

**MÉTODOS SIMPLES
PARA EL ANÁLISIS DE
PUNTOS DEGENERADOS DE
SISTEMAS ANALÍTICOS
PLANOS**

Jose I. Aranda Iriarte

Introducción

- A. LA 'APROXIMACIÓN HOMÓGENEA'**
- B. UTILIZANDO LA POLIGONAL DE NEWTON**
- C. CENTROS Y FOCOS DEGENERADOS**

Introducción

Objetivo principal: presentar un método directo y sistemático para analizar el origen y el infinito del sistema analítico

$$[S] \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + A^{n+1}(x,y) + \dots \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + B^{n+1}(x,y) + \dots \end{cases}, \quad A^k, B^k \text{ homogéneos}$$

Hacia 1900:

Poincaré: puntos elementales (nodos, sillas, focos, centros)

Bendixson: puntos con un autovalor cero (nodos, sillas, silla-nodos)

Forster (1937), **Nemytskii-Stepanov** (1960), **Lefschetz** (1963),

Andronov-Leontovich-Gordon-Maier (1966), **Argemi** (1968)

Mediante cambios de variable ('blow-ups'), un punto no elemental, que no sea centro o foco, se reduce a otros en que, a lo más, uno de los autovalores de la aproximación lineal es cero (**Dumortier**, 77).

Esto, en teoría, cierra el problema, pero son demasiados cálculos.

Siguen apareciendo trabajos mejorando el método, como:

Bruno (79; 89 en inglés)

(recomendado por **Arnold-II"Yashenko** (89) en "Enc. Math. Sc.").

Muchos más cálculos (y errores: pág. 149) que **J.I.A.** (CEDYA 87).

Berezovskaya (91 en inglés), **Brunella-Miari** (90) [poligonal]

Collins (95), **Libre...** (96) [homogéneos perturbados] , ...

Pero no hay teoría práctica global y se siguen usando los blow-ups.

Un punto crítico **elemental** (no centro o foco) queda precisado con:
las **variedades** que llegan al origen (**vectores propios**)
el **flujo** sobre ellas (signo del **autovalor**)

Un punto crítico **con un autovalor cero** queda precisado con:
el flujo sobre la **variedad estable o inestable** (autovalor)
el flujo sobre la **variedad centro** (desarrollo de Taylor)

Idea de nuestros métodos (**sin cambios de variable**):

localizar y orientar las **variedades** que llegan al origen (si las hay)
y con poco trabajo más:
precisar si el sector entre dos variedades consecutivas es
parabólico, elíptico o hiperbólico

Puede bastar la '**aproximación homogénea**'

$$[H] \begin{cases} x' = A^n(x,y) \\ y' = B^n(x,y) \end{cases}$$

(hallar unos '**vectores propios**', unos '**autovalores**',
el **signo de un polinomio** y, tal vez, términos de una '**variedad centro**')

Si no basta (**autovalor cero múltiple**) utilizaremos la

poligonal de Newton

(proporciona las variedades que llegan al origen)

Todo es igual para el origen y para el infinito
(teoría dual)

Si no hay variedades que lleguen al origen:

distinguir entre **centro y foco** (aún con **problemas abiertos**)

Para puntos **elementales**:

aproximación lineal: centro o foco según el signo de la parte real de los autovalores, si son complejos

sistema no lineal: los focos se conservan y un centro puede convertirse en foco (**constantes de Lyapunov**)

(problema algebraico)

Para puntos **degenerados**:

aproximación homogénea: centro o foco según el signo de

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}}{P_{n+1}} dz, \text{ con } P_{n+1} = B^n - zA^n|_{(1,z)}, E_{n-1} = A^n x + B^n y|_{(1,z)}$$

si no hay 'autovalores' reales [n impar]

sistema completo: los focos se conservan y un centro puede convertirse en foco (**integrales complicadas**)

(conocido, pero **sin cálculos** concretos)

Puede haber centro o foco aunque haya 'autovalores' reales:

deben ser autovalores cero múltiples y necesitamos la **poligonal**

(no es posible desarrollar en serie la ecuación en polares,

pero casi es problema homogéneo si la poligonal se reduce a un segmento)

A. LA 'APROXIMACIÓN HOMOGÉNEA'

$$[S] \begin{cases} x' = A^n(x,y) + A^{n+1}(x,y) + \dots \\ y' = B^n(x,y) + B^{n+1}(x,y) + \dots \end{cases} ; [H] \begin{cases} x' = A^n(x,y) \\ y' = B^n(x,y) \end{cases}$$

Estirando verticalmente el origen **0** con el blow-up $x = x, y = xv$ se llega a:

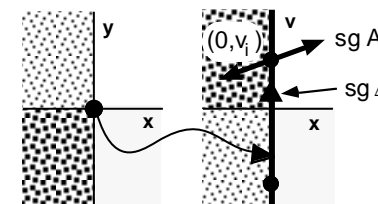
$$\begin{cases} x' = xA^n(1,v) + o(x) \\ v' = P_{n+1}(v) + o(1) \end{cases}, P_{n+1} = B^n - vA^n$$

[para completar se hace: $x = yu, y = y$]

[equivale a trabajar en polares]

→ si una órbita llega a **0** es tangente a alguna de las rectas definidas por

$$\Delta(x,y) \equiv xB^n(x,y) - yA^n(x,y) = 0$$



Teorema H

Sea $\Delta \neq 0$ y tenga $\Delta=0$ raíces reales $y=v_1x, \dots, y=v_qx$ [y tal vez $x=0$].

Si para las v_i no simples es $A^n(1,v_i) \neq 0$ [$B^n(0,1) \neq 0$] \Rightarrow

existen variedades $y=v_i x + o(x)$ [$x=o(y)$] y la estructura local queda determinada con el signo de $\Delta(x,y)$ y el flujo sobre cada variedad

(dado por $x' = A^n(x,v_i x)$ si $A^n(1,v_i) \neq 0$ [$y' = B^n(0,y)$ si $B^n(0,1) \neq 0$]
o precisado con algún término más de las variedades si es cero).

[los $(0,v_i)$ tienen a lo más un autovalor 0]

Ejemplo:
$$\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$$

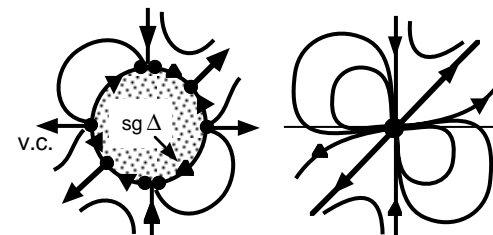
$$\Delta(x,y) = 2x^2y[x-y]$$

$$y=x \rightarrow x' = x^3$$

$$x=0 \text{ doble} \rightarrow y' = -y^3$$

$y=0$ simple $\rightarrow A^3(1,0)=0 \rightarrow$ llevando $y=c_2x^2+\dots$ a $f(x,y) \frac{dy}{dx} = g(x,y)$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) \rightarrow x' = x^5 + o(x^6)$$



Similitudes con los sistemas lineales (n=1):

Para el sistema **homogéneo** [H]:

$y=v_i x$ son invariantes [$(1, v_i)$ **vectores propios**]

El flujo sobre ellos viene dado por $\lambda_i = A(1, v_i)$ [**autovalores**]

A un $\lambda=0$ está asociada una recta de puntos críticos.

Para el sistema **no homogéneo** [S]:

Si existen autovalores reales y todos son no nulos el sistema [S] mantiene la estructura de la aproximación homogénea [H]

(también los focos mantendrán la estructura)

A un v simple con $\lambda=0$ está asociada una '**variedad centro**'.

Diferencia:

los λ y los v no fijan la estructura (se necesita el **signo de Δ**).

No basta el teorema H:

si $\Delta \neq 0$, si existen 'vectores propios' múltiples con 'autovalor' $\lambda=0$
o si $\Delta=0$ no tiene raíces reales (centro o foco).

Caso n=2

$$[H2] \quad \begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = ex^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$$

Autovalores y vectores propios se obtienen de:
$$\begin{cases} a+bz+cz^2 = \lambda \\ e+fz+gz^2 = \lambda z \end{cases}$$

Eliminando la λ obtenemos la ecuación de **vectores propios**:

$$P_3(z) = cz^3 + (b-g)z^2 + (a-f)z - e = 0$$

Hallando la **resultante** en z se tiene la ecuación de **autovalores**:

$$\begin{aligned} P_3(\lambda) &\equiv c\lambda^3 + q_\lambda \lambda^2 + r_\lambda \lambda + s_\lambda \equiv \\ &\equiv c\lambda^3 + [bg-g^2-ac-2fc] \lambda^2 + [2ag^2-abg-fbg+2afc+f^2c-bce-2gce] \lambda + \\ &\quad + [-a^2g^2+afbg-af^2c-b^2ge+2agce+fbce-c^2e^2] = 0 \end{aligned}$$

Teorema

$$\lambda=0 \text{ es autovalor} \Leftrightarrow s_\lambda = 0$$

$$\text{Hay } z \text{ múltiple} \Leftrightarrow D_z \equiv (b-g)^2(a-f)^2 - 4c(a-f)^3 + 4e(b-g)^3 - 18ce(b-g)(a-f) - 27c^2e^2 = 0$$

Teorema (caracterización de cuándo no basta el teorema H)

$$\text{Si existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Rightarrow A=B=0$$

$$\text{Si } q^2+m^2 \neq 0, \text{ existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow A=B=0$$

$$\text{Si } q=m=0, \text{ existe } z \text{ múltiple asociado a } \lambda=0 \Leftrightarrow D_z=0 \Leftrightarrow s_\lambda=0 \\ [q \equiv b+2g, m \equiv 2a+f, A \equiv aq^2-bqm+cm^2, B \equiv eq^2-fqm+gm^2]$$

Caso n=3

$$[H3] \begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$$

Vectores propios, discriminante y autovalores dados por:

$$P_4(z) = dz^4 + (c-h)z^3 + (b-g)z^2 + (a-f)z - e = 0$$

$$D_z = -27d^2(a-f)^4 + [18(b-g)d - 4(c-h)^2](c-h)(a-f)^3 + \\ + [(c-h)^2(b-g)^2 - 4(b-g)^3d + 6(c-h)^2de - 144(b-g)d^2e](a-f)^2 + \\ + [80(b-g)^2de - 18(c-h)^2(b-g)e - 192d^2e^2](c-h)(a-f) + \\ + 4(c-h)^2(b-g)^3e - 16(b-g)^4de - 27(c-h)^4e^2 + 144(c-h)^2(b-g)de^2 - 128(b-g)^2d^2e^2 - 256d^3e^3$$

$$P_4(\lambda) \equiv d^2\lambda^4 + p_\lambda\lambda^3 + q_\lambda\lambda^2 + r_\lambda\lambda + s_\lambda \equiv \\ \equiv d^2\lambda^4 + [-ad^2 - 3fd^2 + 2hbd + cgd - 3hgd - c^2h + 2ch^2 - h^3] \lambda^3 + \\ + [3afd^2 + 3f^2d^2 - 2ahbd - 4fhbd + 6ahgd + 3fhgd - acgd - 2fcgd - 4ach^2 - 2fch^2 + ac^2h + 2fc^2h + \\ + 3ah^3 + ched - 3h^2ed + bg^2d - g^3d - chbg + chg^2 + h^2b^2 - h^2bg - bed^2 - 3ged^2] \lambda^2 + \\ + [-3af^2d^2 - f^3d^2 - 3a^2hgd - 3a^2h^3 + 2a^2ch^2 + 4afhbd - 6afhgd + 4afch^2 - 2afc^2h + 2afcgd + \\ + f^2cgd + 2f^2hbd - f^2c^2h + 3aged^2 + 3fged^2 + 2fbed^2 - ached - fched + 6ah^2ed + 2ag^3d - \\ - abg^2d - fbg^2d + achbg - 2achg^2 - ce^2d^2 - 3he^2d^2 - ah^2b^2 + 2ah^2bg + fchbg - fh^2b^2 - \\ - 2hb^2ed + hbged - cbged - 2cg^2ed - 3ch^2be + c^2hbe + 2c^2hge] \lambda + \\ + [af^3d^2 + 3a^2fhgd - af^2cgd - 2af^2hbd + a^3h^3 - 2a^2fch^2 + af^2c^2h - 3afged^2 - f^2bed^2 - \\ - 3a^2h^2ed + afched - a^2g^3d + afbg^2d + a^2chg^2 - a^2h^2bg - afchbg + afh^2b^2 + 3ahe^2d^2 + \\ + fce^2d^2 + 2acg^2ed - ahbged + fcbged + 2fhb^2ed - 2ac^2hge - fc^2hbe + 3ach^2be + \\ + chb^2ge - h^2b^3e - b^2g^2ed + c^3he^2 - c^2ge^2d - 3chbe^2d + 2bge^2d^2 - e^3d^3] = 0$$

Teorema

$$\lambda=0 \text{ es autovalor} \Leftrightarrow s_\lambda = 0. \text{ Hay } z \text{ múltiple} \Leftrightarrow D_z = 0$$

Teorema

Si [H3] posee λ reales y todos esos λ reales son negativos, el origen del sistema perturbado es asintóticamente estable.

(la parte real de los λ complejos no tiene nada que ver)

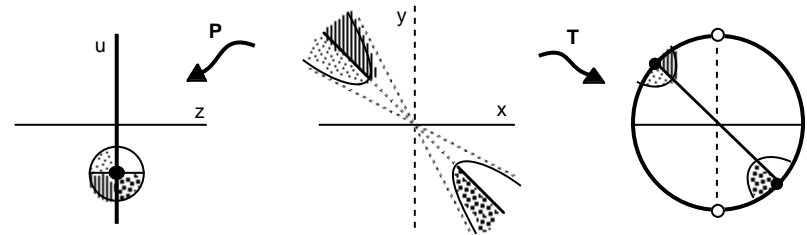
Infinito 'poco degenerado'

$$[S] \begin{cases} x' = A^n(x,y) + \dots + A^m(x,y) \\ y' = B^n(x,y) + \dots + B^m(x,y) \end{cases} \cdot Z = \{r < 1\}, C = \{r = 1\}.$$

Cambios:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad r \rightarrow r^* = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$$

Mejor: $P: \mathbb{R}^2 - \{x=0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{z=0\}$ con $z = \frac{1}{x}; u = \frac{y}{x}$
 $(x,y) \rightarrow (z,u)$



Acompañado de: $P^*: \mathbb{R}^2 - \{y=0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{u=0\}$ con $z = \frac{x}{y}; u = \frac{1}{y}$
 $(x,y) \rightarrow (z,u)$

Las direcciones de llegada al infinito vienen dadas por:

$$\otimes(x,y) \equiv xB^m(x,y) - yA^m(x,y) = 0$$

Teorema H $^\infty$

Sea $\otimes \neq 0$ y tenga $\otimes = 0$ raíces reales $y = u_1x, \dots, y = u_qx$ [y tal vez $x=0$].

Si para las u_i no simples es $A^m(1, u_i) \neq 0$ [$B^m(0, 1) \neq 0$] \Rightarrow existen variedades $y = u_i x + o(x)$, $|x| \rightarrow \infty$ [$x = o(y)$, $|y| \rightarrow \infty$] que llegan al infinito con pendiente u_i [∞] y la estructura de las órbitas cerca de C queda fijada con el signo de $\otimes(x,y)$ y el flujo sobre cada variedad

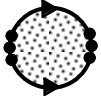
(dado por $x' = A^m(x, u_i x)$, si es $\neq 0$ [$y' = B^m(0, y)$, si $\neq 0$],

o precisado con términos de la variedad $y = u_i x + c_0 + c_{-1}x^{-1} + \dots$).

B. UTILIZANDO LA POLIGONAL DE NEWTON

(para tratar casos en que no bastan los teoremas H y H[∞])

Ejemplo:

$$\begin{cases} x' = y^2 - 2x^3 \\ y' = 3x^2y + x^4 \end{cases} \rightarrow \Delta = -y^3 \rightarrow y=0 \rightarrow A^2(x,0) \equiv 0 \rightarrow$$


¿Existen variedades $y = c_s x^s + o(x^s)$?

$$[3c_s x^{s+2} + \dots + x^4] - [c_s^2 x^{2s} + \dots - 2x^3] [sc_s x^{s-1} + \dots] = 0$$

Dos posibilidades: **s=3/2** ó **s=2**

$$\begin{aligned} y = 2x^{3/2} + o(x^{3/2}), & \quad y = -2x^{3/2} + o(x^{3/2}), & \quad y = -\frac{1}{7}x^2 + o(x^2) \rightarrow \\ x' = 2x^3 + o(x^3), & \quad x' = 2x^3 + o(x^3), & \quad x' = -2x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$



sectores hiperbólicos y no elípticos como se verá

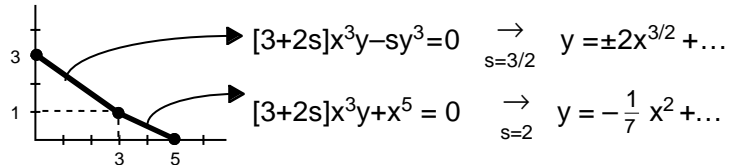
Hallar c_s probando $y = c_s x^s + o(x^s)$ en la ecuación de las órbitas

$$g(x,y) - f(x,y) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow g(x, c_s x^s + \dots) - f(x, c_s x^s + \dots) [sc_s x^{s-1} + \dots] = 0$$

equivale a probar ese desarrollo para hallar las ramas de la curva algebraica

$$xg(x,y) - syf(x,y) = 0 \rightarrow xg(x, c_s x^s + \dots) - sf(x, c_s x^s + \dots) [c_s x^s + \dots] = 0$$

problema fácilmente abordable con la **poligonal de Newton**:



$$\begin{aligned} [3+2s]x^3y - sy^3 = 0 & \xrightarrow{s=3/2} y = \pm 2x^{3/2} + \dots \\ [3+2s]x^3y + x^5 = 0 & \xrightarrow{s=2} y = -\frac{1}{7}x^2 + \dots \end{aligned}$$

(s distinto para cada segmento)

Resultados generales

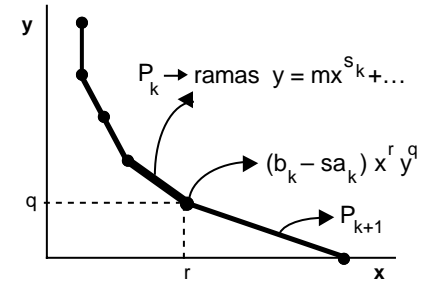
$$[S] \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + A^{n+1}(x,y) + \dots \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + B^{n+1}(x,y) + \dots \end{cases}$$

Sea la poligonal de:

$$H_s(x,y) \equiv xg(x,y) - syf(x,y) = 0$$

$P_k = xP_{kg} - s_k yP_{kf}$: términos de H_{s_k} sobre el segmento de pendiente $-1/s_k$.

Los 'ángulos' proceden de: $b_k x^{r-1} y^q$ (de g) y $a_k x^r y^{q-1}$ (de f).



Teorema V

Si $y = m_{ik} x^{s_k}$, $x \geq 0$, es raíz real simple de $P_k(x,y) = 0$ o múltiple con $P_{kf}(1, m_{ik}) \neq 0$ existe variedad de la forma $y = m_{ik} x^{s_k} + o(x^{s_k})$, $x \geq 0$.

Análogo para $y = m_{ik} [-x]^{s_k}$, $x \leq 0$.

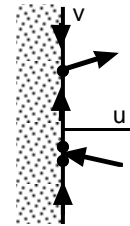
[En particular, si $s_k = 1 \equiv s_0$ es $P_0 = \Delta$ y $P_{0f} = A^n$, las ramas son los vectores propios y los $P_{kf}(1, m_{ik})$ los autovalores del **teorema H**].

Si $s_k = m/p$, haciendo $x = u^p$, $y = u^m v$ (para $x \geq 0$) se llega a:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{p} u P_{kf}(1, v) + O(u^2) \\ v' = P_k(1, v) + O(u) \end{cases}$$

Los puntos críticos sobre $u=0$ son elementales o con un único $\lambda=0$

\Rightarrow existen variedades $v = m_{ik} + o(1)$
 \Rightarrow existen variedades $y = m_{ik} x^{s_k} + o(x^{s_k})$.



¿Existen otras variedades que las del teorema V?
 ¿Necesitaremos analizar el signo de todos los P_k ?

Supongamos que $s_1 = m$ entero.

$ax^r y^{q-1}$, $bx^{r-1} y^q$ asociados al ángulo.

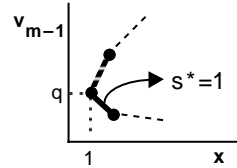
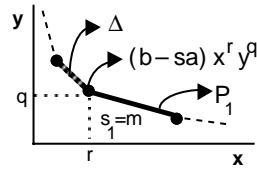
Haciendo $m-1$ blow-ups sucesivos

$$y = Xv_1, \dots, v_{m-2} = Xv_{m-1}$$

$$[S_j] \begin{cases} x' = axv_j^{q-1} + \dots \\ v_j' = (b-ja)v_j^q + \dots \end{cases} \rightarrow \Delta_j$$

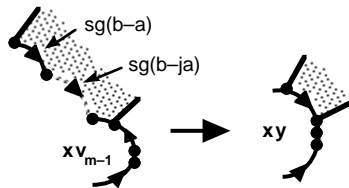
$x=0$ simple $\forall j$ con flujo dado por $[b-ja]v_j^q$.

Si el teorema H precisa $[S_{m-1}]$, problema resuelto:



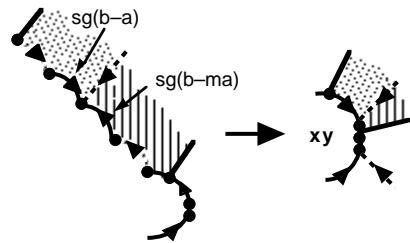
i) Si $b/a \notin [1, m]$,

los puntos con $x=0$ son sillas $\forall j$. Las variedades son $y=O(x^m)$, al menos, y basta orientarlas en la circunferencia inicial.



ii) Si $b/a \in (1, m)$,

para un j hay un nodo (los otros sillas). Aparecen variedades $y=O(x^{b/a})$. Basta el signo de Δ , orientar las $y=O(x^m)$, dibujar las $y=O(x^{b/a})$ e invertir a partir de estas los flujos verticales.

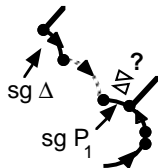
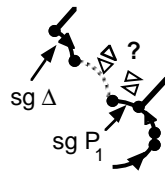


iii) Si $b=a$, para $j=1$ es silla, nodo o silla-nodo,

pero el flujo vertical es independiente de Δ_1 .

Es necesario determinar $sg \Delta_1 [= sg \Delta_{m-1}]$.

Hallar el $sg \Delta_{m-1}$ equivale a hallar el $sg P_1$.

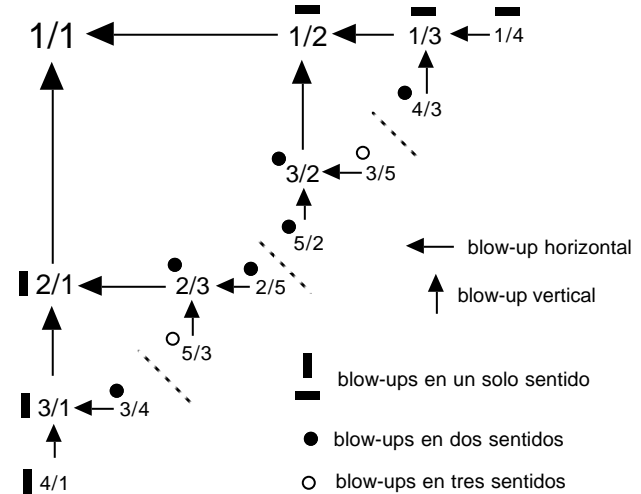


iv) Si $b=ma$, empalmes sillas hasta el último.

Al principio el flujo vertical continúa el de Δ , pero también es necesario el $sg \Delta_{m-1}$.

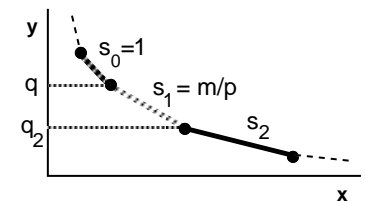
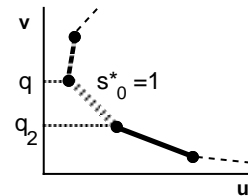
En general, sea $s_1 = \frac{m}{p}$, $m > p$ (ó $s_{-1} = \frac{m}{p}$ con $m < p$).

Basta un número finito de blow-ups horizontales o verticales en el orden adecuado para llegar a un segmento de pendiente -1 y poder aplicar el teorema H. Los que exigen menos que 3 son:



Aparecen complicaciones como las de antes si $b/a \in [1, s_1]$.

Si no basta analizar el P_1 : tras $x=u^p, y=u^{m-1}v$ tenemos un sistema $[S^*]$ del mismo tipo.



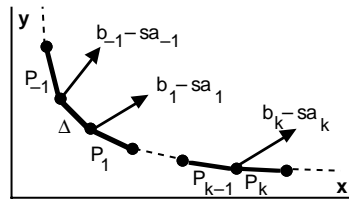
El segmento con $s_1 = m/p$ pasa a uno con $s^*_0 = -1$.

El nuevo q^* es menor que q .

En un número finito de pasos queda analizado el origen.

No necesitamos el signo de todos los P_k [en las situaciones **i**) y **ii**) basta el de Δ]. Pueden aparecer variedades asociadas a los ángulos no dadas por el teorema V.

Si \bullet representa los i, j del teorema V y los k y $-k$ del dibujo de la derecha:



Teorema P

Si todos los $P_{\bullet} \neq 0$, las raíces reales $y = m_{\bullet\bullet} x^{s_{\bullet}}$ e $y = m_{\bullet\bullet} [-x]^{s_{\bullet}}$ de los $P_{\bullet} = 0$ ($m_{\bullet\bullet} \neq 0$) son simples o con $P_{\bullet f} \neq 0$ y $b_{\bullet}/a_{\bullet} \neq s_{\bullet}, s_{\bullet-1} [+1] \forall \bullet \Rightarrow$ todas las variedades que llegan al origen son del tipo $y = m_{\bullet\bullet} |x|^{s_{\bullet} + \dots}$ e $y = O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ para cada b_{\bullet}/a_{\bullet} comprendido entre los s_{\bullet} contiguos.

Además, la estructura local de **0** queda determinada por:

- el flujo sobre cada variedad
- el signo de Δ y el de los P_{\bullet} para los que $b_{\bullet}/a_{\bullet} = s_{\bullet}, s_{\bullet-1} [+1]$

[el flujo sobre $y = m_{\bullet\bullet} |x|^{s_{\bullet} + \dots}$ viene dado por $x' = P_{\bullet f}(x, m_{\bullet\bullet} |x|^{s_{\bullet}})$ y sobre las $y = O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ se deduce de que están asociadas a nodos; para una raíz simple con $P_{\bullet f} = 0$ habría que hallar su desarrollo].

El teorema P no basta: si algún $P_{\bullet} = 0$ (en particular si $\Delta = 0$), si existen $m_{\bullet\bullet} |x|^{s_{\bullet}}$, $m_{\bullet\bullet} \neq 0$, múltiples con $P_{\bullet f} = 0$ o si no hay variedades que lleguen al origen (**centro** o **foco**).

Si $P_{\bullet f} \neq 0 \forall \bullet$ la estructura depende sólo de la poligonal

('parte principal' [Berezovskaya, Brunella-Miari]).

Ejemplo. Clasificamos $\begin{cases} x' = y + ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = dx^2 + exy + fy^2 \end{cases}$ con el origen aislado.

$$\Delta = -y^2 \rightarrow \text{Diagrama de un ciclo alrededor del origen}$$

Si $d \neq 0$: $sy^2 = dx^3$, simples

Si $d = 0$: $y = (\frac{e}{2} - a)x^2 + \dots \rightarrow x' = \frac{e}{2}x^2 + \dots$
 $y = 0 \rightarrow x' = ax^2 + \dots$

Las variedades para $d = 0$ son simples si $e \neq 2a$.

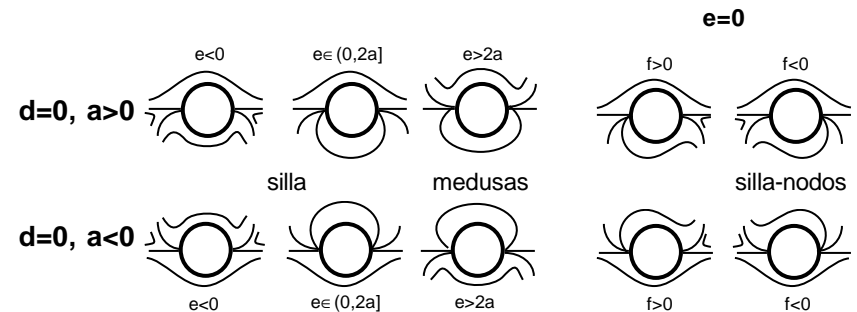
Si $e = 2a$ es $y = 0x^2 + \dots$ doble con $P_f(x, 0) = ax^2 \neq 0$ [$a = d = 0$, origen no aislado].

Para $d = e = 0$ necesitamos un término más para fijar el flujo:

$$y = -ax^2 + a(b - \frac{f}{2})x^3 + \dots \rightarrow x' = -\frac{af}{2}x^3 + \dots$$

es suficiente (si $d = e = f = 0$, el origen no es aislado). Resumiendo:

$d > 0$ $d < 0$ ángulos

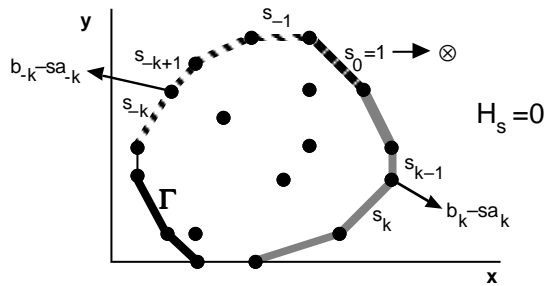


La poligonal para el infinito

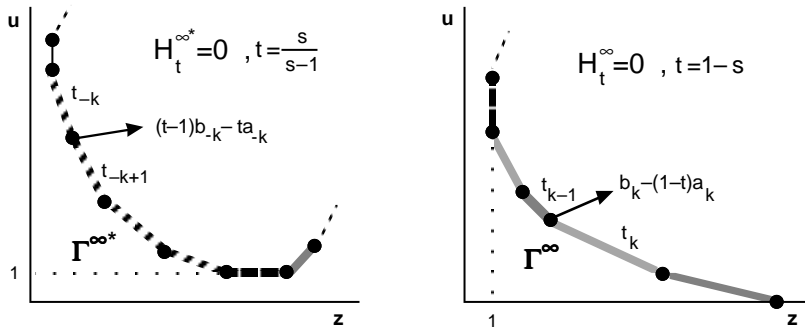
$$[S] \begin{cases} x' = f(x,y) = A^n(x,y) + \dots + A^m(x,y) \\ y' = g(x,y) = B^n(x,y) + \dots + B^m(x,y) \end{cases}$$

$$H_s(x,y) \equiv xg(x,y) - syf(x,y) \quad , \quad P_k(x,y) = xP_{kg} - s_k y P_{kf}$$

Construimos la poligonal Γ que encierra a demás puntos (la parte inferior izquierda de Γ informa del origen):



El cambio P (P^*) lleva Γ a Γ^∞ ($\Gamma^{\infty*}$) que informa sobre el origen.



Aplicando el teorema P y deshaciendo los cambios:

Teorema P^∞

Si $y = m_{\bullet\bullet} x^{s_\bullet}$, $x \geq 0$, es raíz real simple de $P_\bullet = 0$ o múltiple con $P_{\bullet f} \neq 0$, existe variedad $y = m_{\bullet\bullet} x^{s_\bullet} + o(x^{s_\bullet})$, si $x \rightarrow \infty$ (para s_k) o si $x \rightarrow 0$ (para s_{-k}).

Análogo cambiando x por $[-x]$.

Si ningún $P_\bullet = 0$ y las raíces reales de todos los $P_\bullet = 0$ (con $m_{\bullet\bullet} \neq 0$) son simples o con $P_{\bullet f} \neq 0$ la estructura del infinito queda fijada con

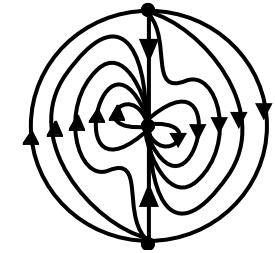
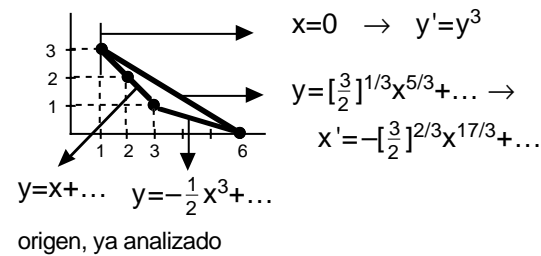
- el flujo para $|x|$ ó $|y|$ grande sobre cada variedad
- el signo de \otimes y el de los P_\bullet para los que $b_\bullet/a_\bullet = s_\bullet$ ó $s_{\bullet \pm 1}$.

(como en el origen pueden aparecer las variedades $y = O(|x|^{b_\bullet/a_\bullet})$ asociadas a nodos)

Queda por analizar:

si existen $m_{\bullet\bullet}$ múltiples con $P_{\bullet f} = 0$, si algún $P_\bullet = 0$ y si no hay variedades que lleguen al infinito con pendiente definida.

Ejemplo. $\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$, $\otimes = -x^6 = 0 \rightarrow x=0$ múltiple, $B^5(0,y) \equiv 0$



El origen es **atractor inestable**.

C. CENTROS Y FOCOS DEGENERADOS

Sistemas homogéneos perturbados (n=3)

Sea:

$$[S] \begin{cases} x' = A^3(x,y) + A^4(x,y) + \dots & A^3 = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3, \quad d < 0 \\ y' = B^3(x,y) + B^4(x,y) + \dots & B^3 = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3, \quad e > 0 \end{cases}$$

y sea $P_4(z) = B^3(1,z) - zA^3(1,z) \neq 0 \quad \forall z \Rightarrow$ **origen centro o foco**

Desarrollando la ecuación de las órbitas en polares:

$$[e] \quad \frac{dr}{d\theta} \equiv R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + \dots =$$

$$= \frac{M_3}{m_3}r + \frac{m_3M_4 - M_3m_4}{m_3^2}r^2 + \left[\frac{m_3M_5 - M_3m_5}{m_3^2} + \frac{m_4[M_3m_4 - m_3M_4]}{m_3^3} \right]r^3 + \dots$$

$$M_k = \cos \theta A^k(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta B^k(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$m_k = \cos \theta B^k(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta A^k(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$r(\theta) \equiv u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + \dots \text{ solución de [e] con } r(0) = r_0 \rightarrow$$

$$u_1' = u_1R_1, \quad u_1(0) = 1 \rightarrow u_1(\theta) = \exp\left[\int_0^\theta R_1\right]$$

$$u_2' = u_2R_1 + u_1^2R_2, \quad u_2(0) = 0 \rightarrow u_2(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta u_1R_2$$

$$u_3' = u_3R_1 + 2u_1u_2R_2 + u_1^3R_3, \quad u_3(0) = 0 \rightarrow u_3(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta [u_1^2R_3 + 2u_2R_2]$$

.....

$$\text{El signo de } r(2\pi) - r(0) = [u_1(2\pi) - 1]r_0 + u_2(2\pi)r_0^2 + u_3(2\pi)r_0^3 + \dots$$

$$\text{depende de } I = \int_0^{2\pi} R_1 d\theta, \text{ si no se anula;}$$

$$\text{si } I = 0 \text{ es } u_2(2\pi) = 0 \text{ y la estabilidad la da } u_3(2\pi) = J = \int_0^{2\pi} u_1^2 R_3 d\theta.$$

Teorema C (Collins 95)

$$\text{Sea } I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2}{P_4} dz, \text{ con } E_2(z) = (3a+f)z^2 + 2(b+g)z + (c+3h),$$

$$P_4(z) = -dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e.$$

Entonces: si $I < 0$ el origen de [S] es un foco estable;
si $I > 0$ el origen de [S] es un foco inestable.

(Si $I = 0$ la aproximación homogénea es centro y [S] no sabemos)

Teorema F

$$\text{Sea } I = 0 \text{ y sea } J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{R_8}{6P_4^{5/2}} + \frac{R_{12}}{5P_4^{7/2}} \right] E,$$

$$\text{con } P_{k+1}(z) \equiv B^k - zA^k|_{(1,z)}, \quad E_{k-1}(z) \equiv A^k_x + B^k_y|_{(1,z)},$$

$$E(z) \equiv \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{P_4}\right], \quad R_8 \equiv P_4E_4 - P_6E_2, \quad R_{12} \equiv P_5[P_5E_2 - P_4E_3].$$

Si $J < 0$ el origen de [S] es foco estable y si $J > 0$ es foco inestable.

(si el sistema es exacto es $I = J = 0$)

Análogamente, se tiene para el **infinito** del sistema polinomial:

$$[S] \begin{cases} x' = A^1(x,y) + A^2(x,y) + A^3(x,y) \\ y' = B^1(x,y) + B^2(x,y) + B^3(x,y) \end{cases}, \quad d < 0$$

Teorema CF $^\infty$

$$\text{Sean } I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_2}{P_4}, \quad J^* \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{R^*_4}{2P_4^{3/2}} + \frac{R^*_8}{3P_4^{5/2}} \right] E^*,$$

$$\text{con } E^*(z) \equiv \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{P_4}\right], \quad R^*_4 \equiv E_2P_2 - E_0P_4, \quad R^*_8 \equiv P_3[E_1P_4 - E_3P_2].$$

Entonces: si $I < 0$ ó si $I = 0$ y $J^* > 0$ [si $I > 0$ ó si $I = 0$ y $J^* < 0$] \Rightarrow
las órbitas se alejan del [se acercan al] infinito en espiral.

Calculo de la integral I

Para $P_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s$ $m, s > 0$, se tiene que si:

$$L \equiv 4ms, \quad K \equiv pr, \quad N \equiv mr^2 + p^2s, \quad M \equiv mr^2 - p^2s,$$

$$R \equiv q^2 - 3K + 3L, \quad S \equiv 2q^3 - 9qK - 18qL + 27N, \quad F \equiv p^3 - 4mpq + 8m^2r,$$

$$Q \equiv 3p^2 - 8mq, \quad V \equiv \frac{1}{3} [RQ - 2mS], \quad D_4 \equiv \frac{1}{27} [4R^3 - S^2]$$

Hay 4 raíces complejas distintas $\Leftrightarrow D_4 > 0$ y $V \leq 0$ ó $Q \leq 0$

Hay raíces dobles complejas $\Leftrightarrow D_4 = V = 0, Q < 0$ y $R \neq 0$

$$\left[\Leftrightarrow \begin{cases} Q < 0 \text{ y } M = F = 0 \text{ si } p \neq 0 \\ r = 0 \text{ y } q = \sqrt{L} \text{ si } p = 0 \end{cases} \right]$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{P_4(z)} dz$$

es calculable si conseguimos factorizar:

$$P_4(z) = m[z^2 + Az + C][z^2 + Bz + D], \quad [s = mCD]$$

$$Z \equiv m(C+D) \text{ satisface } P_3(Z) \equiv Z^3 - qZ^2 + (K-L)Z - (N-qL) = 0$$

Si $Z_1 \geq Z_2 > Z_3$ raíces de $P_3(Z)$ es:

$$I = 2\pi \frac{a_2 [K - 2qZ_3 - Z_3^2] + a_0 [4mZ_3 + 4mq - p^2] - a_1 [2mr - pZ_3]}{[Z_3 - Z_2][Z_3 - Z_1] \sqrt{4mZ_3 + 4mq - p^2}}$$

(Z_3 admite expresión no algebraica en términos de cos y arccos)

$I = 0 \Rightarrow Z_3$ es raíz común del numerador y de $P_3(Z)$.

Hallando la resultante y dividiendo por F se obtiene:

Teorema (condición algebraica necesaria de centro)

Si $F \neq 0, I = 0 \Rightarrow$

$$I_0 \equiv 16a_0^2 a_1 m^2 s - 16a_2^2 a_1 s^2 m + 8 [ra_2 - pa_0] [a_2 a_0 + a_1^2] ms - \\ - 8ra_0^3 m^2 + [4qa_0^2 (ra_2 + pa_0) + 2ra_0 (pa_0 - 3ra_2) a_1 - a_1 (2qa_0 - ra_1)^2] m + \\ + 8pa_2^3 s^2 - [4qa_2^2 (ra_2 + pa_0) + 2pa_2 (ra_2 - 3pa_0) a_1 - a_1 (2qa_2 - pa_1)^2] s + \\ + [ra_2 - pa_0] [(ra_2 + pa_0)^2 - q(ra_2 + pa_0) a_1 + pra_1^2] = 0$$

$F=0$ es uno de los siguientes casos fácilmente factorizables:

Sea $P_4(z)$ sin raíces reales. Entonces el signo de I coincide con:

$$\text{sg}(a_2[\sqrt{G} + p^2] + 16a_0 m^2 - 4a_1 mp), \quad G = \frac{1}{3} [64m^2 R - Q^2], \quad \text{si } F=0$$

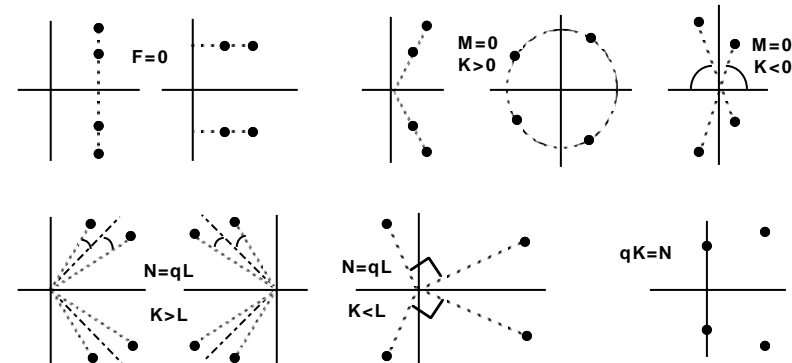
$$\text{sg}(a_2 \sqrt{s} + a_0 \sqrt{m}), \quad \text{si } M=0, K \leq 0$$

$$\text{sg}([a_2 \sqrt{s} + a_0 \sqrt{m}][q + \sqrt{L} + \sqrt{\omega}] - 2a_1 p \sqrt{s}), \quad \omega = (q + \sqrt{L})^2 - 4K, \quad \text{si } M=0, K \geq 0$$

$$\text{sg}(p) \text{sg}(a_2 ps + a_0 mr - 2a_1 ms), \quad \text{si } N=qL, K > L$$

$$\text{sg}(2a_2 [2L - K] + 2a_0 [2m\sqrt{\psi} + 2mq - p^2] - a_1 [p\sqrt{\psi} - pq + 4mr]), \\ \psi = q^2 - 4K + 4L, \quad \text{si } N=qL, K < L$$

$$\text{sg}(p) \text{sg}(a_2 [2ps + r\sqrt{L-K}] + a_0 [2mr + p\sqrt{L-K}] - a_1 K), \quad \text{si } qK=N$$



Siendo $I=0$, reducciones de la integral J

Era:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{R_8}{6P^{5/2}} + \frac{R_{12}}{5P^{7/2}} \right] E dz, \text{ con } E(z) = \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^z \frac{E_2}{P}\right] \quad (P_4=P)$$

Como ($d=-1$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^n E}{P^{k+1/2}} \right] &= \frac{E}{P^{k+3/2}} \left[(n-4k-2)z^{n+3} + ([n-3k]h+[3k+2-n]c)z^{n+2} + \right. \\ &\quad \left. + ([n-2k]g+[2k+2-n]b)z^{n+1} + ([n-k]f+[k+2-n]a)z^n + nez^{n-1} \right] = T_{n+3}(z) \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} T_{n+3}(z) dz &= 0 \text{ si } n=0, \dots, 4k+2 \Rightarrow \end{aligned}$$

Con esto, el numerador de J se puede reducir a un R_2 de grado dos:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{4k+4} E}{P^{k+3/2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2 E}{P^{k+3/2}} dz$$

Existe además N_2 de grado dos que depende de A^3, B^3 con $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2 E dz}{P^{k+3/2}} = 0 \rightarrow$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2 + mN_2}{P^{k+3/2}} E dz \quad \forall m \in \mathbf{R}$$

$R_2 + mN_2 \neq 0 \quad \forall z$ para algún $m \rightarrow$ precisado algebraicamente el signo de J .

En el peor de los casos hay que aproximar sólo dos de las:

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{P^{k+3/2}} dz, \quad J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zE}{P^{k+3/2}} dz, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 E}{P^{k+3/2}} dz$$

Ejemplo. Homogéneo con parámetro r . Perturbado \rightarrow ciclos límite.

$$\begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases} \rightarrow P(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + rz + 4, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z^2 + 10z + r}{P(z)}$$

$$Q = -28, \quad V = -2(r-4)(9r-22), \quad D_4 = -(27r+284)(r-8)(r-4)^2$$

\rightarrow todas las z son complejas si $-\frac{284}{27} < r < 8$.

$$I_0 = -8(r+8)(r+4)(r-4)(r-8) = 0$$

Para $r=8$ hay raíces reales. Para los otros sabemos hallar I :

$$r = -8 \rightarrow N=qL, K<L \rightarrow I = \pi [1-7/\sqrt{17}] \sqrt{\sqrt{17}-1} / \sqrt{6} < 0$$

$$r = -4 \rightarrow M=0, K<0 \rightarrow I = 0$$

$$r = 4 \rightarrow F=M=0, K>0 \rightarrow I = 12\pi/[7\sqrt{7}] > 0$$

El origen es un **centro** si $r=-4$ (único valor para el que $I=0$)

\rightarrow **foco estable** si $r \in (-284/27, -4)$ e **inestable** si $r \in (-4, 8)$.

Añadimos un término de orden 5:

$$\begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 - y^5 \end{cases}$$

Para $r=-4$, probemos que el origen es **foco estable**:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_8 E}{5P^{5/2}}, \quad R_8 = -5z^8 - 8z^7 - 15z^6 + 16z^5 - 20z^4, \quad E = \exp\left[\int_0^z \frac{z^2 + 5z - 2}{P}\right]$$

Reducimos el integrando:

$$\frac{R_8 E}{5P^{5/2}} - \frac{d}{dz} \left[\frac{E}{P^{3/2}} \left(\frac{5}{6} z^5 + \frac{3}{2} z^4 + 5z^3 - \frac{11}{4} z^2 + \frac{38}{5} z - \frac{154}{15} \right) \right] = \frac{R_2 E}{15P^{5/2}}, \quad R_2 = 160 - 1210z - 1727z^2$$

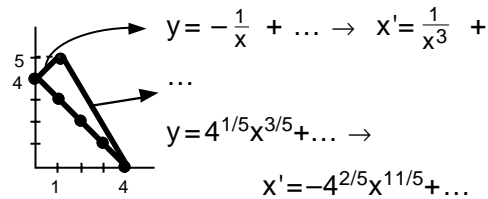
$$0 = \left[\frac{E}{P^{3/2}} \left(\frac{1}{4} z^6 + z^5 + \frac{7}{2} z^4 + \frac{10}{3} z^3 + \frac{55}{12} z^2 - \frac{71}{15} z + \frac{443}{45} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{8}{45} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2 E}{P^{5/2}}, \quad N_2 = 110 - 335z - 178z^2$$

$$\rightarrow J = \frac{1}{15} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2 E}{P^{5/2}} dz = -\frac{1}{335} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{P^{5/2}} (5300 + 24211z^2) dz < 0$$

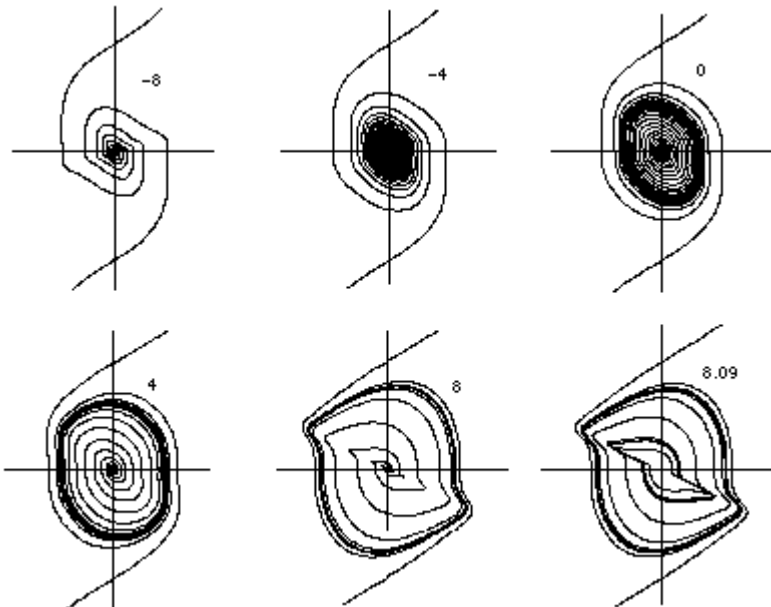
El infinito es repulsor para todo r :

$$\otimes = -xy^5$$

$$x=0 \rightarrow y' = -y^5 + \dots$$



Aparece ciclo límite si $-4 < r < 8$
(entonces no hay más puntos críticos finitos):



('bifurcación de Hopf' no lineal)

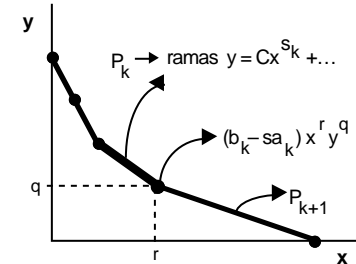
Si la poligonal se reduce a un segmento

Sea:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

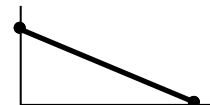
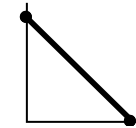
De lo visto sobre la poligonal de $H_S(x,y) \equiv xg - syf = 0$ se deduce:

Si la poligonal se apoya en los ejes, $b_k/a_k \notin [s_k, s_{k+1}]$ para todo k y todas las raíces no triviales de todos los $P_k=0$ son complejas \Rightarrow el origen es un centro o un foco



(las coordenadas de los extremos de los segmentos deben ser pares)

Caso particular sencillo ya visto:
si la poligonal es sólo un segmento de pendiente -1
(homogéneos perturbados):



Problema general complicado.
Si la poligonal es sólo un segmento (asociado a $y^{2n} + \dots + c^2x^{2m}$), uno o dos cambios llevan al problema anterior.

[Por ejemplo, para $y^2 + \dots + c^2x^6$, lleva a un problema homogéneo $y=v^3$;
para $y^2 + \dots + c^2x^4$ hacemos $y=v^2, y>0$; $y=-v^2, y<0$
y pegamos las órbitas de ambos sistemas homogéneos]

Referencias:

- J. V. Uspensky. Theory of equations. McGraw-Hill [1948].
- V.V.Nemytskii - V.V.Stepanov. Qualitative theory of differential equations. Princeton University Press [1960].
- S. Lefschetz. Differential equations: Geometric theory. Interscience [1963].
- J. Argemi. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans R^2 . Ann. Mat. Pura Appl. Ser IV **79** [1968], 35-69.
- Yu. S. Il'yashenko. Algebraic insolvability and almost algebraic solvability of the center-focus problem. Funct. Anal. Appl. **6** [1972], 197-202.
- A.A.Andronov - E.A.Leontovich - I.I.Gordon - A.G.Maier. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley [1973].
- F. Dumortier. Singularities of vector fields on the plane. J. of Diff. Eq. **23** [1977], 53-106.
- S.N.Chow - J.K.Hale. Methods of bifurcation theory. Springer-Verlag [1982].
- J.I.Aranda. Un método para el análisis del origen y el infinito en sistemas polinomiales planos. Actas X CEDYA [1987], 20-25.
- V. I. Arnold - Yu. S. Il'yashenko. Ordinary differential equations. Encyclopaedia of Math. Sci., vol 1. Springer- Verlag [1989].
- A.D. Bruno. Local methods in nonlinear differential equations. Springer-Verlag [1989].
- M.Brunella-M.Miari. Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra. J. of Diff. Eq. **85** [1990], 338-366.
- D. T. Lê - K. Saito - B. Teissier. Singularity theory. World Scientific [1991].
- T.R.Blows-C.Rousseau. Bifurcation at infinity in polynomial vector fields. J. of Diff. Eq. **104** [1993], 215-242.
- F.S.Berezovskaya-N.B.Medvedeva. A complicated singular point of "center-focus" type and the Newton Diagram. Selecta Mathematica **13** [1994], 1-15.
- C.B. Collins. Algebraic conditions for a centre or a focus in some simple systems of arbitrary degree. J. of Math. Anal. and Appl. **195** [1995], 719-735.
- J.Llibre - J.S.Pérez del Río - J.A.Rodríguez. Structural stability of planar homogeneous polynomial vector fields: applications to critical points and to infinity. J. of Diff. Eq. **125** [1996], 490-520.
- F.Dumortier - C.Herssens. Tracing phase portraits of planar polynomial vector fields with detailed analysis of the singularities (Preliminary version). Escuela de invierno sobre campos vectoriales polinomiales. Lleida [1997].