

Mecánica Teórica

Artemio González López

Madrid, 5 de febrero de 2007

Índice general

1	Mecánica lagrangiana	1
1.1	Notación	1
1.2	Ecuaciones generales de la dinámica. Ecuaciones de Lagrange	3
1.2.1	Ligaduras ideales. Principio de los trabajos virtuales	3
1.2.2	Deducción de las ecuaciones de Lagrange	7
1.3	Propiedades generales de las ecuaciones de Lagrange	11
1.3.1	Potenciales dependientes de la velocidad	13
1.3.2	Integrales primeras. Coordenadas cíclicas	15
1.4	Formulación lagrangiana de la mecánica relativista	17
1.4.1	Repaso de Relatividad especial	17
1.4.2	Dinámica relativista. Lagrangiano relativista	19
1.5	Cálculo variacional. Principio de Hamilton	25
1.5.1	Ecuaciones de Euler–Lagrange	25
1.5.2	Principio de Hamilton	29
1.6	Simetrías y leyes de conservación. Teorema de Noether	32
1.6.1	Simetrías del lagrangiano y leyes de conservación	32
1.6.2	Simetrías de la acción. Teorema de Noether	36
2	Mecánica hamiltoniana	40
2.1	Formas diferenciales	40
2.2	Las ecuaciones canónicas de Hamilton	42
2.3	Coordenadas cíclicas y función de Routh	48
2.4	Paréntesis de Poisson	50
2.5	Invariantes integrales de la Mecánica	60
2.5.1	Principio variacional	60
2.5.2	Invariantes integrales de Poincaré y de Poincaré–Cartan	62
2.5.3	Teorema de Liouville	66
3	Transformaciones canónicas	69
3.1	Transformaciones canonoides y canónicas	69
3.2	Tipo de una transformación canónica	75
3.3	Paréntesis de Lagrange. Invariancia del paréntesis de Poisson	79
3.4	Grupos a un parámetro de transformaciones canónicas	81
3.5	Simetrías y leyes de conservación	84
4	Teoría de Hamilton–Jacobi	86
4.1	La ecuación de Hamilton–Jacobi	86
4.2	Función principal de Hamilton	89

4.3	Sistemas conservativos y coordenadas cíclicas	91
4.4	Separación de variables en la ecuación de Hamilton–Jacobi	97
4.5	Teorema de integrabilidad de Liouville	104
4.6	Variables acción-ángulo	107
4.6.1	Sistemas con un grado de libertad	109
4.6.2	Sistemas completamente separables	114

Capítulo 1

Mecánica lagrangiana

1.1 Notación

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar diferenciable de n variables reales $(x_1, \dots, x_n) \equiv \mathbf{x}$, utilizaremos en lo que sigue la notación vectorial

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

para denotar el **gradiente** de f . Consideremos a continuación una función vectorial diferenciable $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con valores en el espacio vectorial \mathbb{R}^m ; en otras palabras, $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m)$, donde las **funciones componentes** $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) son funciones diferenciables escalares de n variables. La **matriz jacobiana** de F es la matriz $m \times n$ definida por

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

siendo i el índice de fila y j el de columna. Si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ emplearemos la notación habitual

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}$$

para denotar producto de la matriz $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ por el vector \mathbf{a} , es decir el vector de \mathbb{R}^m cuya i -ésima componente es

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} a_j \equiv \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}$$

(el miembro derecho es el producto escalar de dos vectores de \mathbb{R}^n). La notación que acabamos de introducir es particularmente útil para expresar la regla de la cadena en todas sus variantes. Así, por ejemplo, si $g(t) = f(\mathbf{x}(t))$ es una función escalar de la variable real t , y tanto $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones diferenciables de sus argumentos, entonces g es diferenciable y su derivada respecto de t , que denotaremos por $\dot{g}(t)$, está dada por

$$\dot{g}(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t).$$

Análogamente, si $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$, con $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciables, entonces \mathbf{G} es diferenciable y

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}$$

(el miembro derecho es el producto de una matriz $m \times n$ con una matriz $n \times k$).

En estas notas utilizaremos frecuentemente (entre otros) los siguientes resultados fundamentales del análisis real:

Teorema de la función implícita. *Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de las variables $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de clase C^1 (\equiv con derivadas parciales continuas) en un entorno de un punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$. Si se cumple la condición*

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0,$$

hay sendos entornos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ de los puntos \mathbf{x}_0 e \mathbf{y}_0 y una función $\mathbf{Y} : U \rightarrow V$ de clase C^1 en U tales que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}).$$

La matriz jacobiana de la función \mathbf{Y} se obtiene fácilmente derivando la relación implícita

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}(\mathbf{x})) = 0,$$

lo que conduce a la igualdad matricial

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

(omitiendo, por sencillez, los argumentos de las funciones). La condición sobre el determinante de $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{y}$ y la continuidad de las derivadas parciales de \mathbf{F} garantiza que esta última matriz es invertible en un entorno de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, y por tanto

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Teorema de la función inversa. *Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en un entorno de un punto \mathbf{x}_0 , y supongamos que*

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

Entonces hay un entorno U de \mathbf{x}_0 tal que $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbf{F}(U)$ es invertible, siendo la función inversa $\mathbf{F}^{-1} : \mathbf{F}(U) \rightarrow U$ de clase C^1 en su dominio.

Al igual que antes, es fácil probar que la matriz jacobiana de la función inversa \mathbf{F}^{-1} está dada por

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1},$$

donde el miembro izquierdo está evaluado en un punto cualquiera \mathbf{y} y el derecho en $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y})$.

1.2 Ecuaciones generales de la dinámica. Ecuaciones de Lagrange

1.2.1 Ligaduras ideales. Principio de los trabajos virtuales

Consideremos un sistema de N partículas $\mathbf{x}_i \equiv (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$ ($1 \leq i \leq N$) sujetas a $l < 3N$ ligaduras **holónomas** (es decir, independientes de las *velocidades*)

$$f_\alpha(t, \mathbf{x}) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq l, \quad (1.1)$$

siendo $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \equiv (x_1, \dots, x_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N}$. La condición necesaria y (localmente) suficiente para que estas ligaduras sean independientes es que

$$\text{rank} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = l \quad (1.2)$$

en cada punto $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N}$, donde $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_l)$. El número de **grados de libertad** del sistema es por tanto

$$3N - l \equiv n.$$

En efecto, supongamos que (p. ej.)

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_l)}{\partial(x_{n+1}, \dots, x_{3N})}(t_0, \mathbf{x}_0) \neq 0.$$

El teorema de la función implícita implica entonces que en un entorno de (t_0, \mathbf{x}_0) se pueden despejar las l coordenadas (x_{n+1}, \dots, x_{3N}) en función de t y las restantes coordenadas (x_1, \dots, x_n) . En otras palabras, las ecuaciones de ligadura (1.1) son equivalentes en dicho entorno a l ecuaciones de la forma

$$x_{n+k} = X_{n+k}(t, x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, l \equiv 3N - n,$$

donde las n variables (x_1, \dots, x_n) varían en un cierto abierto y son por tanto independientes.

El vector $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)) \in \mathbb{R}^{3N}$ que describe el movimiento del sistema (**trayectoria**) ha de pertenecer en cada instante t a la superficie (**variedad**, utilizando un lenguaje más técnico) de dimensión n

$$M_t = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{3N}$$

definida por las ligaduras (1.1) (Fig. 1.1).

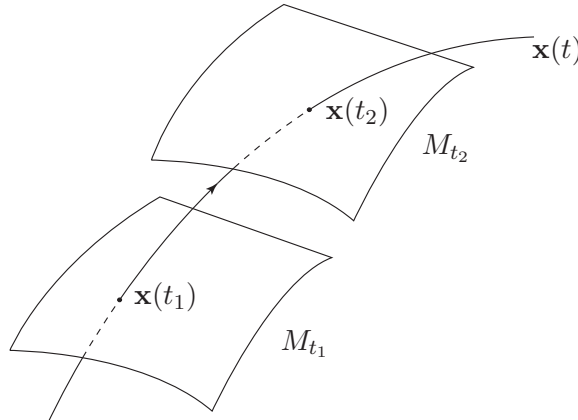


Figura 1.1: Trayectoria de un sistema mecánico y variedades de ligadura.

Es conveniente por tanto introducir un sistema de n **coordenadas** (locales)

$$(q_1, \dots, q_n) \equiv \mathbf{q}$$

en M_t . Esto quiere decir que M_t se puede **parametrizar** por ecuaciones de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{q}),$$

donde la función $\mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ verifica

$$\text{rank } \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = n \quad (1.3)$$

en virtud de (1.2)¹.

El **espacio tangente** a una de las variedades de ligadura M_{t_0} en un punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{q}_0) \in M_{t_0}$ es el conjunto $T_{\mathbf{x}_0}M_{t_0}$ formado por los **vectores tangentes** a M_{t_0} en dicho punto, es decir, por los vectores tangentes en \mathbf{x}_0 a las curvas contenidas en M_{t_0} que pasan por dicho punto. Se puede probar que $T_{\mathbf{x}_0}M_{t_0}$ es un espacio vectorial, dado por

$$T_{\mathbf{x}_0}M_{t_0} = \text{lin} \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_r}(t_0, \mathbf{q}_0) \mid 1 \leq r \leq n \right\} \subset \mathbb{R}^{3N}.$$

Por la ec. (1.3), $\dim T_{\mathbf{x}_0}M_{t_0} = n = \dim M_t$.

Nota: el vector $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_r}(t_0, \mathbf{q}_0)$ es tangente en \mathbf{x}_0 a la curva de M_{t_0}

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t_0, q_{01}, \dots, q_{0,r-1}, q_{0r} + s, q_{0,r+1}, q_{0n})$$

obtenida manteniendo constantes todas las coordenadas excepto q_r (r -ésima **línea coordenada**).

Naturalmente, para que el sistema respete las ligaduras (1.1) ha de actuar una **fuerza de ligadura** \mathbf{R}_i sobre cada partícula $i = 1, \dots, N$. El problema es que estas fuerzas son (i) difíciles de determinar, y (ii) frecuentemente, no son interesantes en sí mismas.

En cuanto al primer punto, es evidente que el vector $\mathbf{R} \equiv (\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ está de hecho *indeterminado* si no hacemos alguna hipótesis sobre la naturaleza de las fuerzas de ligadura. Por ejemplo, si las ligaduras son **esclerónomas** (independientes del tiempo) la proyección de \mathbf{R} sobre el plano tangente a $M \equiv M_t$ puede variarse sin que el movimiento del sistema abandone M . Para determinar \mathbf{R} nos restringiremos al caso conceptualmente más sencillo, en que

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{x}) \perp T_{\mathbf{x}}M_t, \quad \forall \mathbf{x} \in M_t. \quad (1.4)$$

A las ligaduras que cumplen esta condición se las denomina **ideales**.

Para aclarar el significado físico de la condición (1.4) es conveniente introducir el concepto de **desplazamiento virtual** de un sistema mecánico, que por definición es

¹En efecto, supongamos, como antes, que las coordenadas (x_{n+1}, \dots, x_{3N}) se pueden despejar localmente en función de (t, x_1, \dots, x_n) . En tal caso (x_1, \dots, x_n) son coordenadas independientes en cada variedad de ligadura, y por tanto la relación entre estas variables y las coordenadas generalizadas \mathbf{q} debe ser invertible. De esto se deduce que el menor $n \times n$

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)}$$

de la matriz $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}$ es distinto de cero, lo cual implica que dicha matriz tiene rango (máximo) igual a n .

una curva $\mathbf{x}(s)$ ($s_1 \leq s \leq s_2$) enteramente contenida en una variedad de ligadura M_t para un cierto t fijo (Fig. 1.2).

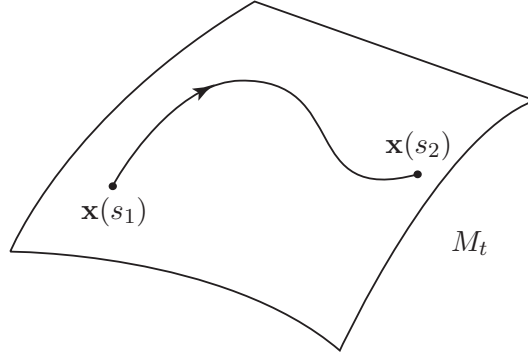


Figura 1.2: Desplazamiento virtual.

En otras palabras, un desplazamiento virtual es una sucesión de posiciones del sistema que son posibles (compatibles con las ligaduras) en un *mismo* instante t . Es importante notar que sólo si las ligaduras son esclerónomas, en cuyo caso M_t es una variedad fija M para todo t , las trayectorias del sistema (desplazamientos “reales”) son desplazamientos virtuales.

La condición (1.4) es equivalente al **principio de los trabajos virtuales**: *el trabajo realizado por las fuerzas de ligadura a lo largo de cualquier desplazamiento virtual del sistema es nulo*. En efecto, si $\mathbf{x}(s)$ ($s_1 \leq s \leq s_2$) es un desplazamiento virtual en un cierto instante t entonces

$$\dot{\mathbf{x}}(s) \in T_{\mathbf{x}(s)}M_t, \quad \mathbf{R}(t, \mathbf{x}(s)) \perp T_{\mathbf{x}(s)}M_t \implies \mathbf{R}(t, \mathbf{x}(s)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(s) = 0,$$

y por tanto el trabajo realizado por las fuerzas de ligadura a lo largo de la curva $\mathbf{x}(s)$ es nulo:

$$\int_{s_1}^{s_2} \sum_i \mathbf{R}_i(t, \mathbf{x}(s)) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i(s) ds \equiv \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{R}(t, \mathbf{x}(s)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(s) ds = 0.$$

Recíprocamente, si se verifica la ecuación anterior para *cualquier* curva $\mathbf{x}(s)$ contenida en cualquier variedad de ligadura M_t derivando respecto del límite superior de la integral se obtiene

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{x}(s_2)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(s_2) = 0.$$

Como s_2 es arbitrario, y todo vector tangente a M_t en el punto $\mathbf{x}(s_2)$ (también arbitrario) es de la forma $\dot{\mathbf{x}}(s_2)$ para una cierta curva $\mathbf{x}(s)$ contenida en M_t , la igualdad anterior implica que el vector $\mathbf{R}(t, \mathbf{x}(s_2))$ es perpendicular a $T_{\mathbf{x}(s_2)}M_t$.

Ejemplo 1.1. Si las ligaduras son reónomas (dependientes del tiempo) el trabajo realizado por las fuerzas de ligadura en un desplazamiento *real* $\mathbf{x}(t)$ del sistema no tiene por qué anularse. Para ilustrar este punto, consideremos el caso más sencillo posible en que $N = l = 1$, es decir el del movimiento de una partícula sobre la superficie (móvil) de \mathbb{R}^3 de ecuación $f(t, \mathbf{x}) = 0$, con $\partial f / \partial t \neq 0$. Derivando la identidad $f(t, \mathbf{x}(t)) = 0$ respecto de t se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t)) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \implies \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t)) \neq 0.$$

Como el vector $(\partial f/\partial \mathbf{x})(t, \mathbf{x}(t))$ es normal a la variedad de ligadura M_t para todo t , y $\mathbf{R}(t, \mathbf{x}(t))$ es paralelo a dicho vector (Fig. 1.3), en este caso

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$$

y por tanto el trabajo de las fuerzas de ligadura a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ no tiene por qué anularse.

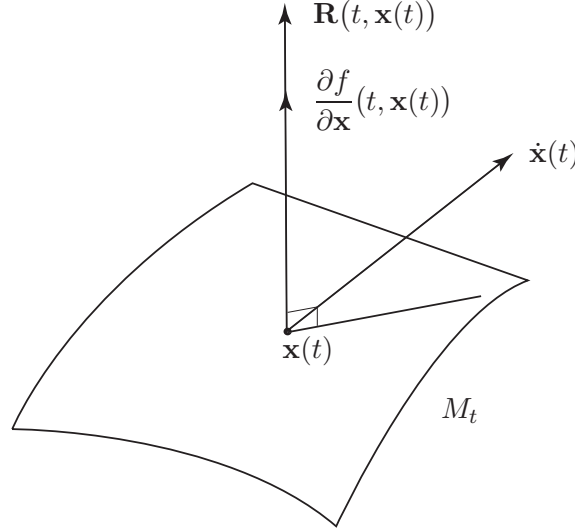


Figura 1.3: Fuerza de ligadura correspondiente a una ligadura esclerónoma.

Ejemplo 1.2. Sólido rígido.

Un **sólido rígido** es un sistema mecánico en que la distancia entre dos partículas cualesquiera es constante. Las ligaduras son por tanto en este caso las $N(N-1)/2$ ecuaciones (¡no todas ellas independientes!)

$$f_{ij}(\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 - a_{ij}^2 = 0, \quad 1 \leq i < j \leq N,$$

donde las a_{ij} son constantes. Se trata, en particular, de un sistema con ligaduras holónomas y esclerónomas. Si \mathbf{R}_{ij} es la fuerza de ligadura que actúa sobre la partícula i por ser constante su distancia a la partícula j , por la tercera ley de Newton se tiene:

$$\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{ji} = 0, \quad \mathbf{R}_{ij} \parallel \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j.$$

Entonces $\mathbf{R}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{R}_{ij}$, y el trabajo $W_{\mathbf{R}}$ realizado por las fuerzas de ligadura satisface

$$\frac{dW_{\mathbf{R}}}{dt} = \sum_i \mathbf{R}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{R}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\mathbf{R}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{R}_{ji} \cdot \dot{\mathbf{x}}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \mathbf{R}_{ij} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) = 0,$$

ya que derivando la ecuación de ligadura $f_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ respecto del tiempo se obtiene $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) = 0$. Por tanto *las ligaduras que actúan en un sólido rígido son ideales.* \square

Aunque la mayor parte de las ligaduras que ocurren en la práctica son ideales, hay también ejemplos sencillos de ligaduras no ideales. Por ejemplo, el movimiento de una partícula sobre una superficie *rugosa* (con *fricción*) es un caso de ligadura no ideal.

1.2.2 Deducción de las ecuaciones de Lagrange

La condición (1.4) que satisfacen las fuerzas de ligadura correspondientes a ligaduras ideales es equivalente a las n condiciones

$$\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_r} \equiv \sum_i \mathbf{R}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} = 0, \quad 1 \leq r \leq n. \quad (1.5)$$

Sea $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ la fuerza *externa* que actúa sobre la i -ésima partícula. De las ecuaciones (1.5) y de la ley de Newton

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

se obtiene

$$\sum_i \left(m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i \right) \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} = 0, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (1.6)$$

que son las **ecuaciones generales de la dinámica** (llamadas también **principio de d'Alembert**, o de d'Alembert–Lagrange). Las n funciones escalares

$$Q_r(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r}, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (1.7)$$

se denominan **fuerzas generalizadas**² asociadas a las coordenadas q_r . En términos de ellas, las ecuaciones generales de la dinámica se escriben

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} = Q_r, \quad 1 \leq r \leq n. \quad (1.8)$$

Nuestro objetivo es expresar el miembro izquierdo de estas ecuaciones en función de las n coordenadas generalizadas \mathbf{q} y sus derivadas respecto de t . Para ello se utilizan las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} + \sum_r \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \implies \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r}; \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial q_s} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_s \partial t} + \sum_r \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q_s \partial q_r} \dot{q}_r = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \right) + \sum_r \frac{\partial}{\partial q_r} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_r \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} &= \ddot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 \right) - \dot{\mathbf{x}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 \right) - \dot{\mathbf{x}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 \right) - \dot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial q_r} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial}{\partial q_r} \right) \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 \right). \end{aligned}$$

Las ecuaciones generales de la dinámica (1.8) se escriben por tanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (1.9)$$

²La fuerza generalizada Q_r sólo tiene dimensión de fuerza si la coordenada q_r tiene dimensión de longitud. Por ejemplo, si q_r es un ángulo (por tanto, adimensional) entonces Q_r tiene dimensión de par (equivalentemente, de trabajo).

donde

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 \equiv T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.10)$$

es la **energía cinética** del sistema, que ha de expresarse en términos de las coordenadas generalizadas \mathbf{q} y sus derivadas $\dot{\mathbf{q}}$. Estas son las llamadas **ecuaciones de Lagrange de segunda especie**.

Si las fuerzas externas \mathbf{F}_i que actúan sobre el sistema derivan de un potencial³ $V(t, \mathbf{x})$, es decir si

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

entonces

$$Q_r = \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r}. \quad (1.11)$$

Más generalmente, una condición necesaria y suficiente (en un abierto simplemente conexo⁴) para que las fuerza generalizadas deriven de un potencial, es decir para que se cumpla la igualdad anterior, es que las derivadas parciales de \mathbf{Q} verifiquen.

$$\frac{\partial Q_r}{\partial q_s} - \frac{\partial Q_s}{\partial q_r} = 0, \quad 1 \leq r < s \leq n.$$

En cualquier caso, si se cumple (1.11) entonces las ecuaciones (1.9) se pueden escribir de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (1.12)$$

con

$$L = T - V. \quad (1.13)$$

Estas son las llamadas **ecuaciones de Lagrange de primera especie**, siendo la función $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ el **lagrangiano** del sistema.

Ejemplo 1.3. Péndulo esférico.

Consideremos un **péndulo esférico**, es decir una partícula obligada a moverse sobre una esfera de radio a en el seno del campo gravitatorio terrestre. En este caso $N = l = 1$,

$$f(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - a^2,$$

y tomaremos como coordenadas generalizadas los ángulos polar $\theta \in [0, \pi]$ y azimutal $\varphi \in [0, 2\pi)$ de las coordenadas esféricas, respecto de las cuales (cf. la Fig. 1.4)

$$\mathbf{x} = a (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3).$$

³Si, además, V no depende de t dichas fuerzas se denominan **conservativas**.

⁴Un subconjunto de \mathbb{R}^n es *simplemente conexo* si es conexo y, además, toda curva cerrada continua contenida en dicho conjunto se puede deformar de manera continua a un punto dentro de dicho conjunto. Ejemplos de abiertos simplemente conexos de \mathbb{R}^3 son el propio \mathbb{R}^3 , el interior de una esfera o de un cubo, todo \mathbb{R}^3 menos un punto, etc. Sin embargo, si a \mathbb{R}^3 le quitamos una recta el abierto resultante es conexo pero *no* simplemente conexo.

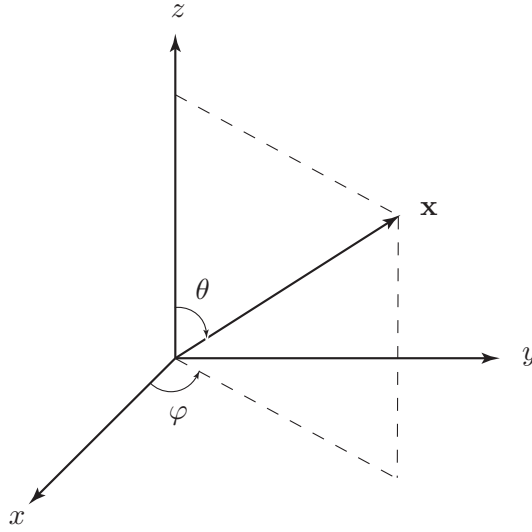


Figura 1.4: Coordenadas esféricas.

La fuerza de ligadura \mathbf{R} está dirigida hacia el centro de la esfera (se desprecia la fricción), por lo que la ligadura es ideal. La fuerza externa es la gravitatoria, con potencial

$$V = mgz = mga \cos \theta.$$

La energía cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{2} ma^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Por tanto

$$L = ma^2 \left[\frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - k \cos \theta \right], \quad k \equiv \frac{g}{a},$$

y las ecuaciones de Lagrange se escriben

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + k \sin \theta, \\ \frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene

$$\sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const.} \equiv \frac{J_z}{ma^2},$$

siendo \mathbf{J} el momento angular de la partícula. Esto era de esperar, ya que $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{N}$, siendo $\mathbf{N} = \mathbf{x} \times (\mathbf{F} + \mathbf{R})$, y claramente⁵ $N_z = 0$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para θ :

$$\ddot{\theta} = c \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} + k \sin \theta, \quad c \equiv \frac{J_z^2}{m^2 a^4} \geq 0. \quad (1.14)$$

Nótese que si $J_z = 0$, es decir si la partícula se mueve en un meridiano, obtenemos la ecuación del péndulo simple $\ddot{\alpha} + k \sin \alpha = 0$, siendo $\alpha = \pi - \theta$.

⁵Las fuerzas \mathbf{F} y \mathbf{R} en cada punto están en el plano del meridiano que pasa por dicho punto, que contiene también al vector \mathbf{x} . Por tanto $\mathbf{N} = \mathbf{x} \times (\mathbf{F} + \mathbf{R})$ es un vector perpendicular al plano del meridiano, y en particular $N_z = 0$.

La ec. (1.14) es formalmente la ecuación del movimiento en una dimensión de una partícula de masa unidad sometida al potencial efectivo

$$U(\theta) = k \cos \theta + \frac{c}{2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

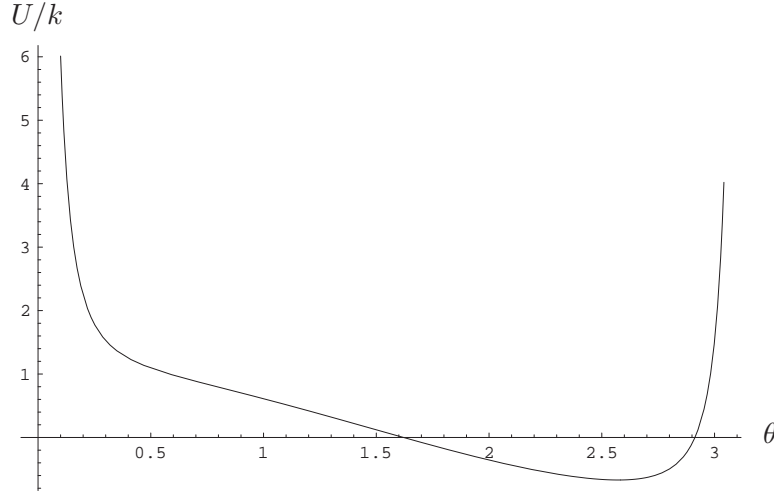


Figura 1.5: Potencial efectivo $U(\theta)$ para $k = 10c$.

representado en la Fig. 1.5. Nótese, en particular, que el movimiento de θ es siempre *periódico*. (El movimiento del péndulo, sin embargo, *no* es en general periódico, ya que cuando la coordenada θ vuelve a su valor inicial tras un período el ángulo φ no necesariamente aumenta en un múltiplo de 2π . Más concretamente, la *precesión* $\Delta\varphi$ en el ángulo φ está dada por

$$\Delta\varphi + 2\pi = \frac{2J_z}{ma^2} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \sqrt{2(E - U(\theta))}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \sqrt{\frac{E}{c} - \frac{k}{c} \cos \theta - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \theta}}},$$

siendo $\theta_{\min} < \theta_{\max}$ las dos raíces de la ecuación $E - U(\theta) = 0$ en el intervalo $(0, \pi)$.

La ec. (1.14) posee una solución constante $\theta = \theta_0 > \pi/2$, con

$$c \cos \theta_0 + k \operatorname{sen}^4 \theta_0 = 0,$$

correspondiente a una rotación alrededor del eje z con velocidad angular constante $\dot{\varphi} = \pm \sqrt{c}/\operatorname{sen}^2 \theta_0$. Es fácil probar (comparando las gráficas de $\operatorname{sen}^4 \theta$ y $-\frac{c}{k} \cos \theta$, por ejemplo) que esta ecuación tiene una solución única en el intervalo $(\pi/2, \pi)$. El período $\tau = 2\pi/\omega$ de las pequeñas oscilaciones alrededor de esta solución se obtiene a partir de la fórmula

$$\begin{aligned} \omega^2 &= U''(\theta_0) = -k \cos \theta_0 + \frac{c}{\operatorname{sen}^2 \theta_0} + 3c \frac{\cos^2 \theta_0}{\operatorname{sen}^4 \theta_0} = -k \cos \theta_0 - k \frac{1 - \cos^2 \theta_0 + 3 \cos^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \\ &= k \frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{|\cos \theta_0|}. \end{aligned}$$

□

1.3 Propiedades generales de las ecuaciones de Lagrange

Para estudiar la estructura de las ecuaciones de Lagrange (1.9), expresemos en primer lugar la energía cinética T en función de $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ utilizando las funciones $\mathbf{x}_i(t, \mathbf{q})$ que relacionan las coordenadas cartesianas \mathbf{x}_i de las partículas con las coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} + \sum_r \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \right)^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_r \dot{q}_s + \sum_r a_r(t, \mathbf{q}) \dot{q}_r + \frac{1}{2} a_0(t, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

siendo

$$a_{rs} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} = a_{sr}, \quad a_r = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r}, \quad a_0 = \sum_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right)^2. \quad (1.16)$$

Vemos por tanto que

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

donde $T_k(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función homogénea de grado k en $\dot{\mathbf{q}}$. Nótese que si las ligaduras son esclerónomas se pueden escoger las coordenadas generalizadas de forma que $(\partial \mathbf{x}_i)/(\partial t) = 0$ para todo i , en cuyo caso $T_0 = T_1 = 0$. Por otra parte, en cada punto (t, \mathbf{q}) el término T_2 es una *forma cuadrática* en $\dot{\mathbf{q}}$ cuyos coeficientes

$$a_{rs}(t, \mathbf{q}) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s}(t, \mathbf{q}), \quad 1 \leq r, s \leq n,$$

están dados explícitamente por (1.16). Es fácil probar que esta forma cuadrática es *definida positiva* en cada punto (t, \mathbf{q}) , por lo que, en particular, es *no degenerada* y por tanto *invertible*:

$$\det(a_{rs}(t, \mathbf{q})) \neq 0, \quad \forall(t, \mathbf{q}).$$

En efecto, se tiene

$$\sum_{r,s} a_{r,s}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_r \dot{q}_s = \sum_i m_i \sum_{r,s} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s = \sum_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right)^2 \geq 0.$$

Además, la última suma es igual a cero si y sólo si se anulan cada uno de sus sumandos, es decir si y sólo si

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = 0,$$

en virtud de la condición (1.3).

Utilizando la expresión (1.15) para T las ecuaciones de Lagrange de segunda especie se pueden escribir como sigue:

$$\sum_s a_{rs}(t, \mathbf{q}) \ddot{q}_s = Q_r + \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{da_r}{dt} - \sum_s \frac{da_{rs}}{dt} \dot{q}_s \equiv f_r(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (1.17)$$

Multiplicando (1.17) por la inversa (b_{rs}) de la matriz (a_{rs}) obtenemos por tanto el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en forma normal

$$\ddot{q}_r = \sum_s b_{rs}(t, \mathbf{q}) f_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Si el miembro derecho de este sistema es una función de clase 1 de sus argumentos, el *teorema de existencia y unicidad* de soluciones de ecuaciones diferenciales garantiza que hay (localmente) una única solución de las ecuaciones de Lagrange que en un dado instante t_0 satisface las condiciones iniciales $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ y $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0$, con \mathbf{q}_0 y $\dot{\mathbf{q}}_0$ arbitrarios. En otras palabras, *la posición y la velocidad en un instante dado determinan unívocamente la trayectoria del sistema en cualquier instante*. Esta es la razón del carácter completamente *determinista* de la mecánica lagrangiana.

Otra propiedad importante de las ecuaciones de Lagrange (de primera especie) es su **covariancia** frente a cambios arbitrarios de coordenadas de la forma

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \tilde{\mathbf{q}}).$$

En otras palabras, si efectuamos el cambio de variable dependiente anterior en las ecuaciones de Lagrange (1.12) obtenemos las ecuaciones de Lagrange correspondientes al lagrangiano

$$\tilde{L}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = L\left(t, \mathbf{q}(t, \tilde{\mathbf{q}}), \frac{d}{dt} \mathbf{q}(t, \tilde{\mathbf{q}})\right). \quad (1.18)$$

Esta propiedad, que se puede comprobar mediante un cálculo directo, es consecuencia de que en la deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir de las ecuaciones generales de la dinámica no se impuso ninguna condición a las coordenadas generalizadas \mathbf{q} . También se deduce del principio variacional de Hamilton, que introduciremos en la próxima sección.

Ejemplo 1.4. *Ecuaciones del movimiento en un sistema de ejes en rotación.*

Consideremos un sistema de ejes $\{\mathbf{e}'_i \mid 1 \leq i \leq 3\}$ en rotación con respecto de un sistema inercial $\{\mathbf{e}_i \mid 1 \leq i \leq 3\}$:

$$\mathbf{e}'_i(t) = R(t)\mathbf{e}_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (1.19)$$

donde $R(t) \in \text{SO}(3)$ es una matriz ortogonal, es decir $R(t)^{-1} = R(t)^\top$. Sean \mathbf{x} las coordenadas respecto de la base $\{\mathbf{e}_i\}$, y tomemos como coordenadas generalizadas \mathbf{q} las coordenadas en la base $\{\mathbf{e}'_i\}$. Para obtener las ecuaciones del movimiento de una partícula libre sometida a un potencial V en el sistema en rotación, debemos expresar el lagrangiano $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V$ en términos de las coordenadas generalizadas \mathbf{q} y sus derivadas $\dot{\mathbf{q}}$. Para ello, nótese que la relación entre las coordenadas \mathbf{x} y \mathbf{q} es⁶

$$\mathbf{x} = R(t)\mathbf{q},$$

y por tanto

$$\dot{\mathbf{x}} = R(t)\dot{\mathbf{q}} + \dot{R}(t)\mathbf{q} = R(t)(\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}), \quad (1.20)$$

siendo el vector $\boldsymbol{\omega}(t)$ las coordenadas de la velocidad angular del sistema de ejes $\{\mathbf{e}'_i\}$ respecto de dicha base⁷. Como $R(t)$ es ortogonal,

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = (\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})^2 = \dot{\mathbf{q}}^2 + 2\dot{\mathbf{q}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})^2 = \dot{\mathbf{q}}^2 + 2\dot{\mathbf{q}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{q}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q})^2.$$

⁶En efecto, $q_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{x} \cdot R(t)\mathbf{e}_i = R(t)^{-1}\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = [R(t)^{-1}\mathbf{x}]_i$.

⁷En efecto, si consideramos una partícula en reposo en el sistema de ejes en rotación sabemos que en tal caso $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{x}$, donde $\boldsymbol{\Omega}(t)$ es la velocidad angular instantánea de rotación de los ejes $\{\mathbf{e}'_i\}$ en el sistema $\{\mathbf{e}_i\}$. Comparando con la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \dot{R}(t)\mathbf{q}$ se obtiene inmediatamente la fórmula anterior para $\boldsymbol{\omega}(t)$. Más formalmente, derivando respecto de t la identidad $R(t)R(t)^\top = \mathbf{1}$ se deduce que $\dot{R}(t)R(t)^\top = \dot{R}(t)R(t)^{-1}$ es una matriz antisimétrica, y por tanto existe un vector $\boldsymbol{\Omega}(t)$ tal que $\dot{R}(t)R(t)^{-1}\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{x}$. Se tiene entonces que $\dot{R}(t)\mathbf{q} = \boldsymbol{\Omega}(t) \times (R(t)\mathbf{q}) = R(t)(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{q})$, siendo $\boldsymbol{\omega}(t) = R(t)^{-1}\boldsymbol{\Omega}(t)$.

Por tanto⁸

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= m(\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}), \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} &= m(\dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{q} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q})\boldsymbol{\omega}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = m(\dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}},\end{aligned}$$

y las ecuaciones del movimiento se escriben

$$m\ddot{\mathbf{q}} + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{q} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}) = m(\dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}},$$

es decir

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{q} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})). \quad (1.21)$$

Los términos entre paréntesis representan las distintas *fuerzas de inercia* (proporcionales a la masa) generadas por la rotación de los ejes. En particular, los dos últimos términos son la *fuerza de Coriolis* y la *fuerza centrífuga*. \square

1.3.1 Potenciales dependientes de la velocidad

Ya vimos en la sección anterior que si las fuerzas externas derivan de un potencial V entonces las ecuaciones de Lagrange de segunda especie se pueden escribir en la forma mucho más compacta (1.12) en términos del lagrangiano $L = T - V$. Nótese, sin embargo, que para que esto ocurra basta con que se cumpla la condición más general

$$Q_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial V}{\partial q_r}, \quad r = 1, \dots, n. \quad (1.22)$$

Un sistema mecánico en que las fuerzas generalizadas Q_r se pueden obtener de un **potencial generalizado** (\equiv dependiente de la velocidad) $V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ mediante las ecuaciones (1.22), y en que por tanto $L = T - V$, se denomina **natural**. Al ser

$$Q_r = \sum_s \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} \ddot{q}_s + \dots,$$

donde los puntos suspensivos denotan términos independientes de las aceleraciones, para que las fuerzas generalizadas Q_r no dependan de las aceleraciones el potencial generalizado V debe ser (a lo sumo) *lineal* en $\dot{\mathbf{q}}$:

$$V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_r u_r(t, \mathbf{q}) \dot{q}_r + V_0(t, \mathbf{q}) \equiv V_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V_0(t, \mathbf{q}). \quad (1.23)$$

A partir de ahora supondremos que el potencial generalizado V es de esta forma. Con esta suposición el lagrangiano de un sistema natural tiene la siguiente estructura:

$$L = T_2 + (T_1 - V_1) + (T_0 - V_0) \equiv L_2 + L_1 + L_0, \quad (1.24)$$

donde el subíndice denota el grado de homogeneidad en $\dot{\mathbf{q}}$. Nótese que si las fuerzas generalizadas Q_r derivan del potencial generalizado (1.23) entonces dependen a lo sumo linealmente de $\dot{\mathbf{q}}$, ya que

$$Q_r = \frac{du_r}{dt} - \sum_s \frac{\partial u_s}{\partial q_r} \dot{q}_s - \frac{\partial V_0}{\partial q_r} = \sum_s \left(\frac{\partial u_r}{\partial q_s} - \frac{\partial u_s}{\partial q_r} \right) \dot{q}_s + \frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial q_r}. \quad (1.25)$$

⁸Obsérvese que $\dot{\mathbf{q}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot (\dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega})$, por la propiedad cíclica del producto triple.

Además, de la ecuación anterior se sigue que

$$\frac{\partial Q_r}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial u_r}{\partial q_s} - \frac{\partial u_s}{\partial q_r} = -\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{q}_r} \quad (1.26)$$

es antisimétrico en los índices r y s .

De las ecs. (1.25)-(1.26) se deduce que si el potencial generalizado V y la función $\mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ que expresa las coordenadas cartesianas en función de las generalizadas no dependen explícitamente del tiempo entonces el trabajo W realizado por las fuerzas externas satisface

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i,r} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r = \sum_r Q_r \dot{q}_r = -\sum_r \frac{\partial V_0}{\partial q_r} \dot{q}_r = -\frac{dV_0}{dt}. \quad (1.27)$$

Por otra parte, si $\mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ no depende explícitamente de t las ligaduras son esclerónomas y el principio de los trabajos virtuales implica que

$$\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = 0,$$

y por tanto

$$-\frac{dV_0}{dt} = \frac{dW}{dt} = \sum_i (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{R}_i) \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{dT}{dt}.$$

Por consiguiente, en este caso la **energía mecánica**

$$E = T + V_0 \quad (1.28)$$

permanece constante en el movimiento del sistema. Este es el llamado **principio de conservación de la energía**.

Ejemplo 1.5. *Partícula libre en un campo electromagnético.*

Consideremos el movimiento de una partícula libre (es decir, no sujeta a ligaduras) de carga e en un campo electromagnético externo

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.29)$$

donde los potenciales ϕ y \mathbf{A} dependen sólo de (t, \mathbf{x}) . La fuerza que actúa sobre la partícula es la llamada **fuerza de Lorentz**

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}). \quad (1.30)$$

Si tomamos como coordenadas generalizadas \mathbf{q} las coordenadas cartesianas \mathbf{x} , entonces $\mathbf{Q} = \mathbf{F}$. Al ser la fuerza de Lorentz claramente lineal en la velocidad, al igual que la fuerza generalizada (1.26), tiene sentido preguntarse si dicha fuerza deriva de un potencial generalizado, es decir si se cumple

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$$

para alguna función $V(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Al ser

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \mathbf{F} &= -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right) \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

basta con que el potencial V cumpla las condiciones

$$\frac{1}{e} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\phi - \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}), \quad \frac{1}{e} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = -\mathbf{A},$$

cuya solución (a menos de una función arbitraria de t , que puede omitirse sin pérdida de generalidad) es

$$V = e(\phi - \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}).$$

Por tanto el movimiento de una partícula libre en un campo electromagnético externo es un sistema natural, con lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - e\phi + e \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}.$$

□

1.3.2 Integrales primeras. Coordenadas cíclicas

Definición 1.6. Una **integral primera** (también llamada **constante del movimiento** o **cantidad conservada**) de las ecuaciones de Lagrange (1.12) es cualquier función $f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ que permanece constante cuando se evalúa a lo largo de cualquier trayectoria $\mathbf{q}(t)$.

En otras palabras, para toda trayectoria $\mathbf{q}(t)$ (es decir, para toda solución de las ecuaciones de Lagrange) se ha de cumplir

$$\frac{d}{dt} f(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente, f es una integral primera si y sólo

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} = 0.$$

Nótese que en la fórmula anterior $\ddot{\mathbf{q}}$ ha de expresarse en función de $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ utilizando las ecuaciones de Lagrange, por lo que $(df)/(dt)$ es en realidad una función de $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ que ha de anularse *idénticamente* para que f sea integral primera. El conocimiento de integrales primeras de un sistema mecánico es muy importante, ya que evidentemente simplifica considerablemente su integración. De hecho, el conocimiento de $2n$ integrales primeras funcionalmente independientes $f_i(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ($1 \leq i \leq n$) de las ecuaciones de Lagrange proporciona su *solución general*

$$f_i(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = c_i, \quad 1 \leq i \leq 2n. \quad (1.31)$$

En efecto, si

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_{2n})}{\partial(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \neq 0$$

en un punto $(t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$, por el teorema de la función implícita las ecuaciones (1.31) permiten expresar el vector $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ en un entorno de dicho punto en función de t y de las $2n$ constantes c_i . En particular, la expresión de \mathbf{q} en función de (t, c_1, \dots, c_{2n}) proporciona la solución general de las ecuaciones de Lagrange.

El ejemplo más sencillo de integral primera está asociado a la existencia de coordenadas cíclicas en el lagrangiano:

Definición 1.7. Se dice que la coordenada q_r es **cíclica** si el lagrangiano L no depende de dicha coordenada.

Evidentemente, si la coordenada q_r es cíclica la r -ésima ecuación de Lagrange (1.12) implica que el **momento conjugado**

$$p_r(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$$

asociado a dicha coordenada es una integral primera.

Si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo t , es decir si

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

es también posible encontrar una integral primera de las ecuaciones de Lagrange. En efecto, multiplicando dichas ecuaciones por $\dot{\mathbf{q}}$ se obtiene

$$\dot{\mathbf{q}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

donde

$$H = \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L \tag{1.32}$$

es el **hamiltoniano** del sistema. Por tanto, *si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo el hamiltoniano (1.32) se conserva.*

La integral primera H dada por (1.32) coincide muchas veces (aunque no siempre) con la energía mecánica del sistema, y por ello se denomina a veces **integral primera de la energía**. En efecto, si L tiene la estructura dada por la ec. (1.24) se tiene⁹

$$H = 2L_2 + L_1 - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0 = T_2 - T_0 + V_0,$$

mientras que

$$E = T + V_0 = T_2 + T_1 + T_0 + V_0.$$

Por tanto H coincide con E si y sólo si

$$T_1 = T_0 = 0,$$

es decir si y sólo si L es de la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_r \dot{q}_s - V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

En particular (cf. la discusión al principio de esta sección) esto ocurre para cualquier sistema con ligaduras esclerónomas en que la función $\mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ que expresa las coordenadas cartesianas de las partículas en términos de las coordenadas generalizadas no depende explícitamente del tiempo.

⁹Si f es una función homogénea de grado k de $\dot{\mathbf{q}}$ entonces (teorema de Euler)

$$\dot{\mathbf{q}} \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = kf.$$

1.4 Formulación lagrangiana de la mecánica relativista

1.4.1 Repaso de Relatividad especial

El *principio de relatividad* de Einstein establece que la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, independiente del sistema de referencia inercial en que se efectúe su medida. Este principio, que fue corroborado por vez primera por el famoso *experimento de Michelson–Morley* (1887), se apoya en bases experimentales muy sólidas. Desde el punto de vista teórico, es una consecuencia inmediata de las ecuaciones de Maxwell, según las cuales la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío es la constante universal $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, siendo ϵ_0 y μ_0 respectivamente la permitividad y la permeabilidad del vacío.

Una consecuencia inmediata del principio de relatividad es que la *transformación de Galileo* que relaciona el tiempo t y las coordenadas \mathbf{x} de un suceso en un sistema de referencia inercial O con las correspondientes magnitudes t' y \mathbf{x}' medidas en otro sistema inercial O' que se desplaza con velocidad constante \mathbf{v} respecto de O , dada por

$$t' = t + t'_0, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - t\mathbf{v} + \mathbf{x}'_0, \quad (1.33)$$

no puede ser correcta. En efecto, supongamos que en el sistema inercial O se observa la emisión de un rayo de luz en el instante t_1 desde el punto de coordenadas \mathbf{x}_1 , y que dicho rayo llega al punto de coordenadas \mathbf{x}_2 en el instante t_2 . Si, como haremos a partir de ahora, trabajamos en un sistema de unidades en que la velocidad de la luz c es igual a la unidad, la relación entre las coordenadas espacio-temporales de ambos sucesos (t_1, \mathbf{x}_1) y (t_2, \mathbf{x}_2) en el sistema O es

$$(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 = 0.$$

Por el principio de relatividad, en otro sistema de referencia inercial O' las coordenadas (t'_1, \mathbf{x}'_1) y (t'_2, \mathbf{x}'_2) de ambos sucesos deberán satisfacer la misma relación, es decir

$$(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 = 0 \quad \implies \quad (t'_2 - t'_1)^2 - (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)^2 = 0. \quad (1.34)$$

Es evidente que esta ecuación, que expresa cuantitativamente el principio de relatividad, es incompatible con la ley de transformación (1.33).

Dados dos sucesos arbitrarios de coordenadas $x_1 \equiv (t_1, \mathbf{x}_1)$ y $x_2 \equiv (t_2, \mathbf{x}_2)$ en un cierto sistema de referencia inercial O , definimos el **intervalo** entre ambos suceso como la raíz cuadrada de la cantidad

$$(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 \equiv (x_2 - x_1)^2.$$

Nótese que el miembro izquierdo puede ser negativo, en cuyo caso el intervalo es imaginario puro. Se puede probar¹⁰ que la relación (1.34) implica que el cuadrado del intervalo entre ambos sucesos respecto de cualquier otro sistema inercial es proporcional a $(x_2 - x_1)^2$, siendo la constante de proporcionalidad función únicamente del módulo de la velocidad relativa entre los orígenes de ambos sistemas inerciales. Por simetría, dicha constante de proporcionalidad debe ser igual a la unidad, es decir debe satisfacerse la relación

$$(x_2 - x_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2. \quad (1.35)$$

¹⁰Véase, por ejemplo, el libro “Teoría clásica de los campos”, de L. D. Landau y E. M. Lifshitz (ed. Reverté, Barcelona, 1981).

Por tanto el principio de relatividad es equivalente a la *invariancia del intervalo* entre dos sucesos cualesquiera. En otras palabras, el intervalo entre dos sucesos es *independiente del sistema inercial* en que se calcule.

A partir de la invariancia del intervalo se demuestra (cf. el libro de Landau y Lifshitz antes citado) que la ley de transformación entre las coordenadas $x \equiv (t, \mathbf{x})$ y $x' \equiv (t', \mathbf{x}')$ de un suceso en dos sistemas inerciales O y O' es la **transformación de Poincaré**

$$x' = x'_0 + \Lambda x, \quad (1.36)$$

siendo $x'_0 = (t'_0, \mathbf{x}'_0) \in \mathbb{R}^4$ constante y Λ una matriz 4×4 que depende únicamente de la velocidad relativa de ambos sistemas inerciales y de la matriz de rotación que relaciona sus ejes, y satisface la condición

$$(\Lambda x)^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^4. \quad (1.37)$$

Es fácil ver que la condición anterior es equivalente a la relación matricial

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta, \quad (1.38)$$

siendo

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

el llamado **tensor métrico de Minkowski**. La transformación (1.36) con $x'_0 = 0$ es una **transformación de Lorentz**. Por ejemplo, si el sistema inercial O' se desplaza con velocidad constante $v > 0$ en la dirección del eje x respecto de O , y los ejes de O y O' son paralelos, la transformación de Lorentz correspondiente se denomina **boost de Lorentz** en la dirección del eje x y está dada por la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta & 0 & 0 \\ -\sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tanh \beta = v.$$

Teniendo en cuenta que

$$\cosh \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \beta}}, \quad \sinh \beta = \frac{\tanh \beta}{\sqrt{1 - \tanh^2 \beta}}$$

las ecuaciones de la transformación se pueden escribir también como sigue:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y \quad z' = z. \quad (1.39)$$

La ventaja de utilizar el parámetro β (a veces llamado *rapidez*) en lugar de la velocidad v es que dicho parámetro es *aditivo*. En otras palabras, si aplicamos sucesivamente dos boosts de Lorentz (1.39) de rapideces β_1 y β_2 el resultado es un boost (en la misma dirección) de rapidez $\beta_{12} = \beta_1 + \beta_2$. Esta observación conduce inmediatamente a la *ley relativista de adición de velocidades*, ya que la velocidad v_{12} del boost resultante está dada por

$$v_{12} = \tanh(\beta_1 + \beta_2) = \frac{\tanh \beta_1 + \tanh \beta_2}{1 + \tanh \beta_1 \tanh \beta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}.$$

Dados dos cuadvectores $a = (a^0, \mathbf{a}) \equiv (a^\mu)$ y $b = (b^0, \mathbf{b}) \equiv (b^\mu)$, definimos su producto $a \cdot b \in \mathbb{R}$ mediante

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \quad (1.40)$$

donde hemos utilizado el llamado *convenio de suma de Einstein* para índices griegos repetidos:

$$a_{\mu\nu\dots} b^{\mu\nu\dots} \equiv \sum_{\mu,\nu=0}^3 a_{\mu\nu\dots} b^{\mu\nu\dots}.$$

Nótese que (1.40) no es un verdadero producto escalar, ya que no es definido positivo: en efecto, $x \cdot x \equiv x^2$ puede ser negativo, o nulo aunque $x \neq 0$. A pesar de ello, es muy frecuente llamar a $a \cdot b$ el **producto escalar** de los cuadvectores a y b . El espacio-tiempo \mathbb{R}^4 , dotado del producto (1.40), se denomina **espacio de Minkowski**.

Una forma alternativa de escribir el producto $a \cdot b$ es

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu,$$

donde se ha utilizado el tensor métrico de Minkowski $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ para bajar los índices:

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu, \quad b_\mu = \eta_{\mu\nu} b^\nu.$$

En general, utilizaremos el tensor $(\eta_{\mu\nu})$ para bajar cualquier índice, y su inverso

$$(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu})^{-1} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

para subirlo. Por ejemplo,

$$\eta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} \eta^{\rho\nu} = \delta_\mu{}^\nu,$$

donde δ es la delta de Kronecker.

1.4.2 Dinámica relativista. Lagrangiano relativista

El principio de relatividad implica que el lapso de tiempo $t_2 - t_1$ transcurrido entre dos sucesos depende del sistema referencial considerado (cf., por ejemplo, la transformación de Lorentz (1.39)). Sin embargo, si consideramos el movimiento de una partícula a lo largo de una curva $\mathbf{x}(t)$ entonces¹¹

$$d\tau \equiv \sqrt{dx^2} = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{x}^2} = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dt, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}},$$

es claramente invariante bajo transformaciones de Poincaré, por serlo el cuadrado del intervalo infinitesimal dx . Por tanto el **tiempo propio**

$$\tau = \int_{t_0}^t d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2(s)} ds,$$

es también *independiente del sistema de referencia inercial* utilizado para calcularlo. Físicamente, el lapso de tiempo propio

$$\tau_{12} = \tau(t_2) - \tau(t_1) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2(t)} dt$$

¹¹Recuérdese que hemos escogido las unidades de forma que la velocidad de la luz en el vacío sea igual a la unidad.

representa el tiempo transcurrido entre los sucesos $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$ y $(t_2, \mathbf{x}(t_2))$ según un observador que se mueve con la partícula.

A partir del tiempo propio τ se definen la **cuadrivelocidad**

$$u = \frac{dx}{d\tau} \in \mathbb{R}^4$$

y el **cuadrimomento**

$$p = mu \in \mathbb{R}^4.$$

Al ser τ un escalar bajo transformaciones de Poincaré, u y p son *vectores* bajo dichas transformaciones. En otras palabras, en otro sistema inercial O' relacionado con O por la transformación (1.36) los vectores u y p se transforman en $u' = \Lambda u$ y $p' = \Lambda p$. De la definición de tiempo propio se sigue que

$$u^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad p^2 = m^2, \quad (1.41)$$

es decir (ya que $p^0 = m \frac{dt}{d\tau} > 0$)

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (1.42)$$

Las ecuaciones relativistas del movimiento de una partícula de masa m son

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.43)$$

o equivalentemente

$$\frac{dp}{d\tau} = K(x, u),$$

donde

$$x = (t, \mathbf{x}) = (t, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu) \in \mathbb{R}^4$$

y

$$K = (K^0, \mathbf{K}) = (K^0, K^1, K^2, K^3) \equiv (K^\mu) \in \mathbb{R}^4$$

es la llamada **cuadrifuerza**.

Nótese que K debe ser un vector bajo transformaciones de Poincaré, al serlo el miembro izquierdo de (1.43). En otras palabras, si efectuamos una transformación de Poincaré $x'^\mu = x_0^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ entonces las ecuaciones del movimiento (1.43) en el sistema O' se escriben

$$\frac{dp'^\mu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dp^\nu}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu K^\nu \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right).$$

Por tanto la cuadrifuerza K' en el sistema O' está dada por

$$K'^\mu \left(x', \frac{dx'}{d\tau} \right) = \Lambda^\mu{}_\nu K^\nu \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right),$$

que efectivamente es la ley de transformación de un vector.

Derivando (1.41) respecto de τ y utilizando la ecuación del movimiento se obtiene la importante relación

$$K \cdot u = 0, \quad (1.44)$$

es decir

$$K^0 u^0 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad \Longrightarrow \quad K^0 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.45)$$

Obsérvese que p^0 (al igual que las componentes espaciales del cuadvivector p) se conserva en ausencia de fuerzas, y satisface

$$p^0 = m \frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = m + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + O(|\mathbf{v}|^4). \quad (1.46)$$

Estas dos circunstancias hacen muy natural el considerar a p^0 la **energía cinética relativista**. En particular, la ec. (1.42) es la relación entre la energía cinética relativista y el momento lineal, que reemplaza a la expresión newtoniana $T = \mathbf{p}^2/(2m)$. Es importante observar que las ecuaciones (1.46) o (1.42) implican que *el origen de energías relativista está desplazado en m respecto del newtoniano*. En otras palabras, el límite no relativista de la energía cinética relativista es la energía cinética no relativista *más* la masa en reposo de la partícula.

Las ecuaciones (1.43) son manifiestamente *covariantes* bajo transformaciones de Poincaré, al ser K un vector bajo este tipo de transformaciones. Para nuestro propósito, que es el de expresarlas como las ecuaciones de Lagrange de un cierto lagrangiano $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, es sin embargo más conveniente escribir su parte espacial como sigue:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2}} \right) = \sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2} \mathbf{K}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}). \quad (1.47)$$

Es por tanto natural considerar al vector (¡bajo rotaciones únicamente!)

$$\mathbf{F} = \sqrt{1-\mathbf{v}^2} \mathbf{K} \quad (1.48)$$

la generalización relativista de la fuerza newtoniana. Cuando la fuerza \mathbf{F} deriva de un potencial generalizado $V(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, es decir cuando se verifica

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.49)$$

las ecuaciones (1.47) son las ecuaciones de Euler–Lagrange de un Lagrangiano L si

$$\frac{\partial(L+V)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2}}, \quad \frac{\partial(L+V)}{\partial \mathbf{x}} = 0,$$

lo que inmediatamente conduce a la fórmula

$$L = -m\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2} - V \quad (1.50)$$

(a menos de una función arbitraria de t). Nótese que (salvo por la constante irrelevante $-m$) el lagrangiano relativista (1.50) coincide con el lagrangiano newtoniano hasta orden 2 en $|\mathbf{v}|$. Obsérvese también que el lagrangiano relativista (1.50) *no* es de la forma $T - V$, siendo T la energía cinética relativista.

Supondremos que, como en el caso no relativista, el potencial generalizado V en (1.49) depende a lo sumo linealmente de $\dot{\mathbf{x}}$, de modo que la fuerza \mathbf{F} es independiente de la aceleración. La relación (1.48) implica entonces que K depende linealmente de u . Para ver esto en detalle, escribamos

$$F^i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = f^i(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 f_j^i(t, \mathbf{x}) \dot{x}^j, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (1.51)$$

donde (cf. la ec. (1.26))

$$f_j^i = \frac{\partial F^i}{\partial \dot{x}^j} = -f_i^j$$

es antisimétrico en (i, j) . Entonces se tiene

$$K^i = F^i \frac{dt}{d\tau} = f^i u^0 + \sum_j f_j^i u^j \equiv K^i{}_\mu u^\mu,$$

con

$$K^i{}_0 = f^i, \quad K^i{}_j = f_j^i. \quad (1.52)$$

Por otra parte,

$$K^0 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \sum_i f^i u^i,$$

ya que

$$\sum_{i,j} f_j^i \dot{x}^j u^i = \frac{d\tau}{dt} \sum_{i,j} f_j^i u^j u^i = 0$$

por la antisimetría de f_j^i . Por tanto $K^0 = K^0{}_\mu u^\mu$, con

$$K^0{}_0 = 0, \quad K^0{}_i = f^i. \quad (1.53)$$

En resumidas cuentas

$$K^\mu(x, u) = K^\mu{}_\nu(x) u^\nu \quad (1.54)$$

es lineal en u , como habíamos afirmado. Nótese que los tensores $K^{\mu\nu} = \eta^{\rho\nu} K^\mu{}_\rho$ y $K_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} K^\rho{}_\nu$ son ambos *antisimétricos*, ya que (por ejemplo)

$$\begin{aligned} K^{00} &= K^0{}_0 = 0; \\ K^{ij} &= -K^i{}_j = -f_j^i = f_i^j = K^j{}_i = -K^{ji}; \\ K^{0i} &= -K^0{}_i = -f^i = -K^i{}_0 = -K^{i0}. \end{aligned}$$

En particular, de las ecuaciones anteriores se sigue que

$$(K^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -f^1 & -f^2 & -f^3 \\ & 0 & -f_2^1 & -f_3^1 \\ & & 0 & -f_3^2 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Nótese también que de la antisimetría de f_j^i se deduce que podemos expresar dichas cantidades en términos de un trivector $\mathbf{g} \equiv (g^1, g^2, g^3)$ mediante

$$f_j^i = \sum_k \epsilon_{ijk} g^k,$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor completamente antisimétrico de Levi-Civita ($\epsilon_{123} = +1$), y por tanto

$$(K^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -f^1 & -f^2 & -f^3 \\ & 0 & -g^3 & g^2 \\ & & 0 & -g^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Además

$$\sum_j f_j^i \dot{x}^j = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \dot{x}^j g^k = (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{g})^i,$$

y por tanto

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \mathbf{v} \times \mathbf{g}.$$

Por ejemplo, si la fuerza proviene de un campo electromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{B}) entonces

$$\mathbf{f} = e \mathbf{E}, \quad \mathbf{g} = e \mathbf{B},$$

y las ecuaciones del movimiento (1.43) se escriben

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu}(x) u_\nu, \quad (1.56)$$

donde el **tensor de Maxwell** está dado por (cf. (1.55))

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ & 0 & -B^3 & B^2 \\ & & 0 & -B^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

El carácter tensorial de $F^{\mu\nu}$ bajo transformaciones de Poincaré, que se deduce directamente del carácter vectorial de K^μ y de la relación (1.54), significa que si O y O' están relacionados por (1.36) entonces el tensor de Maxwell en O' está dado por

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x),$$

o, en notación matricial,

$$F'(x') = \Lambda F(x) \Lambda^\Gamma.$$

Por ejemplo, bajo el boost de Lorentz (1.39) un campo electromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{B}) en O se transforma en $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ en O' , donde

$$\begin{aligned} E'^1 &= E^1, & E'^2 &= \frac{E^2 - vB^3}{\sqrt{1-v^2}}, & E'^3 &= \frac{E^3 + vB^2}{\sqrt{1-v^2}} \\ B'^1 &= B^1, & B'^2 &= \frac{B^2 + vE^3}{\sqrt{1-v^2}}, & B'^3 &= \frac{B^3 - vE^2}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1. Probar que si el potencial generalizado V no depende de t (en un determinado sistema inercial!) se conserva la **energía relativista**

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2}} + V_0(\mathbf{x}).$$

Solución. De la ecuación del movimiento para p^0 y (1.45) se obtiene inmediatamente

$$\frac{dp^0}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}}.$$

De las ecs. (1.25) se sigue que

$$\frac{dp^0}{dt} = -\dot{\mathbf{x}} \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -\frac{dV_0}{dt} \implies 0 = \frac{d}{dt}(p^0 + V_0) \equiv \frac{dE}{dt}.$$

Este resultado también se deduce inmediatamente del hecho de que en este caso el lagrangiano es independiente de t , y por tanto admite la integral primera de la energía

$$H = \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - L = \frac{m \dot{\mathbf{x}}^2}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2}} + m\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2} + V_0 = \frac{m}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2}} + V_0.$$

□

Ejercicio 2. Calcular la corrección relativista al período de una partícula sometida a un potencial unidimensional $V(x)$ “tipo oscilador armónico” (V par y creciente para $x > 0$, con $V(0) = 0$).

Solución. De la ecuación de conservación de la energía se obtiene

$$\dot{x}^2 = 1 - (\mathcal{E} - U(x))^{-2}, \quad (1.58)$$

donde

$$\mathcal{E} = \frac{E}{m}, \quad U(x) = \frac{V(x)}{m};$$

Nótese que

$$\mathcal{E} - U(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} \geq 1 \implies \mathcal{E} \geq 1.$$

La ec. (1.58) es la ecuación del movimiento de una partícula no relativista de masa 2 y energía 1 sometida al potencial $U_{\text{eff}}(x) = (\mathcal{E} - U(x))^{-2}$. En particular, para un potencial tipo oscilador armónico U_{eff} tiene el aspecto de la Fig. 1.6 para todo $\mathcal{E} \geq 1$, por lo que el movimiento es periódico para cualquier energía, como en el caso no relativista.

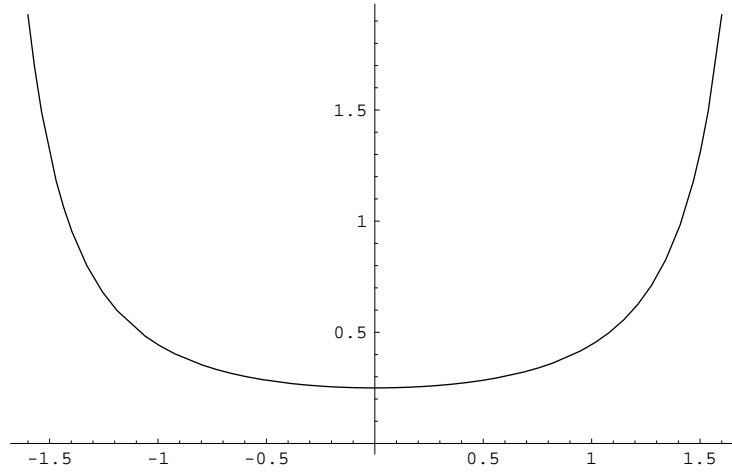


Figura 1.6: Potencial efectivo $U_{\text{eff}}(x)$ para un potencial armónico $U(x)$.

Si $\epsilon = \mathcal{E} - 1 \geq 0$, la amplitud $a \equiv a(\epsilon)$ de las oscilaciones está determinada por la condición

$$U(a) = \epsilon;$$

nótese que dicha amplitud es la misma que para un movimiento no relativista de energía $m\epsilon = E - m$. El período es por tanto

$$T \equiv T(\epsilon) = 4 \int_0^{a(\epsilon)} \frac{dx}{\sqrt{1 - (1 + \epsilon - U(x))^{-2}}}.$$

Al ser $v_{\text{max}}^2 = 1 - (1 + \epsilon)^{-2}$, el límite no relativista se alcanza cuando $\epsilon \rightarrow 0+$. En tal caso

$$v_{\text{max}}^2 = 2\epsilon + O(\epsilon^2), \quad 0 \leq \epsilon - U(x) \leq \epsilon,$$

y desarrollando en potencias de $\epsilon - U(x)$ se obtiene

$$1 - (1 + \epsilon - U(x))^{-2} = 2(\epsilon - U(x)) - 3(\epsilon - U(x))^2 + \dots$$

$$\left[1 - (1 + \epsilon - U(x))^{-2}\right]^{-1/2} = \left[2(\epsilon - U(x))\right]^{-1/2} \left[1 + \frac{3}{4}(\epsilon - U(x)) + \dots\right].$$

La corrección al período no relativista es por tanto

$$T(\epsilon) - T_{\text{nr}}(\epsilon) \equiv \Delta T(\epsilon) = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_0^{a(\epsilon)} \sqrt{\epsilon - U(x)} \, dx.$$

Nótese que $\Delta T(\epsilon) > 0$ para cualquier potencial $U(x)$. Esto es fácil de entender, dado que cuando la partícula se encuentra en un punto cualquiera x su velocidad es siempre *menor o igual* que la de una partícula no relativista de energía $E - m$ situada en dicho punto. En efecto, si $s \equiv \mathcal{E} - U(x) \geq 1$ se tiene

$$\dot{x}_{\text{nr}}^2 - \dot{x}^2 = 2(s - 1) - (1 - s^{-2}) = \frac{1}{s^2} (s - 1)^2 (2s + 1) \geq 0, \quad \forall s \geq 1.$$

Por ejemplo, para un oscilador armónico de frecuencia clásica ω la amplitud es $a(\epsilon) = \sqrt{2\epsilon}/\omega$, y la corrección relativista al período es por tanto

$$\Delta T(\epsilon) = \frac{3}{2} \omega \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{3}{2} \omega a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 s \, ds = \frac{3\pi}{8} \omega a^2,$$

de donde (restaurando la velocidad de la luz)

$$\frac{\Delta T}{T_{\text{nr}}} = \frac{3}{8} \epsilon = \frac{3}{16} \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2.$$

Esta corrección es extraordinariamente pequeña en condiciones ordinarias. Por ejemplo, para un péndulo de frecuencia $\omega = 1\text{Hz}$ y amplitud $a = 1\text{m}$ se tiene $\Delta T/T_{\text{nr}} \approx 2 \cdot 10^{-18}$. Nótese por último que, a diferencia de lo que ocurre con el oscilador no relativista, el período del oscilador relativista depende de la energía. \square

1.5 Cálculo variacional. Principio de Hamilton

1.5.1 Ecuaciones de Euler–Lagrange

El problema fundamental del cálculo de variaciones consiste en encontrar los extremos de un *funcional* de la forma

$$\mathcal{F}[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \, dt, \quad (1.59)$$

siendo $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_n) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva en \mathbb{R}^n tal que

$$\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2. \quad (1.60)$$

En otras palabras, de entre todas las trayectorias $\mathbf{q}(t)$ que pasan por \mathbf{q}_1 en el instante inicial $t = t_1$ y terminan en \mathbf{q}_2 en el instante final $t = t_2$, queremos encontrar aquellas que minimizan o maximizan el funcional \mathcal{F} . Por ejemplo, para encontrar la curva de

longitud mínima que pasa por dos puntos $(t_1, \mathbf{q}_1), (t_2, \mathbf{q}_2) \in \mathbb{R}^{n+1}$ debemos minimizar el funcional (1.59) con $F(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sqrt{1 + \dot{\mathbf{q}}^2}$.

Aunque la cuestión que acabamos de plantear está formulada como un problema típico de máximos y mínimos, la dificultad estriba en que el funcional \mathcal{F} tiene como dominio el espacio de dimensión infinita formado por todas las curvas que unen los puntos (t_1, \mathbf{q}_1) y (t_2, \mathbf{q}_2) . Podemos reducir el problema planteado al de hallar los extremos de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} si consideramos una familia a un parámetro $\mathbf{q}(t, \epsilon) \equiv \mathbf{q}^\epsilon(t)$ de tales curvas, siendo $\mathbf{q}^0(t) \equiv \mathbf{q}(t, 0)$ un extremal (máximo o mínimo) de \mathcal{F} . Cada una de las trayectorias \mathbf{q}^ϵ de la familia satisface por hipótesis las condiciones $\mathbf{q}^\epsilon(t_i) = \mathbf{q}_i$, es decir

$$\forall \epsilon, \quad \mathbf{q}(t_i, \epsilon) = \mathbf{q}_i; \quad i = 1, 2. \quad (1.61)$$

La restricción del funcional \mathcal{F} a la familia a un parámetro \mathbf{q}^ϵ , es decir la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\epsilon) \equiv \mathcal{F}[\mathbf{q}^\epsilon] = \int_{t_1}^{t_2} F\left(t, \mathbf{q}(t, \epsilon), \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t, \epsilon)\right) dt,$$

tiene entonces un extremo en $\epsilon = 0$, y por tanto $f'(0) = 0$. Aplicando la regla de la cadena se obtiene fácilmente:

$$f'(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon} \right) \right] dt,$$

donde las derivadas parciales de F están evaluadas en $(t, \mathbf{q}^\epsilon(t), \dot{\mathbf{q}}^\epsilon(t))$. Integrando por partes el segundo sumando en la última integral se obtiene

$$f'(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon} dt + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon} \right|_{t_1}^{t_2} \quad (1.62)$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

denota la derivada total respecto del tiempo manteniendo ϵ constante. Derivando respecto de ϵ las condiciones (1.61) se obtiene

$$\forall \epsilon, \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon}(t_i, \epsilon) = 0; \quad i = 1, 2. \quad (1.63)$$

Teniendo esto en cuenta y haciendo $\epsilon = 0$ se obtiene finalmente

$$f'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}^0(t), \dot{\mathbf{q}}^0(t), \ddot{\mathbf{q}}^0(t)) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon}(t, 0) dt = 0, \quad (1.64)$$

donde

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (1.65)$$

es la **derivada variacional** de F respecto de \mathbf{q} . Al ser $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon}(t, 0)$ una función arbitraria (con la única restricción de anularse para $t = t_1$ y $t = t_2$, cf. (1.63)), si la trayectoria $\mathbf{q}^0(t)$ es un extremal del funcional \mathcal{F} debe satisfacer necesariamente las **ecuaciones de Euler–Lagrange**

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}} = 0 \quad (1.66)$$

asociadas a la densidad F .

De la deducción anterior es evidente que las ecuaciones de Euler–Lagrange son sólo una condición *necesaria* para que el funcional \mathcal{F} posea un extremo, al igual que ocurre con la condición análoga en el cálculo diferencial de funciones de \mathbb{R}^m en \mathbb{R} . De hecho, (1.66) es en rigor la condición de *punto crítico* o *estacionario* para el funcional \mathcal{F} . Es fácil probar que si se cumple la condición

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} \right) (t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \neq 0, \quad \forall (t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

entonces las ecuaciones de Euler–Lagrange (1.66) son equivalentes a un sistema normal de n ecuaciones diferenciales de segundo orden en la función vectorial incógnita $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ (que deben, por supuesto, complementarse con las $2n$ condiciones de contorno (1.61)).

Se suele definir la **variación** $\delta \mathbf{q}(t)$ asociada a la familia a un parámetro $\mathbf{q}(t, \epsilon)$ mediante

$$\delta \mathbf{q}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{q}(t, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (1.67)$$

La variación $\delta \mathbf{q}(t)$ se anula en los extremos $t = t_i$ ($i = 1, 2$), en virtud de la ec. (1.63):

$$\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0.$$

Si definimos, de forma análoga, la variación del funcional \mathcal{F} a lo largo de la curva \mathbf{q}^0 mediante

$$\delta \mathcal{F}[\mathbf{q}^0] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[\mathbf{q}^\epsilon] \right|_{\epsilon=0},$$

entonces la ec. (1.64) se escribe

$$\delta \mathcal{F}[\mathbf{q}^0] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}} (t, \mathbf{q}^0(t), \dot{\mathbf{q}}^0(t), \ddot{\mathbf{q}}^0(t)) \delta \mathbf{q}(t) dt, \quad (1.68)$$

lo que justifica la notación utilizada para la derivada variacional. Obsérvese, finalmente, que si no imponemos las condiciones de contorno (1.61) la variación de \mathcal{F} está dada por la fórmula más general (cf. (1.62))

$$\delta \mathcal{F}[\mathbf{q}^0] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \right) dt + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right|_{t_1}^{t_2}, \quad (1.69)$$

donde las derivadas parciales de F están evaluadas a lo largo de la trayectoria $\mathbf{q}^0(t)$.

Ejemplo 1.8. *Problema de la braquistócrona.*

Se trata de hallar la curva que conecta dos puntos (x_1, z_1) y (x_2, z_2) en un plano vertical de forma que el *tiempo de recorrido* de un partícula que se mueve a lo largo de dicha curva bajo la acción de la gravedad sea mínimo. Dado que

$$dt = \frac{ds}{v}, \quad ds = \sqrt{1 + \dot{z}(x)^2} dx$$

y

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E \implies v = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{E}{mg} - z},$$

el tiempo de recorrido es

$$t_{12} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{z}^2}{\frac{E}{mg} - z}} dx \equiv \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dx$$

siendo $y = E/(mg) - z$. Por tanto el funcional a minimizar es

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2(x)}{y(x)}} dx.$$

Las ecuaciones de Euler–Lagrange son

$$-\frac{\delta}{\delta y} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} = \frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\sqrt{y(1 + \dot{y}^2)}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y^3}} = 0.$$

Como la densidad F no depende en este caso de la variable independiente x (que en este problema juega el papel del tiempo t), la ecuación anterior posee la integral primera de la energía

$$\dot{y} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - F = \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{y(1 + \dot{y}^2)}} - \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} = -\frac{1}{\sqrt{y(1 + \dot{y}^2)}} = -h,$$

que conduce a la siguiente ecuación diferencial de primer orden con variables separadas para y :

$$\dot{y} = \pm \sqrt{\frac{2c}{y} - 1}, \quad c \equiv \frac{1}{2h^2} > 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$x - x_0 = \pm \int \sqrt{\frac{y}{2c - y}} dy,$$

que con el cambio

$$u^2 = \frac{y}{2c - y} \iff y = \frac{2cu^2}{1 + u^2} \tag{1.70}$$

se reduce a

$$x - x_0 = \pm 4c \int \frac{u^2}{(1 + u^2)^2} du.$$

Teniendo en cuenta que

$$\int \frac{du}{1 + s^2 u^2} = s^{-1} \arctan(su) \implies \int \frac{-2su^2}{(1 + s^2 u^2)^2} du = \frac{\partial}{\partial s} [s^{-1} \arctan(su)]$$

se obtiene

$$\int \frac{u^2}{(1 + u^2)^2} du = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=1} [s^{-1} \arctan(su)] = \frac{1}{2} \left(\arctan u - \frac{u}{1 + u^2} \right).$$

Por tanto

$$x - x_0 = 2c \left(\arctan u - \frac{u}{1 + u^2} \right)$$

con u dado por (1.70), es la ecuación implícita de la curva buscada¹². Para identificar dicha curva es más fácil pasar a las ecuaciones paramétricas, lo cual se puede conseguir haciendo $u = \tan(\theta/2)$, de donde

$$\frac{u}{1 + u^2} = \frac{\tan(\theta/2)}{\sec^2(\theta/2)} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta, \quad y = \frac{2cu^2}{1 + u^2} = 2c \operatorname{sen}^2(\theta/2) = c(1 - \cos \theta).$$

Se obtienen así las ecuaciones

$$x = x_0 + c(\theta - \operatorname{sen} \theta), \quad y = c(1 - \cos \theta),$$

que describen una *cicloide* generada por una circunferencia de radio c . □

¹²Nótese que se puede prescindir del doble signo, ya que $x - x_0$ es una función impar de u mientras que y es una función par de dicha variable.

1.5.2 Principio de Hamilton

Hemos visto en el apartado anterior que las ecuaciones de Euler–Lagrange (1.66) expresan la condición de que la curva $\mathbf{q}(t)$ sea un punto crítico para el funcional (1.59) asociado a la función $F(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Aplicando lo anterior al lagrangiano $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un sistema mecánico se obtiene el **principio de Hamilton**, también llamado de **acción estacionaria**:

De entre todas las curvas que satisfacen las condiciones (1.60), la trayectoria que sigue un sistema mecánico de lagrangiano $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es aquella que hace estacionaria a la acción

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt. \quad (1.71)$$

En otras palabras, las trayectorias de un sistema mecánico son las curvas $\mathbf{q}(t)$ que verifican la condición

$$\delta S[\mathbf{q}] = 0.$$

Del principio de acción estacionaria se siguen inmediatamente algunas consecuencias importantes que discutiremos brevemente a continuación.

- La *covariancia* de las ecuaciones de Lagrange bajo cambios (invertibles) de coordenadas

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t, \tilde{\mathbf{q}}) \quad (1.72)$$

es una consecuencia inmediata del principio de Hamilton. En efecto, sea

$$\tilde{L}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = L\left(t, \mathbf{Q}(t, \tilde{\mathbf{q}}), \frac{d}{dt} \mathbf{Q}(t, \tilde{\mathbf{q}})\right)$$

el lagrangiano obtenido de L efectuando dicho cambio, y denotemos por \tilde{S} la acción correspondiente a \tilde{L} . Si $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(t)$ es una curva cualquiera y $\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t, \tilde{\mathbf{q}}(t))$ es la transformada de $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ bajo el cambio de coordenadas (1.72), es claro que

$$\tilde{S}[\tilde{\mathbf{q}}] = S[\mathbf{q}]. \quad (1.73)$$

Por tanto los puntos críticos de S y \tilde{S} , es decir las soluciones $\mathbf{q}(t)$ y $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ de las ecuaciones de Lagrange de L y \tilde{L} , están relacionados mediante el cambio de variables (1.72). En otras palabras,

$$\frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} = 0 \quad \iff \quad \frac{\delta \tilde{L}}{\delta \tilde{\mathbf{q}}} = 0,$$

como habíamos afirmado.

Ejercicio 3. Probar que

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta \tilde{q}_i} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{q}_i}. \quad (1.74)$$

Solución. Las variaciones $\delta \tilde{\mathbf{q}}(t)$ y $\delta \mathbf{q}(t)$ están relacionadas por

$$\delta \mathbf{q} = \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}}.$$

Tomando variaciones en la ec. (1.73) obtenemos

$$\delta \tilde{S}[\tilde{\mathbf{q}}] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta \tilde{L}}{\delta \tilde{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} dt = \delta S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} \right) dt.$$

Como la variación $\delta \tilde{\mathbf{q}}$ es arbitraria, igualando los coeficientes de $\delta \tilde{q}_i$ en la primera y la última de estas integrales se obtiene la igualdad (1.74). \square

- La acción asociada a la **derivada total**

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

de una función $f(t, \mathbf{q})$ es una constante independiente de la curva $\mathbf{q}(t)$. En efecto,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = f(t_2, \mathbf{q}_2) - f(t_1, \mathbf{q}_1).$$

Por tanto *la derivada variacional de una derivada total se anula idénticamente*:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{q}} \left(\frac{df}{dt} \right) = 0, \quad \forall f(t, \mathbf{q}).$$

Al ser la derivada variacional un operador lineal, de esto se sigue inmediatamente que

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{q}} \left(L + \frac{df}{dt} \right) = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}}, \quad \forall f(t, \mathbf{q}).$$

En otras palabras, *dos lagrangianos que difieren en una derivada total conducen exactamente a las mismas ecuaciones del movimiento*. El recíproco de esta afirmación también es cierto: si dos lagrangianos conducen *exactamente* a las mismas ecuaciones del movimiento (es decir, tienen la misma derivada variacional), entonces difieren en una derivada total. Equivalentemente,

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{q}} = 0 \quad \implies \quad F = \frac{d}{dt} f(t, \mathbf{q})$$

(pruébese esto como ejercicio). Nótese que si omitimos el adverbio “exactamente” la afirmación no es cierta. Por ejemplo, los lagrangianos $L = \frac{1}{2} \dot{x}^2$ y $\tilde{L} = e^{c\dot{x}}$ (con $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$) conducen a las mismas ecuaciones del movimiento, aunque no difieren en una derivada total.

¿Bajo qué condiciones las trayectorias de un sistema mecánico (es decir, las soluciones de las ecuaciones de Lagrange) *minimizan* la acción S ? En primer lugar, se puede probar que la *segunda variación* de la acción evaluada a lo largo de una trayectoria $\mathbf{q}(t)$ está dada por

$$\delta^2 S \equiv \left. \frac{d^2 S}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{r,s} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_r \delta \dot{q}_s + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_s} \delta q_r \delta \dot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial q_s} \delta q_r \delta q_s \right] dt.$$

De la anulación de las variaciones δq_r para $t = t_1$ y de la identidad

$$\delta \dot{q}_r = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(\frac{\partial q_r}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_r,$$

se deduce que

$$\delta q_r(t) = \int_{t_1}^t \delta \dot{q}_r(s) ds \quad \implies \quad |\delta q_r| \leq |t_2 - t_1| \max \{ |\delta \dot{q}_r(t)| : t \in [t_1, t_2] \}.$$

Por tanto $|\delta q_r|$ es pequeño si $|\delta \dot{q}_r|$ lo es, mientras que es evidente que $|\delta \dot{q}_r|$ puede hacerse arbitrariamente grande manteniendo $|\delta q_r|$ pequeño. Luego el primer término en la

expresión de $\delta^2 S$ domina sobre los demás, y por tanto una condición *necesaria* para que la acción sea mínima es la célebre *condición de Legendre*:

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} (t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \right)_{r,s=1}^n \quad \text{semidefinida positiva } \forall t.$$

En particular, para sistemas con un grado de libertad esta condición se reduce a

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} (t, q(t), \dot{q}(t)) \geq 0 \quad \forall t.$$

Más difícil es encontrar una condición *suficiente* de mínimo de la acción. Lo primero que hay que resaltar es que es imposible formular condiciones de tipo puramente *local* que garanticen que la acción tenga un mínimo. En efecto, si esto fuera posible de ello se seguiría que la unión de un número arbitrario de curvas cada una de las cuales minimiza S también minimizaría S . Que esto es falso se comprueba fácilmente considerando el funcional longitud de arco sobre la esfera unidad, para el cual

$$L = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2 \theta}, \quad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Las ecuaciones de Lagrange se reducen a

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\dot{\theta}}{L} \right) = \frac{1}{L} \text{sen } \theta \cos \theta.$$

Es fácil probar (utilizando la integral primera de la energía) que las trayectorias son en este caso arcos de círculo máximo.¹³ Pero uno de dichos arcos minimiza la longitud sobre la esfera si y sólo si su longitud es menor o igual que π .

Nótese que en el ejemplo anterior se tiene

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\theta}^2} = \frac{\text{sen}^2 \theta}{L^3} > 0.$$

Esto sugiere que si se cumple la *condición fuerte de Legendre*

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} (t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \right)_{r,s=1}^n \quad \text{definida positiva } \forall t \quad (1.75)$$

la acción es mínima si nos restringimos a segmentos *suficientemente pequeños* de las trayectorias. Se demuestra que la afirmación anterior es cierta en general. Más precisamente, dada una trayectoria $\mathbf{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, diremos que un punto $\mathbf{q}(t_0)$ de dicha trayectoria está *conjugado* con el punto inicial $\mathbf{q}(t_1)$ si $\mathbf{q}(t_0)$ es la posición límite de los puntos de intersección de la trayectoria $\mathbf{q}(t)$ con las trayectorias próximas que pasan por el punto $\mathbf{q}(t_1)$ en el instante t_1 . Se demuestra entonces el siguiente resultado:

Si se cumple la condición fuerte de Legendre (1.75), y la trayectoria $\mathbf{q}(t)$ no contiene puntos conjugados a $\mathbf{q}(t_1)$ en el intervalo $[t_1, t_2]$, entonces la acción (1.71) tiene un mínimo local a lo largo de dicha trayectoria.

¹³En efecto, la integral primera de la energía proporciona $\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = -\frac{\text{sen}^2 \theta}{L} = E$, y por tanto

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\dot{\theta}}{\text{sen}^2 \theta} \right) = \cot \theta \quad \iff \quad \frac{d^2}{d\varphi^2} (\cot \theta) = -\cot \theta \quad \iff \quad \cot \theta = a \cos \varphi + b \text{sen } \varphi,$$

ecuación de la intersección de la esfera unidad con el plano $z = ax + by$.

Nótese que para un sistema mecánico natural $L = T - V$, donde T es la energía cinética no relativista y el potencial generalizado V es lineal en $\dot{\mathbf{q}}$, la matriz

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} = a_{rs}(t, \mathbf{q})$$

(cf. la Sección 1.3) es siempre definida positiva. Por tanto, para un sistema mecánico natural la acción tiene un mínimo local a lo largo de las trayectorias del sistema, siempre y cuando nos restrinjamos a segmentos de dichas trayectorias que no contengan puntos conjugados. En particular, para un sistema mecánico natural *las trayectorias del sistema proporcionan un mínimo local de la acción si t_2 es suficientemente próximo a t_1* . De ahí que el principio de Hamilton se denomine frecuentemente *principio de mínima acción*.

Ejemplo 1.9. Consideremos la acción correspondiente al lagrangiano relativista de una partícula $L = -m\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} - V(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Como el potencial generalizado V es a lo sumo lineal en $\dot{\mathbf{x}}$ se tiene

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = -m \frac{\partial^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = m \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left(\frac{\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}} \right) = \frac{m \delta_{ij}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}} + \frac{m \dot{x}^i \dot{x}^j}{(1 - \dot{\mathbf{x}}^2)^{3/2}}.$$

La forma cuadrática $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}(\dot{\mathbf{x}}) \right)$ es definida positiva para todo $\dot{\mathbf{x}}$, ya que

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} h^i h^j = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}} \mathbf{h}^2 + \frac{m}{(1 - \dot{\mathbf{x}}^2)^{3/2}} (\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{x}})^2 > 0, \quad \forall \mathbf{h} \neq 0.$$

Por tanto *también en el caso relativista las trayectorias proporcionan un mínimo local de la acción si t_2 es suficientemente próximo a t_1* . Nótese que si $V = 0$ la acción es simplemente

$$S[\mathbf{x}] = -m \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}(t)^2} dt = -m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{dt} dt = -m(\tau(t_2) - \tau(t_1)),$$

y las curvas que minimizan la acción (las soluciones de las ecuaciones de Lagrange) son rectas recorridas con velocidad constante. En particular, de lo anterior se deduce (al menos para t_2 suficientemente próximo a t_1) que el tiempo propio transcurrido entre dos sucesos es máximo para un observador que se mueve en un sistema inercial (cf. la llamada *paradoja de los dos gemelos*).

1.6 Simetrías y leyes de conservación. Teorema de Noether

1.6.1 Simetrías del lagrangiano y leyes de conservación

Hemos visto en la sección anterior que si el lagrangiano de un sistema mecánico es independiente de la coordenada generalizada q_r , se conserva el correspondiente momento conjugado $p_r = (\partial L)/(\partial \dot{q}_r)$. La independencia de L de la coordenada q_r es equivalente a la *simetría* (invariancia) del lagrangiano frente a la familia a un parámetro de transformaciones¹⁴

$$\mathbf{q} \mapsto \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \epsilon \mathbf{e}_r \quad (1.76)$$

¹⁴Esta familia es de hecho un *grupo a un parámetro*, en el sentido preciso de la Definición 3.17.

donde \mathbf{e}_r es el r -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , dado que

$$\forall \epsilon, L(t, \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)) = L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \iff \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0.$$

Por tanto una forma equivalente de enunciar el resultado anterior es la siguiente: si L es invariante bajo la familia a un parámetro de transformaciones (1.76) (es decir, bajo traslaciones de la coordenada q_r) entonces se conserva el momento conjugado de dicha coordenada $p_r = (\partial L)/(\partial \dot{q}_r)$. Esta formulación sugiere la existencia de una correspondencia entre simetrías del lagrangiano¹⁵ y leyes de conservación (es decir, cantidades conservadas o integrales primeras) que resulta ser cierta en general, y constituye de hecho una de las principales herramientas para encontrar dichas leyes de conservación. Veremos a continuación como se formula con precisión y se demuestra la correspondencia mencionada.

Supongamos, en primer lugar, que el lagrangiano es simétrico (es decir, invariante) bajo una familia a un parámetro de transformaciones de las coordenadas generalizadas, es decir

$$\mathbf{q} \mapsto \tilde{\mathbf{q}} \equiv \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}; \epsilon), \quad (1.77)$$

y tales que para $\epsilon = 0$ se obtiene la transformación identidad:

$$\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}; 0) = \mathbf{q}. \quad (1.78)$$

Definimos la variación $\delta \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q})$ de (1.77) mediante

$$\delta \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}; \epsilon); \quad (1.79)$$

en otras palabras,

$$\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}; \epsilon) = \mathbf{q} + \epsilon \delta \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}) + o(\epsilon),$$

donde $o(\epsilon)$ denota un término que tiende a cero más rápido que ϵ cuando ϵ tiende a cero. Nótese que si la transformación identidad correspondiera al valor ϵ_0 del parámetro ϵ , habría que reemplazar $\epsilon = 0$ por $\epsilon = \epsilon_0$ en la ecuación anterior. Dada una curva cualquiera $\mathbf{q}(t)$, su imagen bajo la transformación (1.77) es la curva $\mathbf{q}^\epsilon(t)$ dada por

$$\mathbf{q}^\epsilon(t) = \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t); \epsilon).$$

La variación de esta familia a un parámetro de deformaciones de la curva de partida $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q}^0(t)$ está dada por

$$\delta \mathbf{q}(t) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{q}^\epsilon(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t); \epsilon) \equiv \delta \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t)). \quad (1.80)$$

La invariancia del lagrangiano bajo (1.77) significa que

$$\forall \epsilon, L(t, \mathbf{q}^\epsilon(t), \dot{\mathbf{q}}^\epsilon(t)) = L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)). \quad (1.81)$$

En particular, la acción es también invariante bajo la transformación $\mathbf{q}(t) \mapsto \mathbf{q}^\epsilon(t)$:

$$\forall \epsilon, S[\mathbf{q}^\epsilon] = S[\mathbf{q}],$$

¹⁵Más exactamente, como veremos a continuación, de la acción.

y por tanto

$$\delta S[\mathbf{q}^0] \equiv \delta S[\mathbf{q}] = 0.$$

Aplicando la fórmula general (1.69) para la variación de la acción y teniendo en cuenta (1.80) se obtiene la identidad

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} \delta \tilde{\mathbf{q}} dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} \right|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (1.82)$$

En particular, si $\mathbf{q}(t)$ es una *trayectoria* del sistema de lagrangiano L entonces $\frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} = 0$ a lo largo de dicha trayectoria, y por tanto la identidad (1.82) se reduce a

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} \right|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Al ser t_1 y t_2 arbitrarios, la ecuación anterior implica que la función

$$I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \delta \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}) \quad (1.83)$$

calculada a lo largo de una trayectoria cualquiera $\mathbf{q}(t)$ del sistema es independiente del tiempo. Hemos probado por tanto el siguiente resultado:

Teorema 1.10. *Si el lagrangiano es invariante bajo la familia a un parámetro de transformaciones (1.77), la función $I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ dada por (1.83) es una integral primera de las ecuaciones de Lagrange.*

Ejemplo 1.11. *Conservación del momento lineal y angular.*

Consideremos un sistema mecánico de N partículas con un potencial independiente de las velocidades¹⁶, para el cual

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - V(t, \mathbf{x}), \quad (1.84)$$

y supongamos que V es invariante bajo una traslación conjunta de las partículas en la dirección de un vector (unitario) fijo \mathbf{n} . Es evidente, en tal caso, que el lagrangiano es invariante bajo la familia a un parámetro de transformaciones $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \mapsto \tilde{\mathbf{x}} \equiv (\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N)$ definida por

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i + \epsilon \mathbf{n}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

para la cual

$$\delta \tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{n}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

La cantidad conservada (1.83) asociada a esta simetría del lagrangiano está dada por

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \delta \tilde{\mathbf{x}} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \delta \tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{P},$$

que no es otra cosa que la proyección del momento lineal total $\mathbf{P} \equiv \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i$ en la dirección del vector \mathbf{n} . Luego *si el potencial es invariante bajo traslaciones de las partículas*

¹⁶En realidad, esta última condición no es esencial.

en la dirección de un vector \mathbf{n} , se conserva la proyección del momento lineal total a lo largo de esa dirección.

Análogamente, supongamos ahora que V , y por tanto L , es invariante bajo rotaciones $R(\epsilon)$ de ángulo ϵ arbitrario alrededor de un eje \mathbf{n} . En este caso

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = R(\epsilon)\mathbf{x}_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

y

$$\delta\tilde{\mathbf{x}}_i = \left. \frac{\partial}{\partial\epsilon} \right|_{\epsilon=0} R(\epsilon)\mathbf{x}_i = \mathbf{n} \times \mathbf{x}_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

La cantidad conservada asociada a esta simetría

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \delta\tilde{\mathbf{x}}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$$

es la proyección del momento angular total $\mathbf{J} \equiv \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i$ en la dirección del vector \mathbf{n} . En otras palabras, *si el potencial es invariante bajo rotaciones de las partículas alrededor de un eje \mathbf{n} , se conserva la proyección del momento angular total a lo largo de ese eje.* \square

Ejemplo 1.12. Supongamos que al efectuar la transformación (1.77) el lagrangiano, aún no permaneciendo invariante, cambia sólomente en la derivada total de una función $f(t, \mathbf{q}; \epsilon)$, es decir

$$L(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{d}{dt} f(t, \mathbf{q}; \epsilon), \quad \forall \epsilon. \quad (1.85)$$

En este caso la acción asociada a la curva $\mathbf{q}^\epsilon(t) = \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t); \epsilon)$ está dada por

$$S[\mathbf{q}^\epsilon] = S[\mathbf{q}] + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = S[\mathbf{q}] + f(t, \mathbf{q}(t); \epsilon) \Big|_{t_1}^{t_2},$$

y por tanto ahora

$$\delta S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right|_{t_1}^{t_2} = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} f(t, \mathbf{q}(t); \epsilon) \Big|_{t_1}^{t_2} \equiv \delta f(t, \mathbf{q}(t)) \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (1.86)$$

siendo

$$\delta f(t, \mathbf{q}) \equiv \left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}.$$

Si $\mathbf{q}(t)$ es una trayectoria la igualdad (1.86) se reduce a

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} - \delta f \right|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Por tanto *si el lagrangiano permanece invariante módulo una derivada total bajo la transformación (1.77) entonces se conserva la cantidad*

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} - \delta f. \quad (1.87)$$

Consideremos, por ejemplo, el lagrangiano (1.84), y supongamos que el potencial V depende de \mathbf{x} sólomente a través de las posiciones relativas de las partículas $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$

($1 \leq i < j \leq N$). Si aplicamos una *transformación de Galileo* de velocidad $\mathbf{v} = \epsilon \mathbf{n}$ (con $|\mathbf{n}| = 1$)

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i + \epsilon \mathbf{n} t, \quad 1 \leq i \leq N,$$

entonces V permanece invariante y L se transforma en

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i + \epsilon \mathbf{n})^2 - V = L + \epsilon \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{n} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_i m_i.$$

Por tanto se cumple la ec. (1.85) con

$$f(t, \mathbf{x}; \epsilon) = \epsilon \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{x}_i + \frac{\epsilon^2 t}{2} \sum_i m_i.$$

Dado que

$$\delta \tilde{\mathbf{x}}_i = t \mathbf{n}, \quad \delta f = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{x}_i,$$

la cantidad conservada asociada (1.87) es en este caso

$$I = \left(t \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i - \sum_i m_i \mathbf{x}_i \right) \cdot \mathbf{n} = M(t \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{X}),$$

siendo $M = \sum_i m_i$ la masa total del sistema y $\mathbf{X} = (\sum_i m_i \mathbf{x}_i)/M$ su centro de masas. Es fácil ver que la conservación de I es equivalente a la ecuación de movimiento del centro de masas $\ddot{\mathbf{X}} = 0$. \square

1.6.2 Simetrías de la acción. Teorema de Noether

La formulación anterior de la correspondencia entre simetrías del lagrangiano es excesivamente restrictiva, por cuanto excluye que el tiempo se transforme junto con las coordenadas generalizadas. Por ejemplo, no se puede utilizar el Teorema 1.10 para deducir algo tan básico como la conservación de la energía a partir de la invariancia de L bajo traslaciones temporales

$$t \mapsto t + \epsilon.$$

Para evitar este inconveniente, y conseguir generalizar adecuadamente el Teorema 1.10, consideremos un grupo a un parámetro de **transformaciones puntuales** del tiempo y las coordenadas

$$(t, \mathbf{q}) \mapsto (\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}) \equiv (\tilde{t}(t, \mathbf{q}; \epsilon), \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}; \epsilon)). \quad (1.88)$$

Al transformarse el tiempo, la invariancia del lagrangiano no es ya equivalente a la de la acción. Dado que esta última propiedad es, de hecho, lo único que se utilizó en la sección anterior para obtener las integrales primeras (1.83) y (1.87), supondremos que *la acción es invariante bajo la familia a un parámetro* (1.88). Más precisamente, nótese que si $\mathbf{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, es una curva su imagen bajo la transformación (1.88) es la curva $\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}; \epsilon)$ cuya gráfica es la transformada de la gráfica $(t, \mathbf{q}(t))$ de $\mathbf{q}(t)$ bajo (1.88). En otras palabras, $\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}; \epsilon)$ está definida implícitamente por las ecuaciones

$$\tilde{t} = \tilde{t}(t, \mathbf{q}(t); \epsilon), \quad \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t); \epsilon), \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (1.89)$$

En otras palabras, si de la primera ec. (1.89) podemos despejar t como una función $t = t(\tilde{t}; \epsilon)$, entonces

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}; \epsilon) = \tilde{\mathbf{q}}(t(\tilde{t}; \epsilon), \mathbf{q}(t(\tilde{t}; \epsilon)); \epsilon).$$

Nótese que para poder despejar t como función de \tilde{t} de la primera ec. (1.89) es suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{d}{dt} \tilde{t}(t, \mathbf{q}(t); \epsilon) = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \neq 0.$$

Como dicha condición se cumple para $\epsilon = 0$, dado que

$$\tilde{t}(t, \mathbf{q}; 0) = t \implies \left. \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \right|_{\epsilon=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\epsilon=0} = 0,$$

por continuidad se cumplirá para $|\epsilon|$ suficientemente pequeño.

La invariancia de la acción bajo la familia a un parámetro (1.88) significa que

$$\forall \epsilon, \quad S[\tilde{\mathbf{q}}] \equiv \int_{\tilde{t}_1(\epsilon)}^{\tilde{t}_2(\epsilon)} L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}; \epsilon), \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}; \epsilon)\right) d\tilde{t} = S[\mathbf{q}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt, \quad (1.90)$$

donde $\tilde{t}_i(\epsilon) = \tilde{t}(t_i, \mathbf{q}_i; \epsilon)$. Efectuando el cambio de variable $\tilde{t} = \tilde{t}(t, \mathbf{q}(t); \epsilon)$ en la primera integral se obtiene la siguiente formulación equivalente de la invariancia de la acción bajo las transformaciones (1.88):

$$\forall \epsilon, \quad \int_{t_1}^{t_2} L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt, \quad (1.91)$$

donde \tilde{t} y $\tilde{\mathbf{q}}$ están dadas por (1.89). A su vez, si los tiempos t_1 y t_2 son arbitrarios esta condición es equivalente a

$$\forall \epsilon, \quad L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (1.92)$$

es decir,

$$\forall \epsilon, \quad L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) d\tilde{t} = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt. \quad (1.93)$$

Esta última expresión es la más utilizada en la práctica para comprobar la invariancia de la acción bajo una transformación de la forma (1.88). Para deducir la expresión de la cantidad conservada correspondiente a esta simetría de la acción, lo más sencillo es introducir una variable auxiliar s y considerar a t como una *coordenada* más. La condición (1.92) es entonces equivalente a

$$\forall \epsilon, \quad L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{ds} / \frac{d\tilde{t}}{ds}\right) \frac{d\tilde{t}}{ds} = L\left(t, \mathbf{q}, \frac{d\mathbf{q}}{ds} / \frac{dt}{ds}\right) \frac{dt}{ds},$$

y por tanto expresa la invariancia del lagrangiano

$$\Lambda(t, \mathbf{q}, t', \mathbf{q}') = L(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}'/t') t', \quad ' \equiv \frac{d}{ds},$$

independiente de la variable s (que ahora juega el papel del tiempo) bajo el grupo a un parámetro de transformaciones de las variables (t, \mathbf{q}) (que juegan el papel de *coordenadas*) dado por (1.88). La cantidad conservada asociada a esta simetría de Λ es

$$I = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} \delta \tilde{t} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{q}'} \delta \tilde{\mathbf{q}} = \left(L - \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \tilde{t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} - H \delta \tilde{t}.$$

En principio, I se conserva bajo la evolución asociada al lagrangiano Λ . Sin embargo, al ser Λ homogéneo de grado uno en (t', \mathbf{q}') las extremales de la acción asociada a Λ son reparametrizaciones arbitrarias $\mathbf{q}(t(s))$ de las extremales de la acción asociada a L . En particular, las extremales de L , es decir las trayectorias del sistema mecánico en cuestión, son extremales de Λ , por lo que I se conserva también bajo la evolución asociada a L . Hemos probado por tanto el célebre

Teorema de Noether. *Si la acción es invariante bajo la familia a un parámetro de transformaciones puntuales (1.88) (es decir, si se satisface cualquiera de las condiciones (1.91)–(1.93)), entonces la función*

$$I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} - H \delta \tilde{t}. \quad (1.94)$$

es una integral primera de las ecuaciones de Lagrange.

Por ejemplo, si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces $\delta \tilde{t} = 1$, $\delta \tilde{\mathbf{q}} = 0$ y por tanto $I = -H$ se conserva.

Al igual que en el Ejemplo 1.12, el teorema de Noether se puede generalizar a transformaciones del tiempo y las coordenadas que en lugar de (1.90) satisfacen la condición más general

$$\forall \epsilon, \quad \int_{\tilde{t}_1(\epsilon)}^{\tilde{t}_2(\epsilon)} L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}; \epsilon), \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}; \epsilon)\right) d\tilde{t} = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt + f(t, \mathbf{q}(t); \epsilon) \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (1.95)$$

o equivalentemente

$$\forall \epsilon, \quad L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}}\right) \frac{d\tilde{t}}{dt} = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{df}{dt}. \quad (1.96)$$

Procediendo como antes se obtiene en este caso la integral primera

$$I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} - H \delta \tilde{t} - \delta f. \quad (1.97)$$

Ejemplo 1.13. Consideremos el movimiento relativista de una partícula libre, en que $L = -m\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}$ y la acción está dada por

$$S = -m \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} dt = -m(\tau(t_2) - \tau(t_1)).$$

La acción (aunque *no* el lagrangiano) es claramente invariante bajo cualquier transformación de Lorentz

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \Lambda^\Gamma \eta \Lambda = \eta, \quad (1.98)$$

ya que el tiempo propio es un escalar bajo transformaciones de Lorentz. Más explícitamente, al ser $d\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$ (ya que la matriz Λ no depende de las coordenadas) se tiene

$$d\tilde{t}^2 - d\tilde{\mathbf{x}}^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2$$

y por tanto

$$L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}, \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}}\right) d\tilde{t} = -m\sqrt{d\tilde{t}^2 - d\tilde{\mathbf{x}}^2} = -m\sqrt{dt^2 - d\mathbf{x}^2} = L\left(t, \mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) dt.$$

En particular, la acción es invariante bajo un “boost” de Lorentz de velocidad $\mathbf{v} = \tanh \epsilon \mathbf{n}$ (con $|\mathbf{n}| = 1$), dado por

$$\tilde{t} = t \cosh \epsilon - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \sinh \epsilon, \quad \tilde{\mathbf{x}} = (-t \sinh \epsilon + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \cosh \epsilon) \mathbf{n} + \mathbf{x} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n},$$

para el cual

$$\delta \tilde{t} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \quad \delta \tilde{\mathbf{x}} = -t \mathbf{n}.$$

En este ejemplo

$$H = \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - L = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}} = E, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}} = \mathbf{p},$$

siendo E y \mathbf{p} la energía cinética y el momento relativistas, por lo que la integral primera asociada por el teorema de Noether a esta simetría de la acción es

$$I = E(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) - t\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (E\mathbf{x} - t\mathbf{p}).$$

Al ser L independiente de t y \mathbf{x} , tanto E como \mathbf{p} se conservan. La conservación de I es por tanto equivalente a la identidad

$$\mathbf{n} \cdot (E\mathbf{x} - t\mathbf{p}) = E\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}(0),$$

es decir

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0) - \frac{\mathbf{p}}{E}t \right) = 0.$$

Esta última ecuación no es más que la proyección de la ley del movimiento en la dirección del vector \mathbf{n} , ya que $\mathbf{p}/E = \dot{\mathbf{x}}$ para una partícula relativista libre. \square

Capítulo 2

Mecánica hamiltoniana

2.1 Formas diferenciales

Definición 2.1. Una **forma diferencial** en n variables $(y_1, \dots, y_n) \equiv \mathbf{y}$ es una expresión de la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{y}) dy_i, \quad (2.1)$$

donde las funciones a_i son (infinitas veces) diferenciables.

En otras palabras, podemos considerar a ω como una función de las variables $(\mathbf{y}, d\mathbf{y})$ que es *lineal* en $d\mathbf{y}$. Dada una curva C de ecuaciones

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(s), \quad s_1 \leq s \leq s_2,$$

la integral de la forma diferencial ω a lo largo de la curva C se define por

$$\int_C \omega \equiv \int_C \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{y}) dy_i = \int_{s_1}^{s_2} \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{y}(s)) y_i'(s) ds.$$

Es importante observar que la definición anterior es *invariante bajo reparametrizaciones de la curva C* . Por tanto la integral de una forma ω a lo largo de una curva C en general es función tanto de la forma ω como de la curva C , pero no depende de como parametricemos dicha curva.

Por ejemplo, el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ que actúa sobre un sistema mecánico cuando dicho sistema recorre una trayectoria C es la integral de la forma diferencial

$$w = \sum_i F_i(\mathbf{x}) dx_i \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

a lo largo de C . En general el trabajo depende no sólo de la fuerza aplicada $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, sino también de la trayectoria C .

Definición 2.2. Dada una función (infinitas veces diferenciables) $f(\mathbf{y})$, la **diferencial** de f es la forma diferencial dada por

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i. \quad (2.2)$$

La diferencial puede interpretarse como la parte del incremento $f(\mathbf{y} + d\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})$ lineal en $d\mathbf{y}$, es decir

$$f(\mathbf{y} + d\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) + df(\mathbf{y}) + o(|d\mathbf{y}|).$$

Debido a las propiedades de las derivadas parciales, las diferenciales obedecen las reglas usuales de cálculo:

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{linealidad})$$

$$d(fg) = f dg + g df \quad (\text{regla de Leibniz}).$$

Una propiedad importante de las diferenciales es que en un abierto simplemente conexo la integral $\int_C \omega$ es *independiente del camino* (es decir, igual para todas las curvas C con los mismos extremos) si y sólo si $\omega = df$ para alguna función f . Por ejemplo, el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es independiente de la trayectoria que une dos puntos cualesquiera si $w = df$, es decir si la fuerza $\mathbf{F} = (\partial f / (\partial \mathbf{x}))$ deriva de un potencial $V(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

Si la forma diferencial ω dada por (2.1) es la diferencial de una función $f(\mathbf{y})$ entonces

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} \implies \frac{\partial a_i}{\partial y_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial a_j}{\partial y_i}.$$

Por tanto una condición *necesaria* para que una forma diferencial sea la diferencial de una función es que sus coeficientes a_i verifiquen las relaciones

$$\frac{\partial a_i}{\partial y_j} = \frac{\partial a_j}{\partial y_i}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (2.3)$$

Se demuestra que esta condición es también *suficiente* si la forma diferencial está definida en un abierto simplemente conexo. Si identificamos la forma diferencial ω dada por (2.1) con el campo de vectores

$$\mathbf{a}(\mathbf{y}) = (a_1(\mathbf{y}), \dots, a_n(\mathbf{y})),$$

cuyas componentes son los coeficientes de ω entonces el campo correspondiente a df es $(\partial f) / (\partial \mathbf{y})$ (es decir, el *gradiente* de la función f). Por tanto, la condición necesaria y suficientes para que el campo $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ sea el gradiente de una función también está dada por las igualdades (2.3).

Otra propiedad fundamental de la diferencial es su buen comportamiento frente a cambios de variable:

Proposición 2.3. *La diferencial de la función compuesta $f(\mathbf{y}) = g(z_1(\mathbf{y}), \dots, z_m(\mathbf{y}))$ satisface*

$$df = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial z_k} dz_k. \quad (2.4)$$

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata de la regla de la cadena, ya que

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial y_i} \right) dy_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial z_k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial y_i} dy_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial z_k} dz_k.$$

Q.E.D.

En particular, del resultado anterior se deduce que si $f(\mathbf{y}) = g(z(\mathbf{y}))$ entonces

$$df = g'(z(\mathbf{y})) dz.$$

2.2 Las ecuaciones canónicas de Hamilton

Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (2.5)$$

aún cuando son mucho más manejables que las ecuaciones de Newton o las ecuaciones generales de la dinámica, tienen dos inconvenientes. En primer lugar, no están en forma normal, es decir las derivadas segundas \ddot{q}_i no aparecen despejadas en función de $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. En segundo lugar, son ecuaciones de segundo orden, por lo que dos soluciones $\mathbf{q}_1(t)$ y $\mathbf{q}_2(t)$ de las mismas (es decir, dos **trayectorias** del sistema) pueden intersectarse en el espacio de configuración extendido $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de las variables (t, \mathbf{q}) sin violar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ambos inconvenientes se resuelven si se consigue expresar las ecuaciones (2.5) como un *sistema normal de primer orden*. Dado que dichas ecuaciones son de primer orden en los momentos canónicos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.6)$$

la forma más natural de conseguir este objetivo es utilizar como variables dependientes \mathbf{q} y \mathbf{p} , en términos de las cuales las ecuaciones de Lagrange se escriben

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (2.7)$$

El problema es que en el miembro derecho de estas ecuaciones aparece $\dot{\mathbf{q}}$, que ha de expresarse como una función de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ utilizando las relaciones (2.6). Nótese que, por el teorema de la función inversa, para que esto sea posible (localmente, al menos) debe cumplirse la condición

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0. \quad (2.8)$$

Por ejemplo, dicha condición se cumple automáticamente para un sistema mecánico natural (cf. la Sección 1.3).

Para resolver el problema de expresar el miembro derecho de las ecuaciones (2.7) en términos de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ es esencial estudiar como depende el lagrangiano L de estas variables. La diferencial de L , considerada como función de las variables $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, está dada por

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.9)$$

Por la Proposición 2.3, esta misma expresión es válida si consideramos que L es función de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ tras expresar $\dot{\mathbf{q}}$ en función de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ mediante (2.6). Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}} = d(\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p},$$

de (2.9) se obtiene

$$d(\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - L) = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p}.$$

Llamando

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Big|_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (2.10)$$

al **hamiltoniano** del sistema *expresado en términos de las variables* $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, e identificando las derivadas parciales en la expresión que acabamos de obtener para la diferencial de H , se obtienen inmediatamente las igualdades

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.11)$$

Se sobreentiende que en el miembro derecho hay que expresar $\dot{\mathbf{q}}$ en función de \mathbf{p} utilizando la relación (2.6), es decir

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (2.12)$$

De las ecs. (2.11) se deduce que las ecuaciones de Lagrange (2.7) son equivalentes al siguiente sistema de primer orden en las variables (\mathbf{q}, \mathbf{p}) :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.13) son las célebres **ecuaciones canónicas de Hamilton**.

Recapitulando lo que acabamos de ver, para escribir las ecuaciones de Hamilton (2.13) dado el lagrangiano $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ basta utilizar la identidad (2.12) para despejar $\dot{\mathbf{q}}$ en función de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, y usar la definición (2.10) para calcular el hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ del sistema. Naturalmente, para que esto sea posible es necesario que el lagrangiano cumpla la condición (2.8), que garantiza (localmente) la posibilidad de despejar $\dot{\mathbf{q}}$ en función de \mathbf{p} de la ec. (2.12). Por ejemplo, en un sistema mecánico natural $L = T - V$, con

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_r \dot{q}_s + \sum_r a_r(t, \mathbf{q}) \dot{q}_r + a_0(t, \mathbf{q})$$

y V a lo sumo lineal en $\dot{\mathbf{q}}$, por lo que

$$p_r = \sum_s a_{rs}(t, \mathbf{q}) \dot{q}_s + a_r(t, \mathbf{q}) - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r}(t, \mathbf{q}),$$

es decir

$$\mathbf{p} = A(t, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}(t, \mathbf{q}) - \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}).$$

Esta última ecuación es un sistema lineal en $\dot{\mathbf{q}}$ con matriz de coeficientes $A(t, \mathbf{q}) = (a_{rs}(t, \mathbf{q}))$ no singular (definida positiva) en cada punto (t, \mathbf{q}) . Por tanto en este caso

$$\dot{\mathbf{q}} = A^{-1}(t, \mathbf{q}) \left(\mathbf{p} - \mathbf{a}(t, \mathbf{q}) + \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}) \right)$$

es lineal en \mathbf{p} . Nótese también que, al ser

$$H = \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L$$

expresado como función de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, podemos aplicar las consideraciones de la Sección (1.3), obteniendo

$$H = T_2 - T_0 + V_0 \Big|_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}. \quad (2.14)$$

En particular, si la función $\mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ no depende explícitamente del tiempo entonces $T_1 = T_0 = 0$, y

$$H = T + V_0 \Big|_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (2.15)$$

coincide con la energía mecánica del sistema expresada en términos de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$. Obsérvese, por último, que de las ecuaciones de Hamilton se obtiene inmediatamente la identidad

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.16)$$

de donde se sigue que H es una integral primera si y sólo si no depende explícitamente del tiempo (es decir, $(\partial H)/(\partial t) = 0$). Se dice en tal caso que el sistema mecánico considerado es **conservativo**. Al ser

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

este resultado es equivalente a la conservación de H si L no depende explícitamente del tiempo, probado en el capítulo anterior utilizando las ecuaciones de Lagrange.

Ejemplo 2.4. *Transformación de Legendre y relaciones termodinámicas de Maxwell.*

La transformación que pasa de $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ a $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - L$ utilizando la relación

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

entre las variables $\dot{\mathbf{q}}$ y \mathbf{p} es un caso particular de lo que en Matemáticas se conoce como *transformación de Legendre*. De hecho, esta transformación se aplica en otras ramas de la Física, como por ejemplo en Termodinámica. En efecto, el *primer principio de la Termodinámica* para un sistema cerrado simple se puede escribir en la forma

$$dU = T dS - P dV,$$

donde U es la energía interna, T la temperatura absoluta, S la entropía, P la presión y V el volumen. En este tipo de sistemas sólo hay dos variables termodinámicas independientes, pudiendo expresarse todas las demás en función de estas dos. En la ecuación anterior, es natural considerar a S y V como variables independientes, lo cual proporciona inmediatamente las relaciones

$$\frac{\partial}{\partial S} U(S, V) = T(S, V), \quad \frac{\partial}{\partial V} U(S, V) = -P(S, V),$$

que en notación termodinámica se escriben

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -P.$$

Aplicando el lema de Schwarz sobre la igualdad de las derivadas parciales cruzadas obtenemos la siguiente *relación de Maxwell*

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V.$$

Esta relación entre T y P no es particularmente útil porque la entropía S no se puede medir directamente, y por tanto no es ventajoso utilizarla como variable independiente. Supongamos que (por ejemplo) queremos utilizar T y V como variables independientes. Equivalentemente, queremos pasar de las variables independientes (S, V) a (T, V) , para lo cual debemos expresar S en función de T y V utilizando la relación

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V.$$

Este problema es equivalente al paso del lagrangiano al hamiltoniano, si

$$q \leftrightarrow V, \quad \dot{q} \leftrightarrow S, \quad p \leftrightarrow T, \quad L \leftrightarrow U.$$

Introducimos por tanto la función (que juega el papel de hamiltoniano)

$$h = TS - U,$$

que satisface

$$dh = T dS + S dT - dU = S dT + P dV,$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_V = S, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial V}\right)_T = P,$$

que conducen a la siguiente relación de Maxwell:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

Con esta relación se puede calcular la variación de entropía a lo largo de una isoterma si se conoce la ecuación de estado del sistema $P = P(V, T)$. La función $A = -h = U - TS$ recibe el nombre de *función de Helmholtz* o *energía libre*. \square

Ejemplo 2.5. Si se conoce el hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ de un sistema mecánico, su lagrangiano $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está dado por

$$L = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - H,$$

donde ahora es necesario utilizar la relación

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

para despejar \mathbf{p} en función de $\dot{\mathbf{q}}$. Nótese que la condición necesaria (y suficiente, localmente) para poder despejar \mathbf{p} en función de $\dot{\mathbf{q}}$ es que

$$\det \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0.$$

Nótese que la transformación $L \mapsto H$ es de nuevo una transformación de Legendre, en que los papeles de L y H , y de $\dot{\mathbf{q}}$ y \mathbf{p} , están invertidos. \square

Ejemplo 2.6. *Hamiltoniano en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.*

Sea $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, en que el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2(\mathbf{q}) dq_i^2,$$

y consideremos el lagrangiano de una partícula no relativista que se mueve sometida a un potencial generalizado

$$V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(t, \mathbf{q}) + \sum_{i=1}^3 V_1^i(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i.$$

El lagrangiano es por tanto

$$L = T - V = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 h_i^2(\mathbf{q}) \dot{q}_i^2 - V_0(t, \mathbf{q}) - \sum_{i=1}^3 V_1^i(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i.$$

El momento canónico conjugado de la coordenada q_i es

$$p_i = m h_i^2(\mathbf{q}) \dot{q}_i - V_1^i(t, \mathbf{q}), \quad (2.17)$$

de donde se obtiene

$$\dot{q}_i = \frac{1}{m h_i^2(\mathbf{q})} (p_i + V_1^i(t, \mathbf{q})).$$

El hamiltoniano es por tanto

$$H = T + V_0 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2(\mathbf{q})} (p_i + V_1^i(t, \mathbf{q}))^2 + V_0(t, \mathbf{q}) \quad (2.18)$$

igual a la energía mecánica del sistema expresada en función del momento canónico $\mathbf{p} = (\partial L)/(\partial \dot{\mathbf{q}})$ (que *no* coincide con el momento lineal $m\dot{\mathbf{x}}$ si el potencial depende de las velocidades). Si el potencial es independiente de las velocidades obtenemos

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{h_i^2(\mathbf{q})} + V(t, \mathbf{q}).$$

Otro caso particular interesante es el del movimiento en un campo electromagnético externo, en que

$$V = e\phi - e\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} = e\phi - e \sum_{i=1}^3 \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

donde $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ es la función que expresa las coordenadas cartesianas en términos de las generalizadas. Por tanto en este caso

$$V_0 = e\phi, \quad V_1^i = -e\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}.$$

Para simplificar esta última expresión, nótese que los vectores $(\partial \mathbf{x})/(\partial q_i)$ son tangentes a las líneas coordenadas, y son por tanto proporcionales a los vectores unitarios tangentes \mathbf{e}_{q_i} asociados al sistema de coordenadas. De hecho, es costumbre definir dichos vectores mediante

$$\mathbf{e}_{q_i} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right|}.$$

Al ser

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} dq_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_i dq_j$$

se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = h_i^2 \delta_{ij}$$

y por tanto

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right| = h_i,$$

En particular,

$$V_1^i = -e \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = -e h_i A_{q_i},$$

donde $A_{q_i} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{q_i}$ es la componente de \mathbf{A} en la dirección del vector \mathbf{e}_{q_i} . Sustituyendo en las ecuaciones (2.17) y (2.18) se obtiene

$$p_i = m h_i^2(\mathbf{q}) \dot{q}_i + e h_i(\mathbf{q}) A_{q_i}(t, \mathbf{q}), \quad (2.19)$$

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2(\mathbf{q})} \left(p_i - e h_i(\mathbf{q}) A_{q_i}(t, \mathbf{q}) \right)^2 + e \phi(t, \mathbf{q}). \quad (2.20)$$

En coordenadas cartesianas $h_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$, y por tanto

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e \mathbf{A})^2 + e \phi.$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) tenemos

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta,$$

y por tanto

$$p_r = m \dot{r} + e A_r, \quad p_\theta = m r^2 \dot{\theta} + e r A_\theta, \quad p_\varphi = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + e r \sin \theta A_\varphi,$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[(p_r - e A_r)^2 + \frac{1}{r^2} (p_\theta - e r A_\theta)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (p_\varphi - e r \sin \theta A_\varphi)^2 \right] + e \phi.$$

Para una partícula *relativista* el análisis es muy parecido. En este caso

$$L = -\frac{m}{\gamma(\dot{\mathbf{x}})} - V_0(t, \mathbf{q}) - \sum_{i=1}^3 V_1^i(t, \mathbf{q}) \dot{q}_i,$$

siendo

$$\gamma^{-2} \equiv 1 - \dot{\mathbf{x}}^2 = 1 - \sum_{i=1}^3 h_i^2(\mathbf{q}) \dot{q}_i^2,$$

y por tanto

$$p_i = m \gamma h_i^2 \dot{q}_i - V_1^i.$$

Despejando $h_i \dot{q}_i$ de esta relación se obtiene

$$h_i \dot{q}_i = \frac{1}{m \gamma h_i} (p_i + V_1^i) \implies \dot{\mathbf{x}}^2 = 1 - \gamma^{-2} = \frac{1}{m^2 \gamma^2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2} (p_i + V_1^i)^2,$$

de donde

$$m \gamma = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2} (p_i + V_1^i)^2 + m^2 \right]^{1/2}.$$

El hamiltoniano del sistema es por tanto

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L = m \gamma (1 - \gamma^{-2}) + \frac{m}{\gamma} + V_0(t, \mathbf{q}) = m \gamma + V_0(t, \mathbf{q}) \\ &= \left[\sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2} (p_i + V_1^i)^2 + m^2 \right]^{1/2} + V_0(t, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Nótese que también en este caso el hamiltoniano es igual a la energía mecánica $m\gamma + V_0$. En particular, si el potencial V proviene de un campo electromagnético externo se tiene

$$H = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2(\mathbf{q})} \left(p_i - eh_i(\mathbf{q})A_{q_i}(t, \mathbf{q}) \right)^2 + m^2 \right]^{1/2} + e\phi(t, \mathbf{q}).$$

En coordenadas cartesianas, esta expresión se reduce a

$$H = \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2} + e\phi.$$

□

2.3 Coordenadas cíclicas y función de Routh

Como ya vimos en el capítulo anterior, se dice que una coordenada es cíclica (o ignorable) si L no depende explícitamente de ella. Al ser

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

la coordenada q_i es cíclica si y sólo si

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

El tratamiento de las coordenadas cíclicas es particularmente ventajoso desde el punto de vista del formalismo hamiltoniano. En efecto, supongamos que (por ejemplo) la coordenada q_n es cíclica. En el formalismo lagrangiano, aunque L no dependa de q_n es función de \dot{q}_n , por lo que la coordenada q_n aparece a través de su derivada respecto del tiempo en las ecuaciones del movimiento de las demás coordenadas. Esto no es demasiado grave, ya que utilizando la relación

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = p_n = \text{const.}$$

se puede expresar \dot{q}_n en función de p_n y de las demás coordenadas y sus derivadas respecto del tiempo:

$$\dot{q}_n \equiv \dot{q}_n(t, q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, p_n).$$

Una vez encontrada la solución general $(q_1(t), \dots, q_{n-1}(t))$ de las ecuaciones de Lagrange para (q_1, \dots, q_{n-1}) , la coordenada cíclica se calcula integrando respecto del tiempo (por medio de una “cuadratura”):

$$q_n = \int \dot{q}_n(t, q_1(t), \dots, q_{n-1}(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_{n-1}(t), p_n) dt.$$

En el formalismo hamiltoniano, si H no depende de q_n entonces

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \quad \implies \quad p_n = \text{const.}$$

Como H no depende de q_n , y p_n es constante, las ecuaciones de Hamilton para las $n - 1$ primeras coordenadas y momentos no contienen a la coordenada cíclica. Una vez resueltas dichas ecuaciones, la ecuación de Hamilton para q_n

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}$$

proporciona directamente

$$q_n = \int \frac{\partial H}{\partial p_n}(t, q_1(t), \dots, q_{n-1}(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), p_n) dt.$$

Nótese, sin embargo, que el formalismo lagrangiano es más cómodo para obtener directamente las ecuaciones del movimiento (de segundo orden) de las coordenadas (en el formalismo hamiltoniano, es necesario combinar las ecuaciones de primer orden para las coordenadas con las de los correspondientes momentos canónicos).

Una formulación intermedia, debida a E. J. Routh, combina las ventajas de ambos formalismos. Supongamos, en efecto, que las coordenadas $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ se pueden dividir en dos grupos, siendo las coordenadas \mathbf{q}_2 cíclicas:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_2} = 0.$$

Entonces $L \equiv L(t, \mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2)$, y por tanto

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} d\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_1 d\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{p}_2 d\dot{\mathbf{q}}_2$$

y

$$d(L - \mathbf{p}_2 \dot{\mathbf{q}}_2) = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} d\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_1 d\dot{\mathbf{q}}_1 - \dot{\mathbf{q}}_2 d\mathbf{p}_2.$$

Si

$$R = L - \mathbf{p}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \equiv R(t, \mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, \mathbf{p}_2)$$

es la llamada *función de Routh* (o *routhiano*) entonces

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial R}{\partial \mathbf{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} = \mathbf{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial \mathbf{p}_2} = -\dot{\mathbf{q}}_2.$$

En particular, para las coordenadas no ignorables \mathbf{q}_1 tenemos las ecuaciones de segundo orden (tipo Lagrange)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} - \frac{\partial R}{\partial \mathbf{q}_1} = 0, \quad (2.21a)$$

en las que aparece el momento \mathbf{p}_2 como parámetro, mientras que para las coordenadas cíclicas se obtienen las ecuaciones de primer orden (tipo Hamilton)

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = -\frac{\partial R}{\partial \mathbf{p}_2}, \quad \dot{\mathbf{p}}_2 = 0 = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{q}_2}. \quad (2.21b)$$

Las ecuaciones (2.21) reciben el nombre de *ecuaciones de Routh*.

Ejemplo 2.7. Consideremos de nuevo el péndulo esférico, cuyo lagrangiano está dado por

$$L = \frac{1}{2} ma^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mga \cos \theta.$$

En este caso la coordenada φ es cíclica, por lo que $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$ y

$$p_2 \equiv p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ma^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \implies \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ma^2 \sin^2 \theta}.$$

La función de Routh es por tanto

$$\begin{aligned} R = L - p_\varphi \dot{\varphi} &= \frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}^2 - mga \cos \theta - \frac{1}{2} ma^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}^2 - mga \cos \theta - \frac{p_\varphi^2}{2ma^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

La ecuación de Routh de segundo orden para la coordenada no ignorable θ es

$$ma^2 \ddot{\theta} = mga \sin \theta + \frac{p_\varphi^2}{ma^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta},$$

mientras que la de primer orden para la coordenada cíclica φ

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial R}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ma^2 \sin^2 \theta}$$

no es más que la expresión de $\dot{\varphi}$ en función de p_φ ya conocida. □

2.4 Paréntesis de Poisson

Las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

son un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (en forma normal) en las $2n$ variables

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (2.22)$$

Dichas ecuaciones se pueden escribir en la forma más compacta

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{X}_H(t, \mathbf{y}), \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{X}_H : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ está dado por

$$\mathbf{X}_H(t, \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) \equiv \Omega \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y}),$$

siendo

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

la llamada **matriz simpléctica** de orden $2n$. Nótese que Ω es antisimétrica, es decir

$$\Omega^\top = -\Omega,$$

y satisface

$$\Omega^2 = -\mathbb{I}_{2n}.$$

El espacio \mathbb{R}^{2n} de las coordenadas $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ recibe el nombre de **espacio de fases** del sistema y se denotará por Φ_n , siendo n el número de **grados de libertad** del sistema. Al espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ de las variables $(t, \mathbf{y}) = (t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ se le suele denominar **espacio de fases ampliado**.

Si H no depende explícitamente del tiempo diremos que el sistema es **conservativo**. En tal caso $\mathbf{X}_H(\mathbf{y})$ es un **campo de vectores** definido en el espacio de fases Φ_n , y las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{y})$$

constituyen un **sistema dinámico**, es decir un sistema *autónomo* de ecuaciones diferenciales de primer orden en Φ_n . Las **trayectorias** del sistema son las curvas en el espacio de fases *tangentes al campo de vectores \mathbf{X}_H en cada uno de sus puntos*, es decir las **órbitas** del sistema dinámico (curvas integrales del campo \mathbf{X}_H). Como es bien sabido, si H es de clase C^2 *por cada punto del espacio de fases pasa una única trayectoria del sistema*. Los **puntos de equilibrio** del sistema son los ceros del campo \mathbf{X}_H , es decir los puntos que satisfacen

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

(*puntos críticos de H*).

Si $\mathbf{X}(\mathbf{y})$ es un campo de vectores cualquiera en el espacio de fases Φ_n , el sistema dinámico asociado $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{X}(\mathbf{y})$ permite definir una familia de transformaciones del espacio de fases Φ_n

$$\mathbf{y} \mapsto \varphi_s(\mathbf{y})$$

dependientes de un parámetro s de la forma siguiente. Dado un punto $\mathbf{y}_0 \in \Phi_n$, su transformado $\varphi_s(\mathbf{y}_0)$ es el punto $\mathbf{y}(s)$ de la trayectoria $\mathbf{y}(t)$ del sistema dinámico que pasa por \mathbf{y}_0 para $t = 0$. Al ser el sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{X}(\mathbf{y})$ autónomo, si $\mathbf{y}(t)$ es solución también lo será $\mathbf{y}(t + s_1)$, para todo $s_1 \in \mathbb{R}$. Como

$$\mathbf{y}(t + s_1)|_{t=0} = \mathbf{y}(s_1) \equiv \varphi_{s_1}(\mathbf{y}_0)$$

se tiene

$$\varphi_{s_2}(\varphi_{s_1}(\mathbf{y}_0)) = \mathbf{y}(s_1 + s_2) \equiv \varphi_{s_1+s_2}(\mathbf{y}_0)$$

y por tanto

$$\varphi_{s_2} \circ \varphi_{s_1} = \varphi_{s_1+s_2}.$$

Esto prueba que la familia de transformaciones de Φ_n dependientes del parámetro s que acabamos de definir es un *grupo aditivo a un parámetro*, llamado el **flujo** del campo \mathbf{X} .

Ejemplo 2.8. Consideremos, por ejemplo, el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} \left(p^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right),$$

correspondiente a un oscilador armónico de masa m y frecuencia ω . En este caso las ecuaciones de Hamilton son el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

El único punto de equilibrio es el origen, ya que

$$\frac{\partial H}{\partial q} = m\omega^2 q, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

Al no depender explícitamente del tiempo, H se conserva. Como el espacio de fases es bidimensional, las trayectorias son las *curvas de nivel* $H = \text{const.}$, es decir las elipses con centro en el origen

$$p^2 + m^2\omega^2q^2 = c, \quad c \geq 0$$

(cf. Fig. 2.1). Es fácil ver que el sentido de recorrido de estas elipses es el horario (basta tener en cuenta, por ejemplo, que $\dot{q} = p/m$ es positivo si $p > 0$).

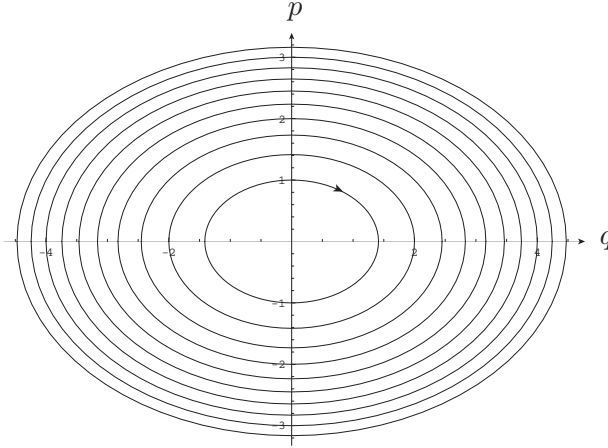


Figura 2.1: Mapa de fases del oscilador armónico $H = p^2 + \frac{1}{2}q^2$.

Para calcular explícitamente el flujo del campo \mathbf{X}_H en este caso basta observar que la solución del sistema lineal con coeficientes constantes $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ con la condición inicial $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ es simplemente $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0$. Por tanto el flujo de \mathbf{X}_H es el grupo a un parámetro de aplicaciones *lineales* dado por

$$\varphi_s(\mathbf{y}_0) = e^{sA}\mathbf{y}_0,$$

donde A es la matriz 2×2 definida en (2.25). En lugar de calcular la exponencial de la matriz sA , es quizá más sencillo en este caso hallar directamente la solución general de las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2q \\ \implies q(t) &= \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t), \quad p(t) = m\dot{q}(t) = m\omega(-\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

Imponiendo la condición $\mathbf{y}(0) \equiv (q(0), p(0)) = \mathbf{y}_0 \equiv (q_0, p_0)$ se obtiene $\alpha = q_0$ y $\beta = p_0/(m\omega)$, por lo que $\varphi_s(\mathbf{y}_0)$ está dado explícitamente por

$$\varphi_s(\mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega s) & \frac{1}{m\omega} \sin(\omega s) \\ -m\omega \sin(\omega s) & \cos(\omega s) \end{pmatrix} \mathbf{y}_0.$$

En particular, la matriz que aparece en esta ecuación es la exponencial de la matriz sA . Nótese, por último, que el flujo del campo \mathbf{X}_H se reduce al grupo de rotaciones del plano $\text{SO}(2)$ si $m\omega = 1$. \square

Dado un campo de vectores

$$\mathbf{X} = (X_1(\mathbf{y}), \dots, X_{2n}(\mathbf{y}))$$

en el espacio de fases Φ_n , podemos identificar el campo \mathbf{X} con la *derivada direccional* en la dirección de dicho campo, es decir con el *operador diferencial de primer orden*

$$X = \sum_{\alpha=1}^{2n} X_{\alpha}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \equiv \mathbf{X}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}.$$

A partir de ahora adoptaremos normalmente este punto de vista, y por tanto para nosotros *los campos de vectores serán operadores diferenciales de primer orden*. Con este convenio un campo de vectores cualquiera X tiene una actuación natural sobre las funciones diferenciables definidas en el espacio de fases, satisfaciendo las reglas de diferenciación usuales:

$$\begin{aligned} X(\alpha f + \beta g) &= \alpha Xf + \beta Xg, & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} & \quad (\text{linealidad}) \\ X(fg) &= f Xg + g Xf & & \quad (\text{regla de Leibniz}). \end{aligned}$$

Dada una función $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, el **campo de vectores hamiltoniano** asociado a dicha función es el campo X_f definido por¹

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = \left(\Omega \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} = \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial y_{\beta}} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}},$$

donde $\omega_{\alpha\beta}$ es el elemento de matriz (α, β) de la matriz simpléctica Ω .

Ejercicio 4. En un abierto simplemente conexo del espacio de fases, el campo de vectores $X = \sum_{\alpha} X_{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}$ es hamiltoniano si y sólo si

$$\sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial X_{\beta}}{\partial y_{\gamma}} = \sum_{\beta} \omega_{\gamma\beta} \frac{\partial X_{\beta}}{\partial y_{\alpha}}, \quad \forall \alpha, \gamma. \quad (2.26)$$

Dados dos campos de vectores X e Y , su **conmutador** $[X, Y]$ se define por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Nótese que *el conmutador de dos campos de vectores es siempre un campo de vectores* (es decir, un operador diferencial de primer orden). En efecto, si

$$X = \sum_{\alpha} X_{\alpha}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}, \quad Y = \sum_{\alpha} Y_{\alpha}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}},$$

entonces

$$XY = \sum_{\alpha} X(Y_{\alpha}) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} + \sum_{\alpha, \beta} X_{\alpha} Y_{\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_{\alpha} \partial y_{\beta}}$$

y por tanto

$$[X, Y] = \sum_{\alpha} [X(Y_{\alpha}) - Y(X_{\alpha})] \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}.$$

Denotaremos por \mathfrak{X}_n el conjunto de todos los campos de vectores en el espacio de fases Φ_n . Dicho conjunto es un espacio vectorial de dimensión infinita que tiene, además, la

¹A partir de ahora, omitiremos frecuentemente el rango de los índices de suma cuando esto no ocasione confusión.

estructura de **álgebra de Lie** (también de dimensión infinita), donde el corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ es el conmutador. En otras palabras si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades, cuya comprobación se deja al lector:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X] && \text{(antisimetría)} \\ [\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] && \text{(bilinealidad)} \\ [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] &= 0 && \text{(identidad de Jacobi).} \end{aligned}$$

Veamos a continuación que también es posible dotar al espacio vectorial (de dimensión infinita) \mathcal{F}_n de las funciones diferenciables en el espacio de fases de una estructura de álgebra de Lie. En efecto, dado un sistema mecánico de hamiltoniano H la derivada total respecto del tiempo de una función cualquiera $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ está dada por

$$\frac{df}{dt} \equiv \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial f}{\partial t} + X_H f.$$

Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 2.9. Dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{F}_n$, el **paréntesis de Poisson** de f con g está dado por

$$\{f, g\} = X_g f. \quad (2.27)$$

Más explícitamente,

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \left(\Omega \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial y_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial y_{\beta}}. \quad (2.28)$$

Con esta definición la derivada total respecto del tiempo de cualquier función $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ está dada por

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (2.29)$$

En particular, si f no depende explícitamente del tiempo entonces f es una integral primera si y sólo si

$$\{f, H\} = 0.$$

De la ec. (2.28) se deduce inmediatamente que el paréntesis de Poisson es *antisimétrico*:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \quad (2.30)$$

También es claro que $\{f, g\}$ es una función *bilineal* de sus argumentos. Menos trivial es probar la identidad de Jacobi:

Proposición 2.10. Si $f, g, h \in \mathcal{F}_n$ se cumple la identidad de Jacobi:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \quad (2.31)$$

Demostración. El miembro izquierdo de la ec. (2.31) es una suma de términos, cada uno de los cuales es el producto de sendas derivadas de primer orden de dos de las funciones f, g, h por una derivada parcial de segundo orden de la tercera de estas funciones. Tomemos, por ejemplo, la función h , y estudiemos los términos que contienen derivadas parciales de segundo orden de dicha función. El primer término del miembro izquierdo

de (2.31) sólo contiene derivadas de primer orden de h . En cuanto a los dos términos restantes,

$$\{ \{g, h\}, f \} + \{ \{h, f\}, g \} = \{ \{h, f\}, g \} - \{ \{h, g\}, f \} = (X_g X_f - X_f X_g)h = [X_g, X_f]h$$

tampoco contienen derivadas segundas de h (el conmutador $[X_g, X_f]$ es un operador diferencial de *primer orden*). Por tanto en el miembro izquierdo de (2.31) se cancelan los términos que contienen derivadas parciales de segundo orden de h . Por simetría, también se cancelan los términos con derivadas parciales de segundo orden de las otras dos funciones f, g , lo cual prueba (2.31). Q.E.D.

Los resultados anteriores demuestran que *el espacio \mathcal{F}_n de las funciones diferenciables definidas en el espacio de fases es un álgebra de Lie (de dimensión infinita) respecto del paréntesis de Poisson*. Nótese también que la identidad de Jacobi (2.31) se puede escribir en la forma

$$\{h, \{f, g\}\} = -\{\{h, g\}, f\} + \{\{h, f\}, g\},$$

es decir

$$X_{\{f, g\}}h = -[X_f, X_g]h,$$

de donde se obtiene la importante relación

$$X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g], \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_n.$$

(Matemáticamente, la aplicación $f \mapsto -X_f$ es un *homomorfismo* entre el álgebra de Lie \mathcal{F}_n y la subálgebra de \mathfrak{X}_n formada por los campos de vectores hamiltonianos.)

El paréntesis de Poisson es una herramienta de gran importancia a la hora de generar nuevas integrales primeras a partir de integrales primeras conocidas. En efecto, se verifica el siguiente resultado:

Teorema de Jacobi–Poisson. *Si f y g son dos integrales primeras de un sistema mecánico hamiltoniano, su paréntesis de Poisson también lo es.*

Demostración. La demostración de este resultado se basa en la siguiente identidad satisfecha por el paréntesis de Poisson, que es de interés en sí misma: si f y g son dos funciones diferenciables definidas en el espacio de fases extendido, entonces

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\}. \quad (2.32)$$

En particular, si f y g son integrales primeras $\dot{f} = \dot{g} = 0$, de donde se deduce que $\{f, g\}$ es también integral primera. Para probar la identidad (2.32), basta observar que

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + X_H\{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{\{f, g\}, H\},$$

donde hemos utilizado que la derivada *parcial* respecto de t conmuta con las derivadas parciales respecto de \mathbf{q} y \mathbf{p} . Aplicando la identidad de Jacobi se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} \right\} \equiv \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Del teorema de Jacobi–Poisson se deduce que *el conjunto (espacio vectorial) de todas las integrales primeras de un sistema mecánico hamiltoniano es un álgebra de Lie (subálgebra de \mathcal{F}_n)*. Aunque la dimensión de esta álgebra como *espacio vectorial* es infinita si hay alguna integral primera no constante (por ejemplo, las potencias de dicha integral primera no constante forman un conjunto infinito linealmente independiente), el número máximo de integrales primeras *funcionalmente independientes* de un sistema mecánico hamiltoniano con n grados de libertad es a lo sumo $2n$. En efecto, si existieran $2n + 1$ integrales primeras funcionalmente independientes $f_\alpha(t, \mathbf{y})$ ($1 \leq \alpha \leq 2n + 1$) entonces cualquier trayectoria $\mathbf{y}(t)$ del sistema debería satisfacer las identidades

$$f_\alpha(t, \mathbf{y}(t)) = c_\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq 2n + 1,$$

lo cual permitiría (por la independencia funcional de las f_α) despejar localmente t e $\mathbf{y}(t)$ en función de las $2n + 1$ constantes c_α . En particular, t debería ser constante, lo cual es absurdo. Del mismo modo se prueba que si (localmente) H no se reduce a una función de t entonces no puede haber más de $2n - 1$ integrales primeras independientes del tiempo funcionalmente independientes, siendo n de nuevo el número de grados de libertad del sistema.

Es sencillo demostrar que el paréntesis de Poisson satisface la identidad (análoga a la regla de Leibniz)

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}. \quad (2.33)$$

En efecto, el miembro izquierdo es igual a $X_h(fg)$, y aplicando la regla de Leibniz para campos de vectores se obtiene

$$X_h(fg) = f X_h g + g X_h f = f\{g, h\} + g\{f, h\}.$$

Esta identidad, junto con los paréntesis de Poisson de las coordenadas q_i y p_j

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (2.34)$$

o equivalentemente

$$\{y_\alpha, y_\beta\} = \omega_{\alpha\beta}, \quad (2.35)$$

se puede utilizar para calcular de forma algebraica los paréntesis de Poisson de variables dinámicas polinómicas en \mathbf{q} y \mathbf{p} .

Ejemplo 2.11. *Paréntesis de Poisson de las componentes del momento angular.*

Consideremos el movimiento en el espacio ordinario \mathbb{R}^3 de una partícula sometida a un potencial $V(t, \mathbf{x})$. En este caso

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(t, \mathbf{x}) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m \dot{\mathbf{x}}, \quad H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(t, \mathbf{x}).$$

El momento angular de la partícula es por tanto

$$\mathbf{J} = m \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \mathbf{p},$$

y sus componentes están dadas por

$$J_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j p_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Los paréntesis de Poisson con las variables dinámicas $x_i, p_j \in \Phi_3$ se calculan fácilmente utilizando la regla de Leibniz (2.33) y los paréntesis de Poisson elementales (2.34):

$$\{x_i, J_j\} = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \{x_i, x_k p_l\} = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \{x_i, p_l\} x_k = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \delta_{il} x_k = \sum_k \epsilon_{ijk} x_k, \quad (2.36a)$$

$$\begin{aligned} \{p_i, J_j\} &= \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \{p_i, x_k p_l\} = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \{p_i, x_k\} p_l = - \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \delta_{ik} p_l \\ &= \sum_k \epsilon_{ijk} p_k. \end{aligned} \quad (2.36b)$$

Para calcular los paréntesis de Poisson de las componentes del momento angular entre sí podemos aplicar de nuevo la regla de Leibniz junto con las relaciones anteriores. Por ejemplo, teniendo en cuenta que

$$\{x_i, J_i\} = \{p_i, J_i\} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

se obtiene fácilmente

$$\{J_1, J_2\} = \{x_2 p_3 - x_3 p_2, J_2\} = x_2 \{p_3, J_2\} - p_2 \{x_3, J_2\} = -x_2 p_1 + x_1 p_2 = J_3,$$

de donde se deducen las relaciones

$$\{J_i, J_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} J_k. \quad (2.37)$$

Las relaciones de conmutación (2.37) son idénticas a las del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ del grupo de rotaciones $SO(3)$, cuyos elementos son las matrices antisimétricas reales de orden 3. Se dice, por tanto, que el álgebra de Lie generada por las componentes del momento angular es *isomorfa* a $\mathfrak{so}(3)$. Para ver esto más en detalle, consideremos las matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que forman una base de $\mathfrak{so}(3)$. La matriz X_i es el generador de las rotaciones alrededor del eje i ; por ejemplo, al ser

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\mathbb{I}_2$$

se tiene

$$e^{\theta X_3} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} X_3^n = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver entonces que los conmutadores de las matrices X_i verifican

$$[X_i, X_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} X_k.$$

Por ejemplo:

$$X_1 X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies [X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X_3.$$

□

Ejemplo 2.12. En el ejemplo anterior, supongamos que el potencial $V(t, \mathbf{x})$ es invariante bajo rotaciones alrededor de dos ejes no paralelos \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{n}_2 = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2,$$

con $\sin \alpha > 0$. Por el teorema de Noether aplicado al lagrangiano correspondiente $\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(t, \mathbf{x})$, se conservan J_1 y $\cos \alpha J_1 + \sin \alpha J_2$ o, equivalentemente, J_1 y J_2 . Por el teorema de Jacobi–Poisson, se conserva también $\{J_1, J_2\} = J_3$. Por tanto se conservan *todas* las componentes del momento angular lo que, de nuevo por el teorema de Noether², implica que el potencial es invariante bajo rotaciones. Si, además, se conserva la proyección del momento lineal en una dirección cualquiera, que de nuevo podemos tomar como la dirección \mathbf{e}_1 , de la conservación de p_1 y \mathbf{J} se sigue la de $\{J_3, p_1\} = p_2$ y la de $\{p_1, J_2\} = p_3$. Por tanto se conserva también el momento lineal \mathbf{p} , y el teorema de Noether implica que el potencial se reduce a una función de t (que se puede tomar igual a 0 sin pérdida de generalidad). Nótese que este último resultado se puede también probar de forma elemental, ya que si $V(t, \mathbf{x}) \equiv U(t, r)$ ($r = |\mathbf{x}|$) y p_1 se conserva entonces

$$0 = \{p_1, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{x_1}{r} \implies \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

□

Ejemplo 2.13. *Regla de la cadena para el paréntesis de Poisson.*

Supongamos que f es una función compuesta $f(\mathbf{y}) = F(\mathbf{z}(\mathbf{y}))$. Dado un campo de vectores $X = \sum_{\alpha} X_{\alpha}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}$ se tiene

$$Xf = \sum_{\alpha} X_{\alpha} \sum_i \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial y_{\alpha}} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial z_i} X_{z_i}.$$

Aplicando lo anterior al campo hamiltoniano X_g se obtiene inmediatamente la identidad

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial z_i} \{z_i, g\}, \quad (2.38)$$

que es la regla de la cadena para el paréntesis de Poisson. □

Ejemplo 2.14. *Paréntesis de Poisson de un operador vectorial con las componentes del momento angular.*

Consideremos una función $f \in \mathcal{F}_3$ *escalar bajo rotaciones*. En otras palabras,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{x}^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{p}^2).$$

De la regla de la cadena (2.38) se deduce que

$$\{f, g\} = \varphi_1 \{\mathbf{x}^2, g\} + \varphi_2 \{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, g\} + \varphi_3 \{\mathbf{p}^2, g\}, \quad (2.39)$$

²En realidad, estamos aplicando el *recíproco* del teorema de Noether (que no hemos demostrado), según el cual si se conserva la proyección del momento angular según una dirección \mathbf{n} entonces el potencial es invariante bajo rotaciones alrededor del eje \mathbf{n} . Del mismo modo, si se conserva la proyección del momento lineal en la dirección de \mathbf{n} el potencial es invariante bajo traslaciones en esa dirección.

donde φ_i denota la derivada parcial de φ respecto de su i -ésimo argumento. Es fácil probar por un cálculo directo que

$$\{\mathbf{x}^2, J_i\} = \{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, J_i\} = \{\mathbf{p}^2, J_i\} = 0, \quad (2.40)$$

de donde, en virtud de (2.39), se sigue

$$\{f, J_i\} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Por tanto *las funciones escalares bajo rotaciones conmutan con las componentes del momento angular*. Para probar (2.40), calculemos el campo de vectores hamiltoniano asociado a una componente cualquiera J_i del momento angular:

$$\begin{aligned} X_{J_i} &= \sum_k \left(\frac{\partial J_i}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial J_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right) = \sum_{j,k} \left(\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} - \epsilon_{ikj} p_j \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \\ &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + p_j \frac{\partial}{\partial p_k} \right). \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$X_{J_1} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} - p_3 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Entonces se cumple:

$$\begin{aligned} X_{J_1}(\mathbf{x}^2) &= x_2(2x_3) - x_3(2x_2) = 0, & X_{J_1}(\mathbf{p}^2) &= p_2(2p_3) - p_3(2p_2) = 0, \\ X_{J_1}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) &= x_2 p_3 - x_3 p_2 + p_2 x_3 - p_3 x_2 = 0, \end{aligned}$$

y análogamente para las demás componentes.

Consideremos a continuación una *función vectorial bajo rotaciones* $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, que es de la forma

$$\mathbf{F} = f \mathbf{x} + g \mathbf{p} + h \mathbf{J},$$

donde f , g y h son funciones escalares bajo rotaciones. Aplicando la “regla de Leibniz” (2.33) y las relaciones (2.36) y (2.37) se obtiene

$$\{F_i, J_j\} = f \{x_i, J_j\} + g \{p_i, J_j\} + h \{J_i, J_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} (f x_k + g p_k + h J_k) = \sum_k \epsilon_{ijk} F_k.$$

□

Las relaciones de conmutación elementales (2.34) permiten establecer una analogía muy clara entre la mecánica clásica y la cuántica. En efecto, en mecánica cuántica las variables dinámicas q_i, p_j se reemplazan (en la imagen de Schrödinger) por los *operadores* $Q_i = q_i$ (multiplicación por la coordenada q_i) y $P_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j}$, que satisfacen *relaciones de conmutación* totalmente análogas a (2.34):

$$[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0, \quad [Q_i, P_j] = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial q_j}, q_i \right] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2.41)$$

Cualquier otra variable dinámica $f \in \mathcal{F}_n$ está representada en mecánica cuántica por un operador autoadjunto $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ tal que

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Es importante observar a este respecto que, al ser en general el producto de operadores no conmutativo, el operador F determina la variable dinámica f , pero no a la inversa. Por ejemplo, es fácil comprobar que $F_1(Q, P) = PQ^2P \neq F_2(Q, P) = (Q^2P^2 + P^2Q^2)/2$ (de hecho, $F_1 - F_2 = \hbar^2$), y sin embargo $f_1(q, p) = f_2(q, p) = q^2p^2$.

Si A , B y C son tres operadores entonces es inmediato probar que

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \quad (2.42)$$

Esta identidad es análoga a la regla de Leibniz (2.33) satisfecha por el paréntesis de Poisson, con la única diferencia de que el orden en que aparecen los operadores en (2.42) es esencial para su validez. Si $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ y $G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ son dos operadores autoadjuntos que dependen polinómicamente de (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) , con F y G independientes de \hbar , aplicando repetidas veces la ec. (2.42) y utilizando al final las relaciones (2.41) se puede expresar el conmutador $[F, G]$ mediante

$$[F, G] = i\hbar K,$$

siendo K un polinomio independiente de \hbar . De la ec. (2.33) se sigue fácilmente que las correspondientes variables dinámicas clásicas $f \equiv F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $g \equiv G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $k \equiv K(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ satisfacen

$$\{f, g\} = k.$$

En otras palabras, el conmutador en mecánica cuántica determina el corchete de Poisson en mecánica clásica via la relación

$$\frac{1}{i\hbar} [\cdot, \cdot] \rightarrow \{\cdot, \cdot\}.$$

El paso contrario (de los paréntesis de Poisson en mecánica clásica a los conmutadores en mecánica cuántica) no es unívoco en general, ya que distintos operadores autoadjuntos $F(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ pueden dar lugar a la misma variable dinámica f .

2.5 Invariantes integrales de la Mecánica

2.5.1 Principio variacional

Las ecuaciones de Hamilton, al igual que las de Lagrange, se pueden deducir a partir de un principio variacional análogo (aunque no idéntico) al de acción estacionaria. Para ello, recuérdese que el lagrangiano se expresa en términos del hamiltoniano mediante la transformación de Legendre (cf. el Ejemplo 2.5)

$$L = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - H \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})},$$

donde la notación significa que \mathbf{p} ha de expresarse en términos de $\dot{\mathbf{q}}$ invirtiendo la relación

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (2.43)$$

Si $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ es una curva en el espacio de fases Φ_n que cumple

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$$

(por ejemplo, si $\mathbf{y}(t)$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton de H) entonces

$$L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{p}(t) \dot{\mathbf{q}}(t) - H(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)),$$

y por tanto podemos expresar la acción de la curva $\mathbf{q}(t)$ en términos del hamiltoniano como sigue:

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{p}(t) \dot{\mathbf{q}}(t) - H(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))) dt.$$

El miembro derecho de esta expresión, sin embargo, tiene perfecto sentido para *cualquier* curva $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ en el espacio de fases, aunque *no* cumpla la condición (2.43). Esto nos lleva a considerar el funcional

$$\hat{S}[\mathbf{y}] = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{p}(t) \dot{\mathbf{q}}(t) - H(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))) dt \quad (2.44)$$

donde $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ es una curva *arbitraria* en el espacio de fases Φ_n . Podemos expresar (2.44) en la forma

$$\hat{S}[\mathbf{y}] = \int_{t_1}^{t_2} \Lambda(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) dt \quad (2.45)$$

donde la densidad Λ está dado por

$$\Lambda(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \equiv \Lambda(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

y es por tanto independiente de $\dot{\mathbf{p}}$. La variación del funcional (2.44) es

$$\delta \hat{S} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta \Lambda}{\delta \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} dt + \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \delta \dot{\mathbf{y}} \right|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta \Lambda}{\delta \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} dt + \mathbf{p} \delta \mathbf{q} \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Si imponemos las condiciones de contorno

$$\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2, \quad (2.46)$$

entonces $\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0$, y en consecuencia

$$\delta \hat{S} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta \Lambda}{\delta \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} dt.$$

Por tanto los puntos críticos del funcional (2.44) con las condiciones de contorno (2.46) son las curvas en el espacio de fases que verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange del “lagrangiano” Λ :

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta \mathbf{y}} = 0,$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{p}} &= -\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones no son otra cosa que las ecuaciones de Hamilton. Hemos probado por tanto el siguiente resultado, que es la versión hamiltoniana del principio de acción estacionaria:

Proposición 2.15. *Las trayectorias de un sistema mecánico hamiltoniano son las curvas $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ en el espacio de fases que hacen estacionario el funcional (2.44) con las condiciones de contorno (2.46).*

Nótese que este principio de acción estacionaria es más general que el principio análogo en mecánica lagrangiana, ya que se admiten curvas en que la relación entre el momento \mathbf{p} y la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ *no* es la correcta (2.43). Obsérvese también que las condiciones de contorno (2.46) no restringen la coordenada \mathbf{p} , por lo que en cada extremo t_i dichas condiciones determinan no un punto del espacio de fases, sino un *subespacio lineal de dimensión n* (cf. la Fig. 2.2). Como la solución general de las ecuaciones de Hamilton depende de $2n$ constantes arbitrarias, de la observación anterior se deduce que para cada par de valores $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ en general habrá una *única* trayectoria del sistema satisfaciendo las condiciones (2.46).

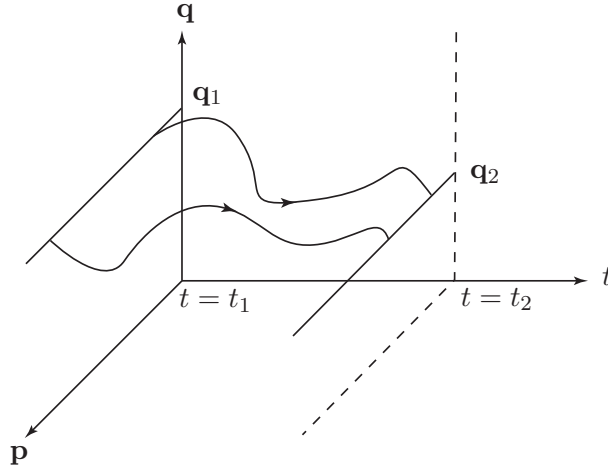


Figura 2.2: Condiciones de contorno en la versión hamiltoniana del principio de acción estacionaria.

2.5.2 Invariantes integrales de Poincaré y de Poincaré–Cartan

El funcional (2.44) en el espacio de fases puede escribirse como la integral de la **forma diferencial de Poincaré–Cartan**

$$\alpha_H = \sum_{k=1}^n p_k dq_k - H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) dt \equiv \mathbf{p} d\mathbf{q} - H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) dt \quad (2.47)$$

a lo largo de la curva C en el espacio de fases *ampliado* dada por $t \mapsto (t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$:

$$\hat{S}[\mathbf{y}] = \int_C \alpha_H \equiv \int_C (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) \equiv \hat{S}[C]. \quad (2.48)$$

Un importante teorema afirma que la integral $\int_C \alpha_H$ es invariante (es decir, independiente de la curva C) si C es cualquier curva que rodee un cilindro en el espacio de fases ampliado cuyas generatrices sean gráficas de trayectorias del sistema.

Más precisamente, un **tubo de trayectorias** de un sistema dinámico hamiltoniano es un cilindro en el espacio de fases ampliado cuya “base” es una curva *cerrada* cualquiera y cuyas generatrices son gráficas de trayectorias del sistema. En otras palabras, sea

$$\gamma(s) = (\tau(s), \boldsymbol{\eta}(s)), \quad s_1 \leq s \leq s_2,$$

una curva *cerrada* (es decir, $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$) en el espacio de fases ampliado. Si denotamos por

$$t \mapsto \boldsymbol{\varphi}_t(t_0, \mathbf{y}_0)$$

la solución de las ecuaciones de Hamilton que pasa por el punto \mathbf{y}_0 en el instante t_0 , entonces el tubo de trayectorias que tiene por base la curva cerrada γ es el conjunto de puntos de la forma

$$\left(t, \varphi_t(\tau(s), \boldsymbol{\eta}(s))\right), \quad s_1 \leq s \leq s_2, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

(véase la Fig. 2.3).

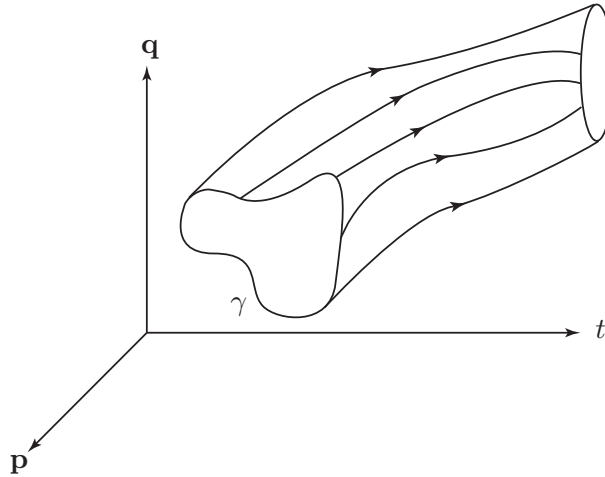


Figura 2.3: Tubo de trayectorias.

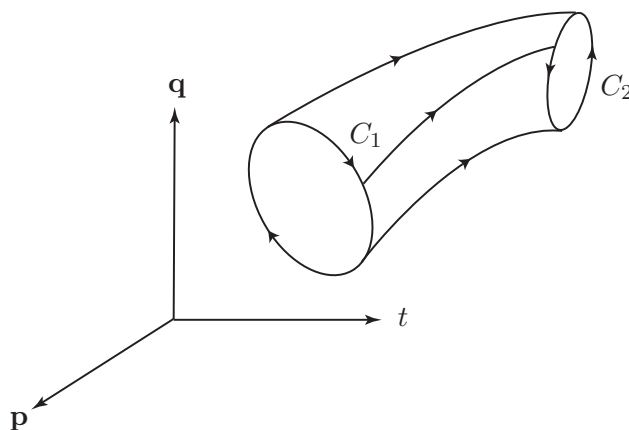
Nótese que las curvas $s = \text{const.}$, es decir las *generatrices* del cilindro, son efectivamente gráficas de trayectorias del sistema, mientras que las curvas $t = \text{const.}$ son curvas cerradas que rodean el tubo (pruébese esto). La aplicación $\varphi_t(t_0, \cdot)$ se puede considerar como el análogo del *flujo* para sistemas hamiltonianos dependientes del tiempo, ya que si H no depende de t se tiene

$$\varphi_t(\mathbf{y}_0) = \varphi_t(0, \mathbf{y}_0) = \varphi_{t+t_0}(t_0, \mathbf{y}_0).$$

Teorema 2.16. *Si C_1 y C_2 son dos curvas cerradas cualesquiera con la misma orientación que rodean un tubo de trayectorias de un sistema mecánico de hamiltoniano H , entonces*

$$\int_{C_1} (\mathbf{p} \, d\mathbf{q} - H \, dt) = \int_{C_2} (\mathbf{p} \, d\mathbf{q} - H \, dt).$$

Demostración. Demostraremos el teorema para un sistema de un sólo grado de libertad (la demostración que daremos se generaliza fácilmente a un sistema de n grados de libertad utilizando el teorema de Stokes para formas diferenciales). En este caso el espacio de fases ampliado $\mathbb{R} \times \Phi_1$ es el espacio \mathbb{R}^3 , y podemos por tanto aplicar los teoremas del cálculo vectorial ordinario. Supongamos, por ejemplo, que las curvas C_1 y C_2 están orientadas como se indica en la Fig. 2.4.

Figura 2.4: curvas C_1 y C_2 .

Si S denota la superficie del tubo de trayectorias limitado por las curvas C_1 y C_2 , por el teorema de Stokes se cumple

$$\int_{C_1} \alpha_H - \int_{C_2} \alpha_H = \iint_S [\nabla \times (-H, p, 0)] \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.49)$$

donde \mathbf{n} denota el vector unitario normal exterior a S . Pero el vector

$$\nabla \times (H, -p, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_t & \mathbf{e}_q & \mathbf{e}_p \\ \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial p} \\ H & -p & 0 \end{vmatrix} = \left(1, \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

es tangente a las gráficas $(t, q(t), p(t))$ de las trayectorias del sistema, es decir a las generatrices del tubo, y por tanto es tangente a la superficie S en cada punto. Luego

$$[\nabla \times (-H, p, 0)] \cdot \mathbf{n} = 0,$$

y el miembro derecho de (2.49) se anula, como habíamos afirmado.

Q.E.D.

Es importante notar que el resultado anterior admite un inverso, que aceptaremos sin demostración:

Teorema 2.17. *Supongamos que para cualquier par de curvas C_1 y C_2 con igual orientación que rodeen un tubo de trayectorias arbitrario del sistema*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{y})$$

se verifica

$$\int_{C_1} (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) = \int_{C_2} (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt).$$

Entonces $\mathbf{X} = \mathbf{X}_H$.

El invariante diferencial de Poincaré–Cartan α_H depende, obviamente, del hamiltoniano H , y por tanto no es el mismo para dos sistemas dinámicos de hamiltonianos distintos. Supongamos, sin embargo, que las curvas C_1 y C_2 que rodean el tubo de trayectorias están contenidas en sendos hiperplanos $t = \text{const.}$ o, lo que es lo mismo, cada

una de dichas curvas consta de estados *simultáneos* del sistema. En ese caso $dt = 0$ a lo largo de C_1 y C_2 , y por tanto

$$\int_{C_1} (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) = \int_{C_1} \mathbf{p} d\mathbf{q} = \int_{C_2} (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) = \int_{C_2} \mathbf{p} d\mathbf{q}.$$

Esto demuestra que la **forma diferencial de Poincaré**

$$\alpha = \mathbf{p} d\mathbf{q} \quad (2.50)$$

es un invariante diferencial *universal* de los sistemas hamiltonianos, es decir, el *mismo* para cualquier sistema dinámico hamiltoniano, si nos restringimos a curvas que constan de estados simultáneos:

Teorema 2.18. *Sean C_1 y C_2 dos curvas cerradas cualesquiera que rodean un tubo de trayectorias de un sistema mecánico hamiltoniano, están igualmente orientadas y constan cada una de ellas de estados simultáneos del sistema. Entonces se verifica*

$$\int_{C_1} \mathbf{p} d\mathbf{q} = \int_{C_2} \mathbf{p} d\mathbf{q}.$$

Si C_1 está contenida en el hiperplano $t = t_1$, la curva C_2 no es otra cosa que la imagen de C_1 bajo el flujo $\varphi_{t_2}(t_1, \cdot)$ del sistema hamiltoniano en cuestión. En otras palabras, si cada uno de los puntos de la curva C_1 se mueve de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton, en el instante t_2 la curva C_1 pasará a ocupar la posición de la curva C_2 . Podemos por tanto enunciar el Teorema 2.18 en la forma siguiente:

Teorema 2.19. *Sea C una curva cerrada en el espacio de fases Φ_n de un sistema mecánico hamiltoniano. Entonces la integral $\int_C \mathbf{p} d\mathbf{q}$ no varía si la curva C se transforma bajo el flujo del sistema, es decir*

$$\int_{\varphi_t(t_0, C)} \mathbf{p} d\mathbf{q} = \int_C \mathbf{p} d\mathbf{q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nótese que si $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ es una función arbitraria y C es una curva cerrada en Φ_n se cumple

$$\int_C \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} \right) = \int_C dF = 0.$$

Por tanto la forma diferencial

$$\lambda \mathbf{p} d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es arbitrario, es obviamente un invariante diferencial universal. El teorema siguiente, que resultará ser muy importante en la teoría de transformaciones canónicas desarrollada en el próximo capítulo, afirma que este es el invariante diferencial universal más general de los sistemas dinámicos hamiltonianos:

Teorema 2.20. *Supongamos que la forma diferencial $\beta = \mathbf{a}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{q} + \mathbf{b}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}$ es un invariante diferencial universal de los sistemas hamiltonianos, es decir*

$$\int_{C_1} \beta = \int_{C_2} \beta$$

para cualesquiera dos curvas cerradas C_1 y C_2 formadas cada una de ellas por estados simultáneos y que rodean con igual orientación un mismo tubo de trayectorias de un sistema hamiltoniano arbitrario. Entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ y una función

$$F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \text{ tales que } \beta = \lambda \mathbf{p} d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}.$$

N.B. Estrictamente hablando, el resultado anterior sólo es cierto si para cada t fijo la forma diferencial β está definida para (\mathbf{q}, \mathbf{p}) pertenecientes a un dominio simplemente conexo del espacio de fases.

El Teorema 2.18 admite el siguiente recíproco, que también es importante en la teoría de transformaciones canónicas:

Teorema 2.21. *Si la forma diferencial de Poincaré es un invariante diferencial del sistema de primer orden $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{y})$, entonces $\mathbf{X} = \mathbf{X}_H$ para alguna función $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$.*

2.5.3 Teorema de Liouville

Si aplicamos la invariancia de la forma diferencial de Poincaré a un sistema hamiltoniano con un grado de libertad obtenemos la igualdad

$$\int_{\varphi_t(t_0, C)} p \, dq = \int_C p \, dq, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde C es una curva cerrada en el espacio de fases $\Phi_2 = \mathbb{R}^2$. Si denotamos por S la superficie encerrada por la curva C , utilizando el teorema de Green se obtiene

$$\iint_{\varphi_t(t_0, S)} dqdp = \iint_S dqdp, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hemos probado por tanto el *teorema de Liouville* para sistemas con un grado de libertad: *el área limitada por una curva cerrada en el espacio de fases de un sistema mecánico hamiltoniano con un grado de libertad no varía bajo la evolución del sistema.* Este resultado es cierto, de hecho, para sistemas hamiltonianos con un número arbitrario de grados de libertad:

Teorema 2.22. *Si M es un subconjunto abierto y acotado del espacio de fases Φ_n de un sistema mecánico hamiltoniano, entonces el volumen de M no varía bajo la evolución del sistema.*

Demostración. Hay que probar que

$$\int_{\varphi_t(t_0, M)} d^{2n}\mathbf{y} = \int_M d^{2n}\mathbf{y}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para lo cual basta demostrar que

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(t_0, M)} d^{2n}\mathbf{y} = 0.$$

Aplicando el cambio de variable

$$\mathbf{y} = \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0), \quad d^{2n}\mathbf{y} = \left| \det \left(\frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} \right) \right| d^{2n}\mathbf{y}_0,$$

donde $\frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0}$ denota la matriz jacobiana de $\varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)$ respecto de \mathbf{y}_0 , se obtiene

$$\int_{\varphi_t(t_0, M)} d^{2n}\mathbf{y} = \int_M \left| \det \left(\frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} \right) \right| d^{2n}\mathbf{y}_0.$$

Como el determinante que aparece bajo la integral del miembro derecho es una función continua de t que no se anula para ningún valor de t y vale 1 para $t = t_0$ (¿por qué?), dicho determinante es positivo para todo t , y por tanto

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(t_0, M)} d^{2n} \mathbf{y} = \frac{d}{dt} \int_M \det \left(\frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} \right) d^{2n} \mathbf{y}_0 = \int_M \frac{\partial}{\partial t} \det \left(\frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} \right) d^{2n} \mathbf{y}_0.$$

La derivada parcial respecto del tiempo en $t = t_0$ del jacobiano que figura bajo la integral se calcula fácilmente utilizando las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0}(t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 &\implies \left. \frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} \right|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \varphi_{t_0}(t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbb{I}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{X}_H(t_0, \mathbf{y}_0) \equiv \frac{\partial \mathbf{X}_H}{\partial \mathbf{y}}(t_0, \mathbf{y}_0). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \det \left(\frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} \right) = \sum_{i=1}^{2n} D_i,$$

donde el D_i es el determinante que se obtiene reemplazando la i -ésima fila de la matriz identidad por el vector $\frac{\partial X_H^i}{\partial \mathbf{y}}(t_0, \mathbf{y}_0)$. Al ser

$$D_i = \frac{\partial X_H^i}{\partial y_i}(t_0, \mathbf{y}_0)$$

se tiene

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \det \left(\frac{\partial \varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} \right) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial X_H^i}{\partial y_i}(t_0, \mathbf{y}_0) \equiv (\operatorname{div} \mathbf{X}_H)(t_0, \mathbf{y}_0), \quad (2.51)$$

de donde se deduce la expresión

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \int_{\varphi_t(t_0, M)} d^{2n} \mathbf{y} = \int_M \operatorname{div} \mathbf{X}_H(t_0, \mathbf{y}_0) d^{2n} \mathbf{y}_0. \quad (2.52)$$

Como esta expresión es válida para *cualquier* abierto acotado $M \subset \Phi_n$, la derivada en cualquier otro instante $t = t_1$ está dada por

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} \int_{\varphi_t(t_0, M)} d^{2n} \mathbf{y} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} \int_{\varphi_t(t_1, \varphi_{t_1}(t_0, M))} d^{2n} \mathbf{y} = \int_{\varphi_{t_1}(t_0, M)} \operatorname{div} \mathbf{X}_H(t_0, \mathbf{y}_0) d^{2n} \mathbf{y}_0, \quad (2.53)$$

donde se ha utilizado la identidad

$$\varphi_t(t_0, \mathbf{y}_0) = \varphi_t(t_1, \varphi_{t_1}(t_0, \mathbf{y}_0)).$$

La demostración se completa observando que *la divergencia de un campo de vectores hamiltoniano es idénticamente nula*:

$$\operatorname{div} \mathbf{X}_H = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial X_H^i}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \left(- \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Q.E.D.

N.B. De la demostración del teorema de Liouville se deduce que si $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ es un campo cualquiera de vectores dependiente de t (no necesariamente hamiltoniano) entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(t_0, M)} d^{2n} \mathbf{y} = \int_{\varphi_t(t_0, M)} \operatorname{div} \mathbf{X}(t, \mathbf{y}) d^{2n} \mathbf{y} .$$

Por tanto el volumen en el espacio de fases no varía bajo el flujo de cualquier campo *de divergencia nula*.

Capítulo 3

Transformaciones canónicas

3.1 Transformaciones canonoides y canónicas

En el Capítulo 1 hemos visto que las ecuaciones de Lagrange son covariantes bajo transformaciones arbitrarias de las coordenadas generalizadas de la forma

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}). \quad (3.1)$$

Más precisamente, las ecuaciones de Lagrange de *cualquier* lagrangiano $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se transforman bajo el cambio de variables anterior en las ecuaciones de Lagrange de otro lagrangiano $\tilde{L}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$, obtenido a partir de L expresando \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ en términos de $\tilde{\mathbf{q}}$ y

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (3.2)$$

En otras palabras, L y \tilde{L} están relacionados por

$$\tilde{L}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.3)$$

si $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ están relacionados por las ecs. (3.1) y (3.2). En mecánica hamiltoniana la situación es más complicada, pues *no* es cierto que una transformación (invertible) arbitraria de las coordenadas y momentos

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (3.4)$$

o, abreviadamente

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}),$$

transforme las ecuaciones de Hamilton de *cualquier* hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ en otro sistema *hamiltoniano*.

Ejemplo 3.1. Consideremos la transformación

$$\tilde{q} = q, \quad \tilde{p} = \sqrt{p} - \sqrt{q}, \quad (3.5)$$

definida en el cuadrante $q > 0, p > 0$ del espacio de fases Φ_2 . Las ecuaciones de Hamilton de

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

son

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2 q.$$

Estas ecuaciones se transforman bajo el cambio de variables (3.5) en el siguiente sistema:

$$\dot{q} = p = (\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2, \quad \dot{p} = -\frac{\omega^2 \tilde{q}}{2\sqrt{\tilde{p}}} - \frac{p}{2\sqrt{\tilde{q}}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 \tilde{q}}{\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}}} + \frac{(\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2}{\sqrt{\tilde{q}}} \right). \quad (3.6)$$

¿Es este sistema *hamiltoniano*? La condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que exista una función $\tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p})$ tal que

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 \tilde{q}}{\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}}} + \frac{(\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2}{\sqrt{\tilde{q}}} \right), \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = (\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2. \quad (3.7)$$

Dado que (en virtud de las ecs. (3.5)) las coordenadas (\tilde{q}, \tilde{p}) pertenecen al abierto $M = \{\tilde{q} > 0, \tilde{p} > -\sqrt{\tilde{q}}\}$, que es un conjunto simplemente conexo, la condición necesaria y suficiente para la existencia de una función $\tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{p})$ cumpliendo las condiciones anteriores es que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left(\frac{\omega^2 \tilde{q}}{\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}}} + \frac{(\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2}{\sqrt{\tilde{q}}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} (\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2$$

para todo $(\tilde{q}, \tilde{p}) \in M$. Operando queda

$$-\frac{\omega^2 \tilde{q}}{2(\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2} + \frac{\tilde{p}}{\sqrt{\tilde{q}}} + 1 = \frac{\tilde{p}}{\sqrt{\tilde{q}}} + 1,$$

que sólo puede cumplirse idénticamente en $(\tilde{q}, \tilde{p}) \in M$ si $\omega = 0$. En tal caso $H = \frac{1}{2} p^2$, y el hamiltoniano \tilde{H} del sistema transformado

$$\dot{q} = (\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2, \quad \dot{p} = -\frac{(\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2}{2\sqrt{\tilde{q}}}$$

se obtiene integrando las ecuaciones (3.7) con $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = (\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2 &\implies \tilde{H} = \frac{1}{3} (\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^3 + f(t, \tilde{q}); \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = \frac{(\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2}{2\sqrt{\tilde{q}}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} = \frac{(\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^2}{2\sqrt{\tilde{q}}} &\implies \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto (prescindiendo de la función arbitraria $f(t)$)

$$\tilde{H} = \frac{1}{3} (\tilde{p} + \sqrt{\tilde{q}})^3.$$

Nótese, en particular, que en este caso

$$\tilde{H} = \frac{1}{3} p^{\frac{3}{2}} \neq H = \frac{1}{2} p^2.$$

□

Vemos, en particular, que hay transformaciones del espacio de fases que transforman las ecuaciones de Hamilton de *ciertos* hamiltonianos en un sistema hamiltoniano. Estas transformaciones reciben el nombre de **canonoides** para el hamiltoniano en cuestión:

Definición 3.2. La transformación (3.4) es **canonoide** para el hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ si transforma las ecuaciones de Hamilton de H en un sistema hamiltoniano.

Por ejemplo, la transformación (3.5) es canonoide para el hamiltoniano $H = p^2/2$, pero no lo es para $H = (p^2 + \omega^2 q^2)/2$ si $\omega \neq 0$. Por supuesto, las transformaciones más interesantes son aquellas que resultan ser canónicas a la vez para *todos* los hamiltonianos H , pues dichas transformaciones *preservan la forma de las ecuaciones de Hamilton* o, equivalentemente, *transforman cualquier sistema hamiltoniano en un sistema hamiltoniano*:

Definición 3.3. La transformación (3.4) es **canónica** si es canonoide para cualquier hamiltoniano, es decir si transforma las ecuaciones de Hamilton de *cualquier* hamiltoniano H en un sistema hamiltoniano.

Ejemplo 3.4. La transformación (3.1) transforma las ecuaciones de Lagrange de $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ en las ecuaciones de Lagrange de $\tilde{L}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$, donde L y \tilde{L} están relacionados por la ec. (3.3). Esta transformación induce una transformación del momento $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, que se obtiene expresando

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}$$

en términos de \mathbf{p} , es decir

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{q}_i} \mathbf{p}.$$

La ecuación anterior se puede escribir en forma matricial como sigue:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right)^T \mathbf{p} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \right]^T \mathbf{p}.$$

Por construcción, la transformación

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \right]^T \mathbf{p} \quad (3.8)$$

(donde $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q})$ es una función invertible arbitraria) transforma las ecuaciones de Hamilton del hamiltoniano H asociado a L en las ecuaciones de Hamilton del hamiltoniano \tilde{H} asociado a \tilde{L} . De esta propiedad no se deduce sin más que la transformación (3.8) sea canónica, ya que no todo sistema hamiltoniano proviene de un lagrangiano; sin embargo, aplicando el criterio de canonicidad que deduciremos a continuación se puede probar que (3.8) es una transformación canónica. Nótese que en dicha transformación $\tilde{\mathbf{q}}$ es independiente de \mathbf{p} y $\tilde{\mathbf{p}}$ es lineal en el momento \mathbf{p} . \square

Ejemplo 3.5. Las transformaciones del ejemplo anterior, aún cuando dependen de una función arbitraria $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q})$, no son ni mucho menos las transformaciones canónicas más generales. Por ejemplo la transformación

$$\tilde{q}_i = p_i, \quad \tilde{p}_i = -q_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.9)$$

que no es del tipo anterior, es canónica. En efecto, sea \tilde{H} el transformado de H bajo la transformación (3.9), es decir

$$\tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(t, -\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})$$

o, equivalentemente,

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{H}(t, \mathbf{p}, -\mathbf{q}).$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton de H se transforman bajo el cambio de variable (3.9) en las ecuaciones de Hamilton de \tilde{H} , ya que

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_i = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \\ \dot{\tilde{p}}_i = -\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}. \end{cases}$$

□

Nuestro próximo objetivo es el de encontrar una condición necesaria y suficiente para que una transformación de la forma (3.4) sea canónica. Supondremos a partir de ahora, para poder aplicar algunos de los resultados del capítulo anterior (concretamente el Teorema 2.20), que para cada t la transformación canónica (3.4) está definida en un dominio simplemente conexo del espacio de fases. Necesitaremos además desarrollar algunos conceptos previos que detallaremos a continuación.

En primer lugar, dada una función cualquiera $f(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, denotaremos por $d'f$ la diferencial de f respecto de las coordenadas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) en el espacio de fases, manteniendo el tiempo constante:

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} \equiv df - \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Sea C una curva cualquiera en el espacio de fases ampliado, y denotemos por \tilde{C} la transformada de C bajo el cambio de coordenadas (3.4). En otras palabras, si C está parametrizada por

$$t = t(s), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(s), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(s), \quad s_1 \leq s \leq s_2,$$

entonces las ecuaciones paramétricas de \tilde{C} son

$$t = t(s), \quad \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t(s), \mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(t(s), \mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)), \quad s_1 \leq s \leq s_2.$$

La integral a lo largo de la curva \tilde{C} de la forma de Poincaré $\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}}$ en las nuevas coordenadas $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ está dada por

$$\int_{\tilde{C}} \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} = \int_C \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Nótese que en el miembro izquierdo $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\tilde{\mathbf{p}}$ denotan las nuevas *coordenadas* en el espacio de fases (es decir, son *variables independientes*), mientras que en el miembro derecho $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $\mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ son las *funciones* concretas que relacionan las antiguas coordenadas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) con las nuevas $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$. Si la curva C está formada por estados simultáneos del sistema, es decir si $t(s) = t_0$ para todo $s \in [s_1, s_2]$, entonces lo mismo ocurre con su transformada \tilde{C} , y la ecuación anterior se reduce a

$$\int_{\tilde{C}} \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} = \int_C \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d'\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Si C_1 y C_2 son dos curvas formada por estados simultáneos del sistema que rodean un tubo de trayectorias de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.10)$$

entonces sus transformadas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 son dos curvas que rodean (con la misma orientación) un tubo de trayectorias del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{a}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}), \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = \mathbf{b}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) \quad (3.11)$$

que se obtiene aplicando a las ecuaciones de Hamilton la transformación (3.4). Si el cambio de coordenadas (3.4) es una transformación canónica entonces el sistema (3.11) es *hamiltoniano*, y por tanto

$$\int_{\tilde{C}_1} \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} = \int_{\tilde{C}_2} \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}}$$

para todo par de curvas cerradas C_1 y C_2 formadas por estados simultáneos que rodeen con la misma orientación un tubo de trayectorias del sistema (3.10). Por la observación anterior, de esta igualdad se deduce que

$$\int_{C_1} \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d'\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int_{C_2} \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d'\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Como el hamiltoniano H y las curvas C_1 y C_2 son arbitrarias, el razonamiento anterior demuestra que si la transformación (3.4) es canónica entonces la forma diferencial $\mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d'\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ es un invariante diferencial universal de los sistemas hamiltonianos. Por el Teorema 2.20, existen una constante λ y una función $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ tales que

$$\mathbf{P} d'\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{p} d\mathbf{q} - d'F. \quad (3.12)$$

Nótese que la constante λ *no puede ser nula*, ya que la forma diferencial $\mathbf{P} d'\mathbf{Q}$ no es una diferencial exacta (ejercicio).

Recíprocamente, supongamos que la transformación (3.4) cumple la condición (3.12). Si C_1 y C_2 son de nuevo dos curvas de estados simultáneos que rodean un tubo de trayectorias de las ecuaciones de Hamilton (3.10) y tienen la misma orientación, entonces sus transformadas bajo (3.4) \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 son dos curvas que rodean con igual orientación un tubo de trayectorias del sistema transformado (3.11), y se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}_1} \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} - \int_{\tilde{C}_2} \tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} &= \int_{C_1} \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d'\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - \int_{C_2} \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) d'\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ &= \lambda \left(\int_{C_1} \mathbf{p} d\mathbf{q} - \int_{C_2} \mathbf{p} d\mathbf{q} \right) = 0, \end{aligned}$$

por ser $\mathbf{p} d\mathbf{q}$ un invariante universal de los sistemas hamiltonianos. Este argumento prueba que la forma de Poincaré $\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}}$ en las nuevas coordenadas $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ es un invariante diferencial del sistema de ecuaciones diferenciales (3.11). Por el Teorema 2.21, el sistema (3.11) es hamiltoniano. Por tanto si se verifica la relación (3.12) la transformación (3.4) es canónica, ya que transforma cualquier sistema hamiltoniano en otro sistema hamiltoniano. Hemos probado por tanto la siguiente caracterización de las transformaciones canónicas:

Teorema 3.6. *La transformación*

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

es canónica si y sólo si existen una constante $\lambda \neq 0$ y una función $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ tales que

$$\mathbf{P} d'\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{p} d\mathbf{q} - d'F.$$

Definición 3.7. La constante λ se denomina **parámetro** (o **valencia**) de la transformación canónica, y la función $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ es su **función generatriz**. Una transformación canónica se dirá **propia** (o **restringida**) si su parámetro es igual a 1.

Ejemplo 3.8. Consideremos la transformación (3.8) inducida por el cambio de coordenadas (3.1). En este caso

$$\mathbf{P} d'\mathbf{Q} = \left(\left[\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \right]^T \mathbf{p} \right) \cdot d'\mathbf{Q} = \mathbf{p} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} d'\mathbf{Q} \right] = \mathbf{p} d\mathbf{q},$$

ya que

$$d\mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} \implies d\mathbf{q} = \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \left(d\mathbf{Q} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dt \right) \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} d'\mathbf{Q}.$$

Por tanto la transformación (3.8) es canónica, con parámetro $\lambda = 1$ y función generatriz $F = 0$.

Supongamos que la transformación (3.4) es canónica, y que por tanto se cumple la condición (3.12). Para hallar el hamiltoniano correspondiente al sistema transformado (3.11), definamos la función \tilde{H} mediante

$$\mathbf{P} d\mathbf{Q} - \tilde{H} dt = \lambda (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) - dF. \quad (3.13)$$

En otras palabras,

$$\tilde{H} = \lambda H + \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Sean C_1 y C_2 dos curvas arbitrarias que rodeen un tubo de trayectorias de las ecuaciones de Hamilton (2.13) con igual orientación. Las curvas transformadas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 tienen la misma propiedad con respecto del transformado del tubo de trayectorias bajo (3.4), que es un tubo de trayectorias del sistema (3.11). Por tanto

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{C}_1} (\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) dt) - \int_{\tilde{C}_2} (\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) dt) \\ &= \int_{C_1} (\mathbf{P} d\mathbf{Q} - \tilde{H}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) dt) - \int_{C_2} (\mathbf{P} d\mathbf{Q} - \tilde{H}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) dt) \\ &= \lambda \left(\int_{C_1} (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) - \int_{C_2} (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por tanto la forma diferencial $\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{H} dt$ es un invariante diferencial del sistema (3.11), y el Teorema 2.17 implica entonces que \tilde{H} (expresado en términos de $(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$) es el hamiltoniano de dicho sistema.

De hecho, la relación (3.13) caracteriza las transformaciones canónicas, ya que si el cambio de coordenadas (3.4) cumple (3.13) “proyectando” dicha relación sobre las diferenciales $(d\mathbf{q}, d\mathbf{p})$ se obtiene (3.12). Hemos probado por tanto el siguiente resultado:

Teorema 3.9. *El cambio de coordenadas (3.4) es canónico si y sólo si existen una constante $\lambda \neq 0$ y una función $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ con la siguiente propiedad: para todo hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, existe una función \tilde{H} tal que*

$$\mathbf{P} d\mathbf{Q} - \tilde{H} dt = \lambda (\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) - dF.$$

Además, si se cumple la relación anterior la función \tilde{H} está dada por (3.14) y (si se expresa en términos de las variables $(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$) es el hamiltoniano del sistema (3.11) obtenido aplicando el cambio de coordenadas (3.4) a las ecuaciones de Hamilton (3.10).

Una consecuencia inmediata de esta caracterización de las transformaciones canónicas es que la composición de dos transformaciones canónicas de parámetros λ y μ es otra transformación canónica de parámetro $\lambda\mu$, y la inversa de una transformación canónica de parámetro λ también es canónica y de parámetro $1/\lambda$. En otras palabras, *el conjunto de todas las transformaciones canónicas es un grupo*. También se sigue fácilmente de lo anterior que *el subconjunto de las transformaciones canónicas propias forma grupo* (es, por tanto, un subgrupo del anterior).

Ejemplo 3.10. Otra consecuencia inmediata del Teorema 3.9 es que si la transformación canónica (3.4) no depende del tiempo entonces podemos tomar simplemente

$$\tilde{H} = \lambda H. \quad (3.16)$$

En efecto, si \mathbf{Q} y \mathbf{P} en la ecuación (3.13) son independientes del tiempo entonces la solución general de

$$d'F = \lambda \mathbf{p} d\mathbf{q} - \mathbf{P} d'\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{p} d\mathbf{q} - \mathbf{P} d\mathbf{Q}$$

es de la forma

$$F = F_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + f(t),$$

donde F_0 es una solución particular y f es una función arbitraria de t . Utilizando la ecuación (3.14) para \tilde{H} se obtiene

$$\tilde{H} = \lambda H + f'(t),$$

donde $f'(t)$ puede suprimirse sin pérdida de generalidad dado que no afecta a las ecuaciones de Hamilton. \square

3.2 Tipo de una transformación canónica

La función generatriz $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ de una transformación canónica no determina de forma unívoca dicha transformación. En otras palabras, en general hay más de una transformación canónica con la misma función generatriz (de hecho, hay infinitas):

Ejemplo 3.11. Hallemos, por ejemplo, todas las transformaciones canónicas del espacio de fases de un grado de libertad Φ_1 cuya función generatriz es $F(t, q, p) = 0$. La condición satisfecha por dichas transformaciones es, en virtud de (3.12),

$$P d'Q = \lambda p dq,$$

lo que conduce al siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$P \frac{\partial Q}{\partial q} = \lambda p, \quad P \frac{\partial Q}{\partial p} = 0.$$

Por tanto

$$\tilde{q} = Q(t, q), \quad \tilde{p} = \frac{\lambda p}{(\partial Q / \partial q)}$$

es la transformación canónica más general de Φ_1 cuya función generatriz es $F = 0$. En particular, si $\lambda = 1$ se obtiene la transformación canónica generada por el cambio de coordenadas $\tilde{q} = Q(t, q)$ (cf. la ec. (3.8)). \square

La clave para que la función generatriz determine unívocamente la transformación canónica es utilizar como coordenadas en el espacio de fases un subconjunto del conjunto $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ en el que no aparezca ningún par de coordenadas conjugadas (q_i, p_i) o $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i)$. Supongamos, por ejemplo, que las $2n$ variables $(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ son funcionalmente independientes, es decir que

$$\det \frac{\partial(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \det \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{p}} \right) \neq 0. \quad (3.17)$$

En otras palabras, de la ecuación

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

es posible despejar (localmente) \mathbf{p} como una función de $(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$. Podemos por tanto utilizar (localmente) el par $(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ como coordenadas en el espacio de fases Φ_n . Si llamamos

$$F_1(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})) \quad (3.18)$$

la condición (3.13) necesaria y suficiente para que la transformación (3.4) sea canónica, que podemos escribir en la forma

$$\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{H} dt = \lambda(\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt) - dF_1,$$

es equivalente a las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \quad \lambda \mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}; \quad (3.19)$$

$$\tilde{H} = \lambda H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (3.20)$$

La ecuación (3.17) y la segunda ecuación (3.19) implican que la función generatriz $F_1(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ satisface la condición

$$\det \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial \tilde{q}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0. \quad (3.21)$$

De esta condición se deduce que las ecuaciones (3.19) definen (localmente) de forma unívoca la transformación (3.4). En efecto, si se cumple (3.21) de la segunda ecuación (3.19) se puede despejar localmente

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

y sustituyendo en la primera ecuación (3.19) se obtiene la transformación del momento:

$$\tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})).$$

En resumen, si la transformación (3.4) es canónica entonces la función F_1 definida por la ec. (3.18) satisface la condición (3.21) y define la transformación canónica a través de las ecs. (3.19)-(3.20).

Recíprocamente, si $F_1(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ es una función arbitraria que satisface la condición (3.21) entonces es inmediato comprobar que las ecuaciones (3.19) definen una transformación canónica de parámetro λ , siendo (3.20) la expresión del hamiltoniano transformado \tilde{H} en términos del hamiltoniano de partida H .

Una transformación canónica que satisface la condición (3.17) se denomina **de tipo 1**. Por ejemplo, la transformación

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = -\mathbf{q} \quad (3.22)$$

es de tipo 1, mientras que la transformación canónica identidad no lo es. El argumento anterior demuestra que *toda transformación canónica de tipo 1 está determinada (localmente) vía las ecuaciones (3.19) por una función generatriz de tipo 1* $F_1(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ que satisface la condición (3.21).

Ejemplo 3.12. Veamos, por ejemplo, cuál es la transformación canónica generada por la función generatriz de tipo 1 más sencilla, es decir

$$F_1 = \sum_{i,j} a_{ij} q_i \tilde{q}_j, \quad (3.23)$$

donde $A \equiv (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ es una matriz invertible constante. En este caso las ecuaciones (3.19) se convierten en

$$\tilde{p}_i = -\sum_j a_{ji} q_j, \quad \lambda p_i = \sum_j a_{ij} \tilde{q}_j,$$

que en forma matricial se escriben

$$\tilde{\mathbf{q}} = \lambda A^{-1} \mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = -A^T \mathbf{q}.$$

En particular, si A es la matriz unidad $n \times n$ entonces $F_1 = \mathbf{q} \tilde{\mathbf{q}}$, y la transformación anterior se reduce a (3.22) para $\lambda = 1$. \square

Además de las transformaciones de tipo 1 en la literatura se suelen utilizar otros tres tipos, que resumimos brevemente a continuación.

Tipo 2: $(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$ variables independientes.

Condición: $\det \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right) \neq 0$.

Función generatriz: $F_2(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) = F + \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}$, $\det \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_j} \right) \neq 0$.

Ecuaciones de la transformación canónica:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \lambda \mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.24)$$

Tipo 3: $(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}})$ variables independientes.

Condición: $\det \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right) \neq 0$.

Función generatriz: $F_3(t, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}) = F - \lambda \mathbf{q} \mathbf{p}$, $\det \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_i \partial \tilde{q}_j} \right) \neq 0$.

Ecuaciones de la transformación canónica:

$$\tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \quad \lambda \mathbf{q} = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{p}}. \quad (3.25)$$

Tipo 4: $(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}})$ variables independientes.

Condición: $\det \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}} \right) \neq 0$.

Función generatriz: $F_4(t, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) = F + \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}} - \lambda \mathbf{q} \mathbf{p}$, $\det \left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_i \partial \tilde{p}_j} \right) \neq 0$.

Ecuaciones de la transformación canónica:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \lambda \mathbf{q} = -\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{p}}. \quad (3.26)$$

En todos los casos,

$$\tilde{H} = \lambda H + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Aunque, por supuesto, hay transformaciones canónicas que no son de ninguno de los tipos anteriores, Caratheodory demostró que *toda transformación canónica puede generarse de forma unívoca por una función generatriz adecuada*. En efecto, puede probarse que dada una transformación canónica cualquiera siempre es posible dividir las coordenadas canónicas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) y $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ en sendos grupos

$$\mathbf{q} \leftrightarrow (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \quad \mathbf{p} \leftrightarrow (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2); \quad \tilde{\mathbf{q}} \leftrightarrow (\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2), \quad \tilde{\mathbf{p}} \leftrightarrow (\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2)$$

de forma que

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2) \quad (3.27)$$

sean coordenadas independientes en el espacio de fases Φ_n . Las transformaciones de tipo 1–4 vistas anteriormente se obtienen precisamente cuando en cada uno de los pares $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2)$ y $(\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2)$ no aparece uno de los dos vectores del par (por ejemplo, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$, $\tilde{\mathbf{q}}_1 = \tilde{\mathbf{q}}$ para las transformaciones de tipo 1). Podemos escribir la condición de canonicidad (3.13) como sigue:

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 d\tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{q}}_2 d\tilde{\mathbf{p}}_2 - \tilde{H} dt = \lambda(\mathbf{p}_1 d\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 d\mathbf{p}_2 - H dt) - d\mathcal{F}, \quad (3.28)$$

donde

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2) = F + \tilde{\mathbf{q}}_2 \tilde{\mathbf{p}}_2 - \lambda \mathbf{q}_2 \mathbf{p}_2 \quad (3.29)$$

y se entiende que en el miembro derecho $(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2, \tilde{\mathbf{p}}_1)$ se han de expresar en función de las variables independientes $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2)$. Al ser las variables (3.27) independientes, de la igualdad (3.28) se deducen las ecuaciones

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_1}, \quad \tilde{\mathbf{q}}_2 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}_2}, \quad \lambda \mathbf{p}_1 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}_1}, \quad \lambda \mathbf{q}_2 = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{p}_2}, \quad (3.30)$$

junto con la igualdad

$$\tilde{H} = \lambda H + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}. \quad (3.31)$$

Las ecuaciones (3.30) determinan (al menos localmente) la transformación canónica si

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i \partial \tilde{z}_j} \right) \neq 0, \quad \mathbf{z} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2), \quad \tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2). \quad (3.32)$$

3.3 Paréntesis de Lagrange. Invariancia del paréntesis de Poisson

El criterio (3.12) para que la transformación (3.4) sea canónica se puede escribir como sigue:

$$\tilde{\mathbf{p}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial q_i} - \lambda p_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \tilde{\mathbf{p}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial p_i} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}; \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.33)$$

En un dominio simplemente conexo, la condición necesaria y suficiente para que exista una función $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ cumpliendo las relaciones anteriores se obtiene igualando a cero las derivadas parciales cruzadas de segundo orden de F calculadas utilizando el miembro izquierdo de (3.33). Se obtienen así las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial q_j} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial q_j} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial p_i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial p_j} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial p_j} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial p_i} = 0, & \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial q_i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial p_j} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial p_j} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial q_i} = \lambda \delta_{ij}; \\ 1 \leq i, j \leq n. \end{cases}$$

Si definimos los **paréntesis de Lagrange** de dos coordenadas y_α, y_β respecto de las nuevas variables $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ mediante

$$[y_\alpha, y_\beta] = \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial y_\beta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial y_\beta}, \quad (3.34)$$

el argumento anterior demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.13. *La transformación (3.4) es canónica si y sólo si los paréntesis de Lagrange de las coordenadas antiguas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) respecto de las nuevas $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ satisfacen las siguientes igualdades:*

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \lambda \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (3.35)$$

con $\lambda \neq 0$.

Las ecuaciones (3.34) son equivalentes a las siguientes relaciones:

$$[y_\alpha, y_\beta] = \lambda \omega_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2n.$$

Sea

$$J = \left(\frac{\partial \tilde{y}_\alpha}{\partial y_\beta} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2n} \equiv \frac{\partial(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \quad (3.36)$$

la matriz jacobiana de las nuevas coordenadas $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ respecto de las antiguas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Es inmediato comprobar que

$$[y_\alpha, y_\beta] = \sum_{\gamma, \delta} \omega_{\gamma\delta} \frac{\partial \tilde{y}_\gamma}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \tilde{y}_\delta}{\partial y_\beta} \equiv \sum_{\gamma, \delta} \omega_{\gamma\delta} J_{\gamma\alpha} J_{\delta\beta}.$$

Por tanto las condiciones (3.34) son equivalentes a la siguiente ecuación matricial

$$J^\top \Omega J = \lambda \Omega. \quad (3.37)$$

Esto demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.14. *La transformación (3.4) es canónica si y sólo si la matriz jacobiana J de las nuevas coordenadas respecto de las antiguas satisface la ecuación (3.37) para algún $\lambda \neq 0$.*

En particular, si $\lambda = 1$ la matriz J es una matriz *simpléctica*. Tomando la inversa de la ecuación (3.37) y utilizando la identidad $\Omega^{-1} = -\Omega$ se obtiene

$$J^{-1} \Omega (J^{-1})^{\top} = \frac{1}{\lambda} \Omega.$$

Multiplicando a la izquierda por J y a la derecha por J^{\top} queda

$$J \Omega J^{\top} = \lambda \Omega, \quad (3.38)$$

que es por tanto equivalente a (3.37). El elemento de matriz (α, β) de la igualdad anterior proporciona la relación

$$\sum_{\gamma, \delta} \frac{\partial \tilde{y}_{\alpha}}{\partial y_{\gamma}} \omega_{\gamma \delta} \frac{\partial \tilde{y}_{\beta}}{\partial y_{\delta}} = \lambda \omega_{\alpha \beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2n,$$

que es equivalente a las siguientes identidades satisfechas por los paréntesis de Poisson de las nuevas coordenadas $\tilde{\mathbf{y}}$:

$$\{\tilde{y}_{\alpha}, \tilde{y}_{\beta}\} = \lambda \omega_{\alpha \beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2n,$$

o, en términos de las variables $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$,

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \lambda \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.39)$$

Hemos probado por tanto la siguiente caracterización de las transformaciones canónicas en términos del paréntesis de Poisson:

Teorema 3.15. *La transformación (3.4) es canónica si y sólo si los paréntesis de Poisson de las nuevas coordenadas $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ verifican (3.39). En otras palabras, (3.4) es canónica si y sólo si preserva los paréntesis de Poisson elementales módulo una constante multiplicativa no nula (igual al parámetro de la transformación).*

Ejercicio 5. Probar que la transformación (3.4) es canónica si y sólo si existe una constante $\lambda \neq 0$ tal que

$$\{f(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}), g(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})\} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right)$$

para todo par de funciones f y g . En otras palabras, (3.4) es canónica si y sólo si *preserva el paréntesis de Poisson*. [Ayuda: utilizar la regla de la cadena para el paréntesis de Poisson (Ejemplo 2.13).]

Los resultados anteriores tienen muchas consecuencias importantes. Una de ellas es la siguiente:

Teorema 3.16. *Las transformaciones canónicas dilatan los volúmenes en el espacio de fases Φ_n por un factor constante $|\lambda|^n$.*

Demostración. Hay que probar que si M es un subconjunto abierto acotado del espacio de fases Φ_n , y denotamos por \tilde{M}_t su transformado bajo una transformación canónica de la forma (3.4) en el instante t , entonces el volumen de \tilde{M}_t es $|\lambda|^n$ veces el de M . Para ello basta notar que el volumen de \tilde{M}_t está dado por la integral

$$\int_M \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right| d^{2n} \mathbf{y} \equiv \int_M |\det J| d^{2n} \mathbf{y}.$$

Tomando el determinante de la igualdad (3.37) se obtiene

$$(\det J)^2 = \lambda^{2n} \implies |\det J| = |\lambda|^n,$$

lo cual prueba nuestra afirmación. Q.E.D.

Nótese, en particular, que *las transformaciones canónicas de parámetro ± 1 preservan el volumen.*

3.4 Grupos a un parámetro de transformaciones canónicas

Definición 3.17. Un **grupo a un parámetro** de transformaciones de Φ_n es un conjunto $\{\varphi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ de transformaciones $\varphi_s : \Phi_n \rightarrow \Phi_n$ tal que

$$\varphi_{s_1} \circ \varphi_{s_2} = \varphi_{s_1+s_2}, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Nótese que si $\{\varphi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ es un grupo a un parámetro entonces φ_0 es la identidad, y para todo $s \in \mathbb{R}$ la transformación φ_s es invertible, con inversa

$$(\varphi_s)^{-1} = \varphi_{-s}.$$

Por ejemplo, las rotaciones de ángulo s alrededor de un eje fijo o las traslaciones $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} + s\mathbf{y}_0$, donde \mathbf{y}_0 es un vector fijo, son grupos a un parámetro. En general, las transformaciones del *flujo* de cualquier campo de vectores (independiente del tiempo) forman un grupo a un parámetro (véase la pág. 51). El teorema siguiente afirma esencialmente que todo grupo a un parámetro se obtiene de esta forma:

Proposición 3.18. *Todo grupo a un parámetro de transformaciones de Φ_n es el flujo de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}_n$.*

Demostración. Hay que probar que si $\{\varphi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ es un grupo a un parámetro existe un campo de vectores $\mathbf{X}(\mathbf{y})$ tal que

$$\frac{d}{ds} \varphi_s(\mathbf{y}) = \mathbf{X}(\varphi_s(\mathbf{y})). \quad (3.40)$$

Haciendo $s = 0$ en esta igualdad se deduce que el campo $\mathbf{X}(\mathbf{y})$ tiene que estar dado por

$$\mathbf{X}(\mathbf{y}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_s(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \Phi_n. \quad (3.41)$$

Sólo resta comprobar que el campo definido por la fórmula anterior satisface la ec. (3.40). En efecto, para todo $s_0 \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} \varphi_s(\mathbf{y}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_{s+s_0}(\mathbf{y}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_s(\varphi_{s_0}(\mathbf{y})) = \mathbf{X}(\varphi_{s_0}(\mathbf{y})).$$

Q.E.D.

Definición 3.19. El campo de vectores $X \in \mathfrak{X}_n$ definido por (3.41) se denomina el **generador** del grupo a un parámetro $\{\varphi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$.

Nótese que en virtud de la ecuación (3.41) se tiene

$$\varphi_s(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + s \mathbf{X}(\mathbf{y}) + O(s^2).$$

Nuestro siguiente objetivo es caracterizar los grupos a un parámetro de transformaciones canónicas propias de Φ_n a través de su generador. Recordemos, en primer lugar, que la condición necesaria y suficiente para que un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}_n$ sea hamiltoniano está dada por la ecuación (2.26), que en forma matricial se escribe

$$\Omega \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{y}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{y}} \right)^\top \Omega,$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial y_\beta} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2n}.$$

Multiplicando a izquierda y derecha por la matriz Ω y utilizando la identidad $\Omega^2 = -\mathbb{I}$ se obtiene la condición equivalente

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{y}} \Omega = -\Omega \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{y}} \right)^\top \quad (3.42)$$

Estamos ya en condiciones de caracterizar los generadores de los grupos a un parámetro de transformaciones canónicas (propias):

Teorema 3.20. *Un grupo a un parámetro de transformaciones de Φ_n consta de transformaciones canónicas propias si y sólo si su generador $X \in \mathfrak{X}_n$ es un campo hamiltoniano.*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que φ_s es una transformación canónica propia para todo $s \in \mathbb{R}$. En tal caso los paréntesis de Poisson de las componentes φ_s^α de φ_s ($1 \leq \alpha \leq 2n$) satisfacen

$$\{\varphi_s^\alpha, \varphi_s^\beta\} = \omega_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2n.$$

Derivando parcialmente esta igualdad respecto de s obtenemos

$$\{X_\alpha(\varphi_s(\mathbf{y})), \varphi_s^\beta(\mathbf{y})\} + \{\varphi_s^\alpha(\mathbf{y}), X_\beta(\varphi_s(\mathbf{y}))\} = 0.$$

Haciendo $s = 0$ queda

$$\{X_\alpha, y_\beta\} + \{y_\alpha, X_\beta\} = 0, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2n, \quad (3.43)$$

que se puede escribir en la forma equivalente

$$\sum_{\mu, \nu} \omega_{\mu\nu} \frac{\partial X_\alpha}{\partial y_\mu} \delta_{\beta\nu} + \sum_{\mu, \nu} \omega_{\mu\nu} \delta_{\alpha\mu} \frac{\partial X_\beta}{\partial y_\nu} = 0,$$

es decir

$$\sum_{\mu} \omega_{\mu\beta} \frac{\partial X_\alpha}{\partial y_\mu} = - \sum_{\mu} \omega_{\alpha\mu} \frac{\partial X_\beta}{\partial y_\mu}.$$

Esta última ecuación no es otra cosa que la componente (α, β) de la condición (3.42), lo que implica que el generador X es hamiltoniano.

Recíprocamente, supongamos que el campo de vectores X es hamiltoniano, es decir que existe una función H tal que

$$X_\mu = \sum_\nu \omega_{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial y_\nu}, \quad 1 \leq \mu \leq 2n.$$

Derivando respecto del parámetro s el paréntesis de Lagrange de dos coordenadas y_α e y_β respecto de las variables $\varphi_s(\mathbf{y})$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} [y_\alpha, y_\beta] &= \sum_{\mu,\nu} \omega_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left(X_\mu(\varphi_s(\mathbf{y})) \right) \frac{\partial \varphi_s^\nu}{\partial y_\beta} + \sum_{\mu,\nu} \omega_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_s^\mu}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \left(X_\nu(\varphi_s(\mathbf{y})) \right) \\ &= \sum_\nu \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial y_\nu}(\varphi_s(\mathbf{y})) \right) \frac{\partial \varphi_s^\nu}{\partial y_\beta} - \sum_\mu \frac{\partial \varphi_s^\mu}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \left(\frac{\partial H}{\partial y_\mu}(\varphi_s(\mathbf{y})) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial y_\nu}(\varphi_s(\mathbf{y})) \frac{\partial \varphi_s^\nu}{\partial y_\beta} - \frac{\partial}{\partial y_\beta} \sum_\mu \frac{\partial H}{\partial y_\mu}(\varphi_s(\mathbf{y})) \frac{\partial \varphi_s^\mu}{\partial y_\alpha} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} H(\varphi_s(\mathbf{y})) - \frac{\partial^2}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} H(\varphi_s(\mathbf{y})) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto $[y_\alpha, y_\beta]$ es independiente de s para todo α, β . Al ser

$$[y_\alpha, y_\beta] \Big|_{s=0} = \sum_{\mu,\nu} \omega_{\mu\nu} \frac{\partial y_\mu}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\nu}{\partial y_\beta} = \omega_{\alpha\beta},$$

para todo s se verifica

$$[y_\alpha, y_\beta] = \omega_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2n,$$

lo cual implica que la transformación φ_s es efectivamente canónica propia cualquiera que sea $s \in \mathbb{R}$. Q.E.D.

El resultado que acabamos de probar implica que las transformaciones φ_t del flujo de un campo de vectores hamiltoniano conservativo son canónicas propias, para todo $t \in \mathbb{R}$ (nótese que en este caso el parámetro t de las transformaciones es el tiempo). De esta observación y del Teorema 3.15 se deduce el teorema de Liouville para sistemas hamiltonianos conservativos.

Ejercicio 6. Supongamos que $\{\varphi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ es un grupo a un parámetro de transformaciones canónicas (no necesariamente propias), y sea $\lambda(s)$ la valencia de φ_s .

- i) Probar que $\lambda(s) = e^{2cs}$ para algún $c \in \mathbb{R}$, y que el generador X del grupo satisface

$$X = X_f + c \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}.$$

- ii) Recíprocamente, probar que el flujo de un campo de vectores de la forma anterior es un grupo a un parámetro de transformaciones canónicas de valencia e^{2cs} .

3.5 Simetrías y leyes de conservación

En la sección anterior hemos visto que todo grupo a un parámetro de transformaciones canónicas propias está generado por un campo hamiltoniano. A su vez, un campo hamiltoniano (independiente del tiempo) está determinado por una función $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Por tanto, es posible asociar a todo grupo a un parámetro de transformaciones canónicas propias la función $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ tal que X_f es el generador del grupo. En un dominio conexo, la función f está determinada a menos de una constante, puesto que si f, g no dependen del tiempo entonces $X_f = X_g$ si y sólo si $f - g$ es una constante.

Llamemos G_f al grupo a un parámetro de transformaciones canónicas propias determinado por $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, es decir el grupo a un parámetro de transformaciones canónicas propias cuyo generador es X_f . El teorema siguiente, que puede considerarse como la versión hamiltoniana del teorema de Noether, relaciona las simetrías del hamiltoniano con las integrales primeras:

Teorema 3.21. *La función $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es una integral primera del sistema dinámico de hamiltoniano H si y sólo si H es invariante bajo el grupo a un parámetro de transformaciones canónicas propias G_f .*

Demostración.

\Leftarrow) Supongamos que H es invariante bajo el flujo $\{\varphi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ de X_f , es decir

$$H(t, \varphi_s(\mathbf{y})) = H(t, \mathbf{y}), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.44)$$

Derivando esta igualdad respecto de s y haciendo $s = 0$ obtenemos

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}(t, \varphi_s(\mathbf{y})) \frac{\partial \varphi_s}{\partial s}(\mathbf{y}) \Big|_{s=0} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{X}_f(\mathbf{y}) \equiv X_f(H) = -\{f, H\}, \quad (3.45)$$

y por tanto f es una integral primera del sistema (recuérdese que f es independiente de t).

\Rightarrow) Supongamos ahora que $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es una integral primera del sistema, y por tanto

$$\{f, H\} = -X_f(H) = 0.$$

Entonces se tiene (cf. la ec. (3.45))

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} H(t, \varphi_s(\mathbf{y})) = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \Phi_n.$$

De esta ecuación se sigue entonces que para todo $s_0 \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=s_0} H(t, \varphi_s(\mathbf{y})) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} H(t, \varphi_{s+s_0}(\mathbf{y})) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} H(t, \varphi_s(\varphi_{s_0}(\mathbf{y}))) = 0,$$

y por tanto se satisface la ec. (3.44). Q.E.D.

Ejemplo 3.22. Consideremos el hamiltoniano de una partícula que se mueve bajo un potencial esféricamente simétrico V , es decir

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(|\mathbf{q}|),$$

donde las coordenadas generalizadas $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ son las coordenadas cartesianas. Este hamiltoniano es claramente invariante bajo el grupo de las rotaciones en el espacio de fases $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (R\mathbf{q}, R\mathbf{p})$, donde $R \in O(3)$. Consideremos el subgrupo de las rotaciones que sólo afectan a un par de índices $i < j$, es decir

$$(q_i, q_j) \mapsto R_\theta(q_i, q_j), \quad (p_i, p_j) \mapsto R_\theta(p_i, p_j),$$

donde

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

permaneciendo las demás variables inalteradas. Se trata claramente de un grupo a un parámetro, cuyo generador es el campo de vectores

$$X = -q_j \frac{\partial}{\partial q_i} + q_i \frac{\partial}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Este campo es hamiltoniano, ya que el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial p_i} = -q_j, & \frac{\partial f}{\partial p_j} = q_i, & -\frac{\partial f}{\partial q_i} = -p_j, & -\frac{\partial f}{\partial q_j} = p_i; \\ \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\partial f}{\partial p_k} = 0, & k \neq i, j \end{cases}$$

tiene la solución evidente

$$f = q_i p_j - q_j p_i$$

(única a menos de una constante arbitraria). Por el Teorema 3.21, todas las componentes del momento angular se conservan en este caso.

Nótese que el hamiltoniano anterior es también invariante bajo rotaciones de las coordenadas y de los momentos por separado. Por ejemplo, el grupo a un parámetro de transformaciones

$$(q_i, q_j) \mapsto R_\theta(q_i, q_j) \tag{3.46}$$

(las demás coordenadas y momentos permanecen inalterados), que tiene por generador al campo

$$X = -q_j \frac{\partial}{\partial q_i} + q_i \frac{\partial}{\partial q_j},$$

deja a H invariante. Este grupo a un parámetro *no* genera, sin embargo, una integral primera de H , ya que las transformaciones (3.46) *no* son canónicas (en efecto, el generador X no es hamiltoniano). \square

Ejercicio 7. Probar que la transformación $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (R_1\mathbf{q}, R_2\mathbf{p})$, donde $R_1, R_2 \in O(3)$, es canónica propia si y sólo si $R_1 = R_2$. [Ayuda: si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ y R es una matriz 3×3 se verifica $\mathbf{a} \cdot (R\mathbf{b}) = (R^T\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$.]

Capítulo 4

Teoría de Hamilton–Jacobi

4.1 La ecuación de Hamilton–Jacobi

La idea fundamental de la teoría de Hamilton–Jacobi es la de integrar las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.1)$$

encontrando una transformación canónica

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (4.2)$$

de modo que el hamiltoniano \tilde{H} del sistema transformado sea lo más sencillo posible, es decir $\tilde{H} = 0$. En tal caso las ecuaciones del movimiento de las coordenadas $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ se reducen a

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0, \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = 0,$$

y por tanto la solución de las ecuaciones de Hamilton de partida es

$$\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{q}}_0, \quad \mathbf{P}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{p}}_0, \quad (4.3)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{p}}_0 \in \mathbb{R}^n$ son vectores constantes. En otras palabras, las nuevas coordenadas canónicas $Q_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$, $P_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ ($1 \leq i \leq n$) son $2n$ integrales primeras independientes de las ecuaciones de Hamilton (4.1).

Veamos a continuación que siempre es posible encontrar una transformación canónica (4.2) que convierta al sistema (4.1) en un sistema de hamiltoniano $\tilde{H} = 0$. En efecto, por la ec. (3.13) la condición necesaria y suficiente para que exista tal transformación es que se verifique la relación

$$\frac{\tilde{\mathbf{P}}}{\lambda} d\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt - dS, \quad (4.4)$$

donde $S = F/\lambda$, λ es el parámetro de la transformación y F su función generatriz. Utilizando las variables $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}/\lambda)$ en lugar de $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$, es evidente de la ecuación anterior que podemos restringirnos sin pérdida de generalidad a transformaciones canónicas *propias*. Por tanto a partir de ahora trataremos exclusivamente con este tipo de transformaciones, y en particular a partir de ahora escribiremos la ec. (4.4) en la forma más sencilla

$$\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt - dS. \quad (4.5)$$

Supongamos (aunque esto no es esencial) que la transformación (4.2) es de tipo 1, es decir que

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{p}} \right) \neq 0,$$

y por tanto podemos considerar a S como una función $S(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ que satisface la condición

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_j} \right) \neq 0. \quad (4.6)$$

En tal caso la relación (4.5) implica que

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = -\tilde{\mathbf{p}}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (4.7)$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene la siguiente ecuación no lineal en derivadas parciales de primer orden que debe satisfacer la función $S(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(t, \mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Por tanto, si $S(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ es *cualquier* solución de (4.8) que satisface la condición (4.6) entonces las primeras dos ecuaciones (4.7), es decir

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \quad (4.9)$$

definen una transformación canónica propia (con función generatriz S) cuyo hamiltoniano transformado es $\tilde{H} = 0$. Por las observaciones anteriores (cf. la ec. (4.3)), la solución general de las ecuaciones de Hamilton (4.1) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}_0), \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}_0) = -\tilde{\mathbf{p}}_0.$$

La ecuación (4.8) es la célebre **ecuación de Hamilton–Jacobi**. Nótese que en esta ecuación no aparece la derivada parcial $(\partial S)/(\partial \tilde{\mathbf{q}})$. Por tanto en la ecuación (4.8) t y \mathbf{q} son las variables independientes, mientras que el vector $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es un *parámetro*. En otras palabras, $S(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ es una solución de la ecuación (4.8) dependiente de n parámetros $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$ que satisface la condición (4.6). Hemos probado por tanto el siguiente resultado fundamental:

Teorema 4.1. *Si $S(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ es cualquier solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi (4.8) dependiente de n parámetros $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que satisface la condición*

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0, \quad (4.10)$$

entonces la solución general de las ecuaciones de Hamilton (4.1) se puede expresar en la forma

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}, \quad (4.11)$$

donde $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ es un vector constante.

Nótese que si S satisface la condición (4.10) las ecuaciones (4.11) determinan las coordenadas \mathbf{q} y \mathbf{p} en función del tiempo y las $2n$ constantes arbitrarias $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^{2n}$. En efecto, la condición (4.10) implica que la segunda ec. (4.11) permite calcular (localmente) $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, y sustituyendo en la primera ecuación se determina

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\alpha}).$$

Definición 4.2. Una solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi dependiente de n parámetros $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que satisface la condición (4.10) se denomina una **solución completa** de dicha ecuación.

Es evidente que, al no aparecer la función S en la ecuación de Hamilton–Jacobi más que a través de sus derivadas parciales, si a cualquier solución de dicha ecuación se le suma una constante arbitraria se obtiene una nueva solución, dependiente de un parámetro adicional α_0 . Este parámetro *no* se puede tomar, sin embargo, como una de las constantes arbitrarias de las que depende una solución completa de (4.8), ya que evidentemente

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_0} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

en contradicción con la condición (4.10).

Por el *teorema de Cauchy–Kovalevskaya*, si $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ es una función analítica de sus argumentos la solución general de la ecuación de Hamilton–Jacobi (4.8) depende de una función arbitraria de n variables (por ejemplo, del dato inicial $f(\mathbf{q}) = S(0, \mathbf{q})$). Por tanto una solución completa $S(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ de la ecuación de Hamilton–Jacobi *no* representa la solución más general de dicha ecuación.

De lo anterior también se deduce que la ecuación (4.8) posee un número infinito de soluciones completas. Sin embargo, *si se conoce una solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi se puede reconstruir dicha ecuación* (es decir, se puede recuperar el Hamiltoniano $H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$). En efecto, si $S(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ es una función conocida entonces podemos calcular sus derivadas parciales

$$\frac{\partial S}{\partial t} = f_0(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.12)$$

De la última ecuación podemos despejar (localmente)

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\left(t, \mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right)$$

en virtud de la condición (4.10). Sustituyendo en la primera ecuación (4.12) se obtiene la ecuación de Hamilton–Jacobi de la cual $S(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ es una solución completa:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - f_0\left(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}\left(t, \mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right)\right) = 0.$$

Ejemplo 4.3. Consideremos la función

$$S(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{m}{2t} (\mathbf{q} - \boldsymbol{\alpha})^2, \quad (4.13)$$

que claramente cumple la condición (4.10), ya que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{m}{t} (q_i - \alpha_i) \implies \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} = -\frac{m}{t} \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j, \leq n. \quad (4.14)$$

En este caso

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m}{2t^2} (\mathbf{q} - \boldsymbol{\alpha})^2$$

y de la primera ec. (4.14) se obtiene

$$\mathbf{q} - \boldsymbol{\alpha} = \frac{t}{m} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}.$$

Por tanto la ecuación de Hamilton–Jacobi satisfecha por S es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right)^2 = 0. \quad (4.15)$$

El hamiltoniano asociado a esta ecuación es el de la partícula libre:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (4.16)$$

Resolvamos, como ejercicio, las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (4.17)$$

del hamiltoniano (4.16) aplicando el Teorema 4.1. En este caso

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \frac{m}{t} (\mathbf{q} - \boldsymbol{\alpha}), \quad \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\frac{m}{t} (\mathbf{q} - \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}.$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos

$$\mathbf{q} = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{m} t + \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{p} = -\boldsymbol{\beta},$$

que es, efectivamente, la solución general de las ecuaciones (4.17) ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{q}(0)$ en este caso). Nótese, para finalizar, que, como hemos comentado anteriormente, la ecuación (4.15) posee muchas otras soluciones completas. Por ejemplo, es inmediato comprobar que la función

$$S(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{2m} t$$

es una solución (claramente completa) de (4.15). \square

4.2 Función principal de Hamilton

La **función principal de Hamilton** $\mathcal{S}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ se define mediante

$$\mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{t_0}^{t_1} L(s, \mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s)) ds, \quad (4.18)$$

donde $\mathbf{q}(s)$ es la solución de las ecuaciones de Lagrange que satisface las condiciones de contorno

$$\mathbf{q}(t_0) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1. \quad (4.19)$$

En otras palabras, $\mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha})$ es la *acción* de la trayectoria del sistema de lagrangiano L que une los puntos $(t_0, \boldsymbol{\alpha})$ y (t_1, \mathbf{q}_1) en el espacio de configuración ampliado¹. Nótese que, al depender la solución general de las ecuaciones de Lagrange de $2n$ constantes arbitrarias, en general para cada (t_1, \mathbf{q}_1) existe una única trayectoria que cumple las condiciones (4.19).

¹Evidentemente, la función principal de Hamilton también depende de t_0 , aunque esta dependencia no es importante en lo que sigue y, por tanto, no se ha reflejado en la notación.

Teorema 4.4 (Hamilton). *Las derivadas parciales de $\mathcal{S}(t, \mathbf{q}, \alpha)$ respecto de \mathbf{q} y α están dadas por*

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t_1, \mathbf{q}_1, \alpha) = \mathbf{p}(t_1), \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha}(t_1, \mathbf{q}_1, \alpha) = -\mathbf{p}(t_0), \quad (4.20)$$

siendo

$$\mathbf{p}(s) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(s, \mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s))$$

el momento canónico asociado a la trayectoria $\mathbf{q}(s)$ que satisface (4.19).

Demostración. Obsérvese que las $2n$ condiciones (4.19) determinan, en general, la trayectoria $\mathbf{q}(s)$, por lo que $\mathbf{p}(t_0)$ y $\mathbf{p}(t_1)$ (los momentos inicial y final a lo largo de dicha trayectoria) son en realidad funciones de $(t_1, \mathbf{q}_1, \alpha)$. Sea $\mathbf{q}(s, \epsilon)$ una familia de soluciones de las ecuaciones de Lagrange del lagrangiano L tal que

$$\mathbf{q}(t_0, \epsilon) = \alpha, \quad \mathbf{q}(t_1, \epsilon) = \mathbf{q}_1 + \epsilon \delta \mathbf{q}_1. \quad (4.21)$$

Nótese que $\mathbf{q}(s, 0)$ es la trayectoria $\mathbf{q}(s)$ que satisface (4.19), y que de (4.21) y de la definición

$$\delta \mathbf{q}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{q}(t, \epsilon)$$

se sigue que

$$\delta \mathbf{q}(t_0) = 0, \quad \delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}_1.$$

En virtud de (4.21),

$$\mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}_1 + \epsilon \delta \mathbf{q}_1, \alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L(s, \mathbf{q}(s, \epsilon), \dot{\mathbf{q}}(s, \epsilon)) ds$$

es la acción de la trayectoria $\mathbf{q}(s, \epsilon)$ en el intervalo $[t_0, t_1]$, y por tanto (cf. la ec. (1.68))

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}_1 + \epsilon \delta \mathbf{q}_1, \alpha) &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t_1, \mathbf{q}_1, \alpha) \cdot \delta \mathbf{q}_1 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta L}{\delta \mathbf{q}}(s, \mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s), \ddot{\mathbf{q}}(s)) \cdot \delta \mathbf{q}(s) ds + \mathbf{p}(s) \cdot \delta \mathbf{q}(s) \Big|_{t_0}^{t_1} = \mathbf{p}(t_1) \cdot \delta \mathbf{q}_1. \end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t_1, \mathbf{q}_1, \alpha) = \mathbf{p}(t_1),$$

es decir la primera igualdad (4.20). La segunda igualdad se demuestra de forma totalmente análoga. *Q.E.D.*

Si $\mathbf{q}(s)$ es de nuevo la trayectoria que cumple (4.19) entonces para todo t se tiene

$$\mathcal{S}(t, \mathbf{q}(t), \alpha) = \int_{t_0}^t L(s, \mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s)) ds,$$

y por tanto

$$\frac{d}{dt} \mathcal{S}(t, \mathbf{q}(t), \alpha) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, \mathbf{q}(t), \alpha) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t), \alpha) \dot{\mathbf{q}}(t) = L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)).$$

De la primera ecuación (4.20) se sigue entonces que

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, \mathbf{q}(t), \alpha) = L(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t) \cdot \mathbf{p}(t) \equiv -H(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)),$$

donde H es el hamiltoniano asociado a L . Haciendo $t = t_1$ se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t_1, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}) = -H(t_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}(t_1)). \quad (4.22)$$

En particular, de las ecuaciones (4.20) y (4.22) se deduce que \mathcal{S} es una solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi (4.8) dependiente de n parámetros $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que representan la posición inicial $\mathbf{q}(t_0)$. Nótese, sin embargo, que este resultado carece de interés para la integración de las ecuaciones de Hamilton, ya que para calcular la función principal de Hamilton es necesario conocer previamente la ecuación de la trayectoria del sistema $\mathbf{q}(s)$ que figura en el miembro derecho de (4.18) y satisface las condiciones (4.19). La genialidad de Jacobi fue precisamente el darse cuenta de que se pueden integrar las ecuaciones del movimiento de Hamilton si se conoce cualquier solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi.

Ejemplo 4.5. *Función principal de Hamilton de la partícula libre.*

Calculemos la función principal de Hamilton para la partícula libre. En este caso la solución más general $\mathbf{q}(s)$ de las ecuaciones del movimiento que satisface la condición $\mathbf{q}(t_0) = \boldsymbol{\alpha}$ es

$$\mathbf{q}(s) = \boldsymbol{\alpha} + \dot{\mathbf{q}}_0(s - t_0).$$

Imponiendo la condición $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ obtenemos el valor de $\dot{\mathbf{q}}_0$:

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \frac{\mathbf{q}_1 - \boldsymbol{\alpha}}{t_1 - t_0}.$$

En este caso

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}^2,$$

y sustituyendo en la ecuación (4.18) obtenemos finalmente

$$\mathcal{S}(t_1, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{q}}(s)^2 ds = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{q}}_0^2 ds = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}_0^2 (t_1 - t_0) = \frac{m(\mathbf{q}_1 - \boldsymbol{\alpha})^2}{2(t_1 - t_0)}.$$

□

4.3 Sistemas conservativos y coordenadas cíclicas

La ecuación de Hamilton–Jacobi para un sistema *conservativo* admite una simplificación importante que discutiremos a continuación. En efecto, al ser el hamiltoniano de un sistema conservativo independiente del tiempo, es decir $H \equiv H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, la ecuación de Hamilton–Jacobi se escribe

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}\right) = 0.$$

Esto sugiere que es posible eliminar el tiempo si $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{q}}$ no depende de t y $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}$ no depende de \mathbf{q} , es decir si

$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial t \partial \mathbf{q}} = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$S = W(\mathbf{q}) + S_0(t)$$

(donde hemos omitido, por sencillez, la dependencia de W y S_0 en los parámetros α). Sustituyendo en la ecuación de Hamilton–Jacobi se obtiene

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = -S'_0(t) = \text{const.}$$

Si tomamos esta constante como uno de los n parámetros α_k de los que ha de depender S , como por ejemplo α_n , entonces

$$S_0 = -\alpha_n t$$

y por tanto

$$S = W(\mathbf{q}, \alpha) - \alpha_n t, \quad (4.23)$$

donde la función $W(\mathbf{q}, \alpha)$ satisface la llamada **ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo**

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = \alpha_n. \quad (4.24)$$

De esta forma hemos pasado de la ecuación de Hamilton–Jacobi original (4.8), en la que hay $n + 1$ variables independientes (t, \mathbf{q}), a la familia de ecuaciones dependientes del parámetro α_n (4.24), en la que las variables independientes son únicamente las n coordenadas \mathbf{q} . Nótese que la condición (4.10) para que $S(t, \mathbf{q}, \alpha)$ sea una solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi (4.8) es equivalente a la condición análoga sobre $W(\mathbf{q}, \alpha)$

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0. \quad (4.25)$$

En el lenguaje de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, el procedimiento anterior es la *separación* de la variable t de las demás variables independientes \mathbf{q} , y la constante α_n es la llamada *constante de separación*. El significado físico de la constante α_n es claro si tenemos en cuenta que si W es una solución de (4.24) entonces a lo largo de las trayectorias del sistema se tiene

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}},$$

y por tanto

$$\alpha_n = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv E$$

es la energía del sistema (que en este caso conserva, al ser H independiente de t). En definitiva, para un sistema conservativo la solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi se puede buscar en la forma

$$S = W(\mathbf{q}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E) - Et \quad (4.26)$$

donde $W(\mathbf{q}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E) \equiv W(\mathbf{q}, \alpha)$ es una solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E. \quad (4.27)$$

Si se conoce W la solución general de las ecuaciones de Hamilton está determinada por las ecuaciones (4.11) y (4.26), es decir

$$\mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha), \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(\mathbf{q}, \alpha) = \beta_i \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (4.28a)$$

junto con

$$\frac{\partial W}{\partial E}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = t + \beta_n. \quad (4.28b)$$

Es importante observar que en las ecuaciones (4.28a) no aparece el tiempo t , por lo que (4.28a) es la ecuación geométrica de la trayectoria de energía E en el espacio de fases Φ_n . Nótese, por último, a este respecto que la constante β_n que aparece en el miembro derecho de (4.28b) tiene obviamente dimensiones de tiempo, y por este motivo (4.28b) se suele escribir en la forma

$$\frac{\partial W}{\partial E}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = t - t_0. \quad (4.29)$$

Esto también refleja el hecho conocido de que en un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales las traslaciones temporales de cualquier solución del sistema siguen siendo soluciones.

Se puede hacer algo muy parecido a lo anterior si H no depende de alguna de las coordenadas \mathbf{q} o, dicho de otro modo, si alguna de dichas coordenadas es *cíclica*. En efecto, supongamos que las últimas $n - m$ coordenadas son cíclicas:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad i = m + 1, \dots, n.$$

Denotando

$$\mathbf{q}_1 = (q_1, \dots, q_m), \quad \mathbf{q}_2 = (q_{m+1}, \dots, q_n)$$

la ecuación de Hamilton–Jacobi se escribe

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, \mathbf{q}_1, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_1}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_2}\right) = 0.$$

Si las derivadas parciales $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_2}$ son constantes:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_2} = \boldsymbol{\alpha}_2,$$

es decir si

$$S = S_1(t, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{q}_2, \quad (4.30)$$

entonces la ecuación de Hamilton–Jacobi se convierte en

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + H\left(t, \mathbf{q}_1, \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{q}_1}, \boldsymbol{\alpha}_2\right) = 0. \quad (4.31)$$

Se trata, pues, de una ecuación con $m + 1$ variables independientes (t, \mathbf{q}_1) dependiente explícitamente de $n - m$ parámetros $\boldsymbol{\alpha}_2$. La función incógnita $S_1(t, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha})$ debe cumplir la condición de completitud

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial \mathbf{q}_1 \partial \boldsymbol{\alpha}_1} \neq 0 \quad (4.32)$$

que se deduce inmediatamente de (4.10), ya que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S_1}{\partial \mathbf{q}_1 \partial \boldsymbol{\alpha}_1} & \frac{\partial^2 S_1}{\partial \mathbf{q}_1 \partial \boldsymbol{\alpha}_2} \\ 0 & \mathbb{I}_{n-m} \end{pmatrix}.$$

La solución (4.11) de las ecuaciones del movimiento se escribe en este caso

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{q}_1}, \quad \mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\alpha}_1} = \boldsymbol{\beta}_1 \quad (4.33a)$$

junto con

$$\mathbf{q}_2 = \boldsymbol{\beta}_2 - \frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\alpha}_2}. \quad (4.33b)$$

En particular, la segunda de las ecuaciones (4.33a) proporciona la interpretación física de las constantes de separación $\boldsymbol{\alpha}_2$ como los momentos conservados \mathbf{p}_2 correspondientes a las coordenadas cíclicas \mathbf{q}_2 , por lo que es costumbre prescindir de ella y escribir directamente (4.30) en la forma

$$S = S_1(t, \mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_2, \quad (4.34)$$

con \mathbf{p}_2 constante. Nótese que las ecuaciones (4.33a) no contienen las coordenadas cíclicas \mathbf{q}_2 , por lo que una vez resueltas dichas ecuaciones el movimiento de las coordenadas cíclicas se determina sustituyendo en la ecuación (4.33b), es decir

$$\mathbf{q}_2 = \boldsymbol{\beta}_2 - \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{p}_2}. \quad (4.35)$$

Finalmente, si H es conservativo y además las coordenadas $\mathbf{q}_2 = (q_{m+1}, \dots, q_n)$ son cíclicas entonces buscamos la solución S de la ecuación de Hamilton–Jacobi en la forma

$$S = W(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_2 - Et, \quad (4.36)$$

donde ahora $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{p}_2)$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, E)$. La función W es una solución de la ecuación en derivadas parciales

$$H\left(\mathbf{q}_1, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_1}, \mathbf{p}_2\right) = E \quad (4.37)$$

que ha de satisfacer la condición de completitud

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q}_1 \partial \boldsymbol{\alpha}_1} \neq 0. \quad (4.38)$$

La solución de las ecuaciones del movimiento se escribe en este caso

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_1}(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{p}_2 = \text{const.}; \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}) = \beta_i \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (4.39a)$$

junto con

$$\frac{\partial W}{\partial E}(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}) = t - t_0, \quad \mathbf{q}_2 = \boldsymbol{\beta}_2 - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.39b)$$

Ejemplo 4.6. *Ecuación de Hamilton–Jacobi para un potencial central.*

El hamiltoniano del problema en coordenadas esféricas está dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r). \quad (4.40)$$

Se trata por tanto de un sistema conservativo en que la coordenada acimutal φ es cíclica. De acuerdo con la ec. (4.36), ensayamos una solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi²

$$S_t + \frac{1}{2m} \left(S_r^2 + \frac{S_\theta^2}{r^2} + \frac{S_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r) = 0 \quad (4.41)$$

de la forma

$$S = W(r, \theta; \alpha, E, p_\varphi) + p_\varphi \varphi - Et. \quad (4.42)$$

Sustituyendo (4.42) en (4.41) se obtiene la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo satisfecha por W :

$$W_r^2 + \frac{W_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} = 2m(E - V(r)), \quad (4.43)$$

que se puede escribir como sigue:

$$r^2(W_r^2 - 2mE + 2mV(r)) = - \left(W_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (4.44)$$

La forma de esta última ecuación sugiere separar las variables r y θ ensayando una solución de la forma

$$W = R(r) + \Theta(\theta), \quad (4.45)$$

donde, de nuevo, hemos omitido la dependencia de las funciones R y Θ de los parámetros (α, E, p_φ) . Sustituyendo esta expresión de W en la ec. (4.44) se obtiene

$$r^2(R'^2(r) - 2mE + 2mV(r)) = - \left(\Theta'^2(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \equiv -\alpha,$$

donde hemos tomado el parámetro α igual a la constante de separación. De esta forma hemos convertido la ecuación en derivadas parciales (4.44) en dos ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas para las funciones $R(r)$ y $\Theta(\theta)$, cuya integración es inmediata:

$$R(r) = \epsilon_1 \sqrt{2m} \int \sqrt{E - V(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}} dr, \quad (4.46a)$$

$$\Theta(\theta) = \epsilon_2 \int \sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta. \quad (4.46b)$$

(En las ecuaciones anteriores, ϵ_1 y ϵ_2 denotan dos signos arbitrarios e independientes entre sí.) Se puede comprobar que la solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi dada por las ecuaciones (4.42), (4.45) y (4.46) es completa. Una vez hallada una solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi, la solución general de las ecuaciones de Hamilton se obtiene directamente a partir de las ecuaciones (4.11), que en este caso proporcionan:

$$p_r = \frac{\partial R}{\partial r} = \epsilon_1 \sqrt{2m} \sqrt{E - V(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}}, \quad (4.47a)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = \epsilon_2 \sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (4.47b)$$

$$(p_\varphi = \text{const.}) \quad (4.47c)$$

²A partir de ahora, denotaremos frecuentemente mediante subíndices las derivadas parciales de las funciones S y W .

junto con

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} &= -\frac{\epsilon_1}{2} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m \left(E - V(r) - \frac{\alpha}{2mr^2} \right)}} \\ &+ \frac{\epsilon_2}{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}} = \beta, \end{aligned} \quad (4.48a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_\varphi} \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial p_\varphi} + \varphi = \varphi - \epsilon_2 p_\varphi \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}} = \varphi_0, \quad (4.48b)$$

y

$$\frac{\partial S}{\partial E} \equiv \frac{\partial R}{\partial E} - t = \epsilon_1 \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}}} - t = -t_0. \quad (4.49)$$

La ecuación (4.48a), que puede escribirse en la forma

$$\int^{1/r} \frac{du}{\sqrt{2m \left(E - V(1/u) - \frac{\alpha}{2m} u^2 \right)}} = \pm \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}}, \quad (4.50)$$

determina la relación funcional $r = r(\theta)$ a lo largo de las órbitas, mientras que (4.48b) proporciona la dependencia de φ en función de θ . Esta última ecuación se puede integrar elementalmente³, obteniéndose la relación

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \pm \frac{p_\varphi \cot \theta}{\sqrt{\alpha - p_\varphi^2}},$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el origen. De la ec. (4.47b) también se deduce que

$$\alpha = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = J^2.$$

Las ecuaciones (4.48b) y (4.50) son las ecuaciones de la órbita, mientras que (4.49), que puede escribirse

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{E - V(r) - \frac{J^2}{2mr^2}}{J^2}}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0),$$

determina la ley temporal del movimiento $r = r(t)$. Por ejemplo, si escogemos las coordenadas de modo que el movimiento tenga lugar en un plano vertical $\varphi = \varphi_0$ entonces $p_\varphi = 0$, y la ecuación (4.50) se reduce a la forma usual

$$J \int^{1/r} \frac{du}{\sqrt{2m \left(E - V(1/u) - \frac{J^2}{2m} u^2 \right)}} = \pm (\theta - \theta_0).$$

□

³Basta efectuar el cambio de variable $u = p_\varphi \cot \theta$.

4.4 Separación de variables en la ecuación de Hamilton–Jacobi

El método de separación de variables es uno de los procedimientos más sistemáticos y efectivos que se conocen para hallar una solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi (independiente del tiempo). De hecho, la solución de la ecuación (4.44) mediante el ansatz (4.45) es un caso particular de este método. También está relacionado con la separación de variables el procedimiento descrito en la sección anterior para simplificar la ecuación de Hamilton–Jacobi de un sistema conservativo o con variables cíclicas. La única desventaja del método de separación de variables es que no es válido para cualquier hamiltoniano, aunque es lo suficientemente flexible para que pueda ser aplicado a un gran número de sistemas físicos de interés.

Comenzaremos con un ejemplo muy sencillo (de hecho, trivial), en el que $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es el hamiltoniano de un sistema conservativo de n partículas en una dimensión que no interactúan entre sí, es decir

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n H_i(q_i, p_i). \quad (4.51)$$

La ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo tiene entonces la forma

$$\sum_{i=1}^n H_i\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E, \quad (4.52)$$

lo que sugiere ensayar soluciones W tales que cada derivada parcial $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ sea sólo función de la correspondiente coordenada q_i y de los n parámetros $\boldsymbol{\alpha}$, es decir

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} = 0, \quad \forall i \neq j,$$

lo cual implica que W es de la forma

$$W = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.53)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.52) se obtiene

$$\sum_{i=1}^n H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \boldsymbol{\alpha})\right) = E.$$

Es inmediato demostrar por inducción que esta igualdad sólo puede cumplirse si cada uno de los sumandos es una constante, que podemos identificar con la constante de separación α_i , es decir:

$$H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \boldsymbol{\alpha})\right) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n; \quad (4.54)$$

nótese que esto exige que

$$E = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad (4.55)$$

por lo que en este caso no es conveniente tomar α_n igual a E . Hemos reducido, por tanto, el problema de integrar las ecuaciones del movimiento del sistema al de resolver las n ecuaciones ordinarias desacopladas (4.54). Supongamos, por ejemplo, que

$$H_i(q_i, p_i) = \frac{p_i^2}{2m_i} + V_i(q_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

por lo que las ecuaciones (4.54) se escriben

$$\frac{1}{2m_i} \left(\frac{\partial W_i}{\partial q_i} \right)^2 + V_i(q_i) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.56)$$

Integrando estas ecuaciones obtenemos

$$W_i = \epsilon_i \sqrt{2m_i} \int \sqrt{\alpha_i - V_i(q_i)} dq_i \equiv W_i(q_i, \alpha_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde ϵ_i es un signo. La fórmula anterior permite expresar la solución general de las ecuaciones del movimiento mediante cuadraturas:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \epsilon_i \sqrt{2m_i} \sqrt{\alpha_i - V_i(q_i)}, \\ \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} t &= \beta_i \iff \epsilon_i \sqrt{\frac{m_i}{2}} \int \frac{dq_i}{\sqrt{\alpha_i - V_i(q_i)}} = t + \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

De hecho, esta expresión de la solución es la que se obtiene utilizando la integral primera $H_i = E_i$ para cada uno de los n sistemas conservativos unidimensionales de hamiltoniano $H_i(q_i, p_i)$. En particular, de estas ecuaciones se deduce que la constante de separación α_i no es otra cosa que la energía E_i de la i -ésima partícula.

Obsérvese también que los n hamiltonianos de una partícula $H_i(q_i, p_i)$ constituyen n integrales primeras (independientes del tiempo) funcionalmente independientes y están **en involución**, es decir satisfacen

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

El hamiltoniano (4.51) es por tanto *completamente integrable* en el sentido de la siguiente definición clásica, debida a Liouville:

Definición 4.7. Un sistema mecánico de hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ con n grados de libertad es **completamente integrable** si posee n integrales primeras $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ funcionalmente independientes *en involución*.

Se sobreentiende que las integrales primeras a las que hace referencia la definición anterior han de ser funciones definidas *globalmente*, es decir en todo el espacio de fases del sistema. Si no se impone esta restricción, todo sistema hamiltoniano sería completamente integrable, ya que por ejemplo las n coordenadas *locales* \tilde{q}_i (o \tilde{p}_i) construidas a partir de una solución completa $S(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ de la ecuación de Hamilton–Jacobi (cf. la ec. (4.9)) son integrales primeras del sistema y están en involución. Un teorema clásico del propio Liouville (completado en la década de los 50 por el matemático ruso V. Arnold) afirma que *la solución general de las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico completamente integrable se puede reducir a cuadraturas, si se conocen explícitamente n integrales primeras en involución*.

Ejemplo 4.8. Un tipo de hamiltoniano más general que (4.51) que se presenta muy frecuentemente en la práctica es

$$H = K(f_1(q_1, p_1), \dots, f_n(q_n, p_n)). \quad (4.57)$$

Por ejemplo, el hamiltoniano del ejemplo anterior es de esta forma, con

$$K(s_1, \dots, s_n) = s_1 + \dots + s_n.$$

Veremos a continuación que para este tipo de hamiltonianos es posible resolver la ecuación de Hamilton–Jacobi por separación de variables, de forma muy parecida a la del ejemplo anterior. En efecto, la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo es ahora

$$K\left(f_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \dots, f_n\left(q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right) = E. \quad (4.58)$$

La forma en que entran las derivadas parciales de W en esta ecuación sugiere, de nuevo, ensayar soluciones de la forma (4.53). Sustituyendo este tipo de soluciones en la ecuación anterior resulta

$$K\left(f_1\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}(q_1, \boldsymbol{\alpha})\right), \dots, f_n\left(q_n, \frac{\partial W_n}{\partial q_n}(q_n, \boldsymbol{\alpha})\right)\right) = E. \quad (4.59)$$

De nuevo, es evidente que se obtiene una solución de esta ecuación si cada una de las funciones $W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha})$ satisface la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.60)$$

siempre y cuando la energía E esté dada por

$$E = K(\boldsymbol{\alpha}). \quad (4.61)$$

Las ecuaciones (4.60) se pueden resolver fácilmente si es posible despejar explícitamente p_i de la ecuación implícita

$$f_i(q_i, p_i) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.62)$$

Nótese que esto es posible (localmente) si

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.63)$$

lo cual siempre ocurre si

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right) \neq 0$$

(ya que en caso contrario H no dependería del momento p_i). Si

$$p_i = \hat{p}_i(q_i, \alpha_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

es el resultado de despejar p_i de cada una de las ecuaciones (4.62), entonces (4.60) se convierte en

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \hat{p}_i(q_i, \alpha_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.64)$$

cuya solución es

$$W_i(q_i, \alpha_i) = \int \hat{p}_i(q_i, \alpha_i) dq_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.65)$$

En definitiva,

$$S = \sum_i \int \hat{p}_i(q_i, \alpha_i) dq_i - K(\alpha) t \quad (4.66)$$

es solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi (4.58). Al ser

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \alpha_j} \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

esta solución es completa si

$$\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \alpha_i} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Como

$$f_i(q_i, \hat{p}_i(q_i, \alpha_i)) = \alpha_i \implies \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \alpha_i} = 1, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.67)$$

las condiciones (4.63) garantizan que la solución (4.66) es completa. La solución general de las ecuaciones canónicas del hamiltoniano (4.57) obtenida a partir de la solución completa (4.66) de (4.58) es

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \hat{p}_i(q_i, \alpha_i), \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \int \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \alpha_i}(q_i, \alpha_i) dq_i - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i}(\alpha) t = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.68)$$

Utilizando las relaciones (4.62) y (4.67) se pueden expresar las últimas ecuaciones (4.68) en la forma más conveniente

$$f_i(q_i, p_i) = \alpha_i, \quad \int \frac{dq_i}{\frac{\partial f_i}{\partial p_i}(q_i, \hat{p}_i(q_i, \alpha_i))} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i}(\alpha) t + \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.69)$$

Nótese, en particular, que las n funciones $f_i(q_i, p_i)$ son integrales primeras (claramente en involución), y las constante de separación α_i son los valores que toman dichas integrales en el movimiento del sistema. En particular, de esto se deduce que el hamiltoniano (4.58) es completamente integrable. \square

Definición 4.9. En general, diremos que las m coordenadas $\mathbf{q}_1 = (q_1, \dots, q_m)$ son **separables** de las restantes coordenadas $\mathbf{q}_2 = (q_{m+1}, \dots, q_n)$ en la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo de un hamiltoniano conservativo $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ si dicha ecuación admite una solución completa de la forma

$$W = \sum_{i=1}^m W_i(q_i, \alpha) + W_{m+1}(\mathbf{q}_2, \alpha), \quad (4.70)$$

con $E = E(\alpha)$.

Por ejemplo, de la ecuación (4.36) se deduce que *las coordenadas cíclicas son siempre separables* ($W_i = \alpha_i q_i$ en este caso). Las m funciones W_i con $1 \leq i \leq m$ son solución de sendas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$F_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \alpha\right) = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.71)$$

donde las funciones F_i satisfacen la condición

$$\frac{\partial}{\partial p_i} F_i(q_i, p_i, \boldsymbol{\alpha}) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Esto hace que sea posible despejar (localmente) las derivadas $\frac{\partial W_i}{\partial q_i}$ de las ecuaciones (4.71), es decir

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \hat{p}_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}), \quad 1 \leq i \leq m,$$

y por tanto las funciones W_i con $1 \leq i \leq m$ se pueden calcular mediante cuadraturas:

$$W_i = \int \hat{p}_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) dq_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.72)$$

El problema de hallar una solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo se reduce por tanto en este caso al de determinar la función $W_{m+1}(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\alpha})$, que es solución de una ecuación en derivadas parciales de primer orden en las $n - m$ variables independientes \mathbf{q}_2 :

$$F_{m+1}\left(\mathbf{q}_2, \frac{\partial W_{m+1}}{\partial \mathbf{q}_2}, \boldsymbol{\alpha}\right) = 0.$$

Si las coordenadas (q_1, \dots, q_m) son separables, la solución general de las ecuaciones del movimiento tiene la forma

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \hat{p}_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) \iff F_i(q_i, p_i, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad 1 \leq i \leq m; \quad (4.73a)$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\partial W_{m+1}}{\partial \mathbf{q}_2}(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\alpha}) \iff F_{m+1}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (4.73b)$$

junto con

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_k}(\boldsymbol{\alpha}) t + \beta_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.74)$$

Nótese que las ecuaciones (4.74), que determinan la evolución temporal de las coordenadas \mathbf{q} , contienen tanto las coordenadas separables \mathbf{q}_1 como el resto de coordenadas. Por el contrario, de (4.73) se deduce que los momentos p_i con $1 \leq i \leq m$ son función sólo de las correspondientes coordenadas q_i (y de los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$), mientras que los momentos restantes \mathbf{p}_2 dependen sólo de las coordenadas \mathbf{q}_2 .

Ejercicio 8. Demostrar que en un hamiltoniano de la forma

$$H = K(f_1(q_1, p_1) \dots, f_m(q_m, p_m), f_{m+1}(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2))$$

las coordenadas (q_1, \dots, q_m) son separables. Probar también que en este caso las funciones W_i satisfacen las ecuaciones

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq m; \quad f_{m+1}\left(\mathbf{q}_2, \frac{\partial W_{m+1}}{\partial \mathbf{q}_2}\right) = \alpha_{m+1}$$

y

$$E = K(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}).$$

En particular, nótese que en este ejemplo

$$W_i \equiv W_i(q_i, \alpha_i), \quad 1 \leq i \leq m; \quad W_{m+1} \equiv W_{m+1}(\mathbf{q}_2, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n).$$

Definición 4.10. Si *todas* las coordenadas son separables (es decir, si $n = m$ en la definición anterior), la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo se denomina **completamente separable**. Equivalentemente, dicha ecuación es completamente separable si admite una solución de la forma

$$W = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha). \quad (4.75)$$

Por ejemplo, la ecuación de Hamilton–Jacobi de los hamiltonianos (4.51) y (4.57) tratados anteriormente es completamente separable. Por lo que acabamos de comentar (cf. las ecs. (4.72)), si la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo es separable admite una solución de la forma (4.75) que se puede calcular por cuadraturas. Por tanto, en este caso *la solución general de las ecuaciones del movimiento se puede reducir a cuadraturas*. Nótese, además, que en un sistema separable *cualquier* momento p_i es función sólo de su coordenada q_i y de (en general, todos) los parámetros α .

Ejercicio 9. Probar que la ecuación de Hamilton–Jacobi del hamiltoniano

$$H = g(f(q_1, p_1), q_2, p_2)$$

es completamente separable. Esto demuestra que no todos los hamiltonianos cuya ecuación de Hamilton–Jacobi es completamente separables son de la forma (4.57).

Ejemplo 4.11. La ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo para un potencial tridimensional de la forma $V \equiv V(r, \theta)$ en coordenadas esféricas se escribe

$$W_r^2 + \frac{W_\theta^2}{r^2} + \frac{W_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} + 2mV(r, \theta) = 2mE. \quad (4.76)$$

Dado que el ángulo acimutal φ es una coordenada cíclica, ensayamos soluciones de la forma

$$W = w(\theta, \varphi) + p_\varphi \varphi,$$

donde la constante p_φ es el momento canónico conjugado de la coordenada φ . Introduciendo esta solución en (4.76) obtenemos la siguiente ecuación para w :

$$r^2(w_r^2 - 2mE) + w_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} + 2mr^2V(r, \theta) = 0. \quad (4.77)$$

Esta ecuación es separable si y sólo si

$$r^2V(r, \theta) = f(r) + V_1(\theta),$$

es decir

$$V(r, \theta) = V_0(r) + \frac{V_1(\theta)}{r^2}. \quad (4.78)$$

Esta es pues la forma más general de un potencial tridimensional independiente de φ para el que la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo es separable.

Para un potencial de la forma anterior, (4.77) admite soluciones de la forma

$$w = R(r) + \Theta(\theta),$$

donde las funciones R y Θ satisfacen

$$r^2 \left(R'^2(r) - 2mE + 2mV_0(r) \right) = -\alpha,$$

$$\Theta'^2(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\text{sen}^2 \theta} + 2mV_1(\theta) = \alpha.$$

Por tanto

$$R(r) = \epsilon_1 \sqrt{2m} \int \sqrt{E - V_0(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}} \, dr,$$

$$\Theta(\theta) = \epsilon_2 \int \sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\text{sen}^2 \theta} - 2mV_1(\theta)} \, d\theta.$$

La solución general de las ecuaciones del movimiento está dada por (compárese con las ecuaciones (4.47)–(4.49))

$$p_r = \epsilon_1 \sqrt{2m} \sqrt{E - V_0(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}}, \quad (4.79a)$$

$$p_\theta = \epsilon_2 \sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\text{sen}^2 \theta} - 2mV_1(\theta)}, \quad (4.79b)$$

$$p_\varphi = \text{const.} \quad (4.79c)$$

junto con

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = -\frac{\epsilon_1}{2} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m \left(E - V_0(r) - \frac{\alpha}{2mr^2} \right)}} + \frac{\epsilon_2}{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\text{sen}^2 \theta} - 2mV_1(\theta)}} = \beta, \quad (4.80a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_\varphi} \equiv \frac{\partial \Theta}{\partial p_\varphi} + \varphi = \varphi - \epsilon_2 p_\varphi \int \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta \sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\text{sen}^2 \theta} - 2mV_1(\theta)}} = \varphi_0, \quad (4.80b)$$

y

$$\frac{\partial S}{\partial E} \equiv \frac{\partial R}{\partial E} - t = \epsilon_1 \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V_0(r) - \frac{\alpha}{2mr^2}}} - t = -t_0. \quad (4.81)$$

Nótese que en este caso la constante de separación α no representa el cuadrado del momento angular (que no se conserva para este tipo de potenciales), sino que (cf. la ec. (4.79b)) está dada por

$$\alpha = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\text{sen}^2 \theta} + 2mV_1(\theta) = J^2 + 2mV_1(\theta).$$

El hamiltoniano con potencial (4.78) es *completamente integrable*: en efecto, las tres funciones

$$f_1 = J^2 + 2mV_1(\theta), \quad f_2 = p_\varphi, \quad f_3 = H$$

son integrales primeras claramente en involución (pruébese esta última afirmación). \square

4.5 Teorema de integrabilidad de Liouville

Probaremos en esta sección que la solución general de cualquier sistema completamente integrable se puede expresar por cuadraturas (teorema de integrabilidad de Liouville). Nos basaremos para ello en el lema siguiente:

Lema 4.12. *Sean $P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ($1 \leq i \leq n$) n funciones funcionalmente independientes en un espacio de fases de dimensión $2n$. La condición necesaria y suficiente para que existan (localmente) otras n funciones $Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ($1 \leq i \leq n$) tales que (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) formen un sistema (local) de coordenadas canónicas es que $\{P_i, P_j\} = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Además, si se cumple la condición anterior las funciones Q_i se pueden calcular por medio de cuadraturas.*

Demostración. La necesidad de la condición anterior es evidente, ya que por definición las coordenadas (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) son canónicas si se cumple la ecuación (3.39) con $\lambda = 1$, es decir:

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Supongamos, por tanto, que las n funciones P_i están en involución. Para construir el resto de las coordenadas canónicas Q_i ($1 \leq i \leq n$), basta con hallar la función generatriz de la transformación canónica (propia) $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Al ser las funciones P_i ($1 \leq i \leq n$) funcionalmente independiente por hipótesis, podemos suponer sin pérdida de generalidad que (por ejemplo)

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right) \neq 0, \quad (4.82)$$

por lo que la transformación canónica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ es de tipo 2. Si $F(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ es su función generatriz, las ecuaciones de la transformación son (cf. la ecuación (3.24))

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}}. \quad (4.83)$$

Para que la primera de estas ecuaciones tenga solución (local) es necesario y suficiente que las funciones $p_i(\mathbf{q}, \mathbf{P})$, determinadas a partir de las ecuaciones

$$P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P})) = P_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.84)$$

cumplan las condiciones

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

En otras palabras, la matriz $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}$ ha de ser simétrica:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.85)$$

Para comprobar que esta condición se cumple derivamos parcialmente las ecuaciones (4.84) respecto de \mathbf{q} , obteniendo

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (4.86)$$

Por otra parte, al estar las n funciones P_i por hipótesis en involución se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right)^\top = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top.$$

Combinando esta identidad con (4.86) se obtiene inmediatamente

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right)^\top = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right)^\top,$$

de donde se deduce (4.85) en virtud de (4.82).

Al cumplirse la condición (4.85), la primera de las ecuaciones (4.83) se puede integrar por cuadraturas, obteniéndose así una función $F(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ (definida a menos de una función arbitraria de \mathbf{P}). Las n coordenadas canónicas restantes \mathbf{Q} se obtienen entonces a partir de esta función utilizando la segunda ecuación (4.83) (y están, por tanto, determinadas a menos del gradiente de una función arbitraria de \mathbf{P}). *Q.E.D.*

Teorema de integrabilidad de Liouville. *Si se conocen n integrales primeras funcionalmente independientes en involución de un sistema hamiltoniano de n grados de libertad, la solución general de las ecuaciones del movimiento se puede expresar en términos de cuadraturas.*

En otras palabras, la solución general de las ecuaciones del movimiento de un sistema hamiltoniano completamente integrable se puede expresar en términos de cuadraturas.

Demostración. Sean P_1, \dots, P_n las n integrales primeras funcionalmente independientes en involución del sistema. Aplicando el lema anterior podemos calcular por medio de cuadraturas n funciones Q_i tales que (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) es un sistema (local) de coordenadas canónicas. Dado que las funciones P_i son integrales primeras, si $\hat{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))$ es el hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ del sistema expresado en las coordenadas (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) (nótese que la transformación canónica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ es independiente del tiempo) entonces

$$0 = \dot{P}_i = \{P_i, \hat{H}\} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_i} \implies \hat{H} = \hat{H}(\mathbf{P}).$$

Las ecuaciones del movimiento en las coordenadas (\mathbf{Q}, \mathbf{P})

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{P}), \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{Q}} = 0$$

se integran por tanto de forma inmediata:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + t \frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{P}_0). \quad (4.87)$$

Q.E.D.

Ejemplo 4.13. El hamiltoniano de una partícula que se mueve bajo la acción de un potencial central $V(r)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r),$$

siendo (r, θ) coordenadas polares en el plano del movimiento. Este sistema es completamente integrable, siendo por ejemplo

$$P_1 = H, \quad P_2 = p_\theta$$

dos integrales primeras en involución. Para integrar las ecuaciones del movimiento por el método de Liouville, despejamos primero los momentos (p_r, p_θ) en función de (P_1, P_2) , obteniendo

$$p_r = \pm \sqrt{2m \left(P_1 - V(r) - \frac{P_2^2}{2mr^2} \right)}, \quad p_\theta = P_2. \quad (4.88)$$

Nótese que la posibilidad de despejar los momentos \mathbf{p} en función de (\mathbf{q}, \mathbf{P}) implica la condición (4.82). Por ejemplo, en este caso

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_r} & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

es distinto de cero si y sólo si $p_r \neq 0$ (cf. el doble signo en (4.88)). A continuación hallamos la función generatriz $F(r, \theta, P_1, P_2)$ integrando el sistema

$$\frac{\partial F}{\partial r} = p_r, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = p_\theta,$$

donde p_r y p_θ están dados por (4.88). De esta forma se obtiene (prescindiendo de una función arbitraria de (P_1, P_2) que, como sabemos, es irrelevante)

$$F = P_2 \theta \pm \sqrt{2m} \int \sqrt{P_1 - V(r) - \frac{P_2^2}{2mr^2}} dr.$$

Teniendo en cuenta que $\hat{H}(P_1, P_2) = P_1$, la solución general de las ecuaciones del movimiento está dada por

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{const.} \equiv E, & P_2 &= \text{const.} \equiv J; \\ Q_1 &= \frac{\partial F}{\partial P_1} = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{J^2}{2mr^2}}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_1} t = t, \\ Q_2 &= \frac{\partial F}{\partial P_2} = \theta \mp \frac{J}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{J^2}{2mr^2}}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_2} t = 0. \end{aligned}$$

□

Nótese que, en virtud de la primera de las ecuaciones (4.83), la función generatriz $F(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ de la transformación canónica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ se puede calcular mediante la fórmula

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}(\mathbf{q}, \mathbf{P})} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) d\mathbf{q}, \quad (4.89)$$

donde la integral de línea está extendida a cualquier curva que conecte un punto fijo del espacio de fases \mathbf{y}_0 con el punto $\mathbf{y}(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ (véase la figura (4.1)). El integrando de esta última ecuación es una forma diferencial cerrada en virtud de la ec. (4.85), por

lo que el miembro derecho de (4.89) es independiente de la curva escogida. Podemos aprovecharnos de esta propiedad para escribir dicha ecuación en la forma

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \int_{C(\mathbf{q}, \mathbf{P})} \mathbf{p} \, d\mathbf{q}, \quad (4.90)$$

donde $C(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ es cualquier curva enteramente contenida en una superficie n -dimensional $\mathbf{P} = \text{const.}$ que una un punto fijo $\mathbf{x}_0(\mathbf{P})$ de dicha superficie con el punto $\mathbf{y}(\mathbf{q}, \mathbf{P})$. En efecto, para ello basta elegir de forma suave un punto $\mathbf{x}_0(\mathbf{P})$ en cada superficie $\mathbf{P} = \text{const.}$, y notar que

$$\int_{y_0}^{\mathbf{y}(\mathbf{q}, \mathbf{P})} \mathbf{p} \, d\mathbf{q} = \int_{y_0}^{\mathbf{x}_0(\mathbf{P})} \mathbf{p} \, d\mathbf{q} + \int_{C(\mathbf{q}, \mathbf{P})} \mathbf{p} \, d\mathbf{q},$$

siendo el primer sumando una función de \mathbf{P} .

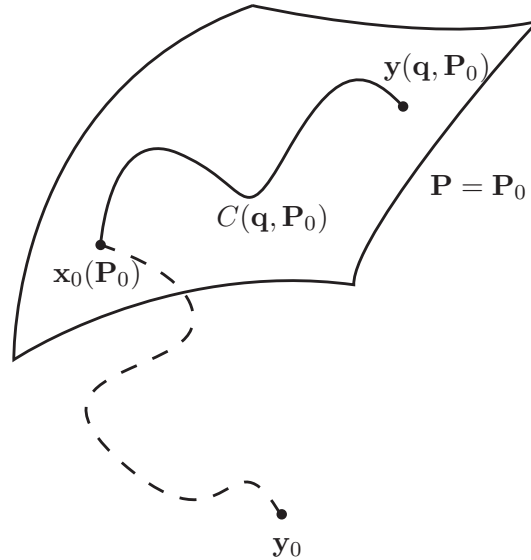


Figura 4.1: Definición de F mediante una integral de línea.

4.6 Variables acción-ángulo

Sean, como en la sección anterior, P_1, \dots, P_n n integrales primeras en involución de un sistema completamente integrable de n grados de libertad. Muchas veces ocurre que las superficies de nivel $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ son *compactas* (es decir, cerradas y acotadas, si el espacio de fases es un abierto de \mathbb{R}^{2n}). Así, en el Ejemplo 4.13 la superficie (bidimensional) $\mathbf{P} = (E, J)$ contenida en el espacio de fases de dimensión cuatro $(0, \infty) \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ es compacta si $V(r) = -k/r$ con $k > 0$ y $E < 0$. De hecho, en este caso dicha superficie es isomorfa al toro $T_2 = S_1 \times S_1$. En la década de los 60 el matemático ruso V. I. Arnold probó que este resultado es cierto en general:

Proposición 4.14 (Arnold). *Sean P_1, \dots, P_n funcionalmente independientes y en involución en un espacio de fases de dimensión $2n$. Si la superficie de nivel $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ es compacta, dicha superficie es isomorfa al toro n -dimensional $T_n = S_1^n$.*

Esquema de la demostración. Los campos de vectores hamiltonianos

$$X_i \equiv X_{P_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

son tangentes a la superficie $M_0 \equiv \{\mathbf{P} = \mathbf{P}_0\}$, ya que

$$X_i P_j = \{P_j, P_i\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Además, dichos campos son *completos* sobre M_0 , ya que dicha superficie es compacta. Al ser

$$[X_i, X_j] = -X_{\{P_i, P_j\}} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

los campos X_i generan un grupo de Lie *abeliano* n -dimensional $G \sim \mathbb{R}^n$ de transformaciones (canónicas) de M_0 . Se puede probar que (al ser $\dim M_0 = n = \dim G$) dicho grupo es *transitivo*, es decir que si fijamos un punto $\mathbf{y}_0 \in M_0$ para todo $\mathbf{y} \in M_0$ existe $g \in G$ tal que $\mathbf{y} = g(\mathbf{y}_0)$. En tal caso $M_0 \sim G/G_0$, siendo $G_0 = \{g \in G \mid g(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0\}$ el grupo de isotropía de \mathbf{y}_0 . Dado que las funciones P_i ($1 \leq i \leq n$) son funcionalmente independientes, podemos escoger $\mathbf{y}_0 \in M_0$ tal que el conjunto de vectores $\{X_1(\mathbf{y}_0), \dots, X_n(\mathbf{y}_0)\}$ sea linealmente independiente. Se demuestra entonces que G_0 es un grupo discreto de dimensión $k \leq n$, por lo que $M_0 \sim G/G_0 \sim \mathbb{R}^{n-k} \times T_k$. Pero el espacio $\mathbb{R}^{n-k} \times T_k$ es compacto si y sólo si $k = n$, y en tal caso $M_0 \sim T_n$. *Q.E.D.*

Si todas las superficies de nivel $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ de un sistema completamente integrable son compactas, lo natural es utilizar un sistema de coordenadas canónicas (φ, \mathbf{J}) de forma que los “momentos” J_i sean funciones sólo de \mathbf{P} , de modo que el vector \mathbf{J} etiquete los toros $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$, mientras que $\varphi_i \in [0, 2\pi)$ sea la i -ésima coordenada angular en cada uno de dichos toros. Este tipo de coordenadas se denominan **variables acción-ángulo**. La descripción del movimiento en estas variables es particularmente sencilla. En efecto, si $\hat{H}(\varphi, \mathbf{J})$ es la expresión del hamiltoniano H en las coordenadas (φ, \mathbf{J}) entonces

$$\dot{\mathbf{J}} = \{\mathbf{J}, \hat{H}\} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \varphi} = 0$$

implica que \hat{H} es función únicamente de las variables acción \mathbf{J} . Entonces las ecuaciones canónicas de Hamilton en las variables (φ, \mathbf{J}) son

$$\dot{\mathbf{J}} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{J}} \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}). \quad (4.91)$$

La solución general de estas ecuaciones es

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}_0) t. \quad (4.92)$$

En otras palabras, el movimiento en cada toro $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$ tiene lugar con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}_0)$.

Arnold demostró que las variables acción-ángulo existen para *cualquier* sistema completamente integrable con superficies de nivel $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ compactas. Para entender la génesis de este resultado, estudiaremos a continuación el caso más sencillo (aunque no del todo trivial) de un sistema con un grado de libertad.

4.6.1 Sistemas con un grado de libertad

Todo hamiltoniano independiente del tiempo con un grado de libertad es completamente integrable de forma trivial, ya que si $n = 1$ basta tomar $P_1 \equiv P = H(q, p)$. Si el hamiltoniano tiene la forma habitual

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

las superficies (curvas, en este caso) de nivel $H = E$ son todas compactas si, por ejemplo, el potencial satisface las condiciones $qV'(q) > 0$ si $q \neq 0$ y $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} V(q) = \pm\infty$ (cf. la Fig. 4.2).

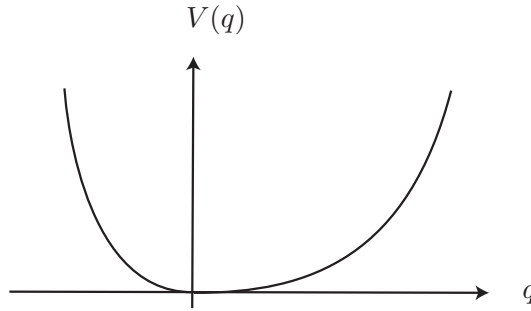


Figura 4.2: Potencial con curvas de nivel $H = E$ compactas para todo E .

En este caso

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m},$$

por lo que $(q, P) \equiv (q, E)$ forman un sistema de coordenadas sólo en los semiplanos $p > 0$ y $p < 0$. Más explícitamente, el momento $p(q, E)$ está dado por

$$p(q, E) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))} \equiv p_{\pm}(q, E). \quad (4.93)$$

Esta fórmula da lugar a dos expresiones $F_{\pm}(q, E)$ para la función generatriz $F(q, E)$, válidas en cada uno de los semiplanos $\pm p > 0$:

$$F_{\pm}(q, E) = \pm \sqrt{2m} \int \sqrt{E - V(q)} dq. \quad (4.94)$$

La expresión de la coordenada Q canónicamente conjugada con $P \equiv H$ es por tanto

$$Q_{\pm}(q, E) = \frac{\partial F_{\pm}}{\partial E} = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (4.95)$$

Para construir las variables acción-ángulo, tenemos que hallar en primer lugar una coordenada Q de tipo ángulo definida en cada curva de nivel $H = E$. Para ello basta con empalmar las dos expresiones Q_+ y Q_- de forma continua. Más precisamente, sean $q_1(E) < q_2(E)$ los dos *puntos de retroceso* de la órbita de energía E , es decir las dos raíces de la ecuación

$$V(q) = E$$

(véase la Fig. 4.2). Entonces podemos tomar

$$Q = \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_1(E)}^q \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}, & p > 0 \\ \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_1(E)}^{q_2(E)} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_2(E)}^q \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}, & p < 0. \end{cases} \quad (4.96)$$

De esta forma la coordenada Q está definida sobre toda la órbita, y es continua (diferenciable) en dicha órbita excepto en el primer punto de retroceso $(q_1(E), 0)$. Teniendo en cuenta que, por definición,

$$p(q_i(E), E) = 0,$$

es fácil comprobar que si y es un punto de la órbita $H = E$ entonces

$$Q(y, E) = \frac{\partial}{\partial E} \int_{(q_1(E), 0)}^y p dq, \quad (4.97)$$

donde la integral de línea está tomada a lo largo de la órbita recorrida en sentido horario (es decir, en el sentido del movimiento). El incremento de la coordenada Q al recorrer la órbita una vez en sentido horario a partir del punto inicial $(q_1(E), 0)$ es por tanto

$$\Delta Q = \frac{\partial}{\partial E} \oint_{H=E} p dq \equiv 2\pi J'(E), \quad (4.98)$$

donde la integral de línea

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{H=E} p dq \quad (4.99)$$

está extendida a la órbita recorrida en sentido horario, es decir

$$J(E) = \frac{\sqrt{2m}}{\pi} \int_{q_1(E)}^{q_2(E)} \sqrt{E - V(q)} dq. \quad (4.100)$$

Vemos por tanto que, aunque la coordenada Q es de tipo angular, su incremento al recorrer la órbita completa una vez no es igual a 2π y, además, dicho incremento depende de la órbita (es decir, de la energía E). Ambos inconvenientes se evitan reemplazando la coordenada Q por

$$\varphi = \frac{Q}{J'(E)}; \quad (4.101)$$

nótese que

$$J'(E) = \frac{\sqrt{2m}}{2\pi} \int_{q_1(E)}^{q_2(E)} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}} > 0.$$

La nueva coordenada φ y la energía (el hamiltoniano, en realidad) no forman ya un par de coordenadas canónicas, pues $\{\varphi, H\} \neq 1$ en general. Este problema se puede solucionar tomando como coordenada momento una función adecuada de H (evidentemente, cualquier función de H sigue siendo constante en las órbitas). En efecto,

$$\{\varphi, f(H)\} = \left\{ \frac{Q}{J'(H)}, f(H) \right\} = \frac{1}{J'(H)} \{Q, f(H)\} = \frac{f'(H)}{J'(H)} = 1$$

sin más que tomar $f = J$. En definitiva, para un sistema unidimensional con órbitas compactas las variables acción-ángulo (φ, J) están dadas por

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{H=E} p dq, \quad \varphi = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial}{\partial E} \int_{H=E} p dq. \quad (4.102)$$

En principio, la última integral está extendida a la porción de la órbita que une el punto de retroceso $(q_1(E), 0)$ con un punto cualquiera (q, p) de la órbita de energía E . Sin embargo, es evidente que si cambiamos el punto inicial $(q_1(E), 0)$ en cada órbita por un punto *fijo* cualquiera $\mathbf{x}_0(E)$ en dicha órbita la integral $\int_{H=E} p dq$ sólo varía en una función de E (la integral entre $(q_1(E), 0)$ y $\mathbf{x}_0(E)$ a lo largo de la órbita), lo cual afecta a la variable angular φ en la suma de una función únicamente de E . En otras palabras, el punto inicial en la integral $\int p dq$ en realidad puede tomarse arbitrariamente en cada órbita (mientras que varíe de forma suave al pasar de una órbita a otra), y su elección es equivalente a fijar el origen de los ángulos en cada órbita. Nótese también que la segunda ecuación se puede escribir

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial J} \int_{H=E(J)} p dq, \quad (4.103)$$

donde $E(J)$ es la función inversa de $J(E)$.

Ejercicio 10. Demostrar que la variable angular φ para un potencial como el de la Fig. 4.2 se puede tomar de la siguiente forma:

$$\varphi = \begin{cases} \pi \frac{\int_{q_1(E)}^q [E - V(s)]^{-1/2} ds}{\int_{q_1(E)}^{q_2(E)} [E - V(s)]^{-1/2} ds} \equiv \varphi_+(q, E), & p \geq 0 \\ 2\pi - \varphi_+(q, E), & p < 0. \end{cases} \quad (4.104)$$

Mientras que la variable angular φ es, por supuesto, adimensional, la variable J tiene dimensión de *acción*. Su interpretación geométrica es clara: por el teorema de Stokes, $J(E)$ es igual a $1/2\pi$ veces el área encerrada por la órbita $H = E$.

Ejercicio 11. Utilizando la interpretación anterior de J , probar que $J'(E) > 0$ para un potencial como el de la figura (4.2).

Al ser la transformación $(q, p) \mapsto (\varphi, J)$ canónica propia e independiente del tiempo, el hamiltoniano en las variables acción-ángulo es simplemente $E(J)$. Las ecuaciones del movimiento en las variables acción-ángulo son por tanto

$$\dot{J} = \{J, E(J)\} = 0, \quad \dot{\varphi} = \{\varphi, E(J)\} = E'(J). \quad (4.105)$$

Su solución general es

$$J = J_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega(J_0)t, \quad (4.106)$$

con

$$\omega(J) = E'(J) = 1/J'(E). \quad (4.107)$$

Ejercicio 12. Probar que la función generatriz de la transformación canónica (de tipo 2) $(q, p) \mapsto (\varphi, J)$ es

$$\hat{F}(q, J) = F(q, E(J)) = \int_{H=E(J)} p dq, \quad (4.108)$$

donde la integral de línea está extendida a la porción de la órbita de energía $E(J)$ que conecta un punto fijo de dicha órbita con el punto $(q, p(q, E(J)))$.

Ejemplo 4.15. *Variables acción-ángulo para el oscilador armónico.*

El hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2,$$

por lo que las curvas de nivel $H = E$ son elipses de semiejes $\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ y $\sqrt{2Em}$. Por tanto

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sqrt{2Em} = \frac{E}{\omega}. \quad (4.109)$$

Los puntos de retroceso son en este caso

$$q_1(E) = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = -q_2(E).$$

La coordenada angular φ está dada por

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial}{\partial J} \int p \, dq = \omega \frac{\partial}{\partial E} \int p \, dq = \omega \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{2m} \int_{q_1(E)}^q \sqrt{E - \frac{m\omega^2}{2}s^2} \, ds \\ &= \omega \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_1(E)}^q \frac{ds}{\sqrt{E - \frac{m\omega^2}{2}s^2}} = \frac{\pi}{2} + \arcsen \left(\sqrt{\frac{m}{2E}} \omega q \right), \quad p \geq 0. \end{aligned} \quad (4.110)$$

En este caso $\omega(J) = E'(J) = \omega$ es constante, y por tanto la solución general de las ecuaciones del movimiento es $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ y $J = \text{const.}$ En términos de la coordenada original q se obtiene la expresión usual

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos(\omega t + \alpha), \quad (4.111)$$

con $\alpha = \varphi_0 + \pi$. □

Ejemplo 4.16. Variables acción-ángulo para el potencial $V(q) = V_0 \csc^2(q/q_0)$.

Consideremos el potencial unidimensional

$$V(q) = V_0 \csc^2(q/q_0), \quad 0 < q_0 < \pi \quad (4.112)$$

(véase la Fig. 4.3).

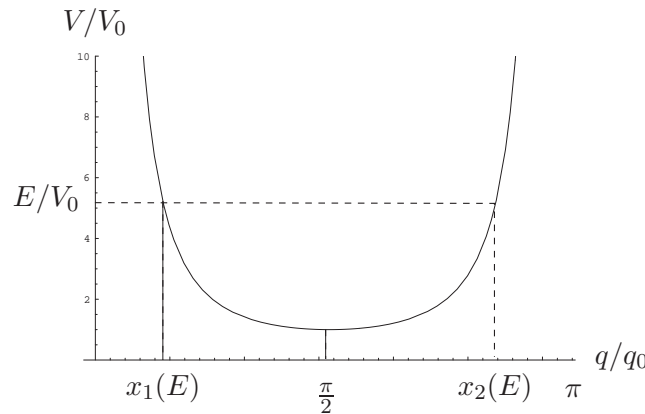


Figura 4.3: Potencial $V(q) = V_0 \csc^2(q/q_0)$.

Si $x = q/q_0$ y $\epsilon = V/V_0 \geq 1$, los puntos de retroceso $x_{1,2}(\epsilon)$ están dados por

$$x_1(\epsilon) = \arcsen(1/\sqrt{\epsilon}) \leq \frac{\pi}{2} \leq x_2(\epsilon) = \pi - \arcsen(1/\sqrt{\epsilon}). \quad (4.113)$$

Para lo que sigue es conveniente evaluar la siguiente integral:

$$I(q, E) = \int \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}} = \frac{q_0}{\sqrt{V_0}} \int \frac{dx}{\sqrt{\epsilon - \csc^2 x}} \equiv \frac{q_0}{\sqrt{V_0}} \hat{I}(x, \epsilon).$$

El cálculo de esta última integral no ofrece problemas:

$$\begin{aligned} \hat{I}(x, \epsilon) &= \int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\sqrt{\epsilon - 1 - \epsilon \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int^{\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \cos x} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{arc} \cos \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \cos x \right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$I(q, E) = \frac{q_0}{\sqrt{E}} \operatorname{arc} \cos \left(\sqrt{\frac{E}{E - V_0}} \cos x \right). \quad (4.114)$$

Calculemos, en primer lugar, la variable acción $J(E)$. Dado que

$$J'(E) = \frac{\sqrt{2m}}{2\pi} I(q, E) \Big|_{q_1(E)}^{q_2(E)}$$

y

$$\cos^2 x_i(E) = 1 - \frac{1}{\epsilon} \implies \cos x_1(E) = \sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}, \quad \cos x_2(E) = -\sqrt{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}$$

se tiene

$$J'(E) = \frac{q_0 \sqrt{2m}}{2\sqrt{E}}. \quad (4.115)$$

Para $E = V_0$ la órbita se reduce al punto $(\pi/2, 0)$, por lo que $J(V_0) = 0$. Integrando la ecuación anterior entre V_0 y E se obtiene finalmente

$$J(E) = q_0 \sqrt{2m} (\sqrt{E} - \sqrt{V_0}). \quad (4.116)$$

Nótese también que la frecuencia de las oscilaciones está dada por el recíproco de (4.115), es decir

$$\omega(E) = \frac{1}{q_0} \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (4.117)$$

La variable angular φ se calcula fácilmente a partir de las ecuaciones (4.114) y (4.115):

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial}{\partial E} \int p \, dq = \frac{\sqrt{2m}}{2J'(E)} \int \frac{dq}{E - V(q)} = \frac{\sqrt{E}}{q_0} \int \frac{dq}{E - V(q)} \\ &= \operatorname{arc} \cos \left(\sqrt{\frac{E}{E - V_0}} \cos x \right). \end{aligned} \quad (4.118)$$

La solución general de las ecuaciones del movimiento en la variable original q es por tanto

$$q = q_0 \operatorname{arc} \cos \left[\sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \cos \left(\sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{t}{q_0} + \varphi_0 \right) \right] \quad (4.119)$$

(nótese que $0 \leq \operatorname{arc} \cos x \leq \pi$). En otras palabras, $\cos x$ oscila con amplitud $\sqrt{1 - V_0/E}$ y frecuencia $\frac{1}{q_0} \sqrt{\frac{2E}{m}}$. \square

4.6.2 Sistemas completamente separables

Consideremos a continuación un sistema completamente separable (independiente de t) con n grados de libertad. Por definición, la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema posee la solución completa

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) - E(\boldsymbol{\alpha})t \quad (4.120)$$

Como vimos en la Sección 4.1, la función S es la función generatriz de la transformación canónica de tipo 1 $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta})$ a través de las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}; \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.121)$$

De lo anterior se sigue (componiendo con otra transformación canónica) que $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ son coordenadas canónicas, y que $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ es la función generatriz de tipo 2 de la transformación anterior a través de las ecuaciones (4.121). Las coordenadas canónicas $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son constantes del movimiento, ya que el hamiltoniano en estas coordenadas es idénticamente nulo al ser por hipótesis S solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi. De la primera de las ecuaciones (4.121) se sigue que si fijamos $\boldsymbol{\alpha}$ cada momento p_i depende únicamente de la coordenada correspondiente q_i a través de la ecuación

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.122)$$

Sea $C_i(\boldsymbol{\alpha})$ la curva trazada en el plano (q_i, p_i) al evolucionar las coordenadas (q_i, p_i) en el tiempo (es decir, la proyección de la trayectoria del sistema al plano (q_i, p_i)). *Supondremos en lo que sigue que todas estas curvas son cerradas para todo valor de $\boldsymbol{\alpha}$. Intentaremos en tal caso construir un sistema de coordenadas canónicas acción-ángulo $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, J_1, \dots, J_n) \equiv (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ de forma que:*

- $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha})$, de modo que las variables \mathbf{J} determinan las curvas $C_i(\boldsymbol{\alpha})$.
- Las coordenadas $\varphi_i \in [0, 2\pi)$ ($1 \leq i \leq n$) son variables angulares. Más concretamente, el incremento sufrido por dichas variables si se fija un punto en cada una de las curvas $C_i(\boldsymbol{\alpha})$ con $j \neq i$ y se recorre la curva $C_j(\boldsymbol{\alpha})$ una vez en sentido horario está dado por

$$\Delta\varphi_i = 2\pi \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (4.123)$$

Para construir las variables acción-ángulo empezamos definiendo, por analogía con el caso unidimensional, las variables acción $J_i(\boldsymbol{\alpha})$ por

$$J_i(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i(\boldsymbol{\alpha})} p_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) dq_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.124)$$

donde la integral está extendida a la curva $C_i(\boldsymbol{\alpha})$ recorrida una vez en sentido horario. Las n coordenadas (J_1, \dots, J_n) son independientes, esto es

$$\det \left(\frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j} \right) \neq 0.$$

En efecto, en virtud de la primera ecuación (4.121) se tiene

$$\frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i(\boldsymbol{\alpha})} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} dq_i,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
 \det \left(\frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j} \right) &= \sum_{j_1, \dots, j_n} \epsilon_{j_1, \dots, j_n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i(\alpha)} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \alpha_{j_i}} dq_i \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{C_1(\alpha) \times \cdots \times C_n(\alpha)} \left(\sum_{j_1, \dots, j_n} \epsilon_{j_1, \dots, j_n} \prod_{i=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \alpha_{j_i}} \right) dq_1 \cdots dq_n \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{C_1(\alpha) \times \cdots \times C_n(\alpha)} \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \alpha_j} \right) dq_1 \cdots dq_n, \tag{4.125}
 \end{aligned}$$

donde $\epsilon_{j_1, \dots, j_n}$ denota el signo de la permutación j_1, \dots, j_n . Al ser S una solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi, se verifica

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \alpha_j} \right) \neq 0.$$

Por tanto la integral (4.125) no se anula, ya que su integrando tiene signo constante.

Para construir las variables ángulo φ_i , definimos la función generatriz de tipo 2 $F(\mathbf{q}, \mathbf{J})$ mediante

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha(\mathbf{J})) \equiv \sum_{i=1}^n \hat{W}_i(q_i, \mathbf{J}), \tag{4.126}$$

de donde se obtiene

$$\varphi_i = \frac{\partial F}{\partial J_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{W}_k}{\partial J_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4.127}$$

En realidad, ocurre casi siempre que las funciones \hat{W}_k tienen dos expresiones distintas \hat{W}_k^\pm en cada uno de los semiplanos $\pm p_k > 0$, siendo $\hat{W}_k^- = -W_k^+$. Al igual que en el caso unidimensional, esto da lugar a 2^n expresiones distintas para φ_i :

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{W}_k^\pm}{\partial J_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4.128}$$

que deben ser empalmadas de forma adecuada para obtener una función φ_i definida en todo el plano (q_i, p_i) salvo en una cierta semirrecta. Al hacer esto obtenemos una expresión análoga a (4.97):

$$\varphi_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_{k=1}^n \int_{\hat{C}_k(\mathbf{J})} p_k dq_k, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4.129}$$

donde las integrales de línea están tomadas sobre las curvas $\hat{C}_k(\mathbf{J}) \equiv C_k(\alpha(\mathbf{J}))$ recorridas en sentido horario, partiendo de un punto fijo en cada una de dichas curva y finalizando en el punto variable $(q_k, p_k(q_k, \alpha(\mathbf{J})))$. La variación de la coordenada φ_i si fijamos un punto en cada una de las curvas $\hat{C}_k(\mathbf{J})$ con $k \neq j$ y recorremos una vez en sentido horario la curva $\hat{C}_j(\mathbf{J})$ está dada por

$$\Delta \varphi_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\hat{C}_j(\mathbf{J})} p_j dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} (2\pi J_j) = 2\pi \delta_{ij}. \tag{4.130}$$

Ejemplo 4.17. Variables acción-ángulo para el potencial de Kepler.

Consideremos el potencial central tridimensional $V(r) = -k/r$, con $k > 0$. Si (r, θ) (con $0 \leq \theta < 2\pi$) son coordenadas polares en el plano del movimiento, el hamiltoniano está dado por

$$H(r, \theta) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r). \quad (4.131)$$

Haciendo $p_\varphi = 0$ en el Ejemplo 4.6 se obtiene una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi de la forma (4.120), con⁴

$$W_r = \pm \int \sqrt{2m \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}, \quad W_\theta = l\theta. \quad (4.132)$$

La constante l (relacionada con la α del Ejemplo 4.6 mediante $\alpha = l^2$) es igual al valor del momento canónico conservado $p_\theta =$. Tomando los ejes de forma que $\dot{\theta} \geq 0$, podemos conseguir que $l = p_\theta = mr^2\dot{\theta} \geq 0$. En tal caso l es igual al valor del momento angular total (también conservado) del sistema. Las curvas de nivel $C_\theta(E, l)$ en el plano (θ, p_θ) están dadas por

$$p_\theta = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = l, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

y son cerradas al ser la variable θ de tipo angular. La variable acción J_θ es por tanto

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l d\theta = l. \quad (4.133)$$

Las curvas de nivel $C_r(E, l)$ tiene por ecuación

$$p_r = \frac{\partial W_r}{\partial r} = \pm \sqrt{2m} \sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}. \quad (4.134)$$

Para el potencial de Kepler, estas curvas son cerradas si y sólo si $E < 0$ (movimiento planetario). La variable acción J_r está dada por

$$J_r = 2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}, \quad (4.135)$$

donde $r_1(E, l) \leq r_2(E, l)$ son los dos puntos de retroceso, es decir las dos raíces de la ecuación

$$V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = E. \quad (4.136)$$

Aunque lo anterior es válido para cualquier potencial central, la integral (4.135) sólo se puede evaluar explícitamente en contados casos. Uno de ellos es el potencial de Kepler, donde (4.135) toma la forma

$$J_r = \frac{\sqrt{2m}}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{P(r)} dr, \quad (4.137)$$

siendo P el polinomio de segundo grado

$$P(r) = Er^2 + kr - \frac{l^2}{2m}. \quad (4.138)$$

⁴En este ejemplo, los subíndice r y θ no denotan derivación parcial.

Nótese que si $E < 0$ y

$$k^2 + \frac{2El^2}{m} \geq 0 \quad (4.139)$$

el polinomio P posee efectivamente dos raíces reales positivas⁵. El valor de la integral (4.137) es⁶

$$J_r = k \sqrt{\frac{m}{-2E}} - l = k \sqrt{\frac{m}{-2E}} - J_\theta. \quad (4.140)$$

La expresión del hamiltoniano en términos de las variables acción es por tanto

$$\hat{H}(J_r, J_\theta) = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta)^2}. \quad (4.141)$$

Una primera consecuencia importante de esta fórmula es que, al ser \hat{H} función de las variables acción sólo a través de su suma $J_r + J_\theta$, las dos frecuencias ω_r y ω_θ son iguales:

$$\omega_r = \frac{\partial \hat{H}}{\partial J_r} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial J_\theta} = \omega_\theta = -\frac{mk^2}{(J_r + J_\theta)^3} \equiv \omega. \quad (4.142)$$

De esto se deduce que *en el problema de Kepler todas las órbitas con $E < 0$ son cerradas*. El movimiento es *periódico en el tiempo*, con período $\tau = 2\pi/\omega$. Despejando $J_r + J_\theta$ en función de la energía mediante la ecuación (4.140) se obtiene

$$\omega = \frac{(-2E)^{3/2}}{k\sqrt{m}}, \quad (4.143)$$

que esencialmente es la tercera ley de Kepler.

Calculemos a continuación las variables ángulo φ_r y φ_θ . Utilizando las ecuaciones (4.128) se obtiene

$$\varphi_r = \frac{\partial \hat{W}_r}{\partial J_r} = \omega \frac{\partial W_r}{\partial E} = \pm \omega \sqrt{\frac{m}{2}} \int \left(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \right)^{-1/2} dr, \quad (4.144)$$

$$\begin{aligned} \varphi_\theta &= \frac{\partial \hat{W}_\theta}{\partial J_\theta} + \frac{\partial \hat{W}_r}{\partial J_\theta} = \theta + \left(\omega \frac{\partial}{\partial E} + \frac{\partial}{\partial l} \right) W_r \\ &= \theta \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \left(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \right)^{-1/2} \left(\omega - \frac{l}{mr^2} \right) dr. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Las integrales que aparecen en estas ecuaciones se pueden expresar en términos de funciones elementales:

$$\varphi_r = \pm \left[\arccos \left(\frac{k + 2Er}{\sqrt{k^2 + \frac{2El^2}{m}}} \right) - \frac{2\sqrt{-E}}{k} \sqrt{P} \right] \quad (4.146)$$

$$\varphi_\theta = \varphi_r + \theta \pm \arccos \left(\frac{k - \frac{l^2}{mr}}{\sqrt{k^2 + \frac{2El^2}{m}}} \right), \quad (4.147)$$

⁵La desigualdad anterior no es otra cosa que la condición de que la energía sea mayor o igual que el valor mínimo del potencial efectivo $-\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$.

⁶En general,

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{-Ar^2 + 2Br - C} dr = \pi \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right),$$

siendo A , B y C constantes positivas, $B^2 \geq AC$ y $0 < r_1 \leq r_2$ las dos raíces del polinomio bajo el radical.

donde el doble signo en ambas ecuaciones coincide con el signo de p_r .

De la ecuación (4.147) se obtiene inmediatamente la ecuación de las órbitas. En efecto, al ser $\omega_\theta = \omega_r$ la diferencia $\varphi_\theta - \varphi_r$ es constante en el movimiento, por lo que

$$k - \frac{l^2}{mr} = \sqrt{k^2 + \frac{2El^2}{m}} \cos(\theta - \theta_0),$$

que se puede escribir en la forma habitual

$$\frac{1}{r} = \frac{km}{l^2} (1 - e \cos(\theta - \theta_0)), \quad (4.148)$$

con

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (4.149)$$

La ley horaria del movimiento se obtiene, a su vez, de la ecuación (4.146). En efecto, si a es el semieje mayor de la órbita entonces

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = -\frac{k}{2E},$$

y por tanto (cf. la ecuación (4.138))

$$P(r) = (-Ea^2) \left[e^2 - \left(1 - \frac{r}{a} \right)^2 \right].$$

Definiendo la *anomalía excéntrica* $\psi \in [0, 2\pi)$ mediante

$$r = a(1 - e \cos \psi) \quad (4.150)$$

y utilizando la ecuación (4.146) para φ_r se obtiene la llamada *ecuación de Kepler*:

$$\omega(t - t_0) = \psi - e \sin \psi. \quad (4.151)$$

□