicará los cambios). En general veremos que a cada  $c_s$  simple estará asociado siempre un punto simple y por tanto una variedad que llega al origen, lo que no será siempre cierto para un  $c_s$  múltiple. También es posible que existan variedades que no sean  $C^\infty$ . Por ejemplo, para  $a=1$  las órbitas vienen dadas por  $y = x^2 + Cx^2/(1-C \ln x)$  y todas estas funciones satisfacen  $y(0)=y'(0)=0$ ,  $y''(0)=2$ . Pero ninguna de ellas (salvo  $y=x^2$ ) posee derivada tercera en  $x=0$ .

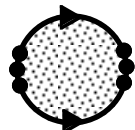
¿Podríamos en los cálculos anteriores haber perdido alguna otra variedad horizontal que no fuese de la forma  $y = c_2 x^2 + o(x^2)$ ? En principio, al deshacer el cambio  $y=x^2 v$  sería posible que alguna de las órbitas próximas al eje  $v$  'se doblase' hasta regresar al origen. Para ver que eso no puede suceder hay, por ahora, que avanzar paso a paso, siguiendo el camino conocido de realizar blow-ups sucesivos hasta acabar en puntos elementales o con un único autovalor cero. Haciendo en nuestro sistema  $y=xv$  se tiene

$$\begin{cases} x' = ax^2 \\ v' = v^2 - axv + x^2 \end{cases} \rightarrow xB - vA = x[v^2 - 2axv + x^2]$$

Las únicas posibles variedades horizontales del sistema inicial son las posibles órbitas de este último sistema en  $x \neq 0$  que lleguen al origen y, según el teorema 3.2, estas sólo lo pueden hacer siendo tangentes a

$$v = [a \pm \sqrt{a^2 - 1}] x$$

lo que nos vuelve a dar las variedades conocidas.

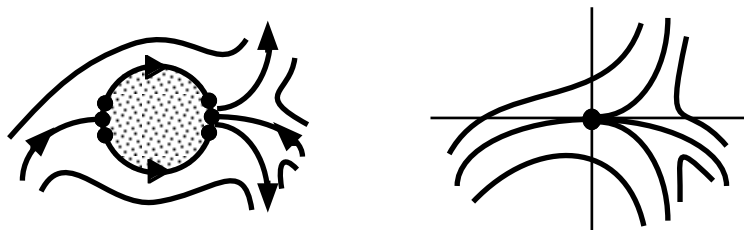
**Ejemplo 2.**  $\begin{cases} x' = y^2 - 2x^3 \\ y' = 3x^2y + x^4 \end{cases} \rightarrow \Delta = -y^3 \rightarrow y=0 \rightarrow \lambda=0 \rightarrow$  

Probando  $y = c_3 x^s + o(x^s)$  obtenemos que el menor  $s$  es  $s = \frac{3}{2}$  con lo que

$$[3c_{3/2}x^{7/2} + \dots + x^4] - [c_{3/2}^2x^3 + \dots - 2x^3][\frac{3}{2}c_{3/2}x^{1/2} + \dots] = 0 \rightarrow \frac{3}{2}c_{3/2}^3 - 6c_{3/2} = 0$$

Hay tres raíces simples de esta ecuación:  $c_{3/2}=0$ ,  $c_{3/2}=-2$ ,  $c_{3/2}=2$ , que nos proporcionan tres variedades:  $y=0(x^{3/2})$ ,  $y=-2x^{3/2}+o(x^{3/2})$ ,  $y=2x^{3/2}+o(x^{3/2})$ , que llevadas a la primera ecuación del sistema nos da para la primera:  $x'=-2x^3+o(x^3)$ , y para la segunda y tercera variedades:  $x'=2x^3+o(x^3)$ .

Para precisar más el dibujo calculamos algún término no nulo de la primera variedad. Para ello observamos que  $s=2$  también proporciona  $c_s$  no triviales. De aquí:  $y = -\frac{1}{7}x^2 + \dots$  y por tanto



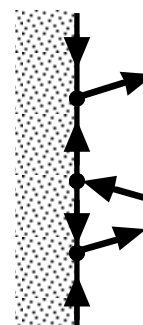
(los sectores entre las tres variedades de la derecha son hiperbólicos y no elípticos como en principio podría también pensarse; más adelante justificaremos porqué se puede asegurar esto sólo con los cálculos anteriores). Haciendo el cambio  $y=x^{3/2}v$  obtenemos tras simplificar:

$$\begin{cases} x' = xv^2 - 2x \\ v' = 6v - \frac{3}{2}v^3 + x^{1/2} \end{cases}$$

Los puntos críticos de este sistema en el eje  $v$  son:  $(0,-2)$ ,  $(0,0)$  y  $(0,2)$ . Este eje está formado por órbitas orientadas como en el dibujo. Podemos evitar la presencia del término no regular  $x^{1/2}$  con un nuevo cambio  $x=u^2$  que nos da

$$\begin{cases} u' = -u - \frac{1}{2}uv^2 \\ v' = 6v - \frac{3}{2}v^3 + u \end{cases}$$

Para este sistema los tres puntos son elementales y por tanto hay variedades no verticales que llegan hasta ellos:  $v = 0+o(1)$ ,  $v = -2+o(1)$ ,  $v = 2+o(1)$ .



Deshaciendo los dos cambios realizados obtenemos de nuevo las variedades previstas en la derecha. Si realizásemos el cambio  $y=(-x)^{3/2}v$ ,  $-x=u^2$  (o bien  $x=-u^2$ ,  $y=u^3v$  de un tirón) demostraríamos la existencia de una variedad a la izquierda. De nuevo unos blow-up sucesivos (hasta que demos los teoremas de la siguiente sección) podrían despejar las dudas que pudieran quedar sobre la posible pérdida de otras variedades distintas de las detectadas ya que pudieran llegar al origen con pendiente horizontal).



Aunque, como hemos visto, la utilización de series formales ahorra trabajo veamos que aún podemos simplificarlo más.

Observemos que determinar el  $c_s$  probando  $y = c_s x^s + o(x^s)$  en la ecuación de las órbitas

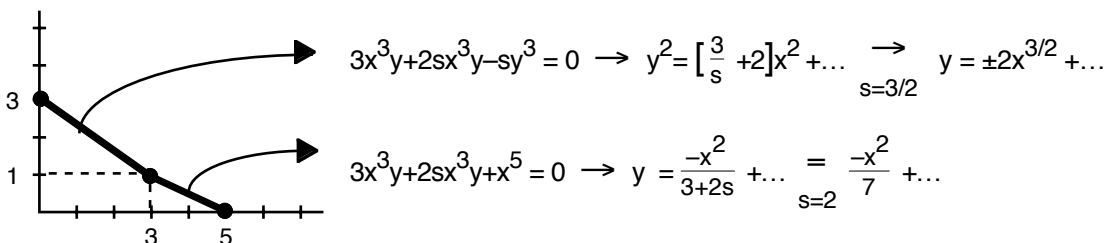
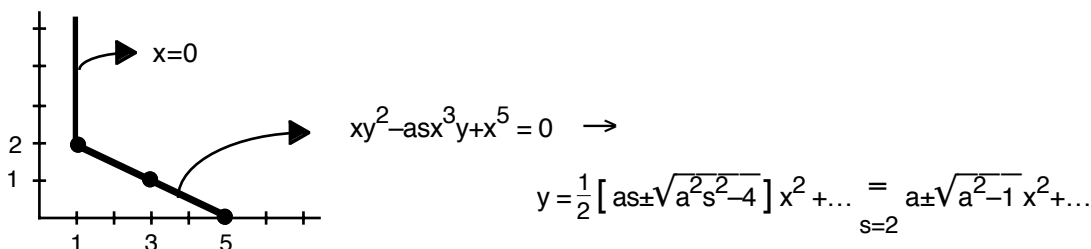
$$g(x,y) - f(x,y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad g(x, c_s x^s + \dots) - f(x, c_s x^s + \dots) [s c_s x^{s-1} + \dots] = 0$$

es equivalente a determinarlo probando ese desarrollo en la ecuación algebraica

$$(1) \quad \boxed{x g(x,y) - s y f(x,y) = 0} \quad \rightarrow \quad x g(x, c_s x^s + \dots) - s f(x, c_s x^s + \dots) [c_s x^s + \dots] = 0$$

(para  $s=1$  aparece de nuevo la ecuación  $\Delta = xB - yA = 0$ ).

El problema de determinar las ramas de una curva algebraica es fácilmente atacable a partir de su **poligonal de Newton**. Así, el análisis de la curva (1) en los ejemplos 1 y 2 nos proporciona inmediatamente las variedades ya conocidas:

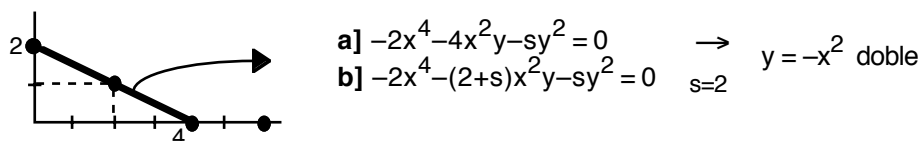
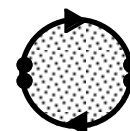


[Observemos que para calcular las variedades al  $s$  que aparece en (1) debemos asignarle valores diferentes según sea el segmento que consideremos, pues cada  $s$  es la potencia del primer término de la variedad (de la serie) buscada].

**Ejemplos 3.** a)  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -4xy - 2x^3 + bx^5 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x' = y + x^2 \\ y' = -2xy - 2x^3 + bx^5 \end{cases}$

Ambos sistemas tienen la misma estructura homogénea:  $\Delta = -y^2$ ,  $\lambda = 0 \rightarrow$

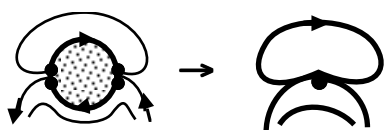
Y proporcionan la misma variedad doble a partir de la poligonal:



Estos casos de ramas  $y = c_s x^s + \dots$  múltiples (como ocurría en el capítulo 3 con los  $v_i$  múltiples) pueden obligar a proseguir el análisis, pues al hacer  $y = x^s v$  (o algún blow-up) podrían aparecer puntos degenerados. En nuestros ejemplos:

$$y = x^2 v \rightarrow \begin{array}{ll} \mathbf{a)} \begin{cases} x' = x \\ v' = -2(v+1)^2 + bx^2 \end{cases} & \mathbf{b)} \begin{cases} x' = x + xv \\ v' = -2(v+1)^2 + bx^2 \end{cases} \\ \\ y = xu \rightarrow \mathbf{a)} \begin{cases} x' = xu \\ u' = -2x^2 - 4xu - u^2 + bx^4 \end{cases} & \mathbf{b)} \begin{cases} x' = x^2 + xu \\ u' = -2x^2 - 3xu - u^2 + bx^4 \end{cases} \end{array}$$

Para el sistema en  $v$  el punto  $(0, -1)$  es un silla-nodo en el caso **a)** pero no es simple en el **b)**. Para el otro, es  $\Delta = -2x(x+u)^2$  en ambos casos, pero mientras al vector propio múltiple  $u = -x$  está asociado un autovalor cero en el **b)**, tenemos  $x' = -x^2 + \dots$  para el **a)**. Así, cualquiera de los cambios prueba la existencia de la variedad  $y = -x^2 + \dots$  para **a)** y precisa su estructura:

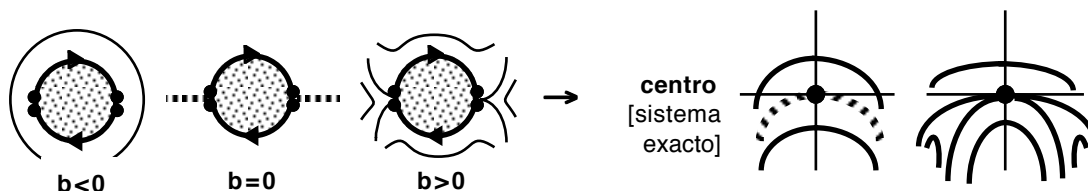


[como se observa, el término  $bx^5$  no es relevante para la estructura local de **a)**].

Sin embargo, para **b)** no sabemos lo que ocurre. Podríamos hacer  $z = v + 1$  ó  $z = x + u$  y usar las técnicas vistas hasta ahora. Pero más cómodo es hacer directamente  $y = -x^2 + w$  que nos lleva a:

$$\begin{cases} x' = w \\ w' = bx^5 \end{cases} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 6 \end{array} \quad w = \pm \left[ \frac{b}{3} x^6 \right]^{1/2}$$

Por tanto, tenemos para este sistema  $y$ , deshaciendo el cambio, para el inicial:



Algo tal vez más rápido que el cambio  $y = -x^2 + w$  es calcular algún término más del desarrollo de la posible variedad. Llevamos  $y = -x^2 + c_s x^s + \dots$ ,  $s > 2$  a la ecuación de las órbitas de **b)**:

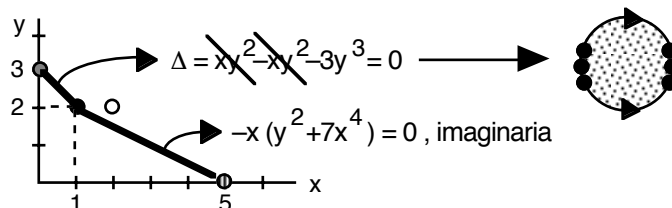
$$-2c_s x^{s+1} + bx^5 + \dots = [-2x + sc_s x^{s-1} + \dots] [c_s x^s + \dots] \rightarrow bx^5 + \dots = sc_s^2 x^{2s-1} + \dots \rightarrow s=3 \rightarrow c_3 = \pm \left[ \frac{b}{3} \right]^{1/2} \rightarrow y = -x^2 \pm \left[ \frac{b}{3} \right]^{1/2} x^3 + \dots, \text{ si } b > 0$$

La presencia de dos coeficientes distintos para  $x^3$  separa si  $b > 0$  dos variedades ya simples, con lo que está garantizada su existencia. Esto, en general, se probaría haciendo los cambios adecuados (aquí  $y = -x^2 + w$ ,  $w = x^3 v$  ó, de un tirón,  $y = -x^2 + x^3 v$ ) y el flujo sobre cada variedad, como siempre, se determinaría yendo a la ecuación en  $x'$ . Para este sistema **b)** (es exacto) podemos confirmar los resultados calculando explícitamente las órbitas:

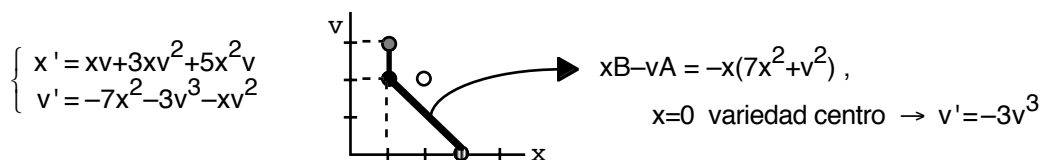
$$y = -x^2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{bx^6 + C}$$

**Ejemplo 4.** 
$$\begin{cases} x' = xy + 3y^2 + 5x^2y \\ y' = y^2 + 4xy^2 - 7x^4 \end{cases}$$

En los ejemplos anteriores bastaba analizar la estructura homogénea, localizar las variedades y orientarlas. En éste la poligonal no nos da toda la información necesaria ya que aparecen variedades que no están asociadas a ninguno de sus segmentos. Esta situación se puede dar, como veremos, si los dos términos asociados a un ángulo de la poligonal se anulan para el valor de  $s$  correspondiente a uno de los segmentos contiguos. Así ocurre en nuestro caso:

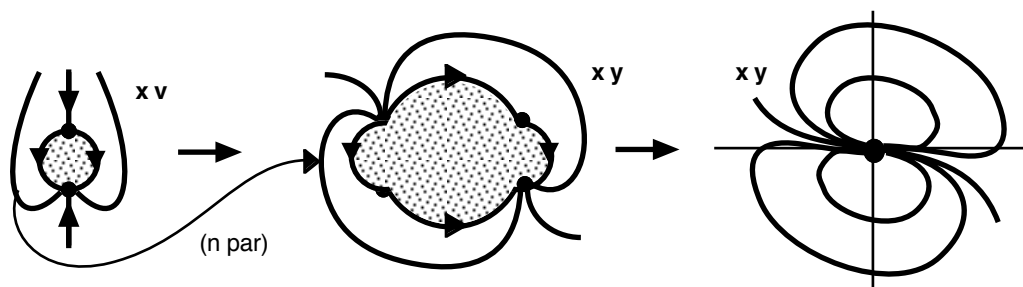


ya no hay suficiente información de lo que sucede cerca del  $y=0$  triple. Pero haciendo  $y=xv$  :



[Observemos que al realizar el blow-up los términos que daban el mismo punto del diagrama lo siguen haciendo, que el segmento de pendiente  $-1$  (asociado a los términos homogéneos) se ha convertido en uno vertical (asociado a  $x=0$ ) y que el de pendiente  $-1/2$  (asociado a ramas  $y=mx^2+\dots$ ) ha pasado a tener pendiente  $-1$  (asociado a  $v=mx+\dots$  como cabía esperar). Observemos también que los términos cúbicos iniciales, que dan un punto por encima de la poligonal, no influyen en la estructura del origen].

Queda analizado el sistema en  $xv$  y de él podemos deducir la estructura del inicial:

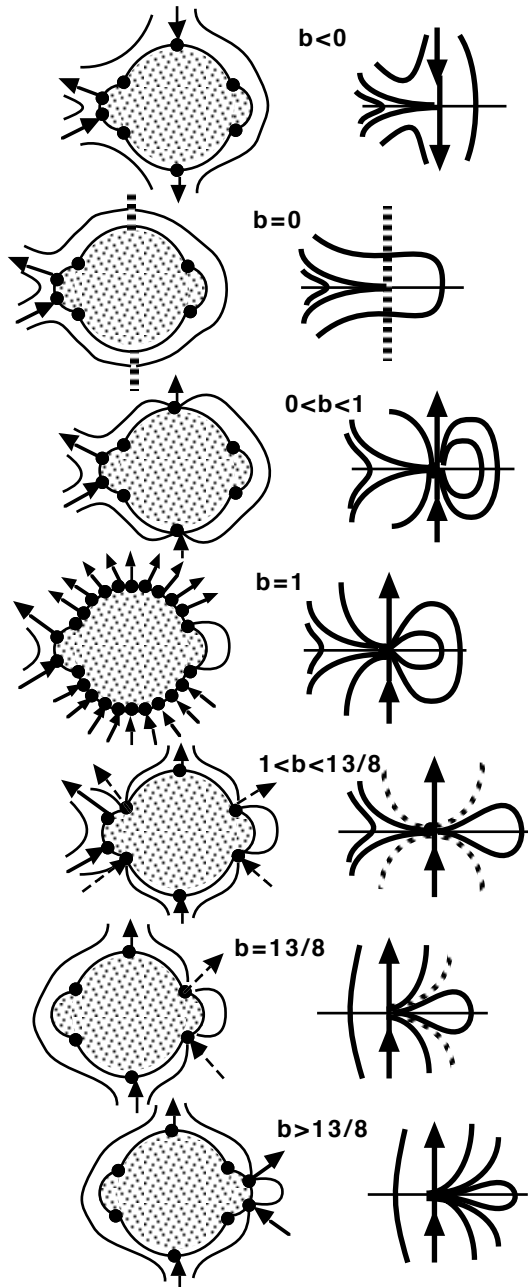


Como veremos en la sección siguiente, en estos casos problemáticos podremos ahorrarnos también la realización del blow-up, aunque necesitaremos precisar el signo de algún polinomio más que el  $\Delta$  de la aproximación homogénea: la orientación de los dos semicírculos pequeños del segundo dibujo la podemos fijar simplemente a partir del signo de  $-x(y^2 + 7x^4)$ .

**Ejemplo 5.**  $\begin{cases} x' = xy^7 \\ y' = by^8 - x^{13} \end{cases}$

$\Delta = (b-1)xy^8 \rightarrow x=0 \rightarrow y' = by^8$   
 $x \left[ \left(b - \frac{13}{8}\right)y^8 - x^{13} \right] \rightarrow y' = \frac{13}{8}y^8 + \dots$

Como veremos, bastará esquematizar el signo de  $\Delta$  (es decir, de  $(b-1)x$ ) y el de  $x[\dots]$  (cerca del eje  $x$  lo da  $-x^{14}$ ) y las variedades dadas por la poligonal con su flujo para analizar el punto:



Mientras no demostremos los teoremas de 5.2, para justificar estos esquemas habría que hacer varios blow-ups (veremos que 5) para tener un punto 'poco degenerado' en el origen, y reconstruir entonces las órbitas del sistema inicial. Pero podemos hallar las órbitas (es fácil ver que todo sistema cuyos términos se sitúan sobre un segmento de la poligonal es resoluble (y además es de Bernouilli)):

$$y^8 = Cx^{8b} + \frac{8}{8b-13} x^{13}, \text{ si } b \neq 13/8$$

$$y^8 = x^{8b} [C - 8 \ln|x|], \text{ si } b = 13/8$$

Como se observa, para  $b \notin [1, 13/2]$ , todas las variedades horizontales que llegan al origen vienen dadas por la poligonal. Además, los cambios de orientación en la circunferencia ampliada se producen sólo en los puntos asociados a dichas variedades. Bastaría, por tanto, orientar simplemente la circunferencia inicial [eso bastó en los ejemplos 1, 2 y 3, que no tenían dos puntos con el mismo signo asociados a un ángulo de la poligonal].

Esto no sucede si  $b \in (1, 13/8)$ : a un punto de 'empalme' llegan variedades que no son ni  $O(x)$  ni  $O(|x|^{13/8})$ , si los signos de  $\Delta$  y  $x[\dots]$  son diferentes a cada lado de dicho punto. De 5.2 se deducirá que si  $b \in (1, 13/8)$  estos puntos de empalme serán siempre nodos (y bastará también el signo de  $\Delta$ ). Sólo habrá que mirar  $x[\dots]$  para ver qué tipo de puntos simples son los de empalme cuando 'se vayan' ángulos de la poligonal ( $b=1$  ó  $13/8$ ).

[De hecho, para  $b=1$ , en que se anula todo un segmento de la poligonal, las cosas pueden ser más complicadas y habrá que esperar a 5.3 para saber como analizarlos].

### 5.2. Resultados generales.

Volvamos al sistema general:

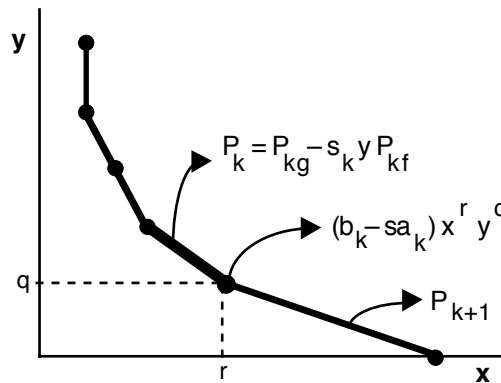
$$[S] \quad \begin{cases} x' = f(x,y) = A(x,y) + A^p(x,y) + \dots \\ y' = g(x,y) = B(x,y) + B^p(x,y) + \dots \end{cases}$$

Consideremos la poligonal de Newton de la curva:

$$H_s(x,y) \equiv xg(x,y) - syf(x,y) = 0$$

Fijándonos en el k-simo segmento de la poligonal anterior (de pendiente  $-1/s_k$ ), llamamos:

$$P_k(x,y) \equiv xP_{kg}(x,y) - s_k y P_{kf}(x,y) = 0$$



a los términos de  $H_{s_k}(x,y)$  asociados a cualquiera de los puntos situados sobre ese segmento (que son aquellos que dan ramas de  $H_{s_k}=0$  de la forma  $y = m_k x^{s_k} + \dots$ ), siendo, respectivamente,  $P_{kg}$  y  $P_{kf}$  los términos que provienen de las funciones  $g$  y  $f$ . Sea  $(b_k - sa_k)x^r y^q$  el término de  $H_s$  perteneciente a los dos segmentos consecutivos de pendientes  $-1/s_k$  y  $-1/s_{k+1}$ , donde  $b_k x^{r-1} y^q$  es un término de  $g$  y  $a_k x^r y^{q-1}$  es un término de  $f$ . Suponemos en esta sección que  $P_k$  **no se anula idénticamente para ningún**  $k$ .

Supongamos que  $s_k = \omega/\beta$ . Que  $P_k$  esté asociado al segmento de pendiente  $-1/s_k$  significa que al sustituir  $y$  por  $m x^{s_k}$  en  $H_{s_k}$  los términos no englobados en el  $P_k$  son de orden mayor:

$$H_{s_k}(x, m x^{\omega/\beta}) = P_k(x, m x^{\omega/\beta}) + \dots = P_k(1, m) x^{\alpha/\beta} + o(x^{\alpha/\beta})$$

Los primeros términos de las ramas de  $H_{s_k}=0$  de la forma  $y = m_{ik} x^{s_k}$ ,  $x \geq 0$ , ó  $y = m_{jk} [-x]^{s_k}$ ,  $x \leq 0$ , vendrán dados por las raíces de  $P_k(x,y)=0$ . El primer teorema precisa cuándo existen variedades de  $[S]$  de esa misma forma local:

#### Teorema 5.1

Si  $y = m_{ik} x^{s_k}$ ,  $x \geq 0$ , es raíz real simple de  $P_k(x,y)=0$  o múltiple con  $P_{kf}(1, m_{ik}) \neq 0$  entonces existe una variedad de  $[S]$  de la forma  $y = m_{ik} x^{s_k} + o(x^{s_k})$ ,  $x \geq 0$ . Análogo resultado se tiene para las raíces  $y = m_{jk} [-x]^{s_k}$ ,  $x \leq 0$ .

[Observemos que, en particular, para  $s_k = 1 = s_0$ , los polinomios correspondientes son los conocidos  $P_0 = xB - yA = \Delta$  y  $P_{0f} = A$ , que las variedades (válidas para  $x \geq 0$  y  $x \leq 0$ ) son los vectores propios del teorema 3.2 y que los  $P_{kf}(1, m_{ik})$  ocupan el papel de los  $\lambda$ . Observemos también que el segmento asociado a  $\Delta$  podría reducirse a un punto].

Demostremos el teorema. Haciendo  $y = x^{S_k} v$ ,  $x \geq 0$ , el sistema [S] se convierte en

$$\begin{cases} x' = f(x, x^{S_k} v) \\ y' = x^{-S_k} g(x, x^{S_k} v) - s_k x^{-1} v f(x, x^{S_k} v) = x^{-S_k-1} H_{S_k}(x, x^{S_k} v) \end{cases}$$

que tiene las mismas órbitas en  $x > 0$  que

$$\begin{cases} x' = x^{-S_k+1-\alpha/\beta} f(x, x^{S_k} v) = x P_{kf}(1, v) + O(x^{1+1/\beta}) \\ y' = x^{-\alpha/\beta} H_{S_k}(x, x^{S_k} v) = P_k(1, v) + O(x^{1/\beta}) \end{cases}$$

Haciendo  $x^\beta = u$  (o bien tras hacer directamente en [S]  $x = u^\beta$ ,  $y = u^\omega v$ ) obtenemos el sistema analítico:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{\beta} u P_{kf}(1, v) + O(u^2) \\ v' = P_{kf}(1, v) + O(u) \end{cases}$$

en el que el eje  $u=0$  es una órbita o unión de ellas. Los puntos críticos en dicho eje se calculan hallando los ceros de  $P_k(1, v)$ , y por tanto  $(0, m_{ik})$  es uno de ellos, con aproximación lineal

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} P_{kf}(1, m_{ik}) & 0 \\ E & P_k'(1, m_{ik}) \end{pmatrix}$$

Si  $m_{ik}$  es raíz simple de  $P_k(1, m)=0$ , o si no siéndolo  $P_{kf}(1, m_{ik}) \neq 0$ , el punto  $(0, m_{ik})$  es simple (será nodo, silla o silla-nodo) y existe al menos una variedad no vertical que llega al punto de la forma  $v = m_{ik} + o(1)$ , que, tras deshacer los cambios, nos proporciona una variedad  $y = m_{ik} x^{S_k} + o(x^{S_k})$  que llega al origen. La estructura de las órbitas cerca de  $(0, m_{ik})$  está determinada por el flujo sobre el eje  $v$  y por  $P_{kf}(1, m_{ik})$  si no se anula (si es cero y  $m_{ik}$  es simple la variedad no vertical es centro y el flujo sobre ella se determina calculando términos de su desarrollo).

Para  $x \leq 0$ , cambiando  $x$  por  $-x$  y continuando igual obtendríamos los resultados análogos para las variedades de [S] que llegan al origen desde  $x < 0$ .

Generalizamos ahora el resto del teorema 3.2 para poder precisar la estructura del origen aun en casos en que  $y=0$  ó  $x=0$  sean raíces múltiples con  $\lambda=0$ . Los ejemplos de la sección anterior muestran que surgen complicaciones que no se daban en el caso homogéneo: podían aparecer variedades que llegasen al origen que no fuesen del tipo de las del teorema anterior, no era tan fácil ver lo que ocurría entre dos variedades consecutivas, ... También vimos que se podría concluir el análisis a base de realizar blow-ups (método clásico para estos puntos). Pero lo fundamental de los siguientes teoremas es que no harán necesario, casi nunca, realizarlos. Comenzamos con un teorema menos fino (el 5.2) para luego, y a la vista de su demostración, dar el teorema 5.3 en el que se limitarán al máximo los cálculos necesarios para precisar la estructura del origen de estos puntos más degenerados.

**Teorema 5.2**

Supongamos que  $P_k(x,y) \neq 0$  y que todas las raíces reales  $y=m_{ik}x^{s_k}$ ,  $y=m_{jk}[-x]^{s_k}$  de  $P_k(x,y)=0$ , con  $m_{ik}, m_{jk} \neq 0$  son simples o con  $P_{kf} \neq 0$ .

Entonces la estructura local de  $\mathbf{0}$  queda determinada por:

- el signo de los  $P_k$
- el flujo sobre cada variedad [dado por  $x' = P_{kf}(x, m_{ik}x^{s_k})$  ó  $x' = P_{kf}(x, m_{jk}[-x]^{s_k})$  o por más términos de su desarrollo si se anula  $P_{kf}$ ]

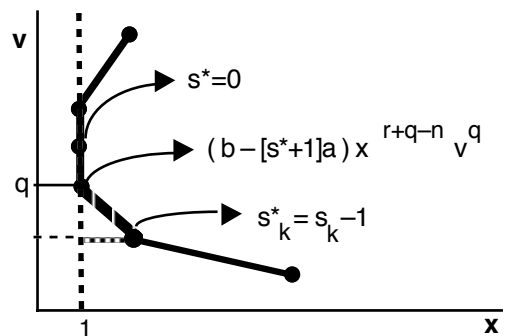
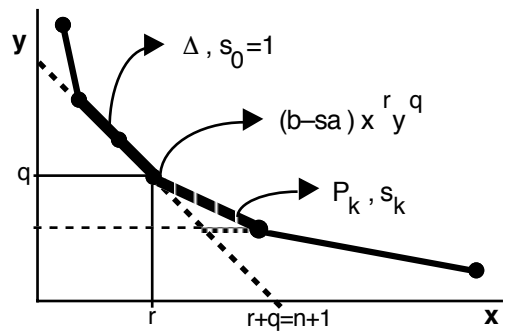
Para demostrar el teorema habrá que realizar [S] diferentes cambios del tipo  $y=xv$  (ó  $x=uy$ ). Ya vimos que tras hacer  $y=xv$  y dividir por  $x^{n-1}$  se llega al sistema:

$$\begin{cases} x' = x^{1-n} f(x,xv) & = xA(1,v) + o(x) \\ v' = x^{-n} [g(x,xv)-vf(x,xv)] & = [B(1,v)-vA(1,v)] + x^{p-n}[B^p(1,v)-vA^p(1,v)] + o(x^{p-n}) \end{cases}$$

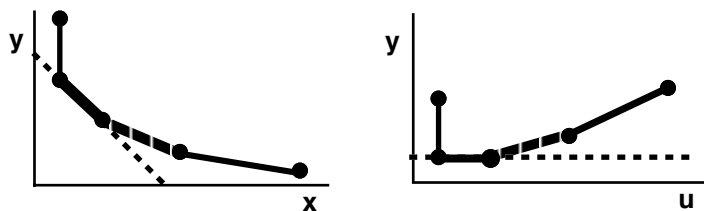
Observemos además que dos términos  $ax^r y^{q-1}$  (de  $f$ ) y  $bx^{r-1} y^q$  (de  $g$ ) que proporcionan un mismo punto  $(b-sa)x^r y^q$  del diagrama de Newton asociado a [S] dan lugar tras el blow-up a otro par de términos:  $ax^{r+q-n} v^{q-1}$  y  $(b-a)x^{r+q-n-1} v^q$  que también van al mismo punto del segundo diagrama:  $[b-(s^*+1)a]x^{r+q-n} v^q$ , situado a la misma altura que el inicial. La poligonal se transforma en otra poligonal convexa en la que los segmentos de pendiente  $-1/s_k$  han pasado a ser de pendiente

$$-\frac{1}{s^*_k} = -\frac{1}{s_k-1}$$

(es decir, como era previsible ya que  $y=xv$ , las variedades  $y=mx^{s_k} + \dots$  dan lugar a otras de la forma  $v=m^*x^{s_k-1} + \dots$ ). En particular, los términos homogéneos de grado  $n$  están en el diagrama  $xv$  sobre un segmento vertical de  $x=1$ .



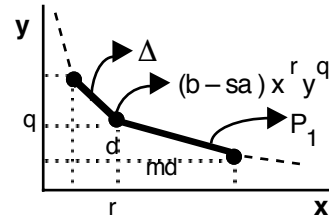
(Cambiando papeles se analiza igual el cambio  $x=uy$ : ahora se mantiene la primera coordenada y los términos homogéneos se colocan en horizontal)



En la larga demostración del teorema consideraremos varias etapas, empezando por la más sencilla:

a) Supongamos primero que el primer segmento después del de pendiente  $-1$  es de pendiente  $-1/m$ , con  $m$  entero. Sean  $ax^r y^{q-1}$ ,  $bx^{r-1} y^q$  los términos que proporcionan el punto común a ambos segmentos, es decir:

$$\Delta = \dots + (b-a) x^r y^q \quad (r+q=n+1) \quad , \quad P_1(x,y) = (b-ma) x^r y^q + \dots$$

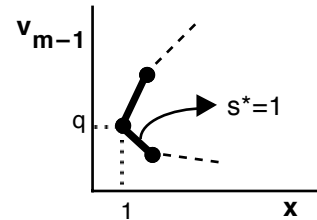


ordenados en potencias decrecientes de  $y$ . Realicemos en  $[S]$   $m-1$  blow-ups sucesivos  $y=xv_1, \dots, v_{m-2}=xv_{m-1}$  (entonces  $y=x^j v_j, j=1, \dots, m-1$ ). Se obtienen los sistemas

$$[S_j] \quad \begin{cases} x' = axv_j^{q-1} + \dots \\ v_j' = (b-ja)v_j^q + \dots \end{cases} \quad \text{para los que} \quad \Delta_j \equiv xB - v_j A = [b-(j+1)a]xv_j^q, \quad j=1, \dots, m-2$$

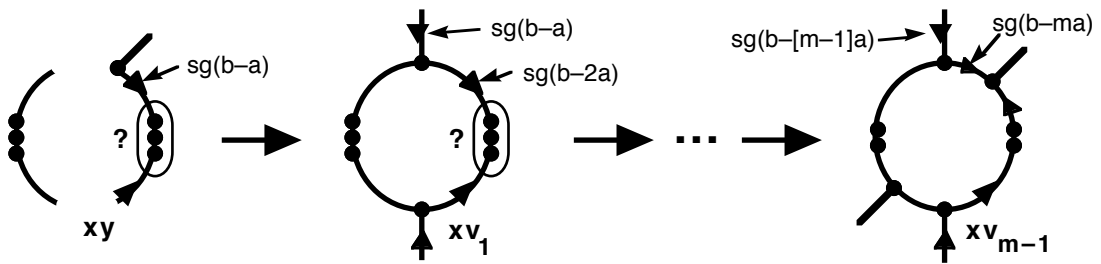
con lo que  $x=0$  es variedad simple en todos ellos ( si  $b \neq (j+1)a$  ) y el flujo sobre ella viene dado por  $(b-ja)v_j^q$  ( si  $b \neq ja$  ) [seguimos llamando  $A$  y  $B$  a los homogéneos de menor orden, que no son los de antes].

Para  $j=m-1$  hay un segmento entero de pendiente  $-1$  para el que  $\Delta_{m-1} = (b-ma)xv_{m-1}^q + \dots$ . Las raíces simples  $v_{m-1} = m_j x$  ( o con  $A(1, m_j) \neq 0$  ) de este polinomio nos dan las variedades  $y = m_j x^m + \dots$  del teorema 5.1. Si aplicando el teorema 3.2 a  $[S_{m-1}]$  la estructura de  $(x, v_{m-1}) = (0, 0)$  queda determinada, también lo estará la estructura de las órbitas de  $[S]$  cerca de  $y=0$ , como desarrollaremos a continuación. Si

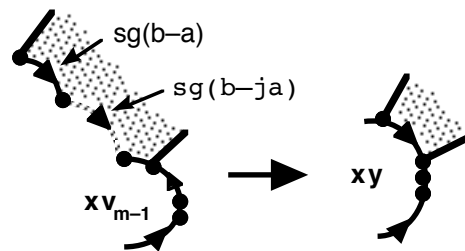


$v_{m-1}=0$  sigue siendo múltiple (de menor multiplicidad que  $y=0$  en  $[S]$ ) con  $\lambda=0$  habría que repetir el proceso hasta terminar el análisis.

i) Si  $b/a \notin [1, m]$  ( o si  $a=0$  ) todos los números  $(b-a), \dots, (b-ma)$  tienen el mismo signo:

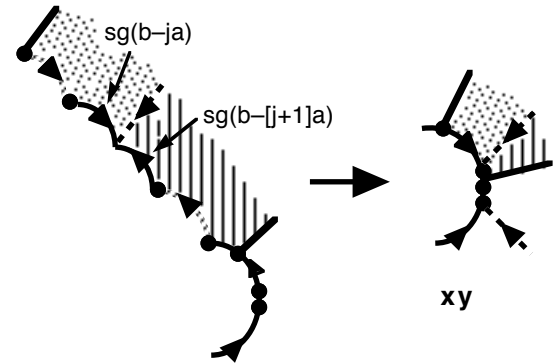


y por tanto, todos los puntos con  $x=0$  son sillas y las posibles variedades que lleguen al origen con pendiente cero son al menos  $O(x^m)$ . Bastará orientar estas  $y = m_j x^m + \dots$  y llevarlas a la circunferencia inicial (el flujo vertical entre ellas se deduce del de  $\Delta$ ; será distinto arriba y abajo si son simples, si múltiples, dependerá de la paridad).



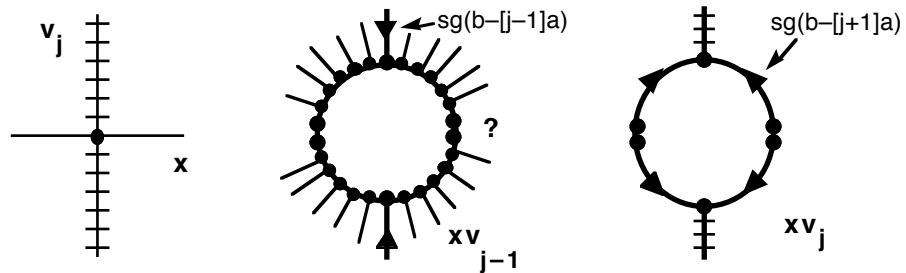


ii) Si  $b/a \in (j, j+1)$  con  $1 \leq j \leq m-1$ , el sistema  $[S_j]$  poseerá un nodo asociado a  $x=0$  (y para los demás  $j$  una silla). Hay variedades  $y=O(x^j)$  no asociadas a ningún segmento de la poligonal [haciendo  $y=x^{b/a}v$  se puede ver que son del tipo  $y=O(x^{b/a})$ ]. Se vuelve a tener toda la información con sólo el signo de  $\Delta$  y las variedades  $y=O(x^m)$  orientadas si dibujamos además estas variedades asociadas a nodos en los cuatro cuadrantes (basta invertir a partir de ellas los flujos verticales).



iii) Si  $b/a = j$ ,  $j=2, \dots, m-1$ , es  $\Delta_{j-1} = 0$  pero vemos que hay infinitas variedades  $y=O(x^j)$ :

$$y=x^j v_j \rightarrow \begin{cases} x' = axv_j^{q-1} + O(x^2) \\ v_j' = O(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = av_j^{q-1} + O(x) \\ v_j' = O(1) \end{cases}$$



los puntos de  $x=0$  (salvo el origen) no son críticos y las órbitas de este último sistema cortan dicho eje [ cada una de ellas es del tipo  $v_j=O(1)$  ]. Toda la información se puede plasmar sólo en la circunferencia, como en el caso anterior ( no olvidando las variedades  $O(x^j)$  orientadas según indica  $\Delta$  ).

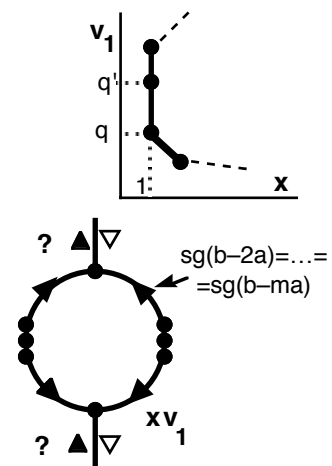
En los dos siguientes casos ('se va' un ángulo de la poligonal) no basta el signo de  $\Delta$  :

iv) Si  $b=a$  entonces:

$$\Delta = \dots + cx^{r'}y^{q'} + 0 \cdot x^r y^q \pm 0 \quad \text{con } r' < r, q' > q, r+q=r'+q'$$

$$\Delta_1 = (b-2a) xv_1^q + \dots$$

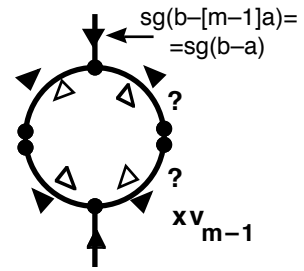
y  $x=0$  sigue siendo simple (silla, nodo o silla-nodo), pero ahora la orientación de dicho eje (que depende de  $c, r', q'$ ) no tiene relación con la de la circunferencia (que depende de  $b=a$  y  $q$ ). Es necesario también determinar el  $sg\Delta_1$  [=  $sg\Delta_{m-1}$ ]. Los demás puntos de empalme no tienen problema. Son puntos silla y no hay otras variedades hasta las  $y=O(x^m)$  que puedan llegar al origen.



v) Si  $\mathbf{b} = \mathbf{ma}$ , los puntos de empalme son sillas hasta el último:

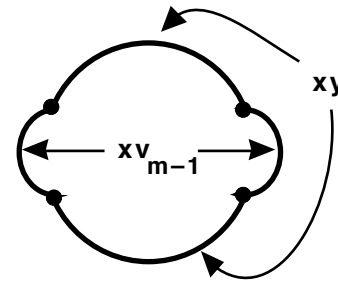
$$\begin{cases} x' = axv_{m-1}^{q-1} + \dots \\ v_{m-1}' = av_{m-1}^q + \dots \end{cases} \rightarrow \Delta_{m-1} = 0.xv_{m-1}^q + cx^{r''}v_{m-1}^{q''} + \dots$$

$$r'' > 1, q'' < q, q+1 = r'' + q'', P_1 \neq 0$$



$x=0$  es raíz múltiple, pero  $B(0,1) \neq 0$ , con lo que el punto sigue siendo simple y su estructura queda determinada por la orientación de  $x=0$  (que continúa la de  $\Delta$ ) y por  $c, r'', q''$ .

En estos dos últimos casos es necesario precisar el signo de  $\Delta_{m-1}$ , pero no el de los demás  $\Delta_j$ . Toda la información se puede esquematizar en la circunferencia inicial ampliada con dos semicircunferencias. Para trabajar en la de la izquierda habría que considerar en principio las paridades de las diferentes potencias, ya que puede haber cambios de cuadrantes y de orientación. Pero veamos que esto se puede suplir con el sencillo análisis del signo de  $P_1$ .



En vez de  $v_{m-1}$  consideremos  $v_m$  ( $v_{m-1} = xv_m$ ) que nos da los mismos datos más claramente. Haciendo el conocido cambio  $y = x^m v_m$  obtenemos:

$$\begin{cases} x' = f(x, x^m v_m) = ax^{r+(q-1)m} v_m^{q-1} + \dots \\ v_m' = x^{-m} g(x, x^m v_m) - mx^{-1} v_m f(x, x^m v_m) = [b-ma] + x^{r+(q-1)m-1} v_m^q + \dots \end{cases}$$

y dividiendo por  $x^{r+(q-1)m-1}$  se tiene:

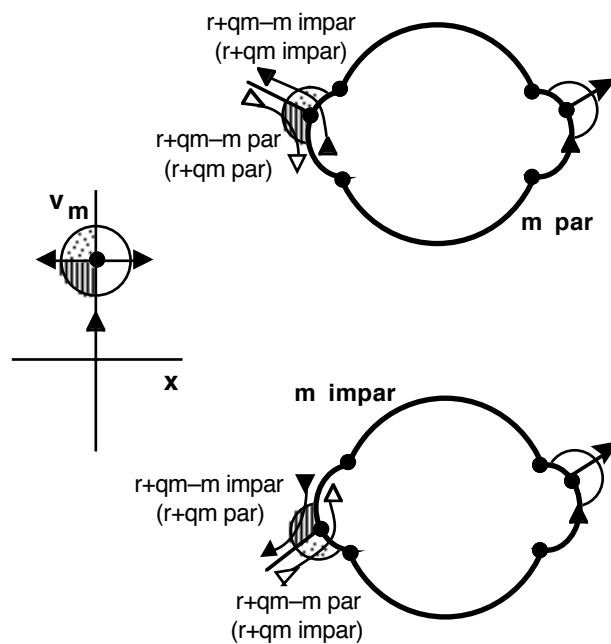
$$\begin{cases} x' = x P_{1f}(1, v_m) + O(x^2) \\ v_m' = P_1(1, v_m) + O(x) \end{cases}$$

Para volver a  $xy$  ( $y = x^m v_m$ ):

si  $m$  es par los cuadrantes se conservan; si  $m$  es impar hay cambio entre segundo y tercer cuadrantes. Si  $r+qm-m$  es impar [par] no [si] hay cambio de orientación en las variedades de la izquierda y en la semicircunferencia. Las raíces reales de  $P_1(x,y)=0$  nos dan las mismas variedades asociadas a los mismos puntos. El flujo sobre ella también coincide pues lo da:

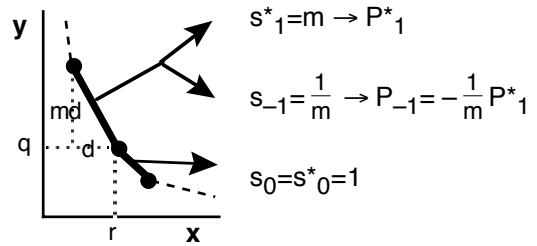
$$P_{1f}(x, m; x^m) = O(x^{r+m(q-1)})$$

Como  $P_1(x, cx^m) = P_1(1, c) x^{r+qm}$ , la orientación de la semicircunferencia izquierda depende de la misma forma que antes de la paridad de  $r+qm$ .



b) Si el segmento anterior al de pendiente  $-1$  es de pendiente  $-m$ , la discusión anterior es válida cambiando los papeles de  $x$  e  $y$ :

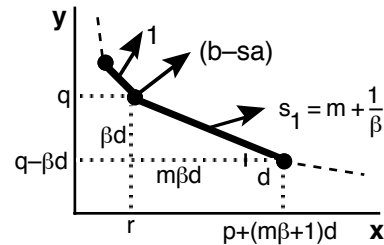
Hay variedades  $x=m_i y^m + \dots$  con  $P^*_1(m_i, 1)=0$ , llamando  $P^*_1(x, y)$  a aquellos términos de  $H^*_m(x, y) = yf - mxg$  que dan puntos sobre el segmento considerado; otras variedades, no dadas por la poligonal, pueden aparecer cuando  $a/b \in [1, m]$ ; en ocasiones habrá que considerar también el signo de  $P^*_1$ .



[ los cálculos anteriores son equivalentes a buscar variedades  $y = (\frac{x}{m_i})^{1/m} + \dots$  con  $P_{-1}(1, \frac{1}{m_i})=0$ , siendo  $P_{-1}(x, y)$  términos sobre un segmento de  $H_{1/m}(x, y) = xg - \frac{1}{m} yf$ , teniendo cuidado si  $\frac{b}{a} \in [\frac{1}{m}, 1]$  y considerando a veces el signo de  $P_{-1}$ ].

c) Sea  $s_1 = m + \frac{1}{\beta}$ ,  $m, \beta$  enteros,  $m \geq 1, \beta \geq 2$ .

$m$  blow-ups verticales  $y = xv_1, \dots, v_{m-1} = xv_m$  ( $y = x^m v_m$ ), transforman el segmento en uno de pendiente  $-\beta$ . Las orientaciones de las diferentes variedades  $x=0$  de los sistemas en  $xv_j$  vienen dadas por  $b - ja$ .



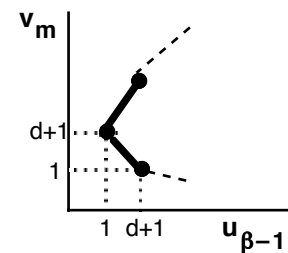
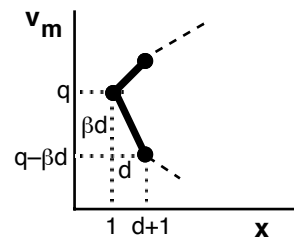
Para 
$$\begin{cases} x' = axv_m^{q-1} + \dots \\ v_m' = (b-ma)v_m^q + \dots \end{cases}$$

$x=0$  pasa a ser de multiplicidad igual o mayor que  $\beta d$  (pero menor o igual que  $q$ ). Hacemos entonces  $x = v_m u_1, \dots, v_{\beta-2} = v_m u_{\beta-1}$  ( $x = v_m^{\beta-1} u_{\beta-1}$ ) para llegar a

$$\begin{cases} u_{\beta-1}' = [a - (\beta-1)(b-ma)]u_{\beta-1}v_m^d + \dots \\ v_m' = (b-ma)v_m^{d+1} + \dots \end{cases}$$

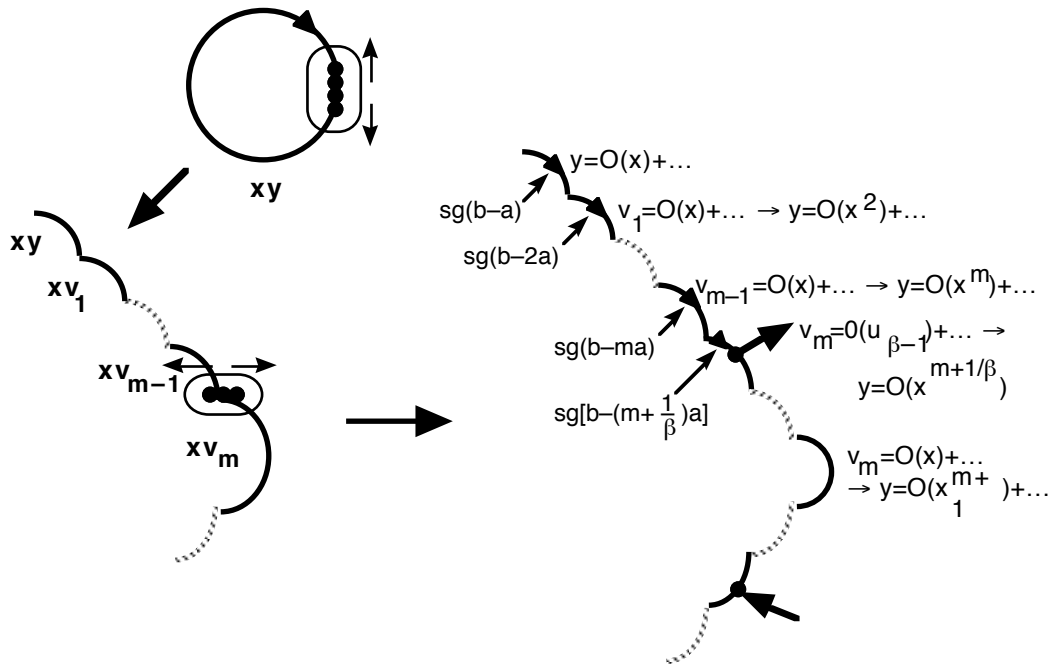
con  $u_{\beta-1}B - v_m A = \beta[b - (m+1/\beta)a]u_{\beta-1}v_m^d + \dots$ , cuyas raíces reales  $v_m = m_i u_{\beta-1} + \dots$  nos proporcionan las ramas de  $[S]$  de la forma

$$y^\beta = m_i x^{m\beta+1} + \dots$$



Hagamos ahora un análisis de los puntos de empalme similar al del caso a).

Si se tiene  $b/a \notin [1, m+1/\beta]$ ,  $sg(b-a) = \dots = sg(b-ma) = sg[b - (m+1/\beta)a]$ , esquematizando los blow-ups anteriores tenemos:



obtenemos que son sillas todos los puntos de empalme entre las  $xv_j$  y entre  $xv_{m-1}$  y  $uv_m$ .

Si  $b/a \in (1, m+1/\beta)$  además aparecen otras variedades  $y = O(x^{b/a})$  asociadas a nodos.

En ambos casos con el signo de  $\Delta$  y las variedades orientadas nos basta.

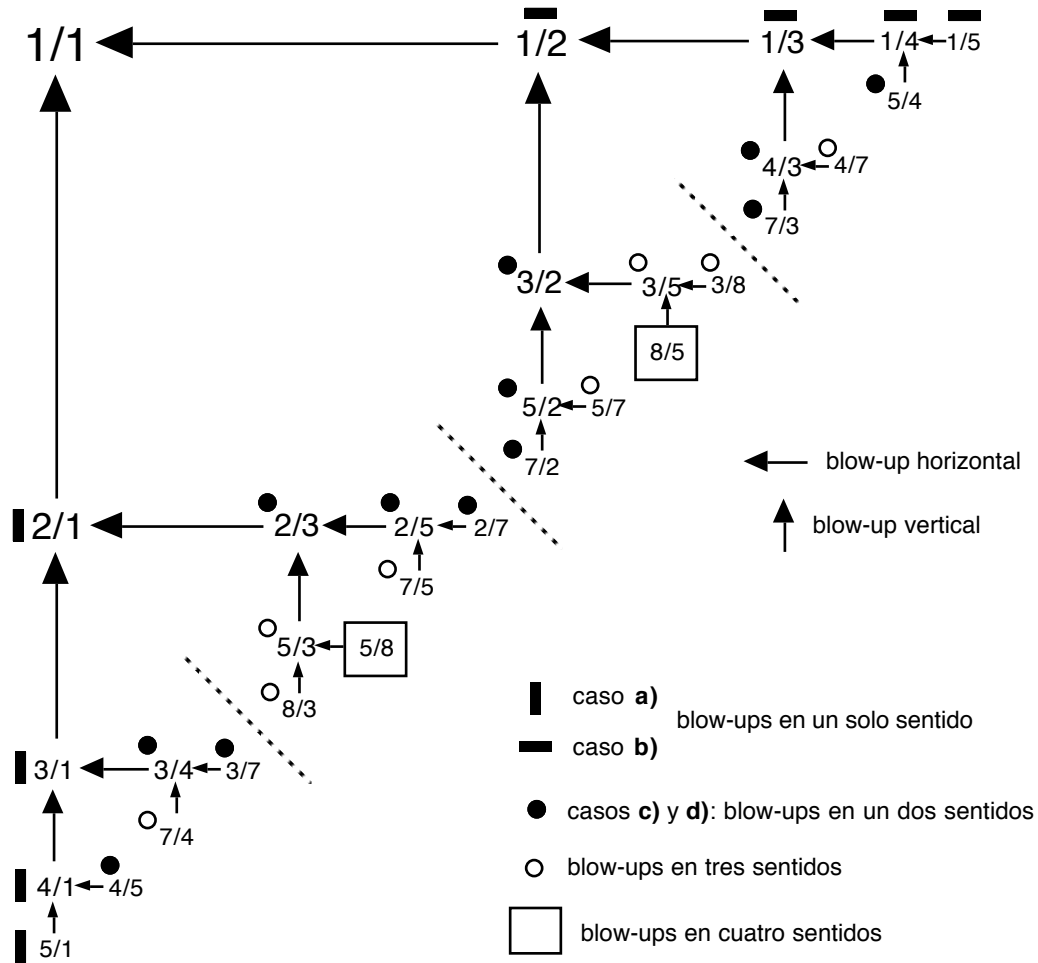
Pero si  $b = a$  ó  $b = (m+1/\beta)a$ , es necesario conocer el signo de  $P_1$ .

Todo se podría justificar con detalle como en el caso **a**).

**d)** Si  $s_{-1} = \frac{1}{m+1/\beta}$ , es el caso **c**) si cambiamos los papeles de  $x$  e  $y$ .

**e)** Sea  $s_1 = \frac{\omega}{\beta}$ ,  $\omega > \beta$  (ó  $s_{-1} = \frac{\omega}{\beta}$  con  $\omega < \beta$ ).

Para los casos **a)** y **b)** bastaba, respectivamente, un blow-up vertical de la forma  $y=x^j v_j$  (o bien  $j$  blow-ups elementales del tipo  $y=xv$ ) o uno horizontal  $x=y^k u_k$  para convertir el segmento inicial en otro de pendiente  $-1$ . En los casos **c)** y **d)** había que hacer primero un blow-up en un sentido (o varios elementales) y luego otro en el opuesto. Está claro que, en general, para conducir un segmento de pendiente  $-\beta/\omega$  a otro de pendiente  $-1$  bastará un número finito de blow-ups horizontales o verticales, realizados en el orden adecuado. Comencemos precisando los valores de  $\omega/\beta$  que exigen un número menor del blow-ups elementales para conseguirlo. Así, basta uno vertical si  $s_1=2$ ; uno horizontal si  $s_1=1/2$ ; dos verticales si  $s_1=3$ , ... Prosiguiendo el estudio se acaba construyendo el siguiente esquema en el que se indican los blow-ups elementales necesarios para todos los  $\omega/\beta$  que exigen un número de ellos menor o igual que 4:



Los que exigirían 5 blow-ups elementales (escritos de abajo a arriba) son los siguientes:

$$\frac{6}{1}, \frac{5}{6}, \frac{9}{5}, \frac{4}{9}, \frac{11}{4}, \frac{7}{11}, \frac{10}{7}, \frac{3}{10}, \frac{11}{3}, \frac{8}{11}, \frac{13}{8}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}, \frac{7}{12}, \frac{9}{7}, \frac{2}{9},$$

$$\frac{9}{2}, \frac{7}{9}, \frac{12}{7}, \frac{5}{12}, \frac{13}{5}, \frac{8}{13}, \frac{11}{8}, \frac{3}{11}, \frac{10}{3}, \frac{7}{10}, \frac{11}{7}, \frac{4}{11}, \frac{9}{4}, \frac{5}{9}, \frac{6}{5}, \frac{1}{6}.$$

Entre ellos, bastan blow-ups (no elementales) en un sentido para:  $\frac{6}{1}, \frac{1}{6}$ .

En dos sentidos para:  $\frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{3}{10}, \frac{2}{9}, \frac{9}{2}, \frac{10}{3}, \frac{9}{4}, \frac{6}{5}$ .

En tres:  $\frac{9}{5}, \frac{11}{4}, \frac{10}{7}, \frac{11}{3}, \frac{12}{5}, \frac{9}{7}, \frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{3}{11}, \frac{7}{10}, \frac{4}{11}, \frac{5}{9}$ .

En cuatro:  $\frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{5}{13}, \frac{7}{12}, \frac{12}{7}, \frac{13}{5}, \frac{11}{8}, \frac{11}{7}$ .

En cinco:  $\frac{13}{8}, \frac{8}{13}$ .

A cada pareja de nuevas variables  $u_i, v_j$  corresponde una circunferencia (orientada por  $u_i B - v_j A$ ) y las posibles variedades  $v_j = O(u_i) + \dots$  nos darían, deshaciendo los cambios, otras  $y = O(x^{f_{ij}}) + \dots$  en las variables originales. Como sucedía en los casos **c)** y **d)** algunas de estas  $r_{ij}$  son mayores y otras menores que  $\omega/\beta$ .

Si expresamos  $\omega/\beta$  como una "fracción continua" del tipo presentado en el dibujo, se puede comprobar que el número de blow-ups necesario para llegar al segmento de pendiente  $-1$  es igual al número de signos  $+$  que aparecen; que el número de "pisos" de la fracción da el número de sentidos; que los exponentes asociados a los sucesivos segmentos de la poligonal en los que se transforma el segmento inicial se obtienen eliminando unos desde la izquierda hasta llegar a 1; que todos los  $r_{ij}$  aparecen eliminando unos desde la derecha.

$$\frac{\omega}{\beta} = 1 + \dots + 1 + \frac{1}{1 + \dots + 1 + \frac{1}{\dots + 1 + \frac{1}{1 + \dots + 1}}}$$

Por ejemplo, escribamos así  $\frac{10}{7}$ . Se tiene que:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}$$

como hay 5 signos  $+$  son necesarios 5 blow-ups, que serán en tres sentidos por tener tres pisos la fracción; los diferentes exponentes asociados a los sucesivos segmentos son:

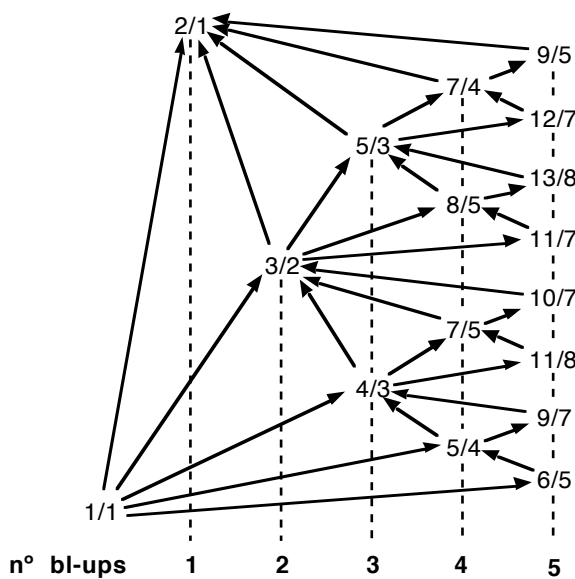
$$\frac{10}{7} ; \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+1+1}} = \frac{3}{7} ; \frac{1}{1+\frac{1}{1+1+1}} = \frac{3}{4} ; \frac{1}{\frac{1}{1+1+1}} = \frac{3}{1} ; \frac{1}{\frac{1}{1+1}} = \frac{2}{1} ; \frac{1}{1}$$

los correspondientes  $r_{ij}$ :

$$\frac{10}{7} ; 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+1}} = \frac{7}{5} ; 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1}} = \frac{4}{3} ; 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} ; 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} ; \frac{1}{1}$$

Ordenando estos  $r_{ij}$ :  $\frac{1}{1} < \frac{4}{3} < \frac{7}{5} < \frac{10}{7} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}$ , se puede observar que cada una de las fracciones centrales se puede obtener a partir de las dos contiguas:

$$\frac{4}{3} = \frac{1+7}{1+5} ; \frac{7}{5} = \frac{4+10}{3+7} ; \frac{10}{7} = \frac{7+3}{5+2} ; \frac{3}{2} = \frac{10+2}{7+1} \quad \left[ \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{b_{n-1}+b_{n+1}} \right]$$



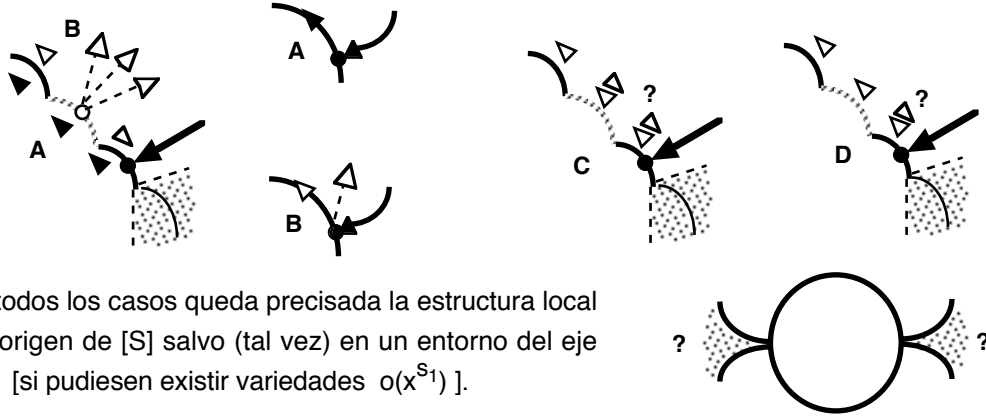
El esquema de la izquierda nos indica para todas las  $\omega/\beta$  ( $\in [1,2]$  por brevedad) con número de blow-ups menor o igual que 5 todos los  $r_{ij}$  que aparecen, ordenados en orden creciente (dado un  $\omega/\beta$  se siguen las flechas de pendiente positiva desde  $1/1$  hasta llegar a él; luego las de pendiente negativa hasta  $2/1$ ; las fracciones que se han ido encontrando nos dan los  $r_{ij}$  ordenados).

Con mayores complicaciones técnicas se podría comprobar que la situación para este caso **e**) es similar a los anteriores:

Si  $b/a \notin [1, s_1]$  (**A**) todos los puntos de empalme hasta las variedades  $O(x^{s_1})$  son sillars, pues el signo de  $b-r_{ij}a$ ,  $r_{ij} \leq s_1$ , coincide con el de  $b-a$ .

Si  $b/a \in (1, s_1)$  (**B**) existen las infinitas variedades  $O(x^{b/a})$  (en los cuatro cuadrantes).

Si  $b=a$  (**C**) ó  $b=s_1 a$  (**D**) debemos esquematizar también el signo de  $P_1$ .



En todos los casos queda precisada la estructura local del origen de  $[S]$  salvo (tal vez) en un entorno del eje  $y=0$  [si pudiesen existir variedades  $o(x^{s_1})$ ].

[Observemos que de forma mucho más rápida llegaríamos a precisar la estructura de las órbitas de la forma  $y=O(x^{\omega/\beta})$  realizando, en vez de los sucesivos blow-ups, directamente el cambio  $x=u^\beta$ ,  $y=u^\omega v$  del teorema 5.1, pero entonces no tendríamos información sobre posibles variedades  $O(x^z)$  con  $1 < z < \omega/\beta$ . Para completar esta información podríamos considerar los sistemas que se obtienen haciendo  $y=x^z v_z$  (ó  $y=[-x]^z v_z$ ) para todo  $1 < z < \omega/\beta$ :

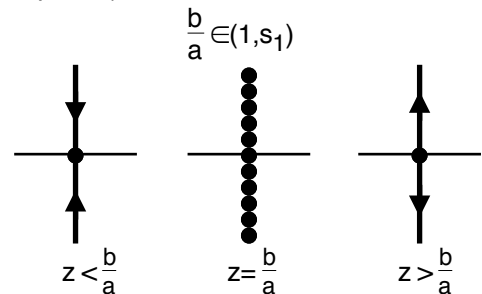
$$\begin{cases} x' = f(x, x^z v_z) \\ v_z' = x^{-z} g(x, x^z v_z) - z x^{-1} v_z f(x, x^z v_z) \end{cases}$$

sistemas que, en general, tendrán exponentes irracionales. Dividiendo por la menor potencia de  $x$  ambos segundos miembros (nos la proporcionan los términos derivados de los de coeficientes  $a$  y  $b$ ) se obtiene un sistema (nada regular) para el que  $x=0$  es órbita (o unión de ellas). Si  $b/a \notin [1, s_1]$ , no hay puntos críticos (salvo el origen) en dicho eje, que está orientado para todo  $z$  de la misma forma (e igual a la orientación dada por  $\Delta$ ).

Si  $b/a \in (1, s_1)$ , para  $z < b/a$  la situación es la anterior, pero para  $z = b/a$ ,  $x=0$  pasa a ser un conjunto de puntos críticos, que desaparecen cuando  $z > b/a$  habiendo cambiado la orientación del eje.

Si  $b=a$ , todos los ejes  $x=0$  tienen la misma orientación, pero es independiente de la de  $y=xv$ .

Si  $b=s_1 a$ , las orientaciones son iguales para todo  $z < b/a$ , pero no se continúan con las de  $y=x^{s_1} v_{s_1}$ .



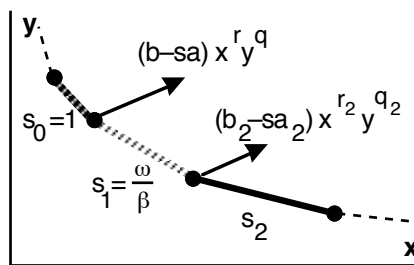
Precisando algo las ideas anteriores se podría dar tal vez una demostración más rápida de lo visto hasta ahora].

f) Si no hemos terminado el análisis con  $P_1$  [ ó  $P_{-1}$  ], es decir, si  $y=0$  es raíz múltiple de

$$P_1(x,y) = (b-s_1a)x^r y^q + \dots + (b_2-s_1a_2)x^{r_2} y^{q_2}$$

y  $P_{1f}(x,0)=0$  (debe ser  $q_2 \geq 2$ ). Entonces

$$P_2(x,y) = (b_2-s_2a_2)x^{r_2} y^{q_2} + \dots \text{ con } q_2 \geq 2.$$



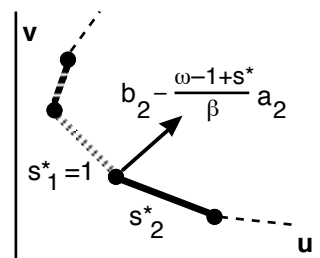
Tras hacer  $x=u^\beta, y=u^{\omega-1}v$  el sistema [S] se convierte en otro [S\*] cuya poligonal está formada por segmentos asociados ahora, como es fácil comprobar, a  $s^*_k = \beta s_k - \omega + 1$ .

En particular, el segmento de  $\Delta$  pasa a tener pendiente positiva o ser vertical y el asociado a  $P_1$  se ha convertido en uno de pendiente  $-1$  asociado al polinomio homogéneo:

$$\Delta^* \equiv uB - vA = u [(b-s_1a)v^q + \dots + (b_2-s_1a_2)u^{q-q_2} v^{q_2}]$$

cuyas raíces reales  $v=m_{i1}u$  nos dan variedades  $y=O(x^{s_1})$ .

Al sistema [S\*] le podemos aplicar lo visto en apartados anteriores. Los términos que dan lugar al nuevo ángulo son:



$$[S^*] \begin{cases} u' = \dots + \frac{1}{\beta} a_2 u^{q-q_2+1} v^{q_2-1} + \dots \\ v' = \dots + (b_2 - \frac{\omega-1}{\beta} a_2) u^{q-q_2} v^{q_2} + \dots \end{cases}$$

Ahora el papel de  $P_1$  lo cumple el polinomio asociado a  $s^*_2 = \beta s_2 - \omega + 1$  que es:

$$P^*_2(u,v) = (b_2-s_2a_2) u^{q-q_2+1} v^{q_2} + \dots$$

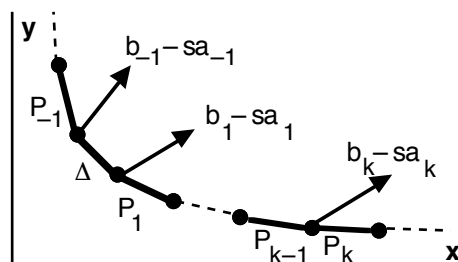
Las raíces reales simples de este polinomio nos dan variedades  $y=O(x^{s_2})+\dots$  de [S]. La orientación de la circunferencia asociada a  $P_2$  lejos de  $v=0$  nos la da el signo de  $(b_2-s_2a_2)$ .

Por lo tanto, si  $b_2/a_2 \notin [s_1, s_2]$ , conocido el signo de  $P_1$  y orientadas las variedades  $O(x^{s_2})$ , el análisis [ salvo tal vez para  $y=O(x^{s_2})$  ] está acabado. Si  $b_2/a_2 \in (s_1, s_2)$ , aparecen nuevas variedades. Si  $b_2=s_1a_2$  ó  $b_2=s_2a_2$  es necesario además el signo de  $P_2$ .

El estudio anterior de las variedades  $O(x^{s_2})$  nos serviría par las  $O([-x]^{s_2})$ , cambiando  $x$  por  $-x$ . También se haría para  $P_{-2}$  si fuera necesario.

Repetiendo el proceso un número finito de veces queda resuelto el análisis local del origen de [S] en las hipótesis del teorema 5.2.

Como hemos visto en el proceso de demostración, para ver cómo son las órbitas entre dos de las variedades dadas por el teorema 5.1 no necesitamos analizar el signo de todos los  $P_k$  ya que la orientación vertical que nos proporcionarían hereda (excepto en los casos descritos ligados al valor de los  $b/a$ ) la dada por el  $\Delta$ . También nos basta el  $\Delta$  si estamos en una situación como la B de la página anterior. Podemos, pues, dar un enunciado mejorado del teorema 5.2 (en él,  $\bullet$  representa tanto los  $i, j$  de dicho teorema como los  $k$  y  $-k$  del dibujo de la derecha):





### Teorema 5.3

Si todos los  $P_{\bullet}(x,y) \neq 0$  y todas las raíces reales  $y = m_{\bullet}x^{s_{\bullet}}$  e  $y = m_{\bullet}[-x]^{s_{\bullet}}$  de cada  $P_{\bullet}(x,y) = 0$  (con  $m_{\bullet} \neq 0$ ) son simples o con  $P_{\bullet f} \neq 0$  y  $b_{\bullet}/a_{\bullet} \neq s_{\bullet}$ ,  $s_{\bullet-1} \neq s_{\bullet+1}$  ( $\bullet > 0$  [ $\bullet < 0$ ])  $\forall \bullet$ , entonces todas las variedades que llegan al origen son de la forma  $y = m_{\bullet}|x|^{s_{\bullet}+...}$  e  $y = O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$  para cada  $b_{\bullet}/a_{\bullet}$  comprendido entre los  $s_{\bullet}$  contiguos. Además, la estructura local de  $\mathbf{0}$  queda determinada por:

- el flujo sobre cada variedad
- el signo de  $\Delta$  y el signo de los  $P_{\bullet}$  para los que  $b_{\bullet}/a_{\bullet} = s_{\bullet}$  ó  $s_{\bullet-1} \neq s_{\bullet+1}$  ( $\bullet > 0$  [ $\bullet < 0$ ])

[el flujo sobre  $y = m_{\bullet}|x|^{s_{\bullet}+...}$  vendrá dado por  $x' = P_{\bullet f}(x, m_{\bullet}|x|^{s_{\bullet}})$  [ ó  $y' = P_{\bullet g}(|y/m_{\bullet}|^{1/s_{\bullet}}, y)$  ]; sobre las  $y = O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$  nos la proporciona el hecho de que están asociadas a nodos].

Repasemos como utilizar este teorema (y el 3.2) en la práctica para analizar la estructura del origen si éste no es simple. Dado el sistema [S], comenzaremos escribiendo  $\Delta$ , hallando sus raíces, representando los puntos asociados a cada una de ellas sobre una circunferencia y orientando ésta a partir del signo de  $\Delta$ . Si  $\Delta$  no tuviese raíces reales, para distinguir entre centro y foco acudiríamos a las técnicas del capítulo 4 (y también a las del 5 si fuese  $n=3$ ). Si existen raíces reales  $y=mx$  de  $\Delta$  y todas son simples o con  $A(1,m) \neq 0$ , el teorema 3.2 basta para concluir el análisis (tras calcular, tal vez, algún término más del desarrollo de las posibles variedades simples con  $A(1,m)=0$ ).

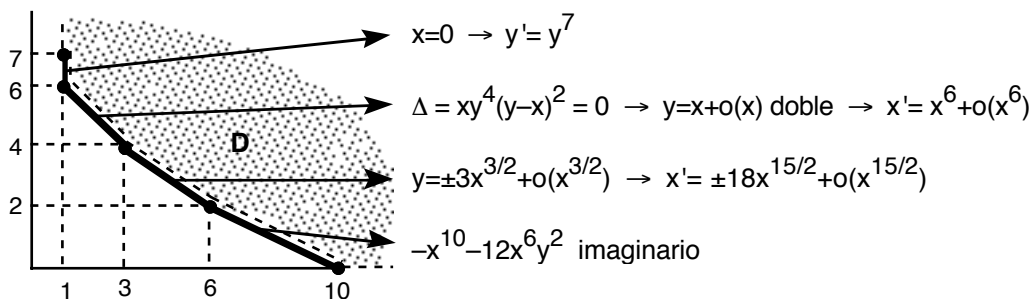
Si  $y=0$  ó  $x=0$  son raíces múltiples con autovalor cero el análisis se proseguirá utilizando el teorema 5.3 [si fuese  $y=mx$ ,  $m \neq 0$  la raíz problemática, haciendo  $z=y-mx$  se reduciría al caso  $z=0$  (aunque en ocasiones el cálculo de algún término más del desarrollo de las órbitas podría representar un atajo)]. Para ello dibujaremos la poligonal (que puede ser útil también para hallar términos de variedades centro horizontales y verticales al aplicar el teorema 3.2) y calcularemos las raíces  $y = m_{\bullet}x^{s_{\bullet}}$  e  $y = m_{\bullet}[-x]^{s_{\bullet}}$  de cada  $P_{\bullet}(x,y)=0$ . Si todas son simples o con  $P_{\bullet f} \neq 0$  las esquematizaremos sobre el punto horizontal (si  $s_{\bullet} > 1$ ) o el vertical (si  $s_{\bullet} < 1$ ) y las orientaremos (con  $x' = P_{\bullet f}(x, m_{\bullet}|x|^{s_{\bullet}})$ ), o calculando algún término más de la variedad si es simple con  $P_{\bullet f} \neq 0$ . Miraremos a continuación los valores de  $b_{\bullet}/a_{\bullet}$  (esto será innecesario si sólo hay un segmento, o si no existen dos términos distintos asociados a ningún ángulo). Si  $b_{\bullet}/a_{\bullet}$  no pertenece al intervalo cerrado determinado por los  $s_{\bullet}$  contiguos para ningún  $\bullet$  (sin olvidar el  $s=1$  del  $\Delta$  que podría reducirse a un punto) sólo las variedades  $y = m_{\bullet}|x|^{s_{\bullet}}$  llegan al origen y se puede dibujar la forma de las órbitas entre ellas a partir del signo del  $\Delta$ . Para los  $b_{\bullet}/a_{\bullet}$  estrictamente comprendidos entre los  $s_{\bullet}$  contiguos añadiremos además las variedades  $O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$  asociadas a nodos (y tendremos en cuenta que los flujos verticales se invierten a partir de ellas). Con esto se acaba el análisis salvo en el caso excepcional de que 'se vaya' algún ángulo de la poligonal. En ese caso será preciso además esquematizar el signo del  $P_{\bullet}$  correspondiente.

El teorema 5.3 no dice todo sobre la estructura de  $\mathbf{0}$  en las siguientes situaciones excepcionales: si existen  $m_{\bullet}x^{s_{\bullet}}$  ó  $m_{\bullet}[-x]^{s_{\bullet}}$ ,  $m_{\bullet} \neq 0$  múltiples con  $P_{\bullet f} = 0$ , si es algún  $P_{\bullet} = 0$  (en particular si  $\Delta = 0$ ) o si no existen variedades reales que lleguen al origen, en cuyo caso dicho punto es evidentemente o **centro** o **foco**. La sección 5.4 está dedicada al estudio de las dos últimas situaciones. En ella se darán ideas sobre los cálculos adicionales que exigirá la primera si se quieren evitar los blow-ups.

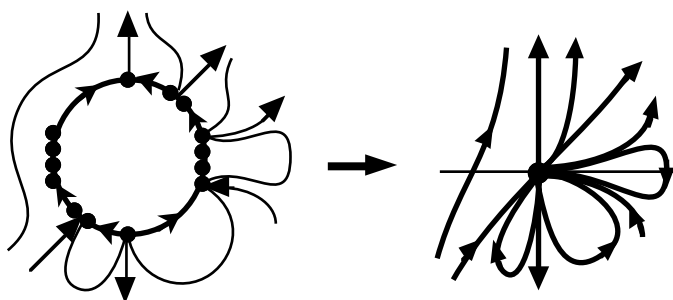
### 5.3. Aplicando los teoremas.

Estudiemos varios ejemplos para comprobar la eficacia de los teoremas de la sección 5.2. En el primero estamos en las hipótesis del teorema 5.3 y la poligonal nos dice todo:

**Ejemplo 6.**  $\begin{cases} x' = 2x^2y^4 - xy^5 + 6x^6y \\ y' = x^2y^4 - x^9 + y^7 \end{cases} \rightarrow H_S(x,y) = x^3y^4 - x^{10} + xy^7 - 2sx^2y^5 + sxy^6 - 6sx^6y^2 = 0$



Con todo lo anterior tenemos:



Observemos que la anterior estructura local del origen se mantendría para cualquier sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x^2y^4 - xy^5 + 6x^6y + R_f(x,y) \\ y' = x^2y^4 - x^9 + y^7 + R_g(x,y) \end{cases}$$

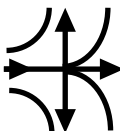
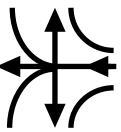
obtenido perturbando el anterior con términos  $R_f$  y  $R_g$  que aporten puntos al diagrama que estén situados en la región convexa  $D$  limitada por la poligonal (que no está incluida en  $D$ , aunque sí lo están las dos semirrectas  $\{y=0, x>10\}$  y  $\{x=1, y>7\}$ ). Sólo en aquellos sistemas para los que existan variedades con  $P_{\cdot f}=0$  (en particular, con  $\Lambda_i=0$ ) serán relevantes los términos que caigan en  $D$  para determinar el flujo sobre ellas. Esto es lo que ocurría en el ejemplo 3.b de la sección 5.1 (allí era  $\Lambda_0=0$  y a la variedad doble  $y = -x^2 + \dots$  estaba asociado  $P_f(1,-1)=0$ ).

**Ejemplo 7.** Clasificamos localmente los sistemas cuadráticos para los que el origen sea punto crítico aislado, no elemental y con aproximación lineal no nula. Suponemos que la parte lineal está escrita ya en forma canónica, así que los sistemas a clasificar son:

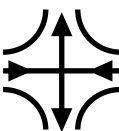
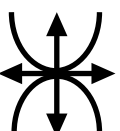
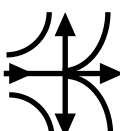
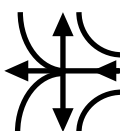
$$[Q1] \begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = y + dx^2 + exy + fy^2 \end{cases} \quad y \quad [Q2] \begin{cases} x' = y + ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = dx^2 + exy + fy^2 \end{cases}$$


Para [Q1] basta analizar el flujo sobre la variedad centro  $y = -dx^2 + d(e-2a)x^3 + O(x^4)$

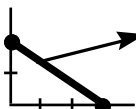
dato por:  $x' = ax^2 - bdx^3 + d(cd+be-2ab)x^4 + O(x^5)$

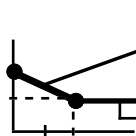
Si  $a \neq 0$  tenemos pues un silla-nodo en el origen:  $a > 0$    $a < 0$  

Sea ahora  $a=0$ . Si además  $d=0$  es  $y=0$  una recta de puntos críticos. Si  $a=b=c=0$  el origen no es punto crítico aislado. Para el resto de casos:

$bd > 0$  silla   $bd < 0$  nodo   $b=0, d \neq 0, c > 0$  silla-nodo   $b=0, d \neq 0, c < 0$  silla-nodo 

Para [Q2]  $\rightarrow \Delta = -y^2 \rightarrow$   La poligonal nos da:



Si  $d \neq 0$ :   $sy^2 = dx^3$ , simples

Si  $d=0$ :   $y = (\frac{e}{2} - a)x^2 + \dots \rightarrow x' = \frac{e}{2}x^2 + \dots$   
 $y=0 \rightarrow x' = ax^2 + \dots$






Estas últimas variedades ( $d=0$ ) son simples salvo si  $e=2a$  (entonces  $y=0$  es doble, pero  $P_f(x,0) = ax^2 \pm 0$  [ya que si  $a=d=0$ ,  $y=0$  está formado por puntos críticos]). El flujo queda determinado salvo si  $d=e=0$ . Entonces necesitamos calcular un término más, obteniendo:

$$y = -ax^2 + a(b - \frac{f}{2})x^3 + \dots \rightarrow x' = -\frac{af}{2}x^3 + \dots$$

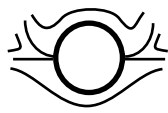


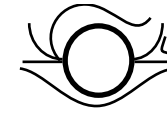
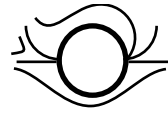
que ya determina el flujo (si  $d=e=f=0$ , el origen no sería aislado). Con todo lo anterior:

$d > 0$    $d < 0$   ángulos

$d=0, a > 0$

$e < 0$	$e \in (0, 2a]$	$e > 2a$	$f > 0$	$f < 0$
				
silla	medusas		silla-nodos	

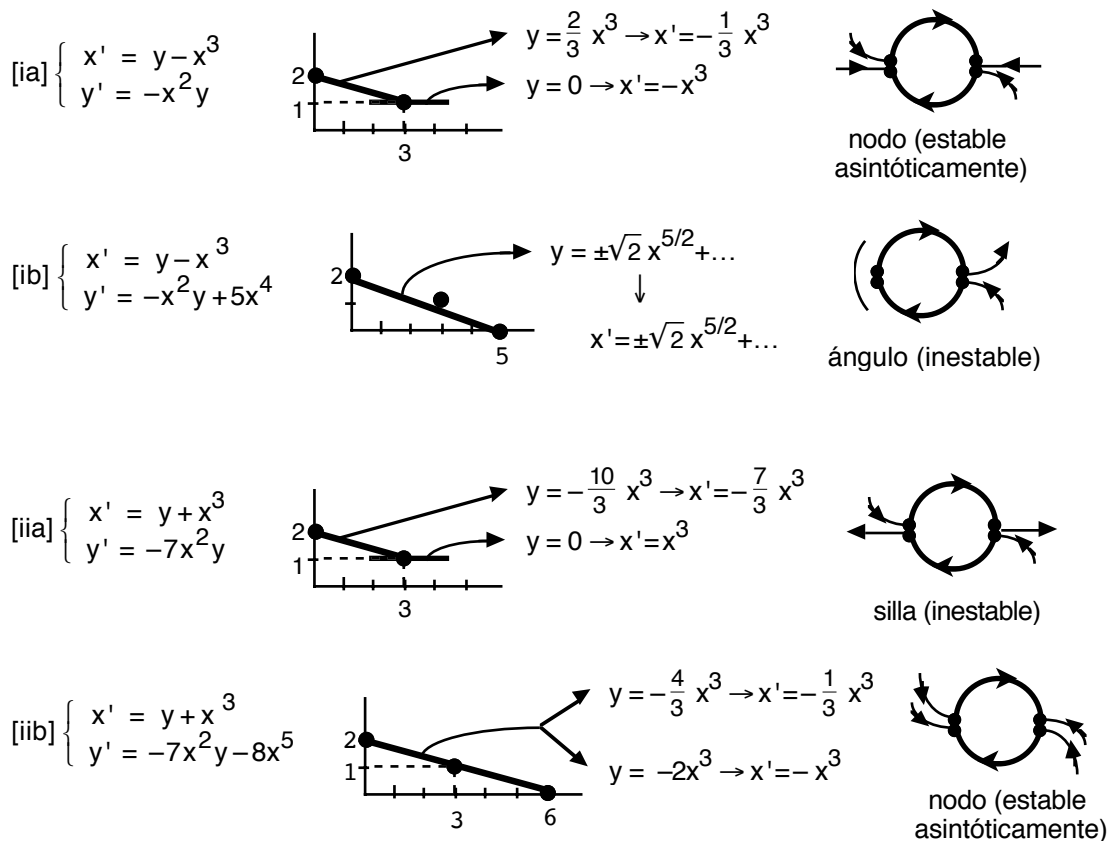
$d=0, a < 0$

$e < 0$	$e \in (0, 2a]$	$e > 2a$	$f > 0$	$f < 0$
				

La clasificación de [Q2] anterior podríamos resumirla más (perdiendo información) en la forma:

$d \neq 0$  ángulo       $d=0, a \neq 0$   $\begin{cases} ae < 0 & \text{silla} \\ ae = 0 & \text{silla-nodo} \\ ae > 0 & \text{medusa} \end{cases}$

**Ejemplos 8.** Para un punto elemental asintóticamente estable o inestable es sabido que al añadir términos no lineales se conserva la estabilidad. Tal vez pudiera pensarse que podría suceder algo análogo con uno no elemental. Pero ya hemos visto que los términos importantes para el análisis son precisamente los de la poligonal y que términos de mayor orden sobre ella influyen más en la estructura que otros de mayor orden que proporcionen puntos por encima de ella. Así, en los dos ejemplos siguientes existen puntos críticos que tienen una estabilidad fuerte si sólo consideramos los términos de orden menor o igual que tres ( [ia] y [ib] ), pero que cambian su carácter al añadirle los términos de orden cuatro o cinco ( [iia] y [iib] ):



[Algo similar ocurre en el punto elemental [iia]  $\begin{cases} x' = y + y^2 \\ y' = -x + y^2 \end{cases}$

centro en la aproximación lineal y foco estable al considerar los términos cuadráticos (  $l_3 = -2 < 0$  ), pero que inestabiliza incorporando un término de tercer orden:

$$[iib] \begin{cases} x' = y + y^2 + x^3 \\ y' = -x + y^2 \end{cases} \text{ es foco inestable, pues } l_3 = 1 > 0 ]$$

**Ejemplo 9.** Encontramos ahora todos los retratos locales para la ecuación

$$x'' = g(x, x') , \quad \text{es decir ,} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$


con  $g$  analítica en un entorno del origen, que suponemos punto crítico aislado. Desarrollando y ordenando los coeficientes:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = cx + dy + b_k x^k + b_{k+1} x^{k+1} + \dots + b_{n,1} x^n y + b_{n+1,1} x^{n+1} y + \dots + y^2 g_2(x, y) \end{cases}$$

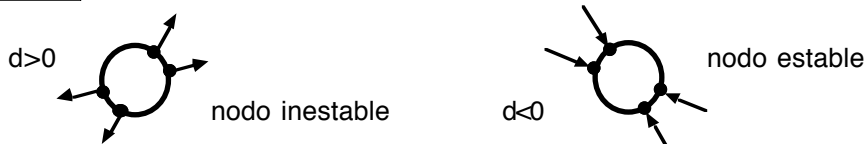
donde  $g_2$  es analítica y  $b_k \neq 0$  [existe  $b_k \neq 0$  porque en caso contrario  $(0,0)$  no sería aislado; todos los  $b_{n,1}$ , sin embargo, podrían ser nulos].

Utilicemos las técnicas de esta sección incluso para puntos elementales. La orientación de las variedades que encontremos será trivial: se recorren hacia la derecha en  $y > 0$  y hacia la izquierda en  $y < 0$ . El análisis del capítulo 3 para los términos lineales nos da:

$$\Delta = -y^2 + dxy + cx^2 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} [d \pm \sqrt{d^2 + 4c}] x = \Lambda_{\pm} x$$

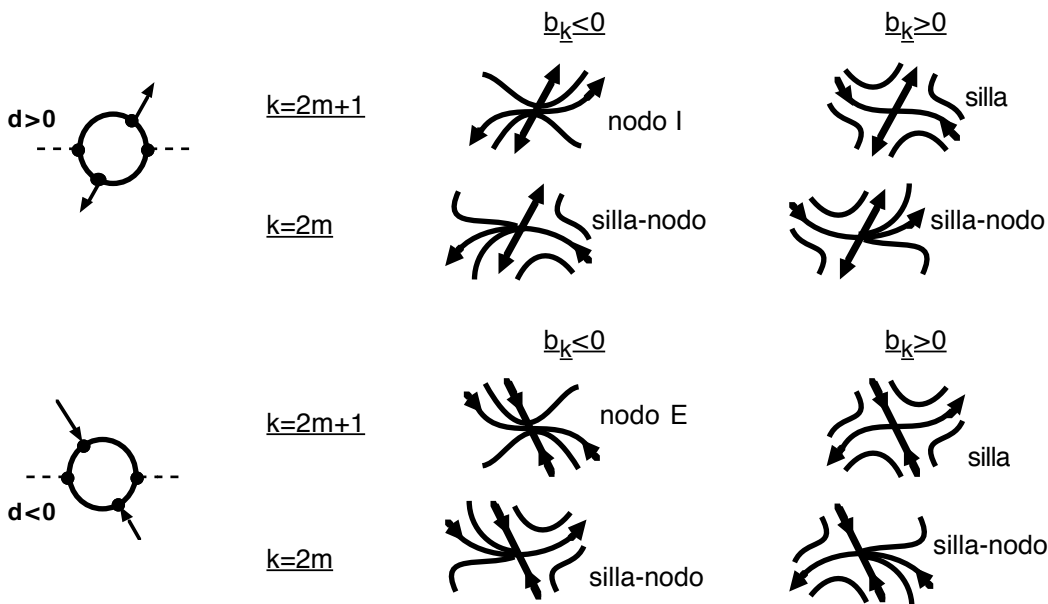
Por tanto, si  $c > 0$   silla

Para  $c < 0$ , si  $d^2 + 4c < 0$ , foco o centro. Si  $d^2 + 4c > 0$ , nodo:

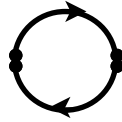


Si  $c = 0$ ,  $\Lambda_+ = d$ ,  $\Lambda_- = 0$ . Hay que considerar los términos no lineales. Según sean los signos de  $d$  y  $b_k$  y la paridad de  $k$  se tiene:

$$y = -\frac{b_k}{d} x^k + \dots \quad [d \neq 0]$$

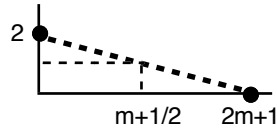


Si  $c=d=0$ ,  $y=0$  es doble con  $\Lambda_-=0$



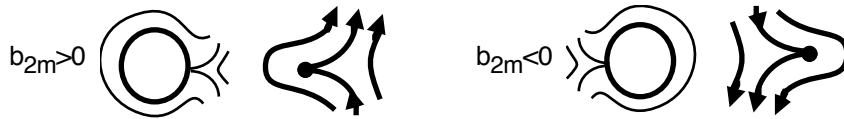
$$H_s(x,y)=0 \rightarrow sy^2=b_kx^k+b_{n,1}x^ny+\dots$$

Sea  $k=2m$



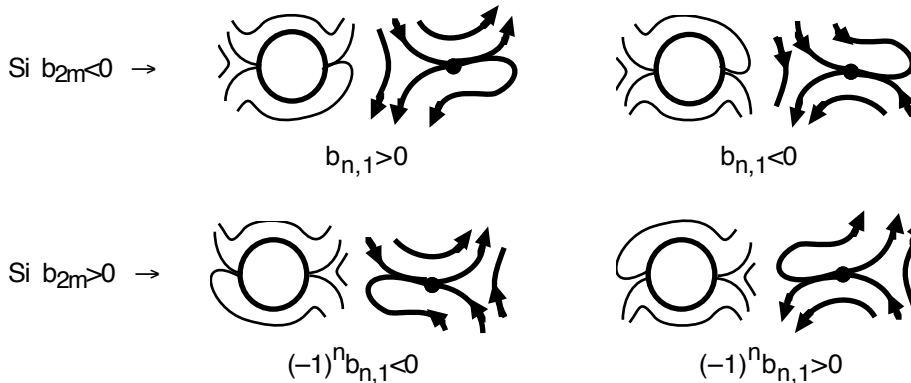
Existen dos posibilidades:

Si  $n \geq m$  (o si  $b_{n,1}=0 \forall n$ )  $\rightarrow y^2 = \frac{1}{s}b_{2m}x^{2m+1}$  con  $s=m+\frac{1}{2}$  y el origen es un ángulo:

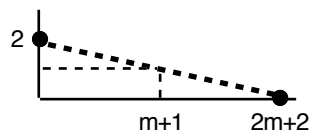


Si  $n < m$ :  
 $y = \frac{b_{n,1}}{n+1}x^{n+1} + \dots$   
 $y = -\frac{b_{2m}}{b_{n,1}}x^{2m-n} + \dots$

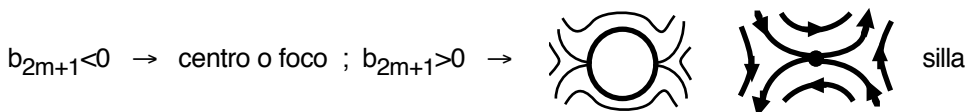
Una variedad tiene potencia par y otra impar, lo que bastaría para asegurar que el origen es silla-nodo. Pero precisemos algo más:

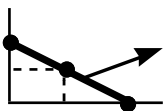


Si  $k=2m+1$



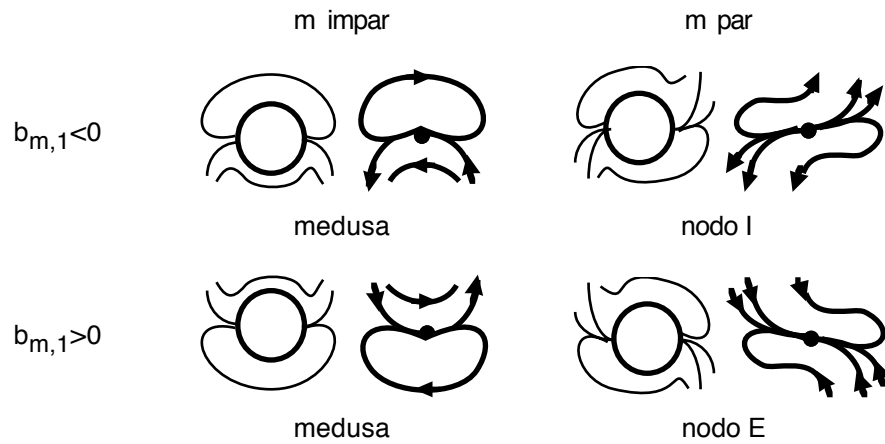
Si  $n > m$  (o si  $b_{n,1}=0 \forall n$ )  $\rightarrow y^2 = \frac{1}{s}b_{2m+1}x^{2m+2}$ , con  $s=m+1$ , y por tanto:

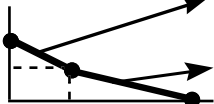


Si  $n=m$  :   $(m+1)y^2 - b_{m,1}x^{m+1}y + b_{2m+1}x^{2m+2} = 0 \rightarrow y = \frac{b_{m,1} \pm \sqrt{D}}{2(m+1)} x^{m+1}$   
 con  $D = b_{m,1}^2 + 4(m+1)b_{2m+1}$

Si  $b_{2m+1} > 0 \rightarrow$  silla . Si  $b_{2m+1} < 0$  y  $D < 0 \rightarrow$  centro o foco.

Si  $b_{2m+1} < 0$  y  $D \geq 0$  (cuando  $D=0$  la variedad es doble, pero con  $P_f=0$ ) , depende de la paridad de  $m$  y el signo de  $b_{m,1}$  :



Si  $n < m$  :   $y = \frac{b_{n,1}}{n+1} x^{n+1} + \dots$   
 $y = -\frac{b_{2m+1}}{b_{n,1}} x^{2m-n+1} + \dots$  Ambas tienen la misma paridad.

Considerando todas las posibilidades, se tiene que si  $b_{2m+1} > 0$  el origen es silla, y que aparecen los mismos casos que los del último cuadro si  $b_{2m+1} < 0$  :

	n impar	n par
$b_{n,1} < 0$	medusa	nodo I
$b_{n,1} > 0$	medusa	nodo E

### 5.4. Situaciones no recogidas por los teoremas.

Si el teorema 5.3 no decide la estructura de  $\mathbf{0}$  necesitaremos, en principio, realizar algún otro cambio de variable. Con el análisis de esta sección podremos evitarlo en algunos casos.

Comencemos tratando el caso  $\Delta = 0$ . Esto quiere decir que [S] es de la forma:

$$[S \equiv] \begin{cases} x' = xQ(x,y) + A^p(x,y) + \dots \\ y' = yQ(x,y) + B^p(x,y) + \dots \end{cases}$$

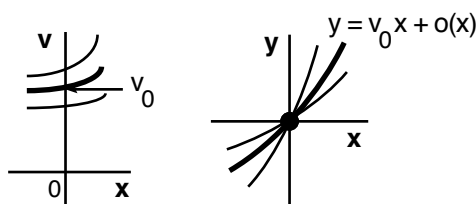
Haciendo el clásico blow-up  $x=x$  ;  $y=xv$  queda en este caso:

$$\begin{cases} x' = x^n Q(1,v) + o(x^n) \\ y' = x^{p-1} [B^p(1,v) - vA^p(1,v)] + o(x^{p-1}) \end{cases}$$

cuyas órbitas son como las de:

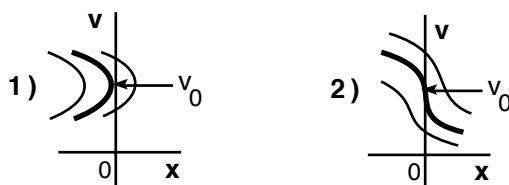
$$[N \equiv] \begin{cases} x' = Q(1,v) + o(1) \\ y' = x^{p-n-1} [B^p(1,v) - vA^p(1,v)] + o(x^{p-n-1}) \end{cases}$$

Si  $v_0$  es tal que  $Q(1,v_0) \neq 0$  (o sea, si  $A(1,v_0) \neq 0$ ), en un entorno de  $v_0$  sigue siendo  $Q(1,v) \neq 0$  y por tanto las órbitas de [N≡] cerca del punto regular  $(0,v_0)$  atraviesan el eje  $x=0$ . Para el sistema [S≡] obtenemos entonces una familia de variedades  $y = vx + o(x)$  que llegan al origen con diferentes pendientes.



Por tanto, **si  $\Delta = 0$ , para todo  $m$  con  $A(1,m) \neq 0$  existe una única variedad que pasa por el origen con pendiente  $m$  [ y si  $B(0,1) \neq 0$  existe una única con pendiente  $\infty$  ].** El flujo sobre ellas viene dado como siempre por  $A(x,mx)$  [  $B(0,y)$  ].

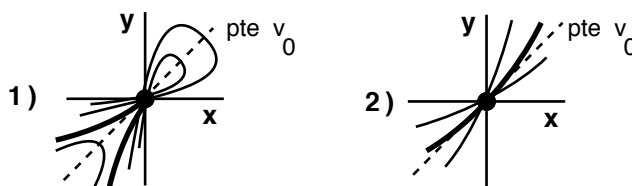
Si  $v_0$  es tal que  $Q(1,v_0) = 0$  ( $A(1,v_0) = 0$ ) la situación es mucho más complicada, pudiendo haber ninguna, una, un número finito o infinitas variedades que pasan por  $\mathbf{0}$  con pendiente  $v_0$ . Imaginemos primero que  $(0,v_0)$  no es un punto crítico del sistema [N≡]. Para ello debe ser  $p=n+1$  y  $B^{n+1}(1,v_0) - v_0 A^{n+1}(1,v_0) \neq 0$ . Sólo existen entonces dos posibilidades esencialmente distintas para las órbitas de [N≡] cerca de  $(0,v_0)$ :



dependiendo de que  $v_0$  sea raíz de multiplicidad par o impar, respectivamente, de  $Q(1,v) = 0$ .



Para [S=] obtenemos entonces:



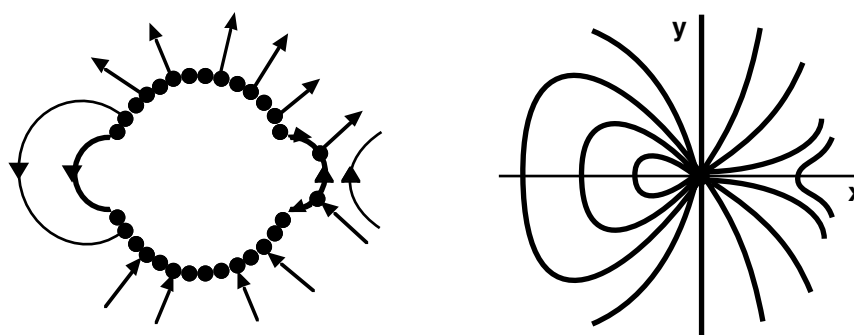
La situación **2)** es como la vista antes. Pero en la primera se observa como existen en un lado del origen dos órbitas que tienden hacia **0** con pendiente  $v_0$  separando un sector hiperbólico, mientras que en el opuesto hay un sector elíptico y ninguna órbita llega a **0** con pendiente  $v_0$ .

Si  $(0, v_0)$  es punto crítico de [N=], las posibilidades para las órbitas de [S=] cerca de la dirección  $y=v_0x$  son tan variadas como lo es la estructura de un punto crítico. En principio, si  $Q(1, v_0)=0$  necesitaremos realizar explícitamente el blow-up (y utilizar entonces los teoremas de la sección 5.2). Pero si la única raíz de  $Q(1, v)=0$  es  $v_0=0$  [ ó  $Q(0, 1)=0$  ] las variedades dadas por la poligonal y el signo de algún  $P_k$  nos podrían suministrar toda la información necesaria, como sugiere el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 10.**  $\begin{cases} x' = xy \\ y' = y^2 + x^3 \end{cases}$

$\Delta=0$   
 $P_1 = x[-\frac{3}{2}y^2 + x^3]$

$A(x, mx) = mx^2$   
 $B(0, y) = y^2$   
 $B([\frac{y^2}{2}]^{1/3}, y) = \frac{3}{2}y^2$



[Las órbitas del sistema son  $y^2 = 2x^3 + Cx^2$ , lo que confirma el esquema; otra forma de confirmarlo sería haciendo el blow-up:

$\begin{cases} x' = v \\ v' = 1 \end{cases}$

$x = \frac{1}{2}v^2$

(observemos que la poligonal sigue dando información sobre el sistema, a pesar de que el origen no sea un punto crítico)].

La situación más general de que un  $P_k = 0$ , es muy similar a la vista para  $\Delta = 0$ .

Análogamente se probaría que existe una única variedad de la forma  $y = m_k x^{s_k} + \dots$  si  $P_{kf}(x, m_k x^{s_k}) \neq 0$ , orientada por  $x' = P_{kf}(x, m_k x^{s_k})$  [ y lo mismo para  $P_{kf}(x, m_k [-x]^{s_k}) \neq 0$  ]. Las complicaciones aparecen si  $P_{kf}(x, m_k x^{s_k}) = 0$ . Entonces para precisar la estructura tendremos que realizar varios blow-ups sucesivos o mejor, directamente,  $x = u^\beta, y = u^\omega v$  ( $s_k = \omega/\beta$ ) [ ó  $-x = u^\beta, y = u^\omega v$ , si los problemas aparecen con  $[-x]^{s_k}$  ]. Como antes, nos podremos ahorrar los cálculos si sólo  $P_{kf}(x, 0) = 0$ .

**Ejemplo 11.**  $\begin{cases} x' = 2xy^2 - 2x^4 \\ y' = 3y^3 - 3x^3y + x^5 \end{cases} \quad \Delta = xy^3$

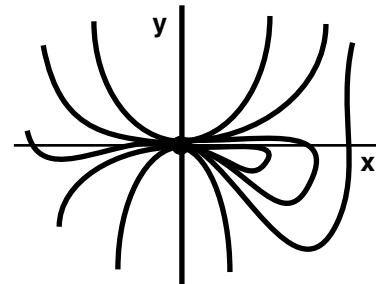
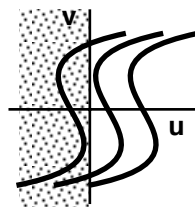
$P_{1f}(x, mx^{3/2}) = 2(m^2 - 1)x^4$   
 $P_{1f}(x, m[-x]^{3/2}) = 2(-m^2 - 1)x^4$   
 $[y + x^2]x^4 \rightarrow P_{2f} = -2x^4$

$P_1 = 0$

Así que existen variedades  $y = mx^{3/2} + \dots$  para todo  $m \neq \pm 1$  e  $y = m[-x]^{3/2} + \dots$  para todo  $m$ , recorridas según indica la figura. Para ver lo que sucede cerca de  $y = \pm x^{3/2}$  hacemos el cambio  $x = u^2; y = u^3 v$  y obtenemos tras simplificar:

$$\begin{cases} u' = v^2 - 1 \\ v' = 1 \end{cases} \rightarrow u = \frac{1}{3}v^3 - v + C$$

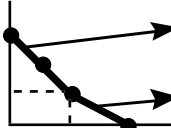
$$\rightarrow y^3 - 3yx^3 - 3x^5 + Cx^{9/2} = 0$$



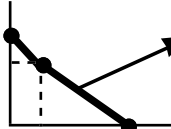
Podemos completar ya el esquema de arriba y obtener la estructura local del origen.

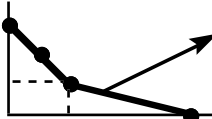
Otro de los casos no recogidos por los teoremas es el caso de **raíz múltiple** de un  $P_k$  asociada a  $P_{kf} = 0$  (en particular, vector propio múltiple de la aproximación homogénea asociado a autovalor cero). Las posibles formas de operar en el análisis de estas situaciones serán las descritas en el siguiente ejemplo: o bien se realiza algún cambio de variable (no todos los blow-ups que serían precisos en caso de no haber demostrado el teorema 5.3) y se utiliza de nuevo la poligonal o bien se utilizan desarrollos en serie de la ecuación de las órbitas. Esto es ahora menos trivial que en el caso de variedades centro: no tenemos garantizado que las variedades que buscamos tengan desarrollo y además no está claro qué potencias hay que suponerle a la serie que probemos (pues pueden aparecer como sabemos diversas potencias fraccionarias).

En el siguiente ejemplo aparecen 'autovalores' cero por partida doble: uno asociado a raíz simple (y que admite, por tanto, desarrollo) y otro a raíz doble (que es caso problemático que estamos tratando):

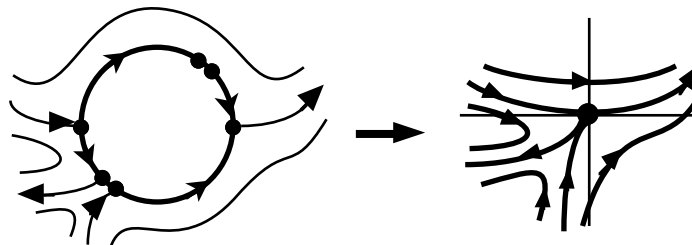
**Ejemplo 12.**  $\begin{cases} x' = y^2 - xy + x^3 \\ y' = y^2 - xy + x^3 - x^2y \end{cases}$    $y=x+o(x)$  doble  $\rightarrow x'=o(x^2)$  [ $\Lambda=0$ ]  
 $y=x^2+o(x^2) \rightarrow x'=o(x^4)$  [ $P_f(1,1)=0$ ]

Necesitamos más términos para determinar el flujo sobre la variedad horizontal y saber si existen o no variedades de pendiente 1. Para ello podemos hacer los cambios de variable:

$y = x+w \rightarrow \begin{cases} x' = w^2 + xw + x^3 \\ w' = -x^2 w - x^3 \end{cases}$    $sww^2 = -x^4; w = \pm \left[\frac{2}{3}\right]^{3/2} [-x]^{3/2} + \dots$   
 $\rightarrow x' = \pm \left[\frac{2}{3}\right]^{3/2} [-x]^{5/2} + \dots$

$y = x^2+w \rightarrow \begin{cases} x' = w^2 - xw + 2x^2w + x^4 \\ w' = w^2 - xw - 2x^5 - 2xw^2 - 4x^3w + 3x^2w \end{cases}$    $w = -2x^4 + \dots$   
 $\rightarrow x' = x^4 + \dots$

Por tanto:



Alternativamente, como siempre, podríamos probar series en la ecuación de las órbitas. Como las potencias asociadas a nuestros segmentos son 1 y 2 podría inicialmente pensarse que podría probarse una serie de potencias enteras normal. Pero se ve que al hacer cambios de variable pueden aparecer potencias fraccionarias.

Probamos entonces:  $y = c_1x + c_{3/2}x^{3/2} + c_2x^2 + \dots$ . De aquí:

$$\begin{aligned} & [(c_1^2 - c_1)x^2 + (2c_1 - 1)c_{3/2}x^{5/2} + (2c_1c_2 + c_{3/2}^2 - c_2 + 1)x^3 + \dots] [c_1 + \frac{3}{2}c_{3/2}x^{1/2} + 2c_2x + \dots] = \\ & = (c_1^2 - c_1)x^2 + (2c_1 - 1)c_{3/2}x^{5/2} + (2c_1c_2 + c_{3/2}^2 - c_2 + 1 - c_1)x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$x^2 \rightarrow c_1^3 - 2c_1^2 + c_1 = 0 \rightarrow \quad c_1 = 1 \text{ doble}, \quad c_1 = 0$$

$$x^{5/2} \rightarrow \left[\frac{7}{2}c_1^2 - \frac{9}{2}c_1 + 1\right]c_{3/2} = 0 \rightarrow \quad c_{3/2} \text{ indeterminado}, \quad c_{3/2} = 0$$

$$x^3 \rightarrow [4c_1^2 - 5c_1 + 1]c_2 + c_{3/2}^2 \left[4c_1 - \frac{5}{2}\right] + 2c_1 - 1 = 0 \rightarrow \quad c_{3/2}^2 = -\frac{2}{3}, \quad c_2 = 1$$

Lo que nos da las dos variedades  $y = x \pm \left[\frac{2}{3}\right]^{3/2} [-x]^{3/2} + \dots$ .

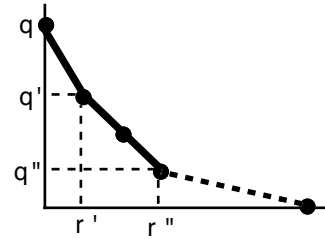
Probando ahora  $y = x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$  obtenemos  $c_3 = 0, c_4 = 2$  y, de nuevo,

$$y = x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

[de hecho  $c_3 = 0$  nos bastaba ya para precisar el flujo].

Pasemos ahora al problema de los **centros y focos**.

Si no existan variedades reales que lleguen al origen de [S] cada  $P_k$  debe tener todas sus raíces complejas. Es claro que para ello es preciso que **todos los términos que dan puntos en ángulos de la poligonal sean de orden impar** (es decir,  $q, r'+q', r''+q'', \dots$  deben ser pares). En particular, **para que el origen pueda ser centro o foco es necesario que  $n$  sea impar**. También es necesario que la poligonal llegue hasta los ejes: así han de existir términos  $y^{2n+1}$  en la primera ecuación de [S] y  $x^{2m+1}$  en la otra.

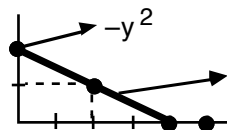


A la vista de la demostración del teorema 5.3, también es claro que no basta que ningún  $P_k$  tenga raíces reales para tener centro o foco, ya que si algún  $b_k/a_k \in [s_k, s_{k+1}]$  pueden existir variedades llegando al origen (si  $b_k/a_k \in (s_k, s_{k+1})$  tales variedades siempre existen). Pero si  $b_k/a_k \notin [s_k, s_{k+1}]$  para todo  $k$  y todas las raíces no triviales de todos los  $P_k=0$  son complejas, el origen se trata de un centro o un foco. En particular, esto sucede si  $\Delta$  tiene todas sus raíces complejas (la situación del capítulo 4); la poligonal se reduce entonces a un segmento de pendiente  $-1$  sobre el que están los términos de la aproximación homogénea.

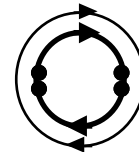
Distinguir centros de focos es un problema complicado, como vimos, incluso en este último caso (y ya lo era hasta para puntos elementales). Antes de dar unas pocas ideas sobre el problema general consideraremos dos ejemplos en que la existencia de centros es inmediata.

**Ejemplo 13.**

$$\begin{cases} x' = y - x^2 \\ y' = 2xy - 3x^3 + x^4 \end{cases}$$



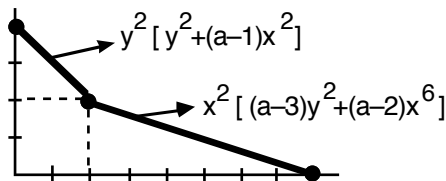
$$-2y^2 + 4x^2y - 3x^4 \quad (\text{complejas})$$



El origen es un centro (no puede ser un foco porque el sistema es hamiltoniano)

**Ejemplo 14.**

$$\begin{cases} x' = -y^3 + x^2y \\ y' = axy^2 + (a-2)x^7 \end{cases}$$

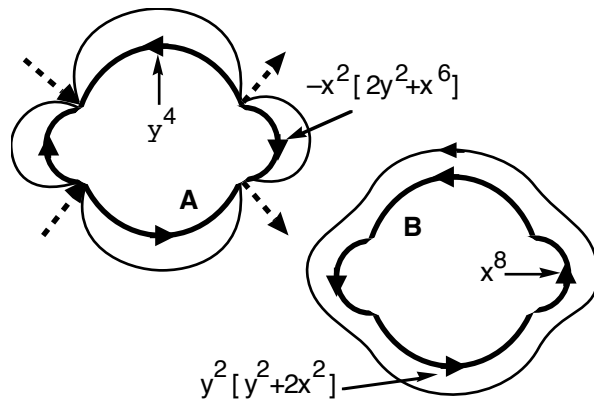


Estudiamos para qué valores de  $a$  el origen es un centro (foco no puede ser por las simetrías del sistema).

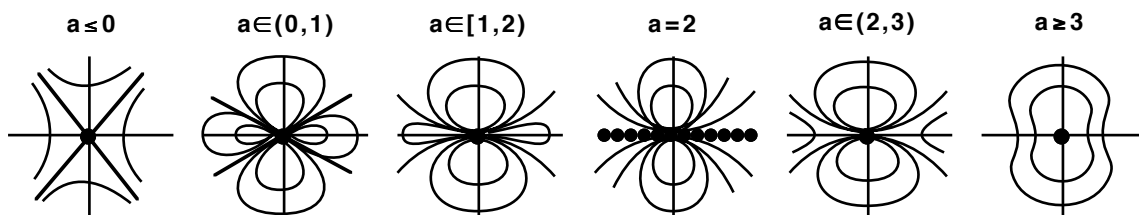
Si  $a < 1$ ,  $a \in (2,3)$ , hay variedades reales dadas por segmentos de la poligonal y no puede tratarse de un centro.

Veamos los demás casos:

- Si  $a=1$ , hay cuatro sectores elípticos (A).
- Si  $a \in (1,2)$ , existen las infinitas variedades  $y=|x|^a + \dots$  y la estructura es como en el caso anterior.
- Si  $a=2$ ,  $y=0$  es una recta de puntos críticos y tampoco hay centro.
- Si  $a=3$  el origen es un centro (B).
- Si  $a > 3$  no hay problemas en el ángulo de la poligonal y no hay variedades: centro.



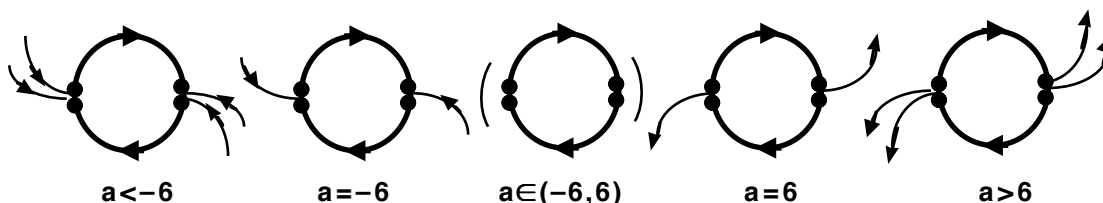
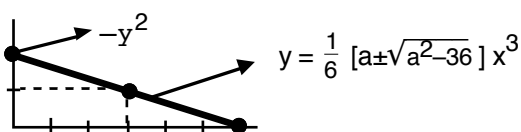
Completando la información anterior tenemos:



Tratemos ahora varios ejemplos, progresivamente más complicados, que dan idea de las técnicas que se utilizarían para construir una teoría más general. En los dos primeros, la poligonal se reducirá a un segmento:

**Ejemplo 15.** [S]  $\begin{cases} x' = y + A(x,y) \\ y' = ax^2y - 3x^5 + B(x,y) \end{cases}$

donde A y B incluyen términos que dan lugar a puntos por encima de la poligonal.



Así pues, el origen es un nodo estable si  $a \leq -6$ , un nodo inestable si  $a \geq 6$  y un centro o un foco para los demás valores de  $a$ . Hagamos un cambio de variable que nos lleve el problema de distinguir entre centro y foco a otro ya conocido:

$$y = v^3 \rightarrow \begin{cases} x' = v^3 + A(x, v^3) \\ 3v^2v' = ax^2v^3 - 3x^5 + B(x, v^3) \end{cases} \rightarrow [S_H] \begin{cases} x' = v^5 + v^2 A(x, v^3) \\ v' = \frac{a}{3}x^2v^3 - x^5 + \frac{1}{3}B(x, v^3) \end{cases}$$

Este último sistema, si  $a \in (-6, 6)$ , es de los analizados en la sección 4.3, pues  $v^2A$  y  $B$  incluirán términos de orden mayor que 5, con lo que, según el teorema 4.2, la estabilidad de los focos de la aproximación homogénea se mantiene en el sistema completo (y en el sistema inicial [S]). Sólo son relevantes los términos de  $A$  y  $B$  cuando dicha aproximación es un centro. Para ver lo que ocurre con los términos homogéneos mucho mejor que hallar la  $I$  es considerar:

$$[S_P] \begin{cases} x' = y \\ y' = ax^2y - 3x^5 \end{cases}$$

y hacer en este sistema:

$$u = x^3 \rightarrow \begin{cases} u' = 3x^2[y] \\ y' = 3x^2[\frac{a}{3}y - u] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u' = y \\ y' = \frac{a}{3}y - u \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{1}{6} [a \pm \sqrt{a^2 - 36}]$$

Por tanto, el último sistema elemental es un foco estable si  $a \in (-6, 0)$ , uno inestable si  $a \in (0, 6)$  y un centro si  $a = 0$ . Las órbitas del sistema  $[S_P]$ , obtenidas simplemente deformando el eje  $x$ , tendrán entonces la misma estructura (incluso si  $a = 0$ ). Los focos se mantendrán para  $[S_H]$  y también para el sistema inicial  $[S]$ . Para ver lo que sucede en  $[S]$  si  $a = 0$  habría que seguir en general el camino de 4.3, calculando algún término más del desarrollo en polares.

Consideremos, por ejemplo, un caso particular sencillo de  $[S]$  :

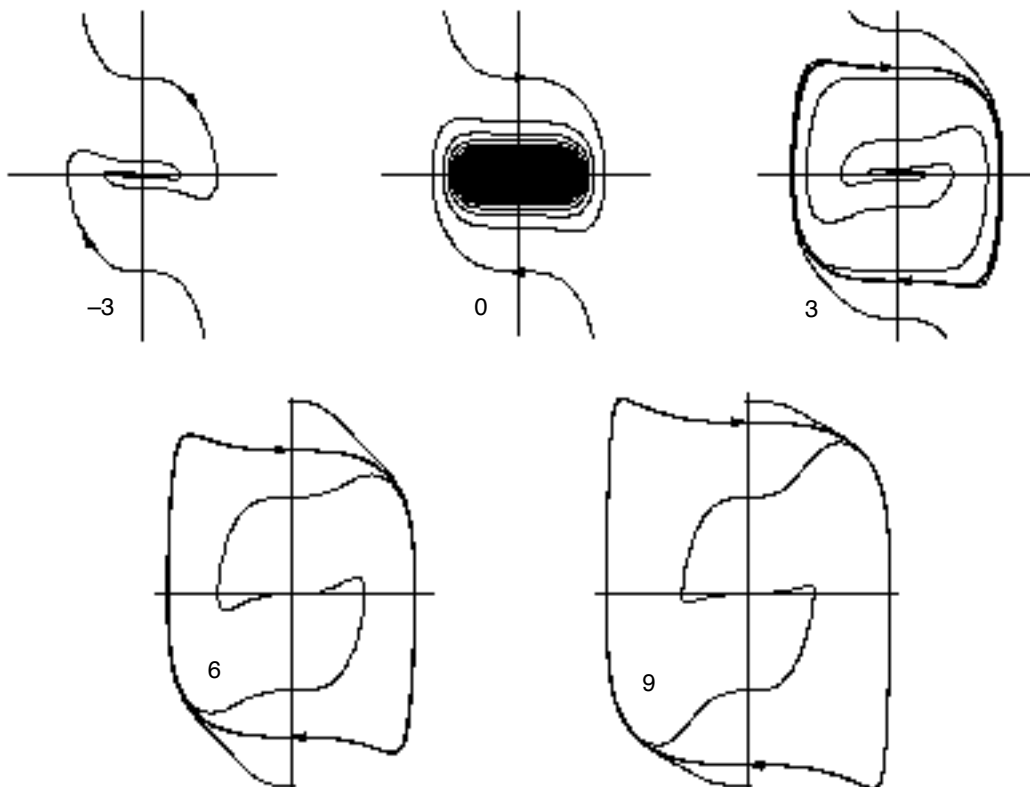
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = ax^2y - 3x^5 - 3x^2y^3 \end{cases}$$

Sólo falta precisar lo que ocurre si  $a = 0$ . Excepcionalmente es válido el segundo cambio  $u = x^3$  (en general conduciría a un sistema no analítico) que lleva a

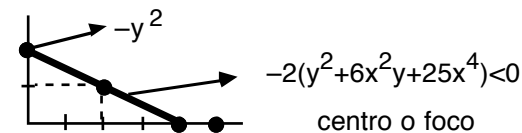
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -u - y^3 \end{cases} \rightarrow I_3 < 0 \rightarrow \text{foco estable si } a = 0.$$

La ruptura de la estabilidad al pasar por  $a = 0$  (y la estabilidad asintótica en este caso) sugieren la posible aparición de un ciclo límite para  $a > 0$  (una especie de bifurcación de Hopf no lineal; con los métodos del capítulo 6 se podría ver que el infinito es repulsor para todo  $a$  lo que, unido al hecho de que no hay más puntos críticos finitos, confirmaría la conjetura).

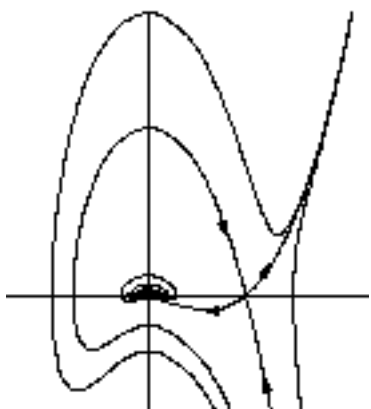
Reproducimos el dibujo aproximado de los mapas de fase para  $a = -3, 0, 3, 6, 9$  en los que se observan las estructuras del origen anunciadas y los ciclos límites conjeturados:



**Ejemplo 16.** [S]  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -12xy - 50x^3 + 50x^4 \end{cases}$



Sin el término en  $x^4$  se trata de un centro (simétrico respecto a  $x=0$ ). El sistema total, como veremos, va a tener un foco estable en el origen [además de un punto silla elemental en  $(1,0)$ ]. Comencemos dando un dibujo aproximado del diagrama de fases de [S]:



Intentamos, como en el ejemplo anterior, hacer un cambio que lleve nuestro sistema a otro de tipo ya analizado:

$$y = v^2 \rightarrow \begin{cases} x' = v^2 \\ 2vv' = -12xv^2 - 50x^3 + 50x^4 \end{cases}$$

Sus órbitas, si  $v \neq 0$  y salvo orientación, son las mismas que las del siguiente sistema atacable con las técnicas de 4.3:

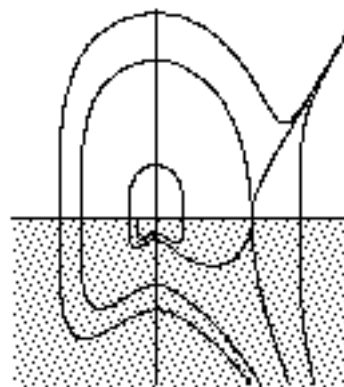
$$[S+] \begin{cases} x' = -v^3 \\ v' = 6xv^2 + 25x^3 - 25x^4 \end{cases}$$

Como es simétrico respecto a  $v=0$ , tiene un centro en  $(0,0)$ .

Pero el cambio de variable realizado sólo nos informa sobre las órbitas de [S] en  $y > 0$ . Para el semiplano inferior debemos hacer otro diferente (que nos lleva a un nuevo sistema simétrico):

$$y = -v^2 \rightarrow \begin{cases} x' = -v^2 \\ -2vv' = 12xv^2 - 50x^3 + 50x^4 \end{cases} \rightarrow [S-] \begin{cases} x' = -v^3 \\ v' = -6xv^2 + 25x^3 - 25x^4 \end{cases}$$

Si pegamos el mapa de fases de [S+] en  $v > 0$  y el de [S-] en  $v < 0$ , el conjunto de órbitas resultante, salvo deformación del eje  $v$ , será el de nuestro sistema inicial [S]. Gráficamente, eso es lo que está hecho a la derecha.



Sea un punto de coordenadas polares  $(r_0, 0)$ ,  $r_0$  pequeño.

La solución  $r_+(\theta)$  de [S+] que parte de él volverá a tocar el eje  $x$  en un  $r_1 = r_+(\pi)$ . Se trata de saber si el valor para  $\theta = 2\pi$  de la solución  $r_-(\theta)$  de [S-] con  $r_+(\pi) = r_1$  es mayor o menor que  $r_0$ .

Para  $r_0$  cercano a 0, el valor de  $r_+(\pi)$  y  $r_-(2\pi)$  se pueden aproximar trabajando con el desarrollo de  $u_+$  y  $u_-$  en serie de potencias del dato inicial, de la misma forma que se hizo en 4.3. Con notación análoga a la utilizada allí, y teniendo en cuenta que  $u_{+1}(\pi) = 1$  (por tener un centro simétrico la aproximación homogénea), tenemos que:

$$r_1 = r_+(\pi) = r_0 + u_{+2}(\pi) r_0^2 + \dots \quad \text{con} \quad u_{+2}(\pi) = \int_0^\pi u_{+1} R_{+2}$$

siendo:

$$u_{+1} = e^{S_{+1}}, \quad S_{+1} = \int_0^\theta \frac{5SC[S^2 + 5C^2]}{m_{+3}}, \quad R_{+2} = -\frac{25S^3C^4}{m_{+3}^2}, \quad m_{+3} = S^4 + 6C^2S^2 + 25C^4$$

Además:

$$r_-(2\pi) = r_1 + u_{-2}(\pi) r_1^2 + \dots, \quad u_{-2}(\pi) = \int_{\pi}^{2\pi} u_{-1} R_{-2}$$

donde:

$$u_{-1} = e^{S_{-1}}, \quad S_{-1} = \int_{\pi}^{\theta} \frac{SC[25C^2 - 7S^2]}{m_{-3}}, \quad R_{-2} = -\frac{25S^3 C^4}{m_{-3}}, \quad m_{-3} = S^4 - 6C^2 S^2 + 25C^4$$

Por tanto:

$$r_-(2\pi) = r_0 + [u_{+2}(\pi) + u_{-2}(\pi)] r_0^2 + \dots$$

La estabilidad del origen nos la da, pues, el signo del último corchete, o lo que es lo mismo, por ser  $R_{-2}$  impar y  $u_{-1}$  par respecto a  $\pi$ , el signo de la integral:

$$J = \int_0^{\pi} 25S^3 C^4 \left[ \frac{e^{S_{-1}}}{m_{-3}} - \frac{e^{S_{+1}}}{m_{+3}} \right]$$

Los coeficientes de [S] se han elegido para que  $S_{-1}$  y  $S_{+1}$  tengan una expresión manejable:

$$S_{+1} = \frac{1}{2} \ln(5) - \frac{1}{4} \ln(m_{+3}) + \frac{3}{8} \arctan \frac{11}{2} - \frac{3}{8} \arctan\left(\frac{11}{2} - 5S^2\right)$$

$$S_{-1} = \frac{1}{2} \ln(5) - \frac{1}{4} \ln(m_{-3}) - \frac{3}{8} \arctan 7 + \frac{3}{8} \arctan(7 - 8S^2)$$

Evaluando numéricamente se obtiene  $J \approx 1.2073$  y el origen es un foco inestable.

Los dos ejemplos anteriores se generalizarían fácilmente, en teoría, al estudio de cualquier sistema para el que la poligonal correspondiente fuese un segmento y no existiesen variedades que llegasen al origen. Dependiendo de la paridad del numerador y denominador de la pendiente de ese segmento habría que realizar uno o dos cambios de variable de los sugeridos en los ejemplos anteriores para convertirlo en uno o dos problemas del tipo de los analizados en el capítulo 4. Está claro que en la práctica los cálculos podrían ser muy complicados si la aproximación homogénea que resultase fuese de orden alto.

Pero lo que sí conduce a problemas esencialmente nuevos (salvo situaciones simples como la del ejemplo 14) es el estudio de puntos sin variedades que lleguen al origen para los que la poligonal está constituida por más de un segmento. Para esos puntos lo único que podremos garantizar es que el punto se trata de un centro o un foco, pero no sabemos decidir entre ellos. En estas condiciones no es posible llevar con cambios de variable de los vistos a problemas de análisis de aproximaciones homogéneas de las del capítulo 4. Ni el blow-up clásico  $y=xv$  aporta nada (con ellas las posibles órbitas cerradas se rompen en dos curvas abiertas que se van al infinito). Ni tampoco, directamente, se pueden probar desarrollos en la ecuación de las órbitas en polares, que es lo que estaba en la base de los análisis del capítulo 4, pues esta ecuación presenta singularidades.

El siguiente ejemplo está dedicado a ilustrar las dificultades descritas:



**Ejemplos 17.** [i]  $\begin{cases} x' = axy^2 - y^3 \\ y' = xy^2 + x^5 \end{cases}$

$y^2[y^2 - axy + x^2] \rightarrow y = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{a^2 - 4}] x + \dots$   
 $x' = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{a^2 - 4}] x^3 + \dots$

Con esto es inmediato que el origen es un nodo estable si  $a < -2$ , nodo inestable si  $a > 2$  y centro (simétrico respecto a ambos ejes) si  $a = 0$ . Para  $a \in (-2, 0)$  y para  $a \in (0, 2)$  es un centro o foco. A primera vista uno esperaría que fuese un foco estable en el primer caso e inestable en el segundo, y si se integra numéricamente eso es lo que se obtiene. Pero, ¿cómo probarlo? Desde luego no estamos en las hipótesis del capítulo 4 pues la aproximación homogénea no tiene focos, sino una recta de puntos críticos. Aunque si se quitan los puntos si están los focos:

$$\begin{cases} x' = axy^2 - y^3 \\ y' = xy^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = ax - y \\ y' = x \end{cases} \rightarrow \text{foco estable si } a \in (-2, 0) \text{ e inestable si } a \in (0, 2)$$

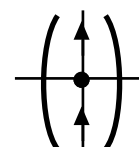
Cuando aparecían rectas de puntos críticos (autovalores cero) en la aproximación homogénea la estructura dependía de los términos de mayor orden. Pero aun en el caso de que se pudiera justificar en este ejemplo la estructura se parece a la de la aproximación homogénea sin los puntos, ¿cómo se trataría el caso general? Por ejemplo, las aproximaciones de los dos sistemas siguientes, para los que la poligonal tiene exactamente la misma forma y en las que tampoco hay variedades que lleguen al origen:

$$\text{[ii]} \begin{cases} x' = -y^3 \\ y' = xy^2 + x^5 + x^6 y \end{cases} \quad \text{[iii]} \begin{cases} x' = x^2 y - y^3 \\ y' = 2xy^2 + y^3 + x^5 \end{cases}$$

son respectivamente, salvo la recta de puntos, un centro y un punto con dos sectores elípticos y en ninguno de los dos casos hay ninguna tendencia a acercarse o alejarse del origen.

El cambio habitual  $y = xv$  lleva (tras dividir por  $x^2$ ), por ejemplo, [i] a:

$$\begin{cases} x' = axv^2 - xv^3 \\ v' = v^4 - av^3 + v^2 + x^4 \end{cases}$$



que, si  $a \in (-2, 2)$ , es sólo un punto crítico con dos sectores hiperbólicos:

Y la ecuación en polares es para [i]:  $\frac{dr}{d\theta} = \frac{aC^2 S^2 r + C^5 S r^3}{S^2 [S^2 - aCS + C^2] + C^6 r^2}$ , singular en  $(r, \theta) = (0, 0)$

(excepcionalmente el desarrollo en serie del segundo miembro tiene el coeficiente de  $r^1$  regular si  $-2 < a < 2$ :  $aC^2/[S^2 - aCS + S^2]$ , pero es singular para [iii], por ejemplo).



## 6. Análisis del infinito.

Investiguemos el comportamiento 'en el infinito' de las órbitas del sistema polinomial:

$$[S] \quad \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + \dots + A^m(x,y) \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + \dots + B^m(x,y) \end{cases}$$

donde  $m > n \geq 0$ . Veremos que las técnicas para esta investigación serán muy similares a las utilizadas en el origen. Como nos sucedía allí, podremos concluir el análisis, salvo en casos muy excepcionales, sin necesidad de realizar ningún cambio de variable.

Comenzaremos en la sección 6.1 describiendo los cambios de variable que nos llevarán los puntos del infinito a otros finitos (cambios que serán innecesarios una vez probados nuestros teoremas). Habitualmente estos cambios se interpretan a partir de proyecciones del plano sobre la esfera de Poincaré (así se hace, por ejemplo, en los libros [3] o [27]). Nosotros hemos preferido no dar ese paseo por el espacio y los miramos como aplicaciones en el plano.

Si se considera suficiente saber que con esos cambios de variable el problema se traslada a analizar puntos finitos se pierde la idea que preside el capítulo: que para el análisis del infinito se puede dar una teoría directa y dual a la del origen (los teoremas de este capítulo serán casi idénticos a los de los capítulos anteriores). Poco se ha explotado esta dualidad y no existen métodos de análisis tan directos como los nuestros (mostrados ya en [11]).

En 6.2 veremos que de nuevo, en muchos casos, bastará para determinar la estructura del infinito de [S] considerar unos términos homogéneos (en este caso los de mayor orden). Aquí tampoco habrá que hacer ningún cambio y los cálculos necesarios serán exactamente igual de simples que los del capítulo 3: bastará localizar las variedades que lleguen al infinito hallando las raíces de un polinomio, orientarlas y ver el signo de ese polinomio. También será muy parecida al capítulo 4 la forma de distinguir entre centros y focos en el infinito cuando no existan esas variedades: la atractividad o repulsividad de infinito dependerá de unas integrales  $I^*$  y  $J^*$  casi iguales que las del origen.

Referencias relacionadas con esta sección son [1], que observa la dualidad en los sistemas homogéneos, o [15] u [28] que caracterizan cuando los polinomios de mayor orden bastan para fijar la estructura del infinito (focos incluidos). En los tres artículos anteriores, como ocurría en su estudio del origen, se descarta la existencia de 'autovalores' cero (que nosotros sí admitimos y salvamos calculando términos de desarrollos (que incluyen potencias negativas) de 'variedades centro'). En [12] o [19] se tratan sistemas particulares con focos en el infinito (muy preparados y destinados a la obtención de bifurcaciones de ciclos límites desde el infinito).

Cuando no basten los resultados de la sección anterior habrá que acudir a la poligonal que introduciremos en 6.3: la que rodea por arriba a los puntos del sistema (una parte de ella informa sobre las órbitas con pendiente horizontal en el infinito y otra sobre las de pendiente vertical). Esta poligonal (no utilizada aún en el estudio del infinito) permitirá concluir el análisis excepto si se dan situaciones conflictivas análogas a las del teorema 5.3 para el estudio del origen.

En 6.4 se aplican los resultados anteriores al análisis de sistemas polinomiales concretos con el fin de mostrar la simplificación que suponen respecto a las técnicas utilizadas incluso en las referencias más recientes. Con la poligonal se puede fácilmente construir sistemas de propiedades deseadas (por ejemplo, sistemas con el infinito repulsor que poseen ciclos límites o atractores inestables) o abordar la clasificación de sistemas que dependen de parámetros. En el último ejemplo estudiamos sistemas en los que cambia la estabilidad de un foco degenerado, dando lugar a la aparición de ciclos límites en una especie de 'bifurcación de Hopf no lineal'.

Hay muchas publicaciones que incluyen estudios globales de sistemas sobre el círculo de Poincaré. Por ejemplo, además de las ya citadas, [2], [5], [8], [10], [13], [18], [21], [22], [23], [24], [25], [29], [30] y [31] (todas ellas analizan diferentes clases de sistemas cuadráticos), [4], [6], [7], [9], [14], [16], [17], [20], [26] y [32]. El camino habitual en todas ellas es llevar los puntos del infinito a puntos finitos realizando explícitamente los cambios y, si alguno de ellos resulta no ser hiperbólico, hacer después algún blow-up. Como muestra del atajo que suponen nuestros métodos se puede comparar el análisis de los sistemas cordales cuadráticos del ejemplo 9 con el artículo original [8] en el que estaban clasificados. O se puede ver como nuestra poligonal simplifica claramente los métodos de análisis (del origen y del infinito) propuestos en el reciente trabajo [33].

## Referencias del capítulo 6

- [1] J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ .  
Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV **79** [1968], 35-69.
- [2] R. J. Dickson - L. M. Perko. Bounded quadratic systems in the plane.  
J. of Diff. Eq. **7** [1970], 251-273.
- [3] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory  
of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [4] A. Lins - W. Melo - C. C. Pugh. On Lienard's equation.  
Lecture Notes in Math. **597** [1977], 335-357.
- [5] N. I. Vulpe - K. S. Sibirskii. Geometric classification of quadratic differential systems.  
Differential Equations **13** [1977], 548-556.
- [6] S. Songling. A method of constructing cycles without contact around a weak focus.  
J. of Diff. Eq. **41** [1981], 301-312.
- [7] T. R. Blows - N. G. Lloyd. The number of limit cycles of certain polynomial differential  
equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** [1984], 215-239.
- [8] A. Gasull - S. Li-Ren - J. Llibre. Chordal quadratic systems.  
Rocky Mountain J. of Math. **16** [1986], 751-782.
- [9] C. Chicone - J. Sotomayor. On a class of complete polynomial vector fields in the plane.  
J. of Diff. Eq. **61** [1986], 398-418.
- [10] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Some theorems on the existence, uniqueness and  
nonexistence of limit cycles for quadratic systems. J. of Diff. Eq. **67** [1987], 372-399.
- [11] J.I. Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos.  
Actas X CEDYA [1987], 20-25.
- [12] N. G. Lloyd - T. R. Blows - M. C. Kalenge. Some cubic systems with several limit cycles.  
Nonlinearity **1** [1988], 653-669.

- [13] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Quadratic systems with a unique finite rest point.  
Publicacions Matemàtiques UAB **32** [1988], 199-259.
- [14] A. Cima - J. Llibre. Bounded polynomial vector fields.  
Trans. Amer. Math. Soc. **318** [1990], 557-579.
- [15] A. Cima - J. Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. J. of Math. Anal. and Appl. **147** [1990], 420-448.
- [16] F. Dumortier - C. Rousseau. Cubic Liénard equations with linear damping.  
Nonlinearity **3** [1990], 1015-1039.
- [17] F. Dumortier - D. Shafer. Restrictions on the equivalence homeomorphism in stability of polynomial vector fields. J. London Math. Soc. **41** [1990], 100-108.
- [18] P. de Jäger. Phase portraits for quadratic systems with a higher order singularity with two zero eigenvalues, J. of Diff. Eq. **87** [1990], 169-204.
- [19] T. R. Blows - C. Rousseau. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields.  
J. of Diff. Eq. **104** [1993], 215-242.
- [20] A. Cima - A. Gasull - F. Mañosas. On polynomial hamiltonian planar vector fields.  
J. of Diff. Eq. **106** [1993], 367-383.
- [21] G. Q. Chen - Z. J. Liang. Affine classification for the quadratic vector fields without the critical points at infinity. J. of Math. Anal. and Appl. **172** [1993], 62-72.
- [22] J. C. Artés - J. Llibre. Hamiltonian quadratic systems. J. of Diff. Eq. **107** [1994], 80-95.
- [23] F. Dumortier - P. Roussarie - C. Rousseau. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields.  
J. of Diff. Eq. **110** [1994], 86-133.
- [24] J. C. Artés - J. Llibre. Phase portraits for quadratic systems having a focus and one antisaddle.  
Rocky Mountain J. of Math. **24** [1994], 875-889.
- [25] C. Li - J. Llibre - Z. Zhang. Weak foci, limit cycles and bifurcations for bounded quadratic systems. J. of Diff. Eq. **115** [1995], 388-436.
- [26] C. Rousseau - D. Schlomiuk. Cubic vector fields symmetric with respect to a center.  
J. of Diff. Eq. **123** [1995], 193-223.
- [27] L. Perko. Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag [1996].
- [28] J. Llibre - J. S. Pérez del Río - J. A. Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity.  
J. of Diff. Eq. **125** [1996], 490-520.
- [29] A. Gasull - R. Prohens. On quadratic systems with a degenerate critical point.  
Rocky Mountain J. of Math. **26** [1996], 135-164.
- [30] J. C. Artés - J. Llibre. Quadratic vector fields with a weak focus of third order.  
Publicacions Matemàtiques **41** [1997], 7-39.
- [31] L. Cairó - J. Llibre. Phase portraits of planar semi-homogeneous vector fields.  
Nonlinear Analysis, T.M.A. **29** [1997], 783-811.
- [32] A. Gasull - A. Guillamon - V. Mañosa. Phase portrait of hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities. Preprint, Universitat Autònoma de Barcelona [1997].
- [33] F. Dumortier - C. Herssens. Tracing phase portraits of planar polynomial vector fields with detailed analysis of the singularities (Preliminary version).  
Escuela de invierno sobre campos vectoriales polinomiales. Lleida [1997].

## 6.1 Cambios de variable

Nuestro objetivo será hacer un modelo de las órbitas de [S] sobre el círculo abierto unidad  $\mathbf{Z}$ , para el que cada punto de la circunferencia exterior  $\mathbf{C}$  representará un 'punto del infinito' asociado a una determinada dirección de llegada al infinito.

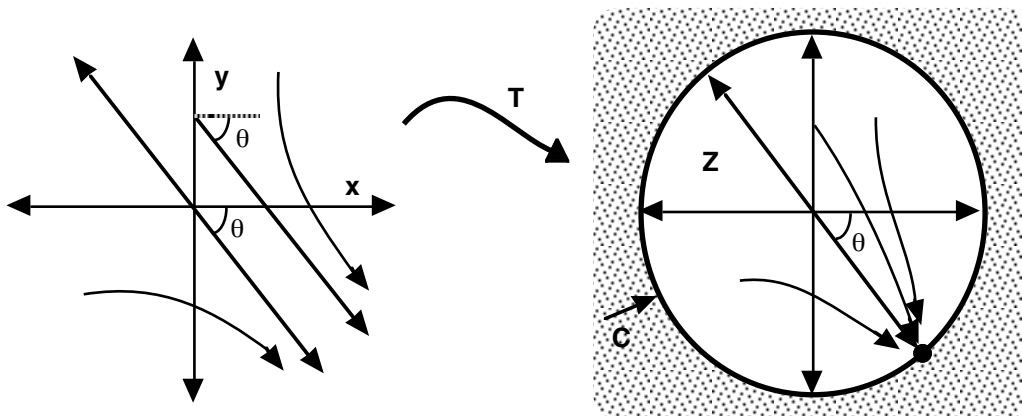
La forma más natural de convertir todo  $\mathbf{R}^2$  en  $\mathbf{Z}$  es realizar la siguiente transformación de coordenadas en el plano:

$$\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z} \quad \text{con} \quad x^* = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} ; y^* = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)$$

O, de forma más clara,  $\mathbf{T}$  transforma puntos de coordenadas polares  $(r,\theta)$  en puntos de  $\mathbf{Z}$  de coordenadas  $(r^*,\theta)$  con

$$r^* = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (\text{es decir: } r = \frac{r^*}{\sqrt{1-r^{*2}}}, \text{ para } r^* < 1)$$



$\mathbf{T}$  convertirá cada órbita  $\Gamma$  de [S] en otra curva  $\Gamma^*$  sobre  $\mathbf{Z}$ . Pretendemos describir las  $\Gamma^*$  cerca de  $\mathbf{C}$ , lo que nos informará del aspecto de las  $\Gamma$  cerca del infinito. A los puntos de  $\mathbf{C}$  se les llama de forma natural 'puntos del infinito'.

Cualquier curva que se acerca al infinito con pendiente  $m$  definida ( $\theta = \arctan m$  definida) es transformada por  $\mathbf{T}$  en una curva de  $\mathbf{Z}$  que tiende al punto de  $\mathbf{C}$  de coordenadas polares  $(1,\theta)$ . Dicho de otra forma: si una curva de  $\mathbf{Z}$  llega a un punto  $(1,\theta)$  de  $\mathbf{C}$ , dicha curva corresponde a una curva del plano  $xy$  que llega al infinito con una pendiente definida  $\tan \theta$ .

Para estudiar las órbitas inducidas por  $\mathbf{T}$  en  $\mathbf{Z}$  cerca de  $\mathbf{C}$  el cambio  $\mathbf{T}$  conduce a expresiones analíticamente poco sencillas, por lo que mejor el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{P}: \mathbf{R}^2 - \{x=0\} \rightarrow \mathbf{R}^2 - \{z=0\} \quad \text{con} \quad z = \frac{1}{x} ; u = \frac{y}{x} \quad (\text{es decir, } x = \frac{1}{z} ; y = \frac{u}{z})$$

$$(x,y) \rightarrow (z,u)$$

que transforma el plano de la siguiente forma fácil de comprobar:

- lleva los cuadrantes 1, 2, 3, 4 a los cuadrantes 1, 3, 2, 4.
- lleva rectas de pendiente  $m$  a rectas que 'pasan' por el punto  $(z,u)=(0,m)$  :

$$y = mx + b \rightarrow u = bz + m$$

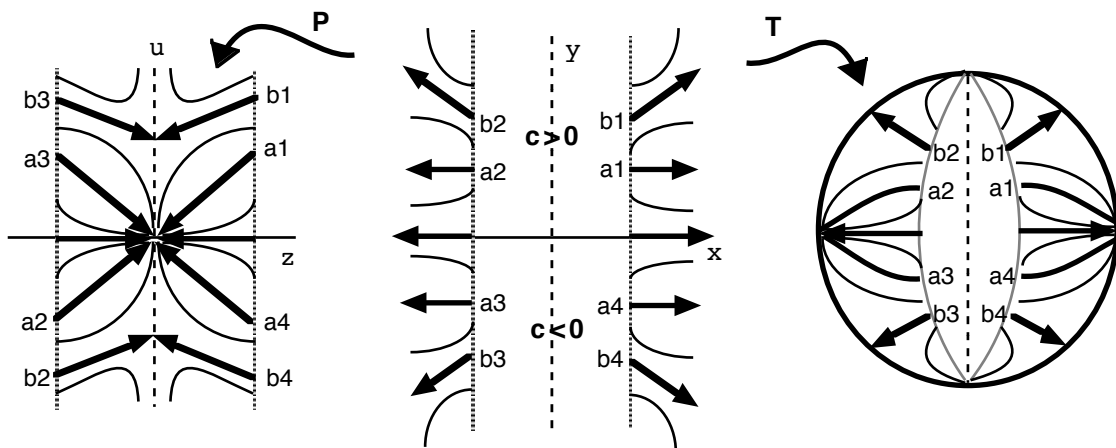
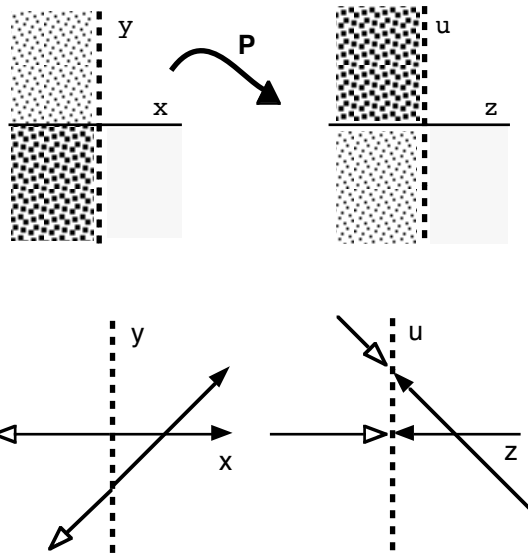
de forma que una sucesión de puntos que tiende a  $+\infty$  [ $-\infty$ ] sobre la recta se convierte en una sucesión que tiende a  $(0,m)$  por la derecha [izquierda].

- lleva curvas de la forma  $y = cx^s + o(x^s)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  a curvas de la forma  $u = cz^{1-s} + o(z^{1-s})$  cuando  $z \rightarrow 0^+$ , así que, cuando  $z \rightarrow 0^+$  :

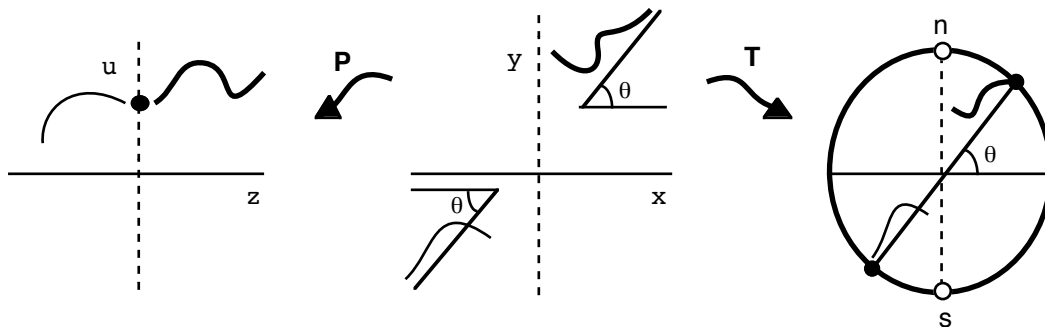
- si  $s > 1$ ,  $u \rightarrow +\infty$  ó  $-\infty$  (dependiendo del signo de  $c$ ) ;
- si  $s = 1$ ,  $u \rightarrow c$  ;
- si  $0 < s < 1$ ,  $u$  tiende al origen con pendiente horizontal ;
- si  $s = 0$ ,  $u$  tiende al origen con pendiente  $c$  ;
- si  $s < 0$ ,  $u$  tiende al origen con pendiente vertical.

Además si  $y = cx^{s'} + o(x^{s'})$  es mayor en el infinito que  $y = cx^s + o(x^s)$  la curva transformada de la primera es también mayor que la transformada de la segunda en un entorno a la derecha de  $z=0$ . Análogos comportamientos se tienen para curvas  $y = c[-x]^s + o([-x]^s)$  cuando la  $x \rightarrow -\infty$ , teniendo en cuenta que ahora se invierte el orden de las curvas.

Esquemáticamente, dibujando también las curvas correspondientes en  $Z$ :

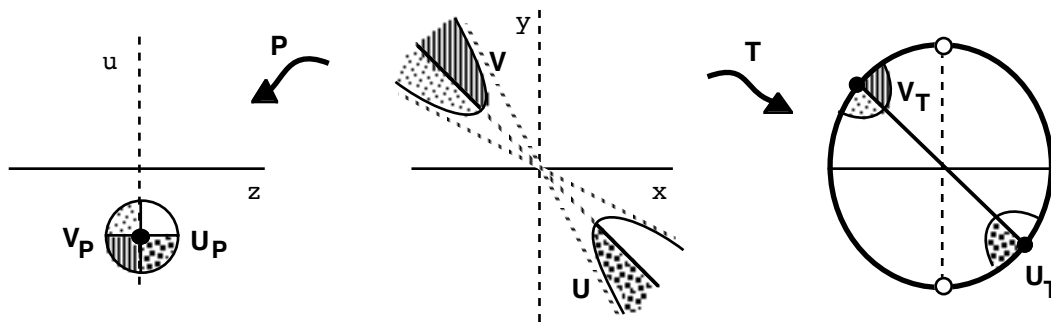


- las curvas que llegan al punto  $(z,u)=(0,m)$  por la derecha [izquierda] corresponden a curvas del plano  $xy$  con pendiente  $m$  en  $+\infty$  [ $-\infty$ ] y por tanto a curvas de  $Z$  que llegan al punto del infinito  $r=1$ ,  $\theta=\arctag m$  [ $\theta=\arctag m+\pi$ ] (intersecciones de  $y=mx$  con la circunferencia  $C$ ):



(así que a cada pareja de puntos de  $C$  opuestos (distintos de  $n$  ó  $s$ ) está asociado un único punto del eje  $u$ ).

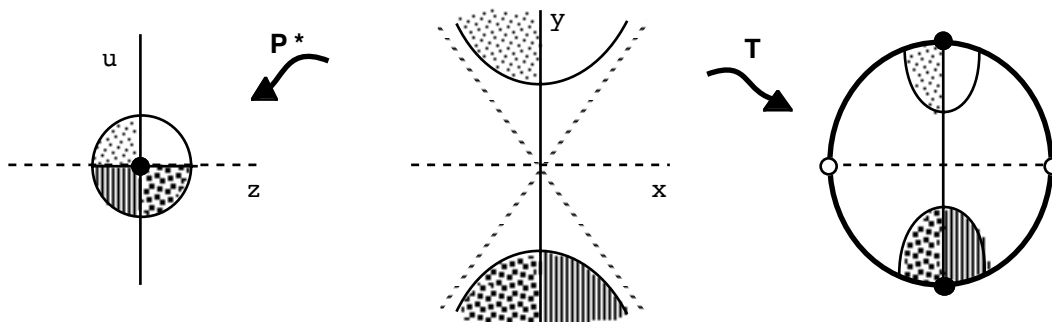
- un entorno circular de un punto  $(z,u)=(0,m)$  procede de dos entornos hiperbólicos en el infinito de la recta  $y=mx$  [ $(u-m)^2+z^2 \leq R \Leftrightarrow R^2x^2-(y-mx)^2 \geq 1$ ] y por tanto está asociado a dos semientornos de los puntos del infinito:



La descripción, por tanto, de un conjunto de curvas en  $U_P$  y  $V_P$  es una descripción de curvas de  $U_T$  y  $V_T$ , es decir, de curvas del plano "próximo en  $+$  y  $-$  infinito" a una determinada recta.

El cambio  $P$ , como se observa, no nos da información sobre lo que sucede en los polos norte y sur de  $Z$ . Para completar la información podemos considerar un cambio  $P^*$ , similar a  $P$ , definido cambiando los papeles de las coordenadas  $x$  e  $y$ :

$$P^*: \mathbb{R}^2 - \{y=0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{u=0\} \quad \text{con} \quad z = \frac{x}{y} ; u = \frac{1}{y} \quad (\text{es decir, } x = \frac{z}{u} ; y = \frac{1}{u})$$







## 6.2 El análisis homogéneo.

Haciendo en el sistema [S] el cambio **P** llegamos al nuevo sistema:

$$\begin{cases} z' = -z^2 f\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) & = -z^{2-m} A^m(1, u) - \dots - z^{2-n} A^n(1, u) \\ u' = z g\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) - u z f\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) & = z^{1-m} [B^m(1, u) - u A^m(1, u)] + \dots + z^{1-n} [B^n(1, u) - u A^n(1, u)] \end{cases}$$

Multiplicando por  $z^{m-1}$  obtendremos un sistema que tiene las mismas órbitas que el anterior salvo el eje  $z=0$  y el cambio de orientación en las órbitas de  $z<0$  si  $m$  es par:

$$[P] \quad \begin{cases} z' = -z A^m(1, u) - \dots - z^{m-n+1} A^n(1, u) \\ u' = [B^m(1, u) - u A^m(1, u)] + \dots + z^{m-n} [B^n(1, u) - u A^n(1, u)] \end{cases}$$

Como  $z=0$  está formado por órbitas los puntos críticos en  $z=0$  nos dan las únicas posibles direcciones de aproximación a dicho eje. Dichos puntos vienen dados por

$$(1) \quad P_{m+1}(u) = B^m(1, u) - u A^m(1, u) = 0$$

Trabajando igual con el cambio **P\*** se llega a:

$$[P^*] \quad \begin{cases} z' = [A^m(z, 1) - z B^m(z, 1)] + \dots + u^{m-n} [A^n(z, 1) - z B^n(z, 1)] \\ u' = -u B^m(z, 1) - \dots - u^{m-n+1} B^n(z, 1) \end{cases}$$

para el que los puntos críticos en  $u=0$  vienen dados por la expresión

$$(1^*) \quad z B^m(z, 1) - A^m(z, 1) = 0$$

Englobando (1) y (1\*) en una única expresión tenemos que **las únicas posibles direcciones de llegada al infinito vienen dadas por las raíces de**

$$(2) \quad \otimes(x, y) \equiv x B^m(x, y) - y A^m(x, y) = 0$$

Sea  $y=u_i x$  raíz de [2]. La matriz de la aproximación lineal de [P] en  $(0, u_i)$ , punto crítico, es:

$$\begin{pmatrix} -A^m & 0 \\ E & \frac{d}{du} [B^m - u A^m] \end{pmatrix}_{(1, u_i)} = \begin{pmatrix} -\Lambda_i & 0 \\ E_i & M_i \end{pmatrix}$$

con lo que este punto será simple si la raíz lo es, o si siendo raíz múltiple  $\Lambda_i \neq 0$  (y por tanto existirá al menos una variedad de [S] que llegará al infinito con pendiente  $u_i$ ). La estructura de  $(0, u_i)$  está determinada por  $\Lambda_i$  (si no se anula; en caso contrario habría que determinar más términos del desarrollo  $u = u_i + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ , es decir, de  $y = u_i x + c_1 + c_2 x^{-1} + \dots$ ) y por la orientación de las órbitas sobre  $x=0$ .

Como ocurría en el capítulo 3 mejor que calcular los  $\Lambda_i$  sustituiremos las variedades obtenidas en la primera ecuación de [S], sin calcular los  $M_i$  orientaremos la circunferencia  $\mathbf{C}$  a partir de la ecuación (2) y representaremos la información obtenida directamente sobre el círculo  $\mathbf{Z}$ . Situación análoga se tiene para  $(0,0)$  en  $[P^*]$ , donde el  $\Lambda_\infty=B(0,1)$ . Así pues:

**Teorema 6.1**

Supongamos que  $\otimes(x,y)=xB^m(x,y)-yA^m(x,y)\neq 0$  y que  $\otimes(x,y)=0$  posee  $q\neq 0$  raíces reales  $y=u_1x, \dots, y=u_qx$  [ y tal vez  $x=0$  ].

Si para las  $u_i$  que no sean simples es  $A^m(1,u_i)\neq 0$  [  $B^m(0,1)\neq 0$  ], existen en [S] variedades  $y = u_i x + o(x)$ ,  $|x| \rightarrow \infty$  [ ó  $x = o(y)$ ,  $|y| \rightarrow \infty$  ] que llegan al infinito con pendiente definida  $u_i$  [  $\infty$  ] y la estructura de las órbitas de [S] cerca de la circunferencia  $\mathbf{C}$  del infinito queda determinada con el signo de  $\otimes(x,y)$  y el flujo sobre cada una de estas variedades

Este flujo viene dado por  $x' = A^m(x, u_i x)$  si  $A^m(1, u_i) \neq 0$  o se puede precisar con algún término más del desarrollo  $y = u_i x + c_0 + c_{-1} x^{-1} + \dots$  de las variedades si se anula.

Con este teorema queda en muchas ocasiones determinada la estructura del infinito de [S] si existe alguna órbita que llegue hasta  $\mathbf{C}$ . Suponiendo que  $\otimes(x,y)$  no tiene raíces reales ( $m$  ha de ser impar) la distinción entre las tres posibilidades cerca del infinito (que las órbitas sean cerradas, que se acerquen o que se alejen en espiral de  $\mathbf{C}$ ) se reduce haciendo  $\rho=1/r$  en la expresión [P] en polares de [S] a un problema de los vistos en el capítulo 4:

$$[P] \begin{cases} r' = M_n r^n + \dots + M_m r^m \\ \theta' = m_n r^{n-1} + \dots + m_m r^{m-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho=1/r \\ \rightarrow \end{matrix} \quad [P^*] \begin{cases} \rho' = -M_m \rho^m + o(\rho^m) \\ \theta' = m_m \rho^{m-1} + o(\rho^{m-1}) \end{cases}$$

(tras multiplicar los segundos miembros por  $\rho^{2m-2}$ , lo que no altera las órbitas en  $\rho>0$ ), siendo como siempre  $M_k(\theta)=CA^k(C,S)+SB^k(C,S)$ ,  $m_k(\theta)=CB^k(C,S)-SA^k(C,S)$ ,  $C = \cos \theta$ ,  $S = \sen \theta$ . Tenemos que  $m_m$  no se anula para ningún  $\theta$ . Las órbitas de  $[P^*]$  cerca de  $\rho=0$  describen las de [S] cerca de  $\mathbf{C}$ . A la vista de los resultados de 4.1 y 4.5 podemos concluir:

**Teorema 6.2**

Sea  $I^* \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{m-1}(C,S)}{m_m(\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{m-1}(1,z)}{\otimes(1,z)} dz$ , con  $E_{m-1} = A^m_x + B^m_y$ . Entonces:

Si  $I^* \cdot a_{0m} < 0$ , las órbitas se acercan en espiral hacia la circunferencia  $\mathbf{C}$ .

Si  $I^* \cdot a_{0m} > 0$ , las órbitas se alejan en espiral de la circunferencia  $\mathbf{C}$ .

Si  $I^*=0$ , debemos considerar los términos de menor orden. Para poder aplicar 4.5 debemos restringirnos al caso  $m=3$ . Entonces los sistemas [S], [P] y  $[P^*]$  son, respectivamente:

$$\begin{cases} x' = A^1 + A^2 + A^3 \\ y' = B^1 + B^2 + B^3 \end{cases}, \quad \begin{cases} r' = M_1 r + M_2 r^2 + M_3 r^3 \\ \theta' = m_1 + m_2 r + m_3 r^2 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \rho' = -M_3 \rho^3 - M_2 \rho^4 - M_1 \rho^5 \\ \theta' = m_3 \rho^2 + m_2 \rho^3 + m_1 \rho^4 \end{cases}$$

Basta modificar ligeramente los cálculos de 4.5 para obtener:

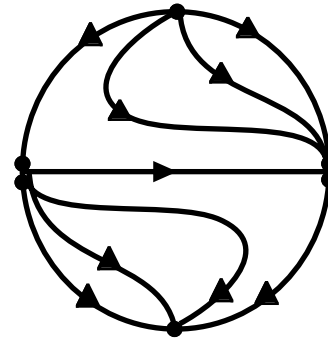
**Teorema 6.3**

Sea  $a_{03} < 0$  y definamos  $Q^*_4(z) = A_3B_1 - B_3A_1 \Big|_{(1,z)}$  ,  $Q^*_8(z) = [B_2 - zA_2][B_3A_2 - A_3B_2] \Big|_{(1,z)}$  ,  
 $R^*_4(z) = E_2(1,z)P_2(z) - E_0(1,z) \otimes(z)$  ,  $R^*_8(z) = P_3(z)[E_1(1,z) \otimes(z) - E_2(1,z)P_3(z)]$  ,  
 $E^*(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{\otimes} \right]$  y  $J^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{Q^*_4}{\otimes^{3/2}} + \frac{Q^*_8}{\otimes^{5/2}} \right] E^* dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{R^*_4}{2\otimes^{3/2}} + \frac{R^*_8}{3\otimes^{5/2}} \right] E^* dz$   
 Entonces si  $I^* = 0$  y además:  $J^* < 0$  , las órbitas se acercan en espiral hacia la circunferencia  $C$  .  
 $J^* > 0$  , las órbitas se alejan en espiral de la circunferencia  $C$  .

La  $J^*$  no es normalmente calculable, pero se podrá reducir con las técnicas de 4.5.

**Ejemplo 1.**  $\begin{cases} x' = 1 + x^2 + xy \\ y' = xy - y^2 \end{cases} \quad \otimes = -2xy^2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} y=0 \text{ doble} \rightarrow x' = x^2 + o(x^2) \\ x=0 \text{ simple} \rightarrow y' = -y^2 + o(y^2) \end{matrix}$

La estructura de las órbitas en el infinito queda determinada sólo con lo anterior: el signo de  $\otimes$  nos da la orientación de  $C$  , las dos ecuaciones en  $x'$  e  $y'$  orientan las órbitas que llegan o salen de puntos del infinito y queda precisada la estructura local de dichos puntos [ los asociados a  $y=0$  son silla-nodos y los de  $x=0$  son nodos ]. Como además el sistema no tiene puntos críticos en  $R^2$  podemos completar el esquema de las órbitas en  $Z$  .



**Ejemplo 2.**  $\begin{cases} x' = xy - x^3 + xy^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \quad (\text{ej.2 del cap.2}) \quad \otimes = xy(x^2 - y^2) = 0 \rightarrow y=0, x=0, y=\pm x$

$y=0 + o(x) \rightarrow x' = A^3(x,0) + o(x^3) = -x^3 + o(x^3)$

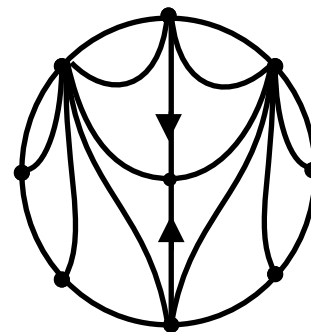
Para  $x=0$  (simple) es  $B^3(0,y) = 0$  . La variedad centro es  $x=0 \rightarrow y' = -y$  . Los puntos quedan caracterizados.

Como  $A^3(x, \pm x) = 0$  hallamos más términos de los desarrollos. Llevamos a la ecuación de las órbitas  $y = c_1x + c_0 + c_{-1}x^{-1} + \dots$  :

$[c_1 - c_{-1}x^{-2} + \dots][c_1x^2 - x^3 + c_1^2x^3 + 2c_0c_1x^2 + \dots] = -c_1x + x^2 + \dots$

Igualando las potencias de mayor orden:

$x^3 \rightarrow c_1 [c_1^2 - 1] = 0 \rightarrow c_1 = 0; \quad c_1 = 1; \quad c_1 = -1$   
 $x^2 \rightarrow c_1^2 [1 + 2c_0] = 1 \rightarrow c_0 \text{ imposible}; \quad c_0 = 0; \quad c_0 = 0$



La variedad asociada a  $y=0$  no era centro y podía no admitir desarrollo pero el punto elemental estaba ya analizado. Para las otras dos tenemos que  $y = \pm x + O(1/x) \rightarrow x' = \pm x^2 + O(x)$  . Con esta información y la obtenida en el capítulo 2 completamos el dibujo de las órbitas en  $Z$  .

**Ejemplo 3.**  $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = kx + y + m^2x^3 + 2x^2y + 2mxy^2 - y^3 \end{cases} \rightarrow \otimes = [y^2 + mx^2]^2$

El sistema homogéneo de tercer orden que nos proporciona el  $\otimes$  fue analizado en el ejemplo 1 del capítulo 4 para  $m > 0$  (cuando no tiene variedades que lleguen a  $\mathbf{C}$  con pendiente definida) y volvió aparecer en 4.5 para  $m=2$  acompañado de términos de orden 4. En 4.1 vimos que tiene un foco inestable si  $0 < m < 2$ , un centro si  $m=2$  y un foco estable si  $m > 2$ . En el sistema completo, por tanto, las órbitas se acercan en espiral a  $\mathbf{C}$  en el primer caso y se alejan en el tercero y todavía no sabemos su comportamiento si  $m=2$ . Para verlo estudiamos la  $J^*$ :

$$E^* = \exp\left[-\frac{2[z-1]}{p}\right], \quad Q^*_4 = [k+z][2-z^2-z^3], \quad J^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q^*_4}{p^3} E^* dz, \quad \text{con } p = z^2 + 2$$

Reducimos la  $J^*$  de forma similar a la de 4.5 y hallamos el polinomio con integral cero:

$$\frac{Q^*_4}{p^3} E^* = \frac{d}{dz} \left[ \frac{E^*}{p} \left( z + \frac{k+3}{2} \right) \right] + \frac{E^*}{p^3} R_2, \quad R_2 = (1-2k)z^2 + (18+4k)z + 4k+2$$

$$0 = \left[ \frac{E^*}{p} \left( \frac{1}{2} z^2 + z + 1 \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{p^3} N_2, \quad N_2 = z^2 + 2z$$

El discriminante  $D_k(s)$  de  $R_2 + sN_2$  es  $\leq 0$  para algún  $s$  para los  $k$  tales que  $D_k=0$  tiene raíces reales en  $s$ , o sea, para aquellos en que el discriminante de  $D_k$  respecto a  $s$  es  $\leq 0$  que son:

$$k \in [-5/2, -1/2]$$

[que son los  $k$  para los que hay una única raíz de  $R_2$  entre las raíces  $-2$  y  $0$  de  $N_2$ ]

Para estos  $k$  es fácil ver que  $R_2 + sN_2 \leq 0$  para los  $s$  con  $D_k \leq 0$  con lo que el infinito es atractor.

El intervalo obtenido para los  $k$  no es nada preciso, pues los valores numéricos de:

$$J^*_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{p^3}, \quad J^*_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 E^*}{p^3} \rightarrow J^* < 0 \text{ si } k < 1.1819 \text{ aproximadamente.}$$

Podemos mejorar el resultado engordando numeradores y denominadores.

$$\frac{p^2 Q^*_4}{p^5} E^* = \frac{d}{dz} \left[ \frac{E^*}{p^3} \left( z^5 + \frac{k+3}{2} z^4 + \dots \right) \right] + \frac{8E^*}{45p^5} R^*_2, \quad R^*_2 = (131-10k)z^2 + (32+80k)z + 38-40k$$

$$0 = \left[ \frac{E^*}{p^3} \left( \frac{1}{2} z^6 + z^5 + 3z^4 + \frac{8}{3} z^3 + \frac{10}{3} z^2 + \frac{4}{5} z + \frac{92}{45} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{16}{45} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{p^5} R_2, \quad N_2 = 37z^2 - 26z - 14$$

De aquí se obtiene que las órbitas se acercan a infinito si  $k \in [-6.53, 0.620]$ . Y la aproximación aumenta mucho si seguimos. Tras largos cálculos se consigue fijar el  $sg[J^*]$  en los  $k$  descritos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^4 Q^*_4}{p^7} E^* dz \rightarrow k \notin [0.616, 1.23], \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^6 Q^*_4}{p^9} E^* dz \rightarrow k \notin [1.176, 1.197]$$

Para  $m \leq 0$ ,  $m \neq -1$ , el teorema 6.1 precisa la estructura de  $\mathbf{C}$  pues se tiene que  $\otimes \geq 0$  y además:

$$y = \pm \sqrt{-m} x \text{ dobles, pero asociadas a } A^3(x, \pm \sqrt{-m} x) = [\text{negativo}][\pm \sqrt{-m} - 1]x^3$$

(cierto aun en el caso de  $y=0$  cuádruple que aparece para  $m=0$ ; para  $m=-1$  es  $y=x$  doble con autovalor 0). Si  $k > -1$  no hay más puntos críticos finitos que el origen, que es nodo inestable pues sobre la variedad centro  $y = -kx + \dots$  se tiene que  $x' = (k+1)(k^2 - 2k + 2)x^3 + \dots$ . Por tanto si  $m > 2$  y  $k > -1$  o si  $m=2$  y  $k > 1.1819$  ha de existir un ciclo límite pues tanto el origen como el infinito son repulsores. [Integrando gráficamente se ve que siempre hay ciclos límites para  $m > 2$  aunque aparezcan otro par de puntos críticos finitos].

### 6.3 Acudiendo a la poligonal.

Consideremos en esta sección el caso no recogido en el teorema 6.1: **supondremos que  $y=0$  es raíz múltiple y que  $A^m(1,0) = a_{m0} = 0$** . Si la raíz múltiple fuese  $y=ux$ , haciendo  $x=x$ ;  $w=y-ux$  acabaríamos en el caso anterior; en este caso, como hacíamos en el análisis del origen, tal vez sea más corto determinar más términos del desarrollo para 'separar' la posible variedad múltiple en seguras variedades simples, si esto es posible.

Para analizar  $y=0$  podríamos realizar el cambio **P** y usar en [P] las técnicas del capítulo 5, es decir, utilizar la poligonal de Newton de la curva algebraica:

$$H_t^\infty(z,u) \equiv z^{m+1} g\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) - (1-t)u z^{m+1} f\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = 0$$

[la  $t$  cumple aquí el papel que desempeñaba la  $s$  en el análisis del origen]

Análogamente, si  $x=0$  fuera múltiple y  $B^m(0,y) = b_{0m} = 0$  podríamos hacer **P\*** y luego considerar para [P\*] la curva:

$$H_t^{\infty*}(z,u) \equiv (t-1)z u^{m+1} g\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) - t u^{m+1} f\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = 0$$

Pero vamos a ver que, salvo excepciones análogas a las del origen, no es necesario hacer ningún cambio y bastará considerar una nueva poligonal (ahora la que rodea por fuera a los demás puntos del sistema) asociada a la ya conocida curva

$$H_s(x,y) \equiv xg(x,y) - syf(x,y) = 0$$

Es inmediato ver que los términos (tanto de la ecuación en  $z'$  como en  $u'$ ) que dan un mismo punto en la poligonal de [P] o [P\*] provienen de términos de [S] (de  $f$  y  $g$ ) que también dan un mismo punto en su poligonal. En concreto, un punto  $(r,q)$  del diagrama  $xy$  de  $H_s$ :

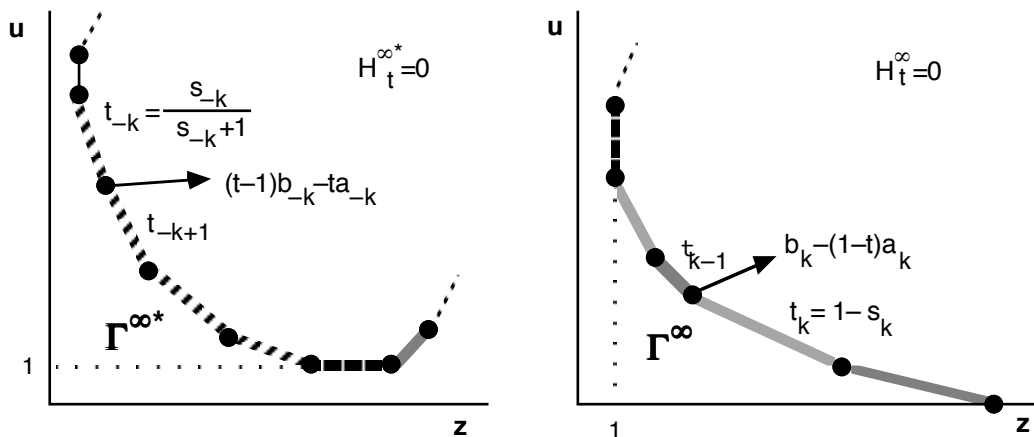
$$[S] \begin{cases} x' = ax^r y^{q-1} + \dots \\ y' = bx^{r-1} y^q + \dots \end{cases}$$

se transforma por **P** [ **P\*** ] en el punto  $(r^\infty, q^\infty) = (m+2-r-q, q)$  [  $(r^{\infty*}, q^{\infty*}) = (r, m+2-r-q)$  ] del diagrama  $zu$  de  $H_t^\infty$  [  $H_t^{\infty*}$  ]:

$$[P] \begin{cases} z' = -az^{m+2-r-q} u^{q-1} + \dots \\ u' = [b-a]z^{m+1-r-q} u^q + \dots \end{cases} \quad [P^*] \begin{cases} z' = [a-b]z^r u^{m+1-r-q} + \dots \\ u' = -bz^{r-1} u^{m+2-r-q} + \dots \end{cases}$$

La transformación  $(p,q) \rightarrow (r^\infty, q^\infty)$  [  $(p,q) \rightarrow (r^{\infty*}, q^{\infty*})$  ] lleva rectas de  $xy$  de pendiente  $m$  a rectas de  $zu$  de pendiente  $-m/(m+1)$  [  $-m-1$  ]. Esquematiéndolo:





Sea  $P_k(x,y) = xP_{kg} - s_k y P_{kf}$  el polinomio que nos proporciona un segmento de la parte derecha de  $\Gamma$  de pendiente  $-1/s_k$ . Al hacer  $P$  se transforma en

$$P_k^\infty(z,u) = z^{m+1} P_{kg}\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) - (1-t_k) u z^{m+1} P_{kf}\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right), \text{ con } t_k = 1-s_k$$

Si  $y = mx^{s_k}$  es raíz de  $P_k = 0$  entonces  $u = mz^{1-s_k}$  lo es de  $P_k^\infty = 0$  con la misma multiplicidad. Luego si es raíz simple o con  $P_{kf}^\infty(1,m) = P_{kf}(1,m) \neq 0$  existe variedad de  $[P]$  de la forma  $u = mz^{t_k} + o(z^{t_k})$  y por tanto existe variedad de  $[S]$  que llega al infinito con tangente horizontal  $y = mx^{s_k} + o(x^{s_k}), x \rightarrow \infty$ .

Análogamente, si  $y = mx^{s_{-k}}$  es raíz simple o con  $P_{-kf} \neq 0$  de un  $P_{-k} = 0$  existe variedad que llega al infinito (con tangente vertical):  $y = mx^{s_{-k}} + o(x^{s_{-k}})$ .

Los mismos resultados se obtienen cambiando  $x$  por  $[-x]$ .

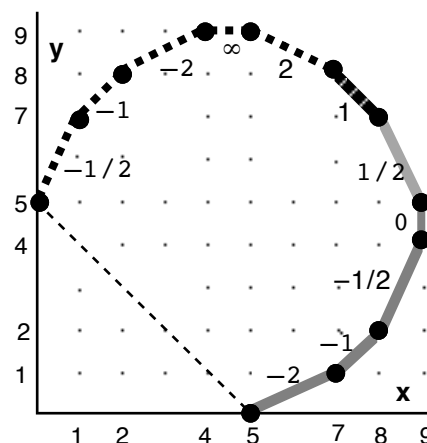
Como en el análisis del origen, el conocimiento de estas variedades orientadas más el signo de  $\otimes$  nos bastará en muchas ocasiones para precisar la estructura del infinito. Como allí, se complicará algo el análisis si el cociente de los coeficientes de  $[P]$  (o  $[P^*]$ ) correspondientes al punto común de dos segmentos sucesivos de la poligonal de pendientes  $-1/t_{k-1}$  y  $-1/t_k$  pertenece al intervalo  $[t_{k-1}, t_k]$ . Con facilidad se ve que esto se traduce para la parte derecha de  $\Gamma$  en que surgen complicaciones si  $b_k/a_k \in [s_k, s_{k-1}]$ .

Para la parte izquierda de  $\Gamma$  los problemas aparecerán si  $a_{-k}/b_{-k} \in [1/s_{-k}, 1/s_{-k+1}]$  (o sea, si  $b_{-k}/a_{-k} \in [s_{-k+1}, s_{-k}]$ , entendiéndose que si  $s_{-k+1} > 0$  y  $s_{-k} < 0$  esto significa que o bien  $b_{-k}/a_{-k} \geq s_{-k+1}$  o bien  $b_{-k}/a_{-k} \leq s_{-k}$  [ordenamos:

$$-2 \leq -1 \leq -\frac{1}{2} \leq 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \leq 2 \leq \pm\infty \leq -2 \leq -1 \leq -\frac{1}{2} ]).$$

[Observemos que, a diferencia del origen, aquí puede haber problemas aunque el  $a_{-k}$  o el  $b_{-k}$  sean 0].

Si  $b_{-k}/a_{-k}$  pertenece al intervalo abierto aparecen como en el origen infinitas variedades de la forma  $y = O(|x|^{b_{-k}/a_{-k}})$  (asociadas a nodos) que llegan al infinito. Si  $b_k/a_k = s_k$  ó  $s_{k-1}$  ( $b_{-k}/a_{-k} = s_{-k+1}$  ó  $s_{-k}$ ) será necesario orientar además otra circunferencia con el signo de  $P_k$  ( $P_{-k}$ ).



Resumiendo todo lo anterior tenemos un teorema enteramente análogo al teorema 5.3:



**Teorema 6.4**

Si  $y = m_{..}x^{s_{..}}$ ,  $x \geq 0$ , es raíz real simple de  $P_{..}=0$  o múltiple con  $P_{..f}(1, m_{..}) \neq 0$ , existe en [S] variedad de la forma  $y = m_{..}x^{s_{..}} + o(x^{s_{..}})$ , con  $x \rightarrow \infty$  (para  $s_{..k}$ ) o con  $x \rightarrow 0$  (para  $s_{..-k}$ ).

Análogo resultado se tiene cambiando  $x$  por  $[-x]$ .

Si ningún  $P_{..}=0$  y todas las raíces de todos los  $P_{..}=0$  (con  $m_{..} \neq 0$ ) son simples o con  $P_{..f}(1, m_{..}) \neq 0$  la estructura de las órbitas de [S] en el infinito queda determinada por

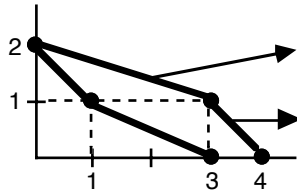
- el flujo para  $|x|$  o  $|y|$  grande sobre cada variedad
- el signo de  $\otimes$  y el signo de los  $P_{..}$  para los que sea  $\frac{b_{..}}{a_{..}} = s_{..}$  ó  $s_{.. \pm 1}$  ( $\leftarrow < > 0$ ).

Como en el origen, para determinar el flujo sobre las variedades  $y = m_{..}|x|^{s_{..}}$  bastará hallar  $P_{..f}(x, m_{..}|x|^{s_{..}})$  (o el  $P_{..g}$  correspondiente) si no se anula; si se anula y la raíz es simple la variedad será esencialmente centro y se podrán calcular más términos de su desarrollo. La forma de las órbitas entre dos variedades consecutivas, se deduce del signo de  $\otimes$  (sin olvidar las posibles variedades  $y = O(|x|^{b_{..}/a_{..}})$  asociadas a nodos descritas y el cambio de flujos 'verticales' que acarrearán), si  $b_{..}/a_{..} \neq s_{..}$  ó  $s_{.. \pm 1}$  (si no, habrá que fijar también el signo de  $P_{..}$ ). Sólo quedan por analizar con este teorema los casos análogos a los citados para el teorema 5.3: si existen  $m_{..}$  múltiples con  $P_{..f} = 0$ , si algún  $P_{..} = 0$  y si no hay variedades que lleguen al infinito con pendiente definida. Este caso se podría reducir a las situaciones de los teoremas 7.2 y 7.3 en el caso de que la poligonal exterior se redujese a un único segmento apoyado en los ejes. No sabemos como distinguir el centro o foco del infinito si no es esa la situación.

En la próxima sección se estudian varios ejemplos para ilustrar la teoría de ésta. En algunos bastará aplicar el teorema anterior para concluir el análisis. Otros exigirán cálculos adicionales. El último más bien es un repaso de secciones previas pero está al final de éste capítulo porque incluye también algún análisis del infinito utilizando la poligonal.

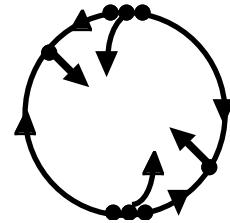
**6.4 Ejemplos que exigen la poligonal.**

**Ejemplo 4.**  $x'' + (x^2-3)x' + x^3-x^2 = 0$  , es decir ,  $\begin{cases} x' = v \\ v' = 3v+x^2-x^2v-x^3 \end{cases}$



$$v = -\frac{1}{3}x^3 + \dots \rightarrow x' = -\frac{1}{3}x^3 + \dots$$

$$\otimes = -x^3[x-v] = 0 \rightarrow v = -x + \dots \rightarrow x' = -x + \dots$$



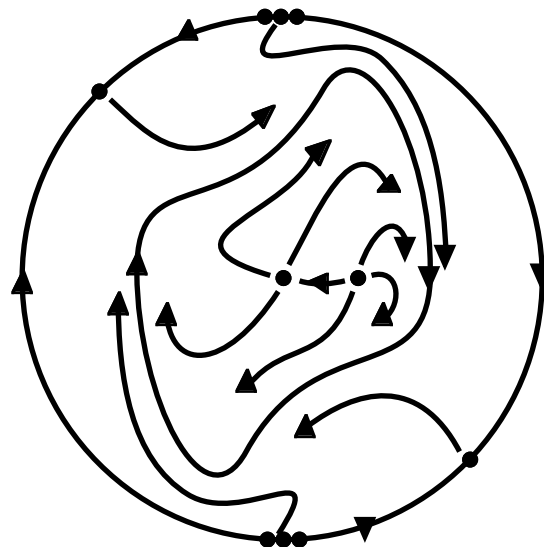
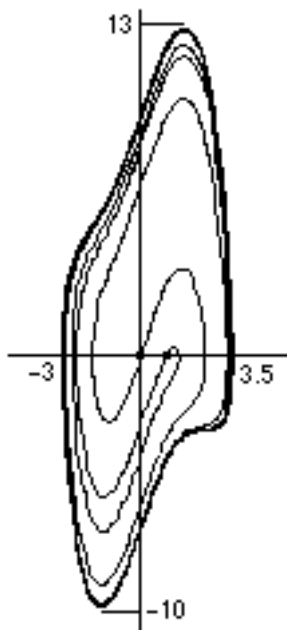
Así que el infinito es repulsor. Comprobemos que existe (al menos) un ciclo límite (la ecuación es similar a la de Van der Pol). Consideremos la energía total del sistema sin rozamiento:

$$U(x,y) = \frac{v^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

La derivada de esta U a lo largo de las soluciones del sistema es:

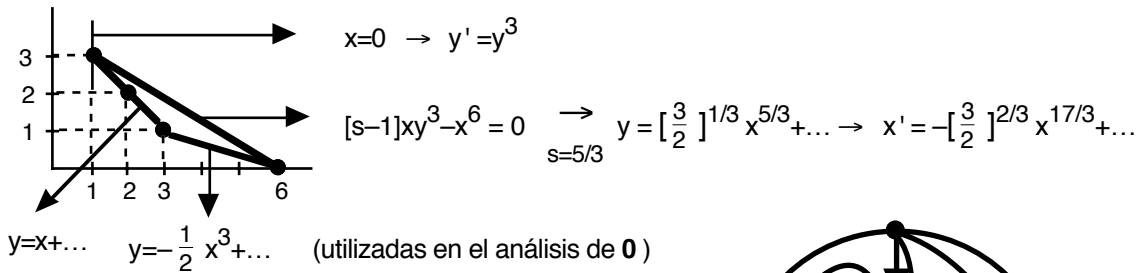
$$\dot{U} = v^2(3-x^2) \quad [ \geq 0 \text{ si } |x| \leq \sqrt{3} ]$$

La curva cerrada  $U = 9/64$  , por ejemplo, está contenida en  $|x| < \sqrt{3}$  y, por tanto, es cruzada por las órbitas del sistema desde dentro hacia fuera. Dichas órbitas, que no pueden irse al infinito ni tender hacia ningún punto crítico finito [que son (0,0) silla-nodo y (1,0) nodo inestable], deben aproximarse a un ciclo límite. Su forma, obtenida numéricamente, es la de la figura inferior de la izquierda. La figura de la derecha es un esquema de las órbitas en Z .

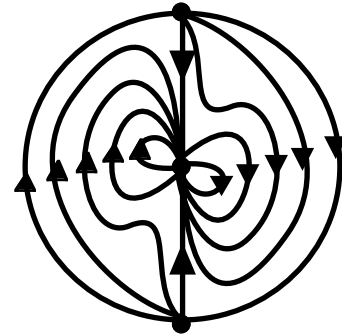


**Ejemplo 5.**  $\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases} \quad \otimes = -x^6 = 0 \rightarrow x=0 \text{ m\u00faltiple}, B^5(0,y) = 0$

El origen, \u00fanico punto cr\u00edtico finito, fue analizado en el ejemplo 1 del cap\u00edtulo 3. El infinito:

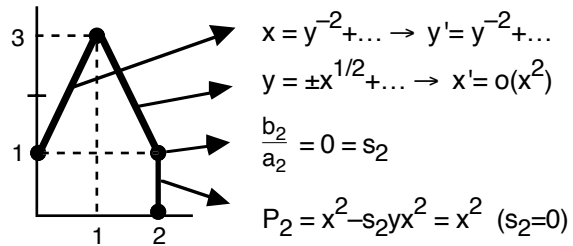


Llevando estas variedades a  $\mathbf{Z}$  completamos el an\u00e1lisis del infinito; con los datos del cap\u00edtulo 3 obtenemos el retrato de fases global de la figura. Obs\u00e9rvase que el origen es un **atractor inestable**: todas las soluciones tienden hacia el cuando  $t \rightarrow \infty$  pero  $x=y=0$  no es una soluci\u00f3n estable.



**Ejemplo 6.**  $\begin{cases} x' = 1+x^2-xy^2 \\ y' = x \end{cases}$

$\otimes = xy^3$   
 $A^3(x,0), B^3(0,y) = 0$

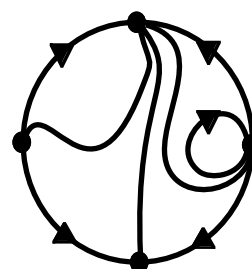
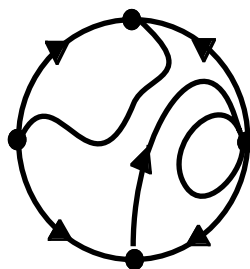
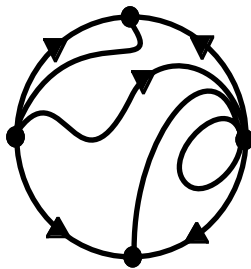
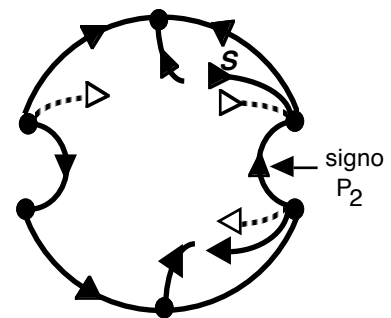


En este ejemplo 'se va' un t\u00e9rmino de la poligonal (lo que suele suceder cuando alg\u00fan  $s_i$  es 0 \u00f3  $\infty$ , como en este caso en que hay un segmento vertical) y es necesario considerar, adem\u00e1s del de  $\otimes$ , el signo de alg\u00fan  $P_i$ .

Necesitamos m\u00e1s t\u00e9rminos de las variedades  $O(x^{1/2})$  para precisar el flujo sobre ellas. Probando series obtenemos:

$y = \pm x^{1/2} - 1 + \dots \rightarrow x' = \pm x^{3/2} + o(x^{3/2})$

Todo lo anterior precisa la estructura del infinito. Teniendo en cuenta que no hay puntos cr\u00edticos finitos tenemos, en principio, las siguientes posibilidades para el retrato global, dependiendo de cu\u00e1l sea el origen de la separatriz  $S$ .



**Ejemplo 7.**  $\begin{cases} x' = y \\ y' = xy^4 + x^9 \end{cases}$

$\otimes = x^{10}; B^9(0,y) = 0$

$P_{-2} = y^2[x^2y^2 + 1] \quad (s_{-2} = -1)$

$P_{-1} = x^2[y^4 + x^8] \quad (s_{-1} = 2)$

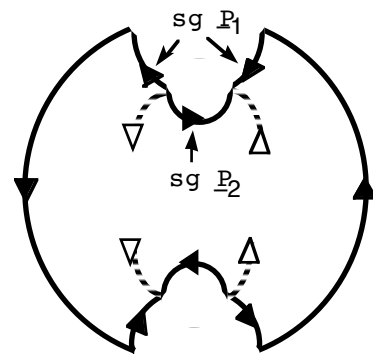
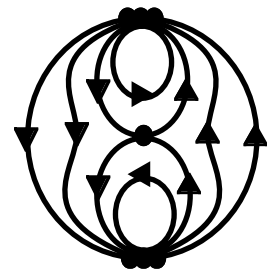
$\Delta = x^{10} - 5y^2 \rightarrow$

No existen variedades que lleguen al infinito dadas por segmentos de la poligonal. Pero como

$$\frac{1}{0} \in (-1, 2) \quad [\text{es decir } \frac{0}{1} \in (-1, \frac{1}{2})]$$

existen infinitas variedades asociadas a nodos  $y=O(x^\infty)$ , o sea, infinitas variedades  $x=O(1)$ . Por tanto la estructura global de las órbitas es la de la derecha.

(como en el análisis del origen, el esquema anterior incluye implícitamente, aunque no lo dibujemos, la orientación de la circunferencia correspondiente a  $s_{-1}=2$  (que continúa la de  $\otimes$ ) y la orientación (opuesta) de la asociada a  $s_{-2}=-1$ ; obsérvese que la dirección de las flechas parece contradecir el signo de  $P_{-2}$ ; no es así, pues es fácil ver en general que si  $s_{-k} < 0$  hay que orientar la circunferencia asociada de forma opuesta al signo de  $P_{-k}$ ; si cambiamos los papeles de  $x$  e  $y$  llegamos al mismo sentido de la flechas; habrá que cambiarlo si  $s_{-k}=0$ .



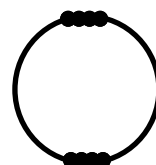
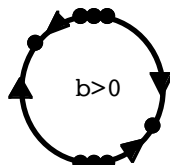
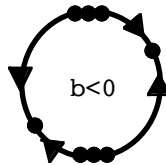
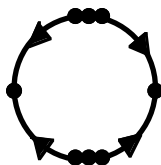
**Ejemplo 8.**  $\begin{cases} x' = y \\ y' = bx^k - x^2y \end{cases}$  con  $b \neq 0$  (origen aislado),  $k \geq 1$ .

Clasifiquemos los mapas de fases globales sobre  $\mathbb{Z}$ . Para la circunferencia del infinito:

si  $k \leq 2$ ,  $\otimes = -x^3y$

si  $k=3$ ,  $\otimes = x^3[bx-y]$

si  $k \geq 4$ ,  $\otimes = bx^{k+1}$



La poligonal nos da las siguientes variedades (útiles unas para el análisis de origen [o] y otras para el infinito [ $\infty$ ]):

$k \leq 4$   $\rightarrow$   $sy^2 = bx^{k+1} + \dots$

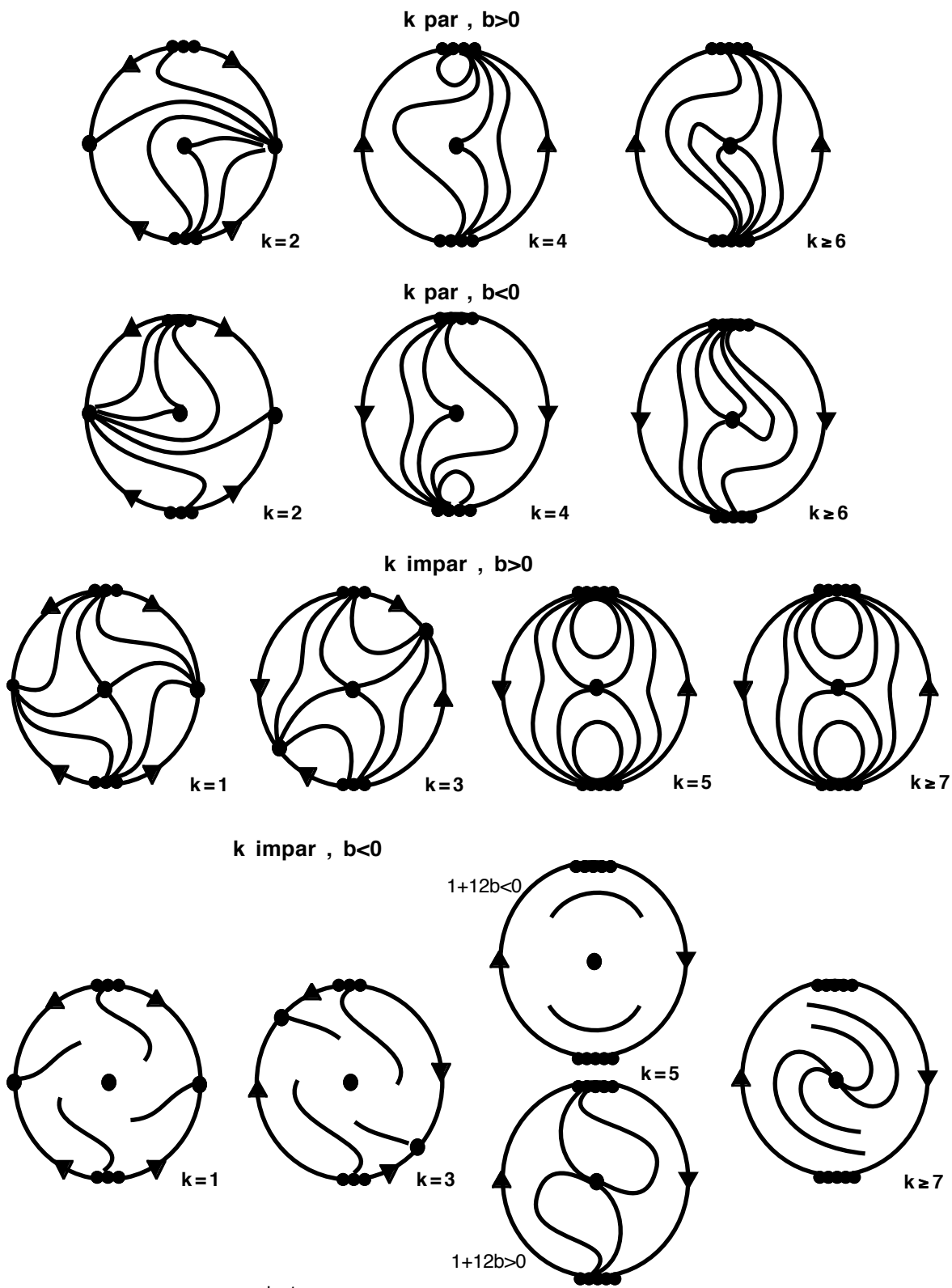
$y = \frac{x^3}{3}$

$y = bx^{k-2} + \dots$

$k \geq 6$

y para  $k=5$ :  $y = \frac{1}{6} [-1 \pm \sqrt{1+12b}] x^3 + \dots$  (o e  $\infty$ )

Sin más que tener en cuenta las posibilidades para las variedades anteriores (su orientación es trivial; el origen está clasificado en el ejemplo 9 del capítulo 5) tenemos:



[ con  $U(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{bx^{k+1}}{k+1}$  se ve que el origen es globalmente asintóticamente estable ]

**Ejemplo 9.** Clasifiquemos los retratos globales de los **sistemas cordales cuadráticos**, es decir, sistemas sin puntos críticos finitos de la forma:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+lx^2+mxy+ny^2 \\ y' = h+cx+dy+rx^2+pxy+qy^2 \end{cases}$$

Como  $\otimes = xB^2 - yA^2$  es de tercer grado tiene al menos una raíz real.

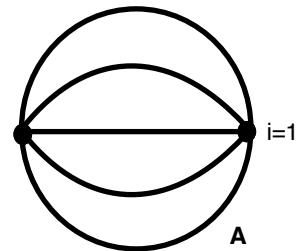
Eligiendo adecuadamente los ejes se puede conseguir que sea  $y=0$ . O sea, no hay pérdida de generalidad suponiendo que  $r=0$ :

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+lx^2+mxy+ny^2 \\ y' = h+cx+dy+pxy+qy^2 \end{cases} \quad \otimes = -y [ ny^2 + (m-q)xy + (l-p)x^2 ]$$

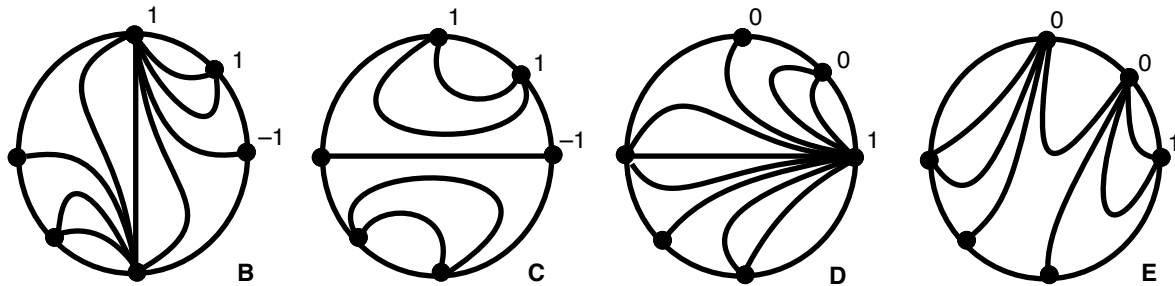
En ocasiones utilizaremos el hecho de que la suma de los índices de los puntos críticos sobre  $Z$  ha de ser igual a 1.

Supongamos inicialmente que  $\otimes \neq 0$ .

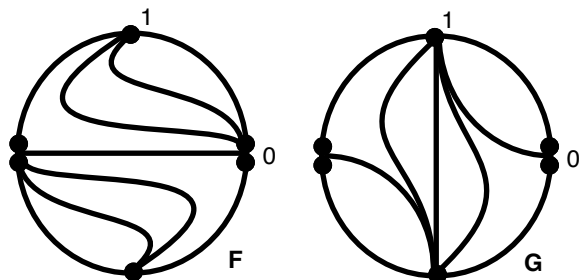
**1** Si  $y=0$  es la **única raíz** real de  $\otimes=0$  y es simple, o si es **raíz triple con  $A^2(1,0) = l \neq 0$** , o si  $y'=0$ , el único punto crítico ha de ser un nodo y las órbitas son como las de **A**:



**2** Si  $\otimes=0$  tiene **tres raíces distintas** los puntos críticos son nodos, sillas o silla-nodos. Como  $\sum i=1$ , las posibilidades son o (silla,nodo,nodo) o (nodo,silla-nodo,silla-nodo), lo que nos da cuatro posibilidades dependiendo de cuál sea el origen de las separatrices:



**3** Si  $\otimes=0$  tiene **una raíz simple y una doble con  $A^2 \neq 0$** , la primera ha de estar asociada a un nodo y la segunda a un silla-nodo, con lo que tenemos otros dos nuevos casos:



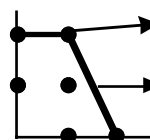
**4** Si hay **una raíz simple y una doble con  $A^2=0$**  (que podemos suponer  $x=0$  e  $y=0$ , respectivamente) el sistema adopta la forma:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+mxy \\ y' = h+cx+dy+qy^2 \end{cases} \quad \otimes = (q-m)xy^2, \quad q \neq m$$

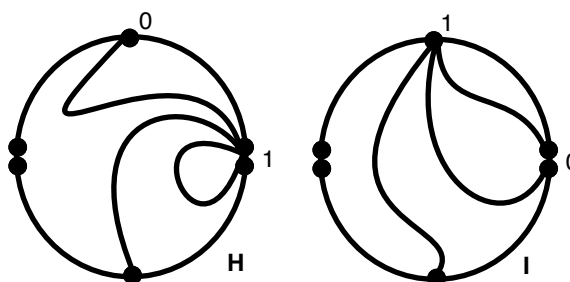
**4i.** Si  $c \neq 0$ , para que el sistema no tenga puntos críticos finitos debe ser para todo  $y$ :

$$-\frac{mq}{c}y^3 - \left[\frac{aq+md}{c}\right]y^2 + \left[b - \frac{ad+mh}{c}\right]y + \left[k - \frac{ah}{c}\right] \neq 0$$

Por tanto  $m \cdot q = 0$ . Acudiendo a la poligonal:

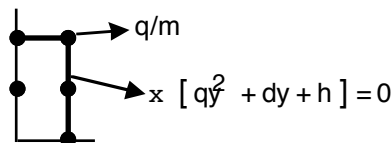


Luego hay dos variedades a un lado y ninguna al otro. Si una de ellas se acerca y otra se aleja del infinito ( $m \neq 0, q=0$ ) el punto doble tiene índice 1 y el otro debe ser silla-nodo. Si las dos variedades se alejan (o se acercan) del infinito ( $m=0, q \neq 0$ ) el doble tiene índice 0 y el otro 1.



**4ii.** Si  $c=0$

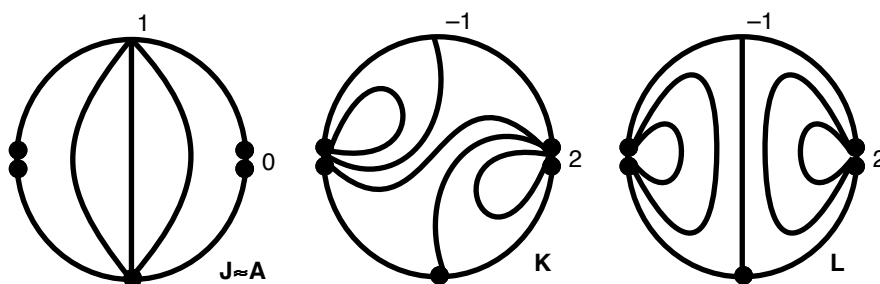
$$\begin{cases} x' = k+ax+by+mxy \\ y' = h+dy+qy^2 \end{cases}$$



**4iia.** Si  $d^2 < 4hq$  no da variedades el segmento vertical.

Si  $\frac{q}{m} \notin [0,1]$  no hay ninguna otra, el índice del punto doble es 0 y el simple es nodo.

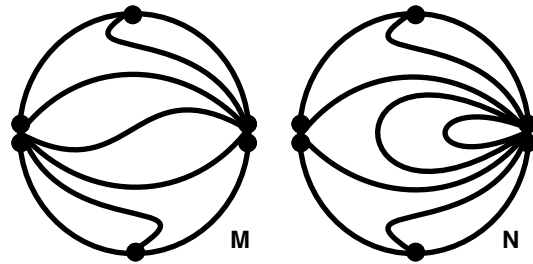
Si  $\frac{q}{m} \in (0,1)$  hay infinitas  $y=O(x^{q/m})$ , el índice es 2 y el otro es silla.



Si  $d=q=0, h \neq 0$ , el segmento tampoco da variedades. Ahora debemos considerar además el signo de  $P_1=hx$  y relacionarlo con el de  $\otimes=-mxy^2$ . Si  $hm < 0$  no hay variedades y aparece **J** otra vez. Si  $hm > 0$  tenemos **K** y **L**.

**4iib.** Si  $d^2 > 4hq$ , el segmento vertical da dos raíces y hay dos órbitas horizontales. Para que no haya puntos finitos debe ser  $a=m=0$ , con lo que  $\frac{q}{0} \notin [0,1]$ .

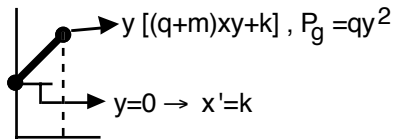
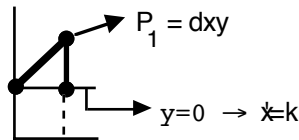
Dependiendo de que las dos rectas se recorran en el mismo sentido o en el opuesto tenemos:



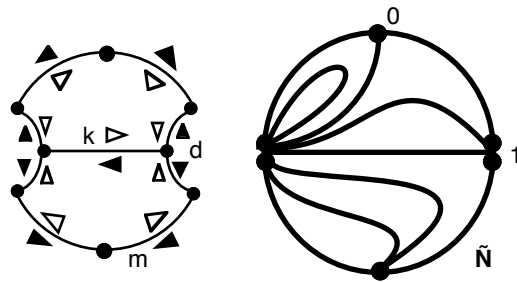
**4iic.** Si sólo hay una órbita horizontal  $y=y_0$ , podemos suponer que se trata de  $y=0$  (si no haríamos  $y=y_0+y^*$ ), con lo que  $h=0$  (y entonces  $a$  debe ser cero). También podemos suponer  $b=0$  (haríamos  $b+mx=x^*$ ). Así pues tenemos los dos sistemas:

$$\begin{cases} x' = k+mxy \\ y' = dy \end{cases} \otimes = -mxy^2; k, m, d \neq 0$$

$$\begin{cases} x' = k+mxy \\ y' = qy^2 \end{cases} \otimes = (q-m)xy^2; q \neq m; k, q \neq 0$$



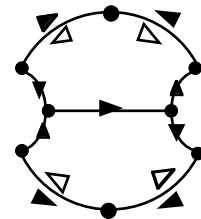
El primero exige estudiar  $P_1$ . Todas las posibilidades para los signos de  $d, m, k$  dan en esencia el mismo punto crítico de índice 1. El otro es silla-nodo y la estructura es la de la derecha.



Analicemos ahora el segundo. Supongamos  $k > 0$  (en el caso de que fuera  $k < 0$ , cambiando el signo de los demás coeficientes se obtendrían las mismas órbitas orientadas en sentido opuesto).

Si  $q^2 > m^2 \rightarrow q+m$  y  $q-m$  tienen el mismo signo  $\rightarrow \frac{q}{m} \notin [-1,1]$ .

Tanto si  $q > 0$  como si  $q < 0$  sale el caso **F** ya visto en 3.



Si  $q = -m \rightarrow \otimes = 2qxy^2, P_1 = ky$  y sale de nuevo **F**  $\rightarrow$

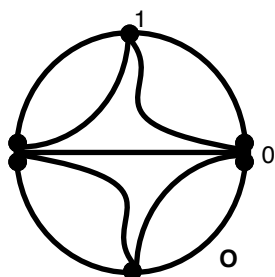
Si  $q(q-m) < 0$ , o bien  $m > q > 0$  [ $m+q > 0, q-m > 0$ ] o bien  $m < q < 0$  [ $m+q < 0, q-m < 0$ ] con lo que en los dos casos  $\frac{q}{m} \in (0,1)$  y hay variedades  $y = O(x^{q/m})$ .

Se comprueba con facilidad que siempre sale esencialmente el mapa **K** de **4iia**.

Si  $q(q+m) < 0$ , o bien  $m > -q > 0$  [ $m+q > 0, q-m < 0$ ] o bien  $m < -q < 0$  [ $m+q < 0, q-m > 0$ ] y se tiene  $\frac{q}{m} \in (-1,0)$  [hay variedades  $y = O(x^{q/m})$ ].

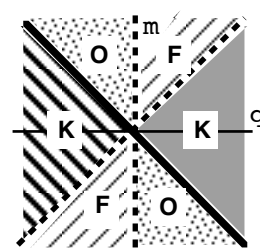
De aquí sale el nuevo caso **O** :





El esquema de la derecha resume las posibilidades para:

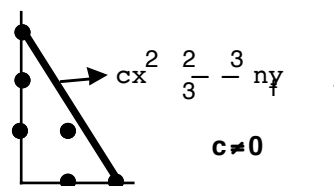
$$\begin{cases} x' = k+mxy \\ y' = qy^2 \end{cases}$$



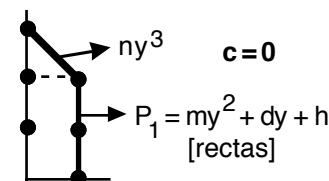
**5** Sea  $y=0$  triple, con  $A_2(1,0) = I = 0$ . El sistema es:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+mxy+ny^2 \\ y' = h+cx+dy+my^2 \end{cases} \quad \otimes = -ny^3, n \neq 0$$

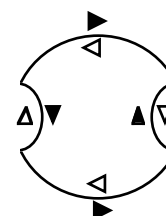
**5i.** Si  $c \neq 0$ , para que no haya puntos críticos finitos debe ser  $m=0$ . La poligonal nos da sólo una variedad simple a cada lado, con lo que el punto es un nodo y estamos de nuevo en el caso **A**.



**5ii.** Si  $c=0$ , la poligonal da diferentes posibilidades:

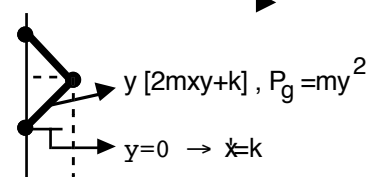


**5iia.** Sea  $m \neq 0$ .  $P_1=0$  puede tener dos raíces reales, ninguna o una doble. En el primer caso existen puntos críticos finitos. Si no tiene ninguna, sean cuales sean los signos de  $m$  y  $n$ , volvemos a encontrar el caso **A**:

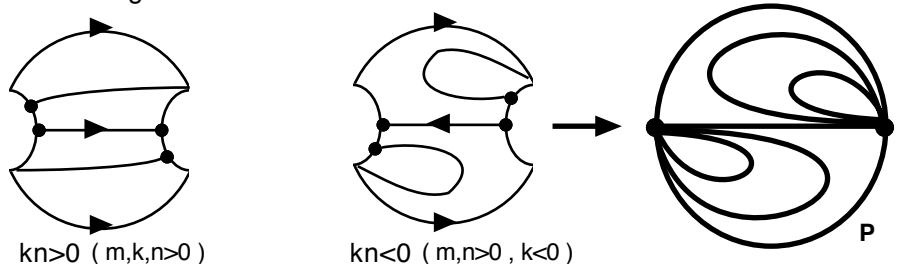


Si  $P_1=0$  tiene raíz doble podemos escribir:

$$\begin{cases} x' = k+mxy+ny^2 \\ y' = my^2 \end{cases} \quad k, m, n \neq 0$$



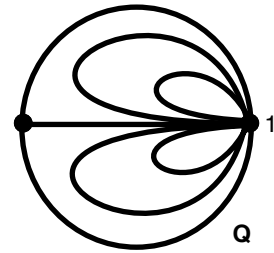
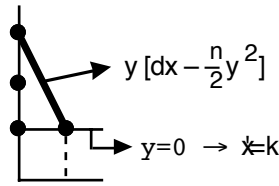
Si  $kn > 0$ , todas las posibilidades dan otra vez **A**, pero si  $kn < 0$  hay un tipo nuevo esencialmente igual a **P**:



5iib. Si  $m=0, d \neq 0$ , el sistema se puede poner (a debe ser cero):

$$\begin{cases} x' = k+by+ny^2 \\ y' = dy \end{cases} \quad k,n,d \neq 0$$

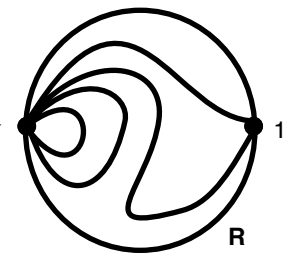
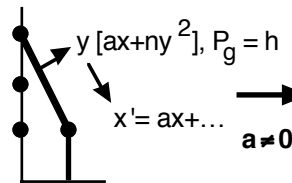
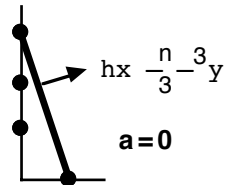
Si  $nk > 0$  sale otra vez **A**, pero si  $nk < 0$  aparece el caso **Q**.



5iic. Sea ahora  $m=d=0$ :

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+ny^2 \\ y' = h \end{cases} \quad n,h \neq 0$$

Si  $a=0$  la poligonal da de nuevo el caso **A**. Pero si  $a \neq 0$  teniendo en cuenta todas las posibilidades se obtiene esencialmente un nuevo caso **R**:



**6** Falta considerar la posibilidad  $\otimes = 0$ .

Vamos a trabajar análogamente a como hacíamos en el capítulo 5 para  $\Delta=0$ , aunque no hayamos tratado este caso en este capítulo (no sería difícil). Los resultados que obtendremos se podrían justificar con un número suficiente de cambios de variable.

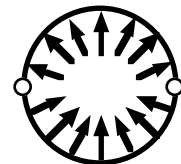
Si  $\otimes=0$ , el sistema es de la forma:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+x[lx+my] \\ y' = h+cx+dy+y[lx+my] \end{cases}$$

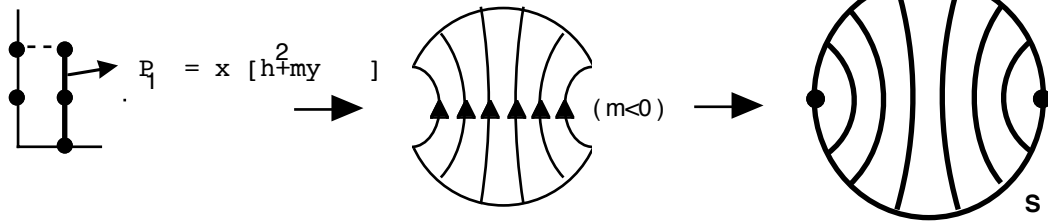
Si  $c \neq 0$ , para que no haya puntos finitos debe ser  $m=0$  (y el sistema no sería propiamente cuadrático). Así que  $c=0$ . El polinomio restante  $h+dy+my^2$  no puede tener raíces distintas (de nuevo habría puntos finitos). Las demás posibilidades se pueden escribir:

$$\begin{cases} x' = k+ax+by+mxy \\ y' = h+my^2 \end{cases} \quad h,m > 0 \qquad \begin{cases} x' = k+mxy \\ y' = my^2 \end{cases} \quad m \neq 0$$

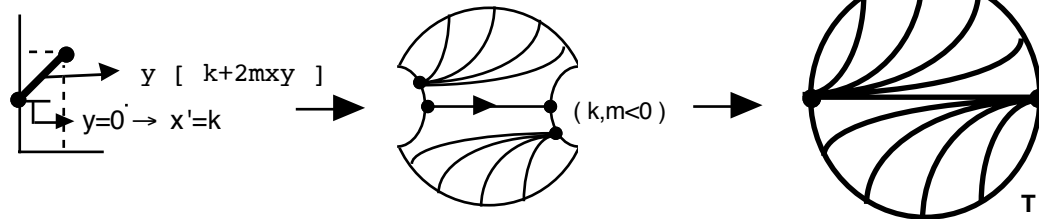
Como  $A^2(1,C)=Cm$  [  $B^2(0,1)=m$  ] existe para todo  $C$  [incluido  $\infty$ ] una variedad que llega al infinito con pendiente  $C$  ( orientada por  $x'=Cmx^2$  ) excepto, tal vez, para  $C=0$ . Para ver lo que ocurre en ese punto problemático acudimos, como siempre, a la poligonal.



Para el primer sistema:



Para el segundo:



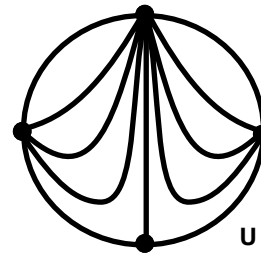
**7** Aunque sean poco cuadráticos analizamos también:

$$\begin{cases} x' = k + ax + by \\ y' = h + cx + dy \end{cases}$$

Como  $\sum i = 1$ , si el sistema ha de ser cordal debe existir algún punto en el infinito, con lo que  $\otimes = 0$  debe tener alguna raíz y podemos suponer  $c=0$ . Además, para que no haya puntos finitos debe cumplirse  $ad=bc=0$ :

$$\begin{cases} x' = k + ax + by \\ y' = h + dy \end{cases} \quad \otimes = y [ -by + (d-a)x ]$$

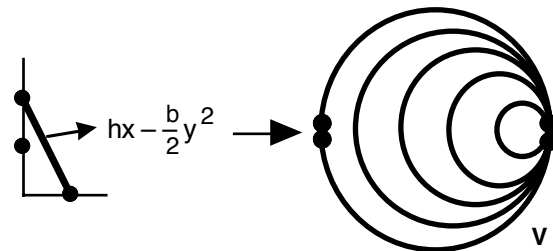
Si  $\otimes = 0$  tiene dos raíces distintas un punto deber ser un nodo y el otro silla-nodo (**U**):



Si  $\otimes = 0$  tiene la raíz doble  $y=0$  aparece el último caso **V**:

$$\begin{cases} x' = k + by \\ y' = h \end{cases} \quad b, h \neq 0$$

Por último, si  $\otimes = 0 \rightarrow b=d=a=0$  y queda el caso **A** de siempre.



**Ejemplos 10.** Analicemos para acabar un sistema homogéneo que, para ciertos valores del parámetro  $r$ , posee centro o foco degenerado y que, perturbado adecuadamente, presentará bifurcaciones de Hopf no lineales que darán lugar al nacimiento de ciclos límite:

$$[H] \quad \begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases}$$

Con la notación y los resultados de los capítulos 3 y 4 se tiene:

$$P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + rz + 4, \quad Q = -28, \quad V_2 = -2(r-4)(9r-22), \quad D_4 = -(27r + 284)(r-8)(r-4)^2$$

$P_4$  tiene 4 raíces complejas si  $-284/27 < r < 8$  y 2 reales y 2 complejas para los demás  $r$ .

En el primer caso, tenemos centro o foco del sistema homogéneo dependiendo del signo:

$$sg[I] = sg \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z^2 + 10z + r}{P_4(z)} dz = sg[Z_3] sg[Z_3 - r]$$

siendo  $Z_3$  la menor de las raíces de  $P_3(Z) = Z^3 - 5Z^2 + (2r-16)Z + 64 - r^2$ .

Una condición necesaria para la anulación de  $I$  es que se cumpla:

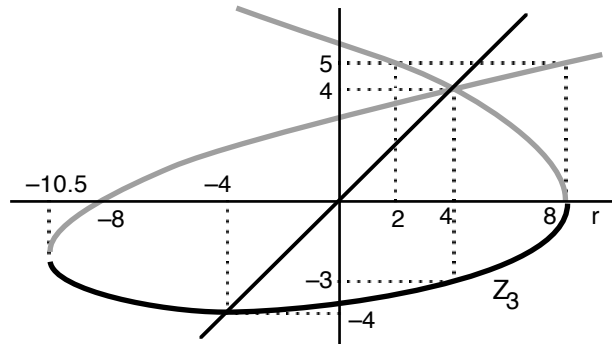
$$I_0 = -8(r+8)(r+4)(r-4)(r-8) = 0$$

Para  $r=8$  hay raíces reales (una doble). Los otros tres valores de  $r$  corresponden a casos de 4.2 en los que era posible calcular explícitamente la  $I$ . Utilizando aquellos resultados

$$\begin{aligned} r = -8 &\rightarrow N_L = 0, K_L < 0 \rightarrow \sqrt{\Psi} = 3\sqrt{17} & Z_3 = \frac{1}{2}[5 - 3\sqrt{17}] & I = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left[1 - \frac{7}{\sqrt{17}}\right] \sqrt{\sqrt{17}-1} \\ r = -4 &\rightarrow M = 0, K < 0 \rightarrow \sqrt{\sigma} = 2\sqrt{2} & Z_3 = -4 & I = 0 \\ r = 4 &\rightarrow F = M = 0, K > 0 \rightarrow \sqrt{\Omega} = 7, \sqrt{\omega} = 7 & Z_3 = -3, & I = \frac{12\pi}{7\sqrt{7}} \end{aligned}$$

El origen es un centro si  $r=-4$  y como ese es el único valor para el que  $I$  se anula deducimos que es un foco estable o inestable según  $r$  esté en los intervalos  $(-284/27, -4)$  o  $(-4, 8)$ , respectivamente.

[dibujando la curva  $P_3(z)=0$  de la derecha y viendo el signo de  $Z_3-r$  llegamos a la misma conclusión]



Veamos ahora los casos con  $z$  reales, asociados al "autovalor"  $\lambda = -z^2(z+1) \rightarrow sg[\lambda] = -sg[z+1]$ .

Comencemos con los de  $z$  doble:

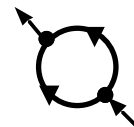
$$\text{si } r = -\frac{284}{27} \rightarrow P_4(z) = (z - \frac{2}{3})^2(z^2 + \frac{10}{3}z + 9) \rightarrow \text{dos complejas y } z_d = \frac{2}{3} \text{ con } \lambda = -\frac{20}{27}$$

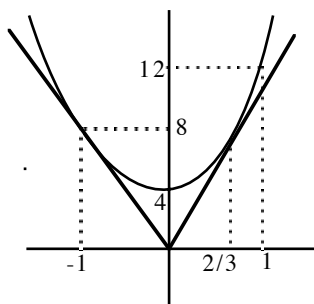
$$\text{si } r = 8 \rightarrow P_4(z) = (z+1)^2(z^2 + 4) \rightarrow \text{dos complejas y } z_d = -1 \text{ con } \lambda = 0$$

Posee [H], por tanto, una recta de puntos críticos [esta situación complicada la anunciaría el cálculo de los  $A = r^2(r-8)$  y  $B = (r^2 + 8r - 16)(r-8)$  de 4.6]. Si queremos su estructura:

$$\begin{aligned} x' &= -y^2(x+y) & y' &= (4x^2 + 4xy + y^2)(x+y) \\ &\rightarrow x' = -y^2 & &\rightarrow y' = 4x^2 + 4xy + y^2 \end{aligned} \rightarrow P_3(z) = (z+1)(z^2 + 4), \quad z = -1, \lambda = -1$$

Analizado este segundo sistema lo está el homogéneo inicial.





Para los otros casos situamos las  $z$  reales con las gráficas de  $z^4+2z^3+5z^2+4$  y  $-rz$ .

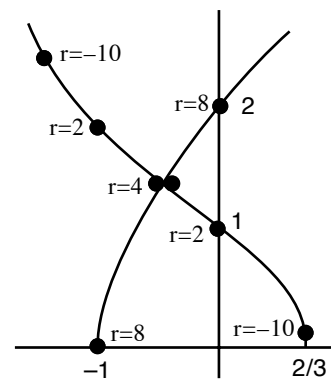
si  $r < -\frac{284}{27}$ , las dos  $z$  son positivas:

$$z_1, z_2 > 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0.$$

si  $r > 8$ , las  $z$  reales cumplen:

$$z_1 < -1 < z_2 < 0 \rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0.$$

[Las raíces de  $P_4(z)$  evolucionan con  $r$  como indica el dibujo de la derecha]



[Podríamos haber localizado estos  $z$  utilizando el método de Sturm de 3.5. Construyendo la secuencia de polinomios allí definida y sustituyendo en  $-\infty, -1, 0$  e  $\infty$  se tiene:

$-\infty$	+	-	-	$(r-4)(9r-22)$	$D_4$
-1	$8-r$	$r-8$	$r-4$	$(r-4)(r-8)$	$D_4$
0	+	$r$	$r-32$	$(r-4)(3r-124)$	$D_4$
$\infty$	+	+	-	$-(r-4)(9r-22)$	$D_4$

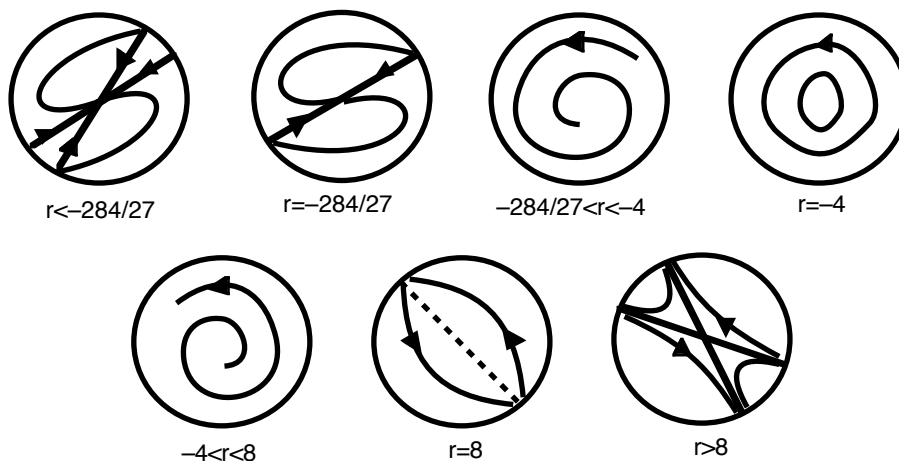
se obtienen, respectivamente, para  $r < -\frac{284}{27}$  y para  $r > 8$  las siguientes secuencias de signos:

$-\infty$	+	-	-	+	-	$-\infty$	+	-	-	+	-
-1	+	-	-	+	-	-1	-	+	+	+	-
0	+	-	-	+	-	0	+	+	±	±	-
$\infty$	+	+	-	-	-	$\infty$	+	+	-	-	-

También podríamos hallar los  $\lambda$  reales a partir de la ecuación de autovalores:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 - (3r-16)\lambda^3 + (3r^2-21r+56)\lambda^2 - (r-8)(r^2+4r-24)\lambda + 16(8-r) ]$$

Hemos concluido, pues, el análisis de [H], que, por ser homogéneo, es global:



Si perturbamos [H] con términos de mayor orden, la estructura del origen se mantiene excepto en los casos  $r=-4$  y  $r=8$ , en que hay que proseguir el análisis. Lo mismo sucede con el infinito si añadimos términos de grado 2 o menor. Se ve que el origen de [H], único punto crítico finito, es asintóticamente estable para  $r < -4$  (o sea, el infinito es repulsor si  $r < -4$ ).

Comencemos añadiendo un término de orden 5 :

$$\begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 - y^5 \end{cases}$$

Además de (0,0) para todo r tiene los puntos críticos  $(\sqrt{r-8}, -\sqrt{r-8})$ ,  $(-\sqrt{r-8}, \sqrt{r-8})$  si  $r > 8$ , que son focos estables si  $r \in (8, 17/2)$  o nodos estables si  $r \geq 17/2$  [ $\lambda^2 + 4(r-8)^2\lambda + 2(r-8)^3 = 0$ ].

Para  $r = -4$ , vamos a probar que el origen es un foco estable utilizando las técnicas y notaciones de 4.5. En aquella sección vimos que si  $l=0$  la estabilidad venía dada por el signo de:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_8 E}{p^{5/2}} dz, \text{ con } Q_8 = -z^8 - z^7, P = z^4 + 2z^3 + 5z^2 - 4z + 4 \text{ y } E = \exp\left[\int_0^z \frac{z^2 + 5z - 2}{P} dz\right]$$

Para reducir el integrando utilizamos que:

$$\frac{Q_8 E}{p^{5/2}} - \frac{d}{dz} \left[ \frac{E}{p^{3/2}} \left( z^5 + \frac{3}{2}z^4 + 5z^3 - \frac{11}{4}z^2 + \frac{38}{5}z - \frac{154}{15} \right) \right] = \frac{E}{15p^{5/2}} (160 - 1210z - 1727z^2)$$

En este caso para determinar el signo de J basta eliminar el coeficiente en z utilizando:

$$0 = \left[ \frac{E}{p^{3/2}} \left( \frac{1}{4}z^6 + z^5 + \frac{7}{2}z^4 + \frac{10}{3}z^3 + \frac{55}{12}z^2 - \frac{71}{15}z + \frac{443}{45} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{8}{45} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^{5/2}} (110 - 335z - 178z^2) dz$$

Así pues:

$$J = \frac{1}{15} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^{5/2}} (160 - 1210z - 1727z^2) dz = -\frac{1}{335} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{p^{5/2}} (5300 + 24211z^2) dz < 0$$

y por tanto el origen es estable. Si las ideas de 4.5 no hubiesen resuelto el problema habríamos tenido que evaluar la integral. Para hacerlo podríamos utilizar que, al estar P en uno de los casos factorizables del capítulo 4, se puede dar una expresión explícita (aunque complicada) de E. Usando los resultados de allí y tras una serie de simplificaciones se llega a que:

$$P = \frac{P_+ P_-}{16}, \text{ con } P_+ = (2z+1+K)^2 + (K+1)^2(K^2-1), P_- = (2z+1-K)^2 + (K-1)^2(K^2-1) \text{ y } K = \sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{2}}$$

Una primitiva de  $[z^2+5z-2]/P$  (no la que se anula en 0) se puede comprobar que es:

$$E_1 = \frac{K}{44} \left[ \sqrt{2} (3K^2-7) \arctan \frac{4\sqrt{2}(2z+1-K^2)}{K[(2z+1)^2+9-2K^2]} + (K^2+5) [2\ln(P_-/4) - \ln(P)] \right]$$

Así, las únicas integrales que deben evaluarse para obtener un valor aproximado de la J cuando  $r = -4$  en otro sistema con cualquier perturbación no homogénea de orden 5 serían:

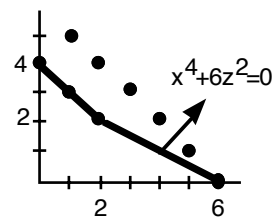
$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[E_1 - \frac{5}{2} \ln(P)\right] dz \text{ y } J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\left[E_1 - \frac{5}{2} \ln(P)\right] dz$$

[haciéndolo numéricamente resulta ser  $J_0 \approx 0.01586$ ,  $J_2 \approx 0.00516$ ]

Si  $r = 8$ , haciendo  $z = x+y$  para llevar el problema a  $z=0$  el sistema se convierte en

$$\begin{cases} x' = -z(z-x)^2 \\ z' = 4xz^2 - (z-x)^5 \end{cases} \rightarrow xB - zA = z^2[4x^2 + (z-x)^2]$$

El origen será entonces un centro o un foco de los complicados. Como hay un foco inestable si  $-4 < r < 8$ , es de esperar que lo siga habiendo para  $r = 8$ . Numéricamente parece ser eso lo que sucede.

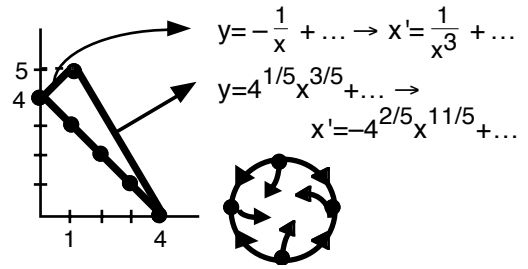


Analizamos ahora el infinito:

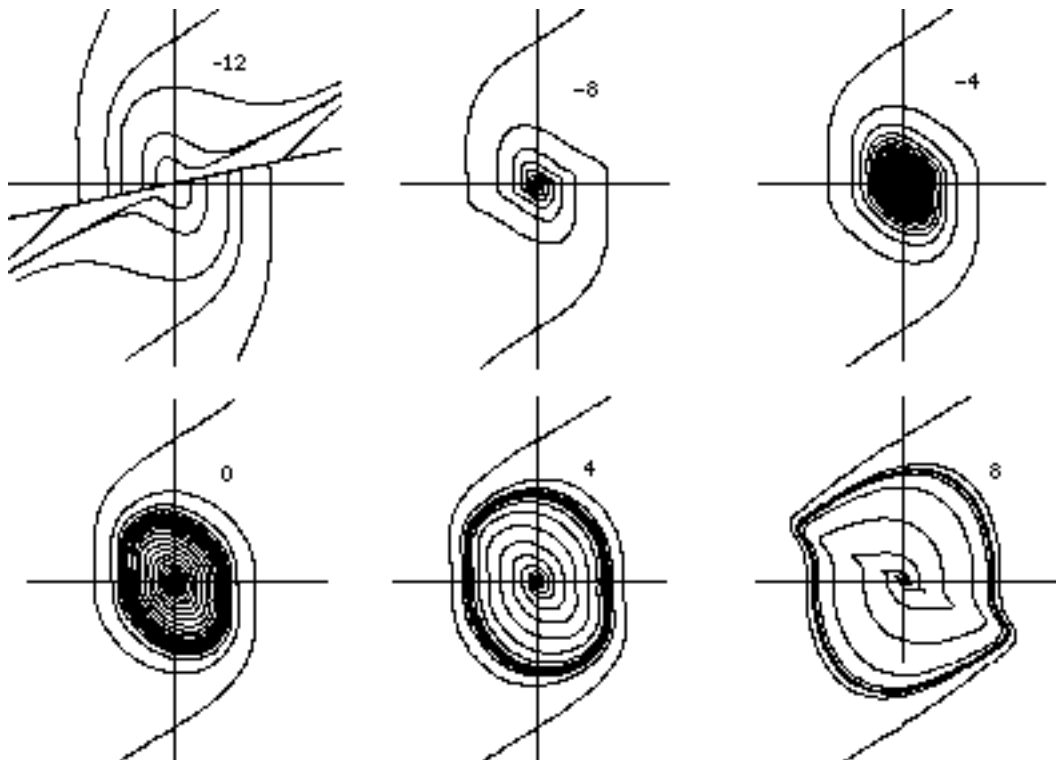
$$\otimes = -xy^5; \quad x=0 \rightarrow y' = -y^5 + \dots$$

Para  $y=0$  es necesario acudir a la poligonal.

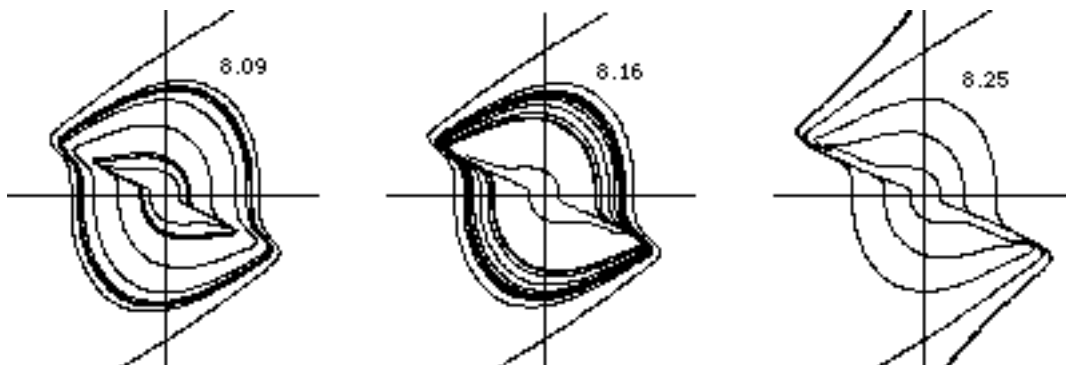
El infinito resulta ser repulsor para todo valor de  $r$  [lo que concuerda con la estabilidad del origen para  $r=-4$ : el infinito "empuja" las órbitas del centro homogéneo].



Para  $r \leq -4$  el origen será entonces globalmente asintóticamente estable. Al inestabilizarse el foco de  $(0,0)$  aparecerá un ciclo límite cuando sea  $-4 < r \leq 8$ . Integrando numéricamente se comprueban las afirmaciones anteriores:



A partir de  $r=8$  la integración numérica muestra el nacimiento de un segundo ciclo límite (inestable en este caso) que incluye en su interior los focos estables y el punto silla del origen. Los dos ciclos límites colapsan para un valor próximo a  $r=8.2$ :



Añadimos ahora a [H] unos términos lineales tipo centro:

$$\begin{cases} x' = -y - xy^2 - y^3 \\ y' = x + 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases}$$

El origen de este sistema es un foco estable para  $r < -2$  y uno inestable para  $r \geq -2$ , puesto que, para esos valores,  $x' = y + xy^2 + y^3$ ,  $y' = -x - 4x^3 - rx^2y - 5xy^2 - y^3$  tiene un foco del tipo opuesto [al ser  $l_3 = -r - 2$ ,  $l_5 = 9(3r + 4) \rightarrow l_5 < 0$  si  $r = -2$ ].

Los otros puntos críticos finitos son los  $(x, y)$  de la curva  $x = -y - 1/y$  para los que se cumpla

$$(r-8)y^6 + 2(r-9)y^4 + (r-13)y^2 - 4 = 0$$

que sólo tiene raíces reales (dos) si  $r > 8$ . Entonces el determinante de la aproximación lineal :

$$y^{-2} [-3(r-8)y^6 - 2(r-9)y^4 + (r-13)y^2 - 12] = y^{-2} [(r-9)y^4 + (r-13)y^2 - 6]$$

es, como se puede ver, negativo. Así esos puntos son siempre una pareja de sillars.

Como sabemos, el infinito es repulsor para  $r < -4$  y atractor si  $-4 < r < 8$ . Tenemos entonces que todas las órbitas tienden hacia el origen si  $r < -4$ , todas se van al infinito si  $-2 \leq r < 8$  y está garantizada la existencia de ciclos límite (inestables) cuando sea  $-4 < r < -2$ . Estos ciclos límite se bifurcan del infinito cuando  $r = -4$  y su amplitud va decreciendo con  $r$  hasta desaparecer en el origen para  $r = -2$ . Para  $r = -4$  el infinito (centro en la aproximación homogénea) parece que debe ser todavía repulsor. Lo podemos comprobar hallando la  $J^*$  definida en 6.2:

$$J^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_4^* E^*}{P^{3/2}} dz, \text{ con } Q_4^* = z^4 + 4z^3 - 5z^2 + 4z \text{ y } E^* = \exp\left[-\int_0^z \frac{z^2 + 5z - 2}{P} dz\right]$$

Reduciendo  $J^*$  por los caminos habituales acaba en la expresión:

$$J^* = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{P^{3/2}} R_2 dz, \text{ con } R_2 = 4 - 3z - 7z^2 = 2(z+1)(4-7z)$$

El integrando no tiene signo definido ni nos basta para hallar el signo de  $J^*$  utilizar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{P^{3/2}} (z^2 - 2z) dz = 0$$

pues  $-1 < 0 < 7/4 < 2$ . No basta tampoco considerar denominadores  $P^{5/2}$ , ni  $P^{7/2}$ .

Hallemos integrales numéricamente. Con el ordenador y la expresión dada de  $E_1$  se tiene:

$$J^*_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-E_1] P^{-3/2} dz \approx 0.580, \quad J^*_2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp[-E_1] P^{-3/2} dz \approx 0.251$$

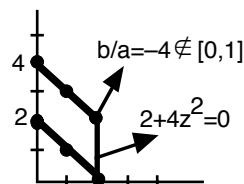
Y por tanto:

$$J^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^*}{P^{3/2}} (8 - 17z^2) dz = 8J^*_0 - 17J^*_2 \approx 0.37 > 0$$

Nos restaría el análisis el del infinito cuando  $r = 8$ :

$$z = x + y \rightarrow \begin{cases} x' = -z(z-x)^2 \\ z' = 4xz^2 - (z-x)^5 \end{cases} \rightarrow \otimes = z^2 [4x^2 + (z-x)^2]$$

Es un centro o foco complicado (probablemente repulsor).





## 7. Referencias.

Recogemos aquí (por orden alfabético) todas las referencias de los capítulos anteriores [a la izquierda figuran entre corchetes el o los capítulos en que fueron citadas]:

- [4] M. A. M. Alwash - N. G. Lloyd. Non-autonomous equations related to polynomial two-dimensional systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **105** [1987], 129-152.
- [5] A.F. Andreev. Investigation of the behavior of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point. *Annals of the U. of Leningrad* [1955], 183-207.
- [1,2,3,5,6] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- [4] A. A. Andronov - E. A. Leontovich - I. I. Gordon - A. G. Maier. Theory of bifurcations of dynamical systems on a plane. Wiley [1973].
- [2,5] J.I.Aranda. Métodos simples para el estudio de puntos singulares degenerados. *Actas VII CEDYA* [1984], 11-14.
- [3,5,6] J.I.Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos. *Actas X CEDYA* [1987], 20-25.
- [4,5] J.I.Aranda. Centros y focos degenerados de sistemas analíticos planos. *Actas XV CEDYA* [1997] (aún no publicadas).
- [3,4,6] J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ . *Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV* **79** [1968], 35-69.
- [4] V. I. Arnold. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. Springer-Verlag [1983].
- [1,4,5] V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations. *Encyclopaedia of Math. Sci.*, vol 1. Springer-Verlag [1989].
- [5] D. K. Arrowsmith. The singularity  $x(\partial/\partial y)$ . *J. of Diff. Eq.* **34** [1979], 153-166.
- [2,5] D. K. Arrowsmith - C. M. Place. An introduction to dynamical systems. Cambridge University Press [1990].
- [6] J. C. Artés - J. Llibre. Hamiltonian quadratic systems. *J. of Diff. Eq.* **107** [1994], 80-95.
- [6] J. C. Artés - J. Llibre. Phase portraits for quadratic systems having a focus and one antisaddle. *Rocky Mountain J. of Math.* **24** [1994], 875-889.
- [6] J. C. Artés - J. Llibre. Quadratic vector fields with a weak focus of third order. *Publicacions Matemàtiques* **41** [1997], 7-39.
- [5] S. Barocio. Singularidades de sistemas diferenciales analíticos en el plano. *Bol. S. Mat. Mexicana* [1959], 1-25.
- [4] N. N. Bautin. On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium point of focus or center type. *Amer. Math.Soc.Transl.Ser.I* **5** [1962], 396-413.
- [1,2] I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math.*, **24** [1901].
- [5] F. S. Berezovskaya - N. B. Medvedeva. A complicated singular point of "center-focus" type and the Newton diagram. *Selecta Mathematica* **13** [1994], 1-15.
- [4,6] T. R. Blows - N. G. Lloyd. The number of limit cycles of certain polynomial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **98** [1984], 215-239.
- [4,6] T. R. Blows - C. Rousseau. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields. *J. of Diff. Eq.* **104** [1993], 215-242.

- [4] E. Brieskorn - H. Knörrer. Plane algebraic curves. Birkhäuser. [1986].
- [5] Briot - Bouquet. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. Journal de l'Ecole Polytechnique [1856].
- [5] M. Brunella - M. Miari. Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra. J. of Diff. Eq. **85** [1990], 338-366.
- [1,4,5] A. D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer-Verlag [1989].
- [6] L. Cairó - J. Llibre. Phase portraits of planar semi-homogeneous vector fields. Nonlinear Analysis, T.M.A. **29** [1997], 783-811.
- [2] J. Carr. Applications of center manifold theory. Springer-Verlag [1981].
- [5] J. Chavarriga - I. García - J. Giné. Integrability of centers perturbed by quasi-homogeneous polynomials. J. of Math. Anal. and Appl. **210** [1997], 268-278.
- [4] J. Chavarriga - J. Giné. Integrability of a linear center perturbed by a fourth degree homogeneous polynomial. Publicacions Matemàtiques **40** [1996], 21-39.
- [4] J. Chavarriga - J. Giné. Integrability of a linear center perturbed by a fifth degree homogeneous polynomial. Publicacions Matemàtiques **41** [1997], 335-356.
- [6] G. Q. Chen - Z. J. Liang. Affine classification for the quadratic vector fields without the critical points at infinity. J. of Math. Anal. and Appl. **172** [1993], 62-72.
- [4,6] C. Chicone - J. Sotomayor. On a class of complete polynomial vector fields in the plane. J. of Diff. Eq. **61** [1986], 398-418.
- [2,4] S. N. Chow - J. K. Hale. Methods of bifurcation theory. Springer-Verlag [1982].
- [6] A. Cima - A. Gasull - F. Mañosas. On polynomial hamiltonian planar vector fields. J. of Diff. Eq. **106** [1993], 367-383.
- [5] A. Cima - A. Gasull - F. Mañosas. Cyclicity of a family of vector fields. J. of Math. Anal. and Appl. **196** [1995], 921-937.
- [6] A. Cima - J. Llibre. Bounded polynomial vector fields. Trans. Amer. Math. Soc. **318** [1990], 557-579.
- [3,4,6] A. Cima - J. Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. J. of Math. Anal. and Appl. **147** [1990], 420-448.
- [3] C. Coleman. Equivalence of planar dynamical and differential systems. J. of Diff. Eq. **1** [1965], 222-233.
- [4,6] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Some theorems on the existence, uniqueness and nonexistence of limit cycles for quadratic systems. J. of Diff. Eq. **67** [1987], 372-399.
- [6] B. Coll - A. Gasull - J. Llibre. Quadratic systems with a unique finite rest point. Publicacions Matemàtiques UAB **32** [1988], 199-259.
- [5] B. Coll - J. Llibre. Singularidades sobre el plano real de un sistema analítico de orden dos. Actas IX CEDYA [1986], 135-139.
- [3,4] C. B. Collins. Algebraic conditions for a center or a focus in some simple systems of arbitrary degree. J. of Math. Anal. and Appl. **195** [1995], 719-735.
- [3] T. Date. Classification and analysis of two-dimensional homogeneous quadratic differential systems. J. of Diff. Eq. **32** [1979], 311-334.
- [6] R. J. Dickson - L. M. Perko. Bounded quadratic systems in the plane. J. of Diff. Eq. **7** [1970], 251-273.
- [1,4] H. Dulac. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France **51** [1923].
- [1,5] F. Dumortier. Singularities of vector fields on the plane. J. of Diff. Eq. **23** [1977], 53-106.
- [6] F. Dumortier - C. Herzsens. Tracing phase portraits of planar polynomial vector fields with detailed analysis of the singularities (Preliminary version). Escuela de invierno sobre campos vectoriales polinomiales. Lleida [1997].

- [4,6] F. Dumortier - P. Roussarie - C. Rousseau. Hilbert 16th problem for quadratic vector fields.  
J. of Diff. Eq. **110** [1994], 86-133.
- [6] F. Dumortier - C. Rousseau. Cubic Liénard equations with linear damping.  
Nonlinearity **3** [1990], 1015-1039.
- [6] F. Dumortier - D. Shafer. Restrictions on the equivalence homeomorphism in stability of  
polynomial vector fields. J. London Math. Soc. **41** [1990], 100-108.
- [1,3] H. Forster. Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung  
erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Math. Zeit., Dtsch, **43** [1938].
- [6] A. Gasull - A. Guillamon - V. Mañosa. Phase portrait of hamiltonian systems with  
homogeneous nonlinearities. Preprint, Universitat Autònoma de Barcelona [1997].
- [6] A. Gasull - S. Li-Ren - J. Llibre. Chordal quadratic systems.  
Rocky Mountain J. of Math. **16** [1986], 751-782.
- [6] A. Gasull - R. Prohens. On quadratic systems with a degenerate critical point.  
Rocky Mountain J. of Math. **26** [1996], 135-164.
- [2,4,5] J. Guckenheimer - P. Holmes. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and  
bifurcations of vector fields. Springer-Verlag [1983].
- [2] J. Hale - H. Koçak. Dynamics and bifurcations. Springer-Verlag [1991].
- [3] P. Hartman. Ordinary differential equations. Wiley [1964].
- [5] E. L. Ince. Ordinary differential equations. Longman [1927].
- [4] Yu. S. Il'yashenko. Algebraic insolvability and almost algebraic solvability of the  
center-focus problem. Funct. Anal. Appl. **6** [1972], 197-202.
- [4,5] Yu. S. Il'yashenko. Algebraically and analytically solvable problems in theory of  
ordinary differential equations. J. Soviet Math. **47** [1987], 2570-2584.
- [4,5] Yu. S. Il'yashenko - S. Yakovenko. Concerning the Hilbert 16th problem.  
AMS Translations, Series 2, vol 165 [1995].
- [6] P. de Jäger. Phase portraits for quadratic systems with a higher order singularity with  
two zero eigenvalues, J. of Diff. Eq. **87** [1990], 169-204.
- [5] D. T. Lê - K. Saito - B. Teissier. Singularity theory. World Scientific [1991].
- [1,2,3] S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- [6] C. Li - J. Llibre - Z. Zhang. Weak foci, limit cycles and bifurcations for bounded quadratic  
systems. J. of Diff. Eq. **115** [1995], 388-436.
- [6] A. Lins - W. Melo - C. C. Pugh. On Liénard's equation.  
Lecture Notes in Math. **597** [1977], 335-357.
- [3,4,6] J. Llibre - J. S. Pérez del Río - J. A. Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous  
polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity.  
J. of Diff. Eq. **125** [1996], 490-520.
- [4] N. G. Lloyd. A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems.  
J. London Math. Soc. (2) **20** [1979], 277-286.
- [4] N. G. Lloyd. Small amplitude limit cycles of polynomial differential equations.  
Lecture Notes in Mathematics **1032** [1982], 346-357.
- [4] N. G. Lloyd. Limit cycles of polynomial systems. LMS Lect. Notes Series **127** [1988], 192-234.
- [4,6] N. G. Lloyd - T. R. Blows - M. C. Kalenge. Some cubic systems with several limit cycles.  
Nonlinearity **1** [1988], 653-669.
- [1,5] A. M. Lyapunov. Investigation of one of the singular cases of the theory of stability of motion.  
Mathematicheskii Sbornik, **17** [1893].
- [1,3,4] V. V. Nemytskii - V. V. Stepanov. Qualitative theory of differential equations.  
Princeton University Press [1960].

- [3] T. A. Newton. Two dimensional homogeneous quadratic differential systems.  
J. of Diff. Eq. **20** [1978], 120-138.
- [2,6] L. Perko. Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag [1996].
- [1] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.  
Jour. Math. Pures et Appl. [1881-82-85-86].
- [3] J. Rey Pastor. Análisis matemático. Kapelusz [1965].
- [4,6] C. Rousseau - D. Schlomiuk. Cubic vector fields symmetric with respect to a center.  
J. of Diff. Eq. **123** [1995], 193-223.
- [5] A. P. Sadovskii. The center and focus problem. Differential Equations **4** [1968], 1034-1037.
- [5] M. E. Sagalovich. Topological structure of the neighborhood of a critical point of a  
differential equation. Diff. Equations **11** [1975], 1498-1503.
- [5] M. E. Sagalovich. Classes of local topological structures of an equilibrium state.  
Diff. Equations **15** [1979], 253-255.
- [4] D. Schlomiuk - J. Guckenheimer - R. Rand. Integrability of plane quadratic vector fields.  
Expo. Math. **8** [1990], 3-25.
- [4] A. S. Shubé. The structure of the integrating factor of a cubic system with a singular  
point of center type. Differential Equations **32** [1996], 726-729.
- [4] K. S. Sibirsky. On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point.  
Differential Equations **1** [1965], 36-47.
- [4,6] S. Songling. A method of constructing cycles without contact around a weak focus.  
J. of Diff. Eq. **41** [1981], 301-312.
- [3] J. V. Uspensky. Theory of equations. McGraw-Hill [1948].
- [3,6] N. I. Vulpe - K. S. Sibirskii. Geometric classification of quadratic differential systems.  
Differential Equations **13** [1977], 548-556.
- [4] R. J. Walker. Algebraic curves. Princeton University Press [1950].
- [2] S. Wiggins. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.  
Springer-Verlag [1990].
- [4] Ye Yanqian. Theory of limit cycles. Trans. Math. Monographs, 66. AMS. [1986].
- [4] H. Zoladek. Quadratic Systems with Center and Their Perturbations.  
J. of Diff. Eq. **109** [1994], 223-273.

## 8. Conclusiones.

Se ha mostrado en la memoria que el análisis de la estructura local del origen de un sistema autónomo analítico plano o la estructura del infinito de uno polinomial se puede llevar a cabo, con los métodos presentados, de forma mucho más organizada y con muchos menos cálculos que con otros métodos ya conocidos. Además se han obtenido resultados nuevos sobre un tema abierto sobre el que existían pocos trabajos anteriores: la distinción entre centros y focos degenerados.

Consideramos que nuestra mayor aportación es la utilización sistemática de la poligonal de Newton para localizar y orientar las variedades que pasan por el origen o que llegan al infinito (teoremas de las secciones 5.2 y 6.3). En estos teoremas se simplifica además radicalmente la forma de precisar la estructura de las órbitas entre dos variedades consecutivas: basta hallar el signo de un polinomio (basado en los términos homogéneos de menor orden para el origen y de mayor orden para el infinito) o, excepcionalmente, el de algún otro más (en los casos que se han descrito). Y en dichos teoremas se incluye la posibilidad de la presencia de variedades similares a las centro que no está recogida en otros resultados. Con estos teoremas se puede, en general, precisar la estructura del origen o del infinito sin realizar ningún cambio de variable (a diferencia del camino habitual). Con ellos, se simplificarían notablemente los análisis de puntos degenerados que se realizan incluso en las referencias más recientes, como ponen de manifiesto los abundantes ejemplos analizados.

Se han sugerido también formas de abordar, sin necesidad de realizar blow-ups (que en alguna ocasión acabarán siendo necesarios), las situaciones excepcionales para las que los teoremas anteriores no bastan (sección 5.4): lo que podríamos llamar 'vector propio múltiple' (rama múltiple asociada a un segmento de la poligonal) con el 'autovalor' correspondiente cero, el caso en que se anula idénticamente alguno de los polinomios asociados a la poligonal y el caso en que no existen variedades que lleguen al origen, es decir, si hay un centro o un foco.

Un caso particular de estos teoremas son los demostrados previamente en el capítulo 3, que permiten organizar de forma directa y práctica el estudio de las perturbaciones de los más conocidos sistemas homogéneos, incluyendo los casos con 'variedades centro' (rectas de puntos críticos del sistema homogéneo). En ellos queda precisado cuando son innecesarios los blow-ups (o la utilización de la poligonal) para concluir el análisis del origen. En la sección 6.2 se ha visto que el problema análogo para el infinito es exactamente igual de (poco) complicado y que, en general, tampoco será necesario hacer ningún cambio de variable. Creemos, además, interesante la visión de estos sistemas de una forma similar a los lineales: con su 'aproximación homogénea', sus 'vectores propios' y su ecuación de 'autovalores'.

Se ha explotado esta visión en los trabajos de las secciones 3.4 y 3.6 para los sistemas que comienzan con términos homogéneos de orden dos y tres, tras obtener formas simplificadas de caracterizar y calcular las raíces de los polinomios de tercer y cuarto grado.

Otra serie de resultados se refieren al caso de que no existan variedades que lleguen al origen, es decir, si se trata de un centro o un foco (capítulo 4). Por una parte se han presentado simplificaciones para el cálculo de los valores focales para los centros lineales perturbados. Por otra, se ha trabajado en el tema cuando la aproximación homogénea es de tercer orden. Se ha caracterizado entonces cuándo el sistema no posee variedades que lleguen al origen, se ha obtenido una condición algebraica necesaria (totalmente general) para la existencia de centros en esa situación y se ha dado una lista de casos en que es calculable la integral que da la estabilidad del foco. También se ha visto, tanto cerca del origen como del infinito (sección 6.2), cómo reducir las complicadas integrales que informan sobre la estabilidad en el caso de que la aproximación homogénea tenga un centro, reducciones que pueden bastar para garantizar algebraicamente que se ha convertido en un foco. Se ha obtenido también algún resultado sobre los centros y focos cuya detección exige la poligonal y para los que no son posibles los desarrollos del capítulo 4: cuando la poligonal se reduce a un segmento su análisis se traslada fácilmente al de uno o dos problemas homogéneos (sección 5.4).

Han quedado, desde luego, varios temas abiertos en los que se podría profundizar. En concreto, se podrían atacar algunos de los casos en que la poligonal no decide, como los centros o focos asociados a poligonales con más de un segmento. También podría ser útil el empleo sistemático de series en la ecuación de las órbitas. Otra línea de trabajo sería la mejora de los resultados dados sobre perturbaciones de centros homogéneos y el estudio de los de orden mayor que tres. Un tema en el que se podría avanzar es el de la estabilidad del origen en la línea de las ideas que se esbozan en la sección 3.7. Ya que se dispone de instrumentos adecuados, sería productivo abordar la clasificación de diversas clases de sistemas polinomiales para los que el problema estuviese abierto...

Otro amplio campo en el que se podrían aplicar estos resultados sería el estudio de las bifurcaciones de sistemas planos. Un camino podría ser la utilización del hecho de que en los términos del sistema que proporcionan puntos sobre la poligonal (interior o exterior) reside casi siempre toda la información sobre la estructura del origen y del infinito. Y otra posibilidad sería la búsqueda de resultados sobre la 'bifurcación de Hopf no lineal' aparecida en varios ejemplos.