APUNTES DE ANÁLISIS FUNCIONAL

LUIS MARTÍNEZ ALONSO (curso 2011-2012)

Estas son las notas que entregué a lo largo de los cuatro meses, desde octubre hasta enero del curso 2011-2012, a mis estudiantes de *Análisis Funcional*. En ellas resumí lo que buenamente creí capaz de explicarles de acuerdo con lo que consideré importante y útil para sus estudios en asignaturas de física. Quiero agradecer a mis estudiantes, especialmente a Pablo Rodriguez Sanchez y a Hector Martínez Rodriguez, su ayuda en la corrección de diversos errores en la redacción de estos apuntes.

1.TEORÍA DE CONJUNTOS

Operaciones con conjuntos

Definición 1. *Dados dos conjuntos X_1 y X_2 se define*

- *Unión* $X_1 \cup X_2 = \{x\,\textit{que pertenecen a}\ X_1\ \textit{ó a}\ X_2\}$
- *Intersección* $X_1 \cap X_2 = \{x\,\textit{que pertenecen a ambos}\ X_1\ \textit{y}\ X_2\}$
- *Producto cartesiano* $X_1 \times X_2 = \{\textit{parejas ordenadas}\ (x_1, x_2)\ \textit{donde}\ x_1 \in X_1\ \textit{y}\ x_2 \in X_2\}$ *ó equivalentemente:*

$$X_1 \times X_2 = \{\textit{aplicaciones}\ x : \{1,2\} \to X_1 \cup X_2\ \textit{tales que}\ x(1) \in X_1\ \textit{y}\ x(2) \in X_2\}$$

Estas operaciones se generalizan a familias de conjuntos $\{X_a \mid a \in A\}$ no vacios indexadas mediante los elementos a de un conjunto cualquiera A no vacio.

- $\bigcup_{a\in A} X_a = \{$x que pertenecen a algún $X_a\}$
- $\bigcap_{a\in A} X_a = \{$x que pertenecen a la vez todos los X_a $\}$
- $\prod_{a\in A} X_a = \{$aplicaciones $x : A \to \bigcup_{a\in A} X_\alpha$ tales que $x(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in A\}$

El conjunto de Russell

- Hay muchos conjuntos cuyos elementos son a su vez también conjuntos.
- Es facil construir ejemplos elementales de este tipo como $X = \{\{1\}, \{1,2\}\}$,...
- Un ejemplo importante es el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de los subconjuntos de un conjunto X.
- En este curso veremos varios conjuntos de este tipo mucho más complicados.

Bertrand Russell introdujo el siguiente *conjunto*

$$R = \{\text{ conjuntos } X \text{ tales que no son elementos de ellos mismos } (X \notin X)\}.$$

Es facil pensar en conjuntos X que son elementos de R ($X \notin X$), pero no lo es encontrar conjuntos X que no sean elementos de R ($X \in X$). La pregunta es si $R \in R$ y obviamente la respuesta es que si y solo si $R \notin R$. Lo cual es una contradicción. Conclusión:

¡¡R no puede ser aceptado como conjunto!!

El axioma de elección

El axioma de elección: Dada una familia de conjuntos $\{X_a \mid a \in A\}$ no vacios indexada mediante un conjunto no vacio A, entonces existe alguna función (función de elección) :

$$x : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_a \text{ tal que } x(a) \in X_a \text{ para todo } a \in A.$$

De forma equivalente $\prod_{a \in A} X_a \neq \emptyset$.

- Introducido por Zermelo en 1904.
- En 1938 Gödel probó que este axioma no es contradictorio con los restantes axiomas de la teoría de conjuntos.
- En 1964 Cohen probó que este axioma no puede deducirse de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos.
- Aún no se sabe si los axiomas de la teoría de conjuntos están libres de contradicciones.

En este curso aceptamos el axioma de elección

Relaciones en conjuntos

Definición 2. *Una relación en un conjunto X es un subconjunto no vacio R de $X \times X$. Dados dos elementos $x, y \in X$ se dice que están relacionados (se indica como xRy) si $(x, y) \in R$. Una relación*

$R =\sim$ es de **equivalencia** *cuando satisface las propiedades*

1. *Reflexiva: $x \sim x$ para todo $x \in X$.*
2. *Simétrica: Dados $x, y \in X$ tales que $x \sim y$ entonces $y \sim x$.*
3. *Transitiva: Dados $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ é $y \sim z$ entonces $x \sim z$.*

La **clase de equivalencia** *de cada elemento $x \in X$ es el subconjunto $[x] = \{y \in X \,|\, y \sim x\}$. Dos clases $[x_i]$, $i = 1, 2$ o coinciden o son disjuntas dependiendo de si x_1 y x_2 estń relacionados o no. El conjunto de todas las clases de equivalencia se denota $X/\sim$ y se denomina conjunto cociente de X por la relación $\sim$:*

Una relación $R =\leq$ es de **orden** *cuando satisface las propiedades*

1. *Reflexiva: $x \leq x$ para todo $x \in X$.*

2. *Antisimétrica: Dados $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ é $y \leq x$ entonces $x = y$.*

3. *Transitiva: Dados $x, y, z \in X$ tales que $x \leq y$ é $y \leq z$ entonces $x \leq z$.*

En ese caso:

- Dado un subconjunto $A \subset X$ diremos que está **totalmente ordenado** si dados dos elementos cualesquiera $x, y \in A$, estos son siempre comparables. Es decir ó $x \leq y$ ó $y \leq x$.

- Dado un subconjunto $A \subset X$, diremos que un elemento $x_0 \in X$ es una cota superior de A si $x \leq x_0$ para todo $x_0 \in A$. Diremos que un elemento $x_0 \in A$ es un elemento maximal de A si no hay elementos más grandes que él en A (si $x \in A$ es tal que $x_0 \leq x$, entonces $x = x_0$).

Se demuestra el siguiente resultado fundamental:

Teorema 1. Lema de Zorn *Dada una relación de orden $(X, \leq)$ en un conjunto no vacio X, si todo subconjunto totalmente ordenado de X admite alguna cota superior entonces existen elementos maximales de X.*

Un par de definiciones más:

- Dado un subconjunto $A \subset X$, diremos que un elemento $x_0 \in A$ es el primer elemento de A si $x_0 \leq x$ para todo $x \in A$.

- Una relación de orden $(X, \leq)$ se dice que define una buena ordenación en el conjunto X si todo subconjunto $A \subset X$ posee un primer elemento.

Se demuestra también el siguiente resultado fundamental:

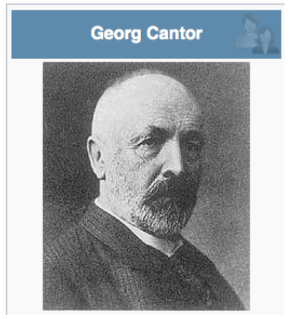
Teorema 2. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *El axioma de elección.*

2. *El lema de Zorn.*

3. *Dado un conjunto no vacio cualquiera X, siempre existe una buena ordenación en X.*

INFINITOS



Números cardinales

Definición 3. *Se dice que dos conjuntos A y B son* **equipotentes** *cuando existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$ entre ellos. En tal caso se dice que tienen el mismo número cardinal y se escribe $|A| = |B|$. Un conjunto X se dice que es un* **conjunto infinito** *cuando es equipotente a uno de sus subconjuntos propios $A \subset X$, $A \neq X$.*

Ejemplo 1. *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ es infinito dado que es equipotente al conjunto de los números naturales pares $\mathbb{N}_{pares} = \{0, 2, 4, \ldots\}$. Basta considerar la aplicación biyectiva*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{pares}, \quad f(n) = 2\,n.$$

Evitando utilizar el concepto de ”conjunto de todos los conjuntos” podemos probar que:

- La equipotencia define una relación de equivalencia entre conjuntos.
- Un número cardinal es una clase de equivalencia respecto de la relación de equipotencia.
- Los números naturales describen los números cardinales de los conjuntos finitos:

$$|\emptyset| = 0, \quad |\{a\}| = 1, \quad |\{a, b\}| = 2, \ldots.$$

- Debido a la presencia de conjuntos infinitos, existen números cardinales que no son representados por números naturales. Por ejemplo $|\mathbb{N}|$, $|\mathbb{R}|, \ldots$

Definición 4. *Dados dos números cardinales $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$, se dice que $\alpha \leq \beta$ cuando existe una aplicación inyectiva $f : A \to B$.*

Se comprueba que:

- La definición es independiente de los representantes A y B de los cardinales α y β.
- La definición establece una relación de orden entre los números cardinales. Ademas es una relación de **orden total**. Es decir, dados dos números cardinales α y β

$$\alpha \leq \beta \text{ ó } \beta \leq \alpha \ .$$

- No hay un número cardinal maximal debido al **teorema fundamental de Cantor**: Dado cualquier conjunto X su cardinal es estrictamente menor que el del conjunto $\mathcal{P}(X)$ de sus subconjuntos:

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

- El cardinal $|\mathbb{N}|$ de los números naturales es el primer cardinal infinito, no existe ningún otro más pequeño, y se denota $\aleph_0$ (**aleph-0**). Por definición un conjunto A se dice que es **infinito numerable** si $|A| = \aleph_0$. Es decir, si existe una aplicación biyectiva

$$f : \mathbb{N} \to A.$$

La potencia del continuo

El cardinal $|\mathbb{R}|$ de los números reales es también un cardinal infinito y se denota c (la **potencia del continuo**). Podemos probar que

$$c > \aleph_0, \tag{1}$$

es decir que $\mathbb{R}$ no es numerable, siguiendo un famoso método debido a Cantor. En primer lugar tenemos que el intervalo abierto $(0, 1)$ es equipotente al conjunto de todos los reales $\mathbb{R}$ pues basta representar la aplicación siguiente

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

para ver que es biyectiva. Por tanto

$$|\mathbb{R}| = |(0,1)|. \tag{2}$$

Veamos ahora que

$$\aleph_0 < |(0,1)|. \tag{3}$$

Supogamos que no fuera así. Es decir que el intervalo $(0, 1)$ fuera numerable. Entonces existiría una aplicación biyectiva

$$f : \mathbb{N} \to (0,1).$$

Por tanto el conjunto $(0, 1)$ se reduciría a la sucesión $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ donde $r_n = f(n)$

$$(0,1) = \{r_0, r_1, r_2, \ldots\}. \tag{4}$$

Para ver que esto no es posible consideremos la representación decimal de los números r_n

$$\begin{aligned}
&r_0 = 0, a_0^{(0)} a_0^{(1)} a_0^{(2)} a_0^{(3)} \cdots \\
&r_1 = 0, a_1^{(0)} a_1^{(1)} a_1^{(2)} a_1^{(3)} \cdots \\
&r_2 = 0, a_2^{(0)} a_2^{(1)} a_2^{(2)} a_2^{(3)} \cdots \\
&\cdots\cdots \\
&r_n = 0, a_n^{(0)} a_n^{(1)} a_n^{(2)} a_n^{(3)} \cdots \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

donde los números $a_i^{(j)}$ son dígitos decimales $0, 1, 2, \ldots, 9$. Construyamos ahora un número $x \in (0, 1)$

$$x = 0, x_0 x_1 x_2 x_3 \cdots ,$$

tomando sus dígitos decimales de forma que (**diagonal de Cantor**)

$$x_n \neq a_n^{(n)}, \forall n. \tag{5}$$

Este número x no está en la sucesión $(r_n)_{n=0}^{\infty}$, pues debido a (5) es distinto de cada r_n (su cifra n-ésima es diferente de la cifra n-ésima de r_n). LLegamos así a una contradicción con (4), lo cual demuestra que nuestra hipótesis de que el intervalo $(0, 1)$ es numerable es falsa. De esta forma se cumple (3) y como consecuencia hemos probado (1).

Otro de los resultados fundamentales de la teoría de números cardinales es la igualdad

Teorema 3.

$$c = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \tag{6}$$

Operaciones con números cardinales

Definición 5. *Dados dos números cardinales α y β su suma se define como:*

$$\alpha + \beta = |A \cup B|,$$

siendo A y B conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$.

Se pueden demostrar las propiedades siguientes de la suma de números cardinales:

1. Conmutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

2. Asociativa: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

3. $\alpha \leq \alpha + \beta$ para todo β.

4. Si α es un cardinal infinito y $\beta \leq \alpha$ entonces $\alpha + \beta = \alpha$.

Ejemplo 2. *El cardinal del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es $\aleph_0$:*

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Para demostrarlo basta ver que obviamente los cardinales de los conjuntos $\mathbb{Z}_+$ de números enteros positivos ($x \geq 0$), y $\mathbb{Z}_-$ de números enteros negativos ($x < 0$) es $\aleph_0$. Entonces, usando la propiedad 4 deducimos:

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-| = |\mathbb{Z}_+| + |\mathbb{Z}_-| = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Ejemplo 3. *El cardinal del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es también $\aleph_0$:*

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0. \tag{7}$$

Basta ver que la aplicación

$$f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}, \quad f(n/m) = 2^n\, 3^m,$$

donde $\mathbb{Q}_+$ es el conjunto de números racionales positivos $n/m \geq 0$ en forma de fracción irreducible , es inyectiva. Por tanto

$$|\mathbb{Q}_+| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0,$$

y obviamente

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-| = |\mathbb{Q}_+| + |\mathbb{Q}_-| \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Entonces dado que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ se tiene también que $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$, así que se verifica (7).

Definición 6. *Dados dos números cardinales α y β su producto se define como:*

$$\alpha\beta = |A \times B|,$$

siendo A y B conjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$.

Se pueden demostrar las propiedades siguientes del producto de números cardinales:

1. Conmutativa: $\alpha\beta = \beta\alpha$.

2. Asociativa: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

3. $\alpha \leq \alpha\beta$ para todo $\beta \geq 1$.

4. Si α es un cardinal infinito y $\beta \leq \alpha$ entonces $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

Ejemplo 4. *Utilizando estas propiedades y teniendo en cuenta que*

$$A^n = A^{n-1} \times A,$$

es inmediato probar que

$$|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{Z}^n| = \aleph_0, \quad |\mathbb{R}^n| = c, \quad |\mathbb{C}^n| = |\mathbb{R}^{2n}| = c.$$

Definición 7. *Dados dos números cardinales α y β se define:*

$$\alpha^\beta = |\{\textit{aplicaciones } f : B \to A\ \}|$$

siendo A y B conjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$.

Se pueden demostrar las propiedades siguientes de la operación de exponenciación:

1. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$.
2. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.
3. $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$.
4. Si $\beta_1 \leq \beta_2$ entonces $\alpha^{\beta_1} \leq \alpha^{\beta_2}$ para todo $\alpha \geq 1$.
5. Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ entonces $\alpha_1^\beta \leq \alpha_2^\beta$.

Ejemplo 5. *Veamos que para todo conjunto X*

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}. \tag{8}$$

Existe una correspondencia biyectiva $A \to f_A$ entre $\mathcal{P}(X)$ y el conjunto $\{\textit{aplicaciones } f : X \to \{0,1\}\}$ pues basta asociar a cada subconjunto $A \subset X$ la aplicación

$$f_A : X \to \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 \ \textit{si } x \in A \\ 0 \ \textit{si } x \notin A. \end{cases}$$

De esta forma

$$|\mathcal{P}(X)| = |\{\textit{aplicaciones } f : X \to \{0,1\}\}| = |\{0,1\}|^{|X|} = 2^{|X|}.$$

En vista de la identidad (8) tenemos que

- Para todo cardinal α se verifica que $\alpha < 2^\alpha$.
- $c = 2^{\aleph_0}$.

Ejemplo 6. *Veamos que*

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{9}$$

Basta considerar la cadena de desigualdades siguiente

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Ejemplo 7. *Otra identidad interesante es*

$$\aleph_0\, 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph}_0, \tag{10}$$

que se deduce de la cadena de desigualdades siguiente

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

o bién utilizar la propiedad 4 del producto de cardinales, dado que $2^{\aleph_0} = c > \aleph_0$.

La hipótesis del continuo

Una pregunta que surge de manera natural es si existe algún cardinal entre $\aleph_0$ y c

Hipótesis del continuo: No existe ningún cardinal α tal que $\aleph_0 < \alpha < c$

- Se deduce del axioma de elección.
- Como consequencia, dado que c es el siguiente infinito trás $\aleph_0$, la potencia del continuo se denota también como **aleph-1**
$$c = \aleph_1.$$

Hipótesis del continuo generalizada: Para todo cardinal infinito λ no existe ningún cardinal α tal que $\lambda < \alpha < 2^\lambda$

- Esta hipótesis también resulta ser compatible con los axiomas de la teoría de conjuntos , aunque no se deduce como consecuencia del axioma de elección.
- De la hipótesis del continuo generalizada se deduce el axioma de elección.

Como consecuencia de la hipótesis del continuo generalizada, partiendo del primer infinito $\aleph_0$ podemos generar toda una secuencia de infinitos $\aleph_{k+1} = 2^{\aleph_k}$ ordenada de menor a mayor y sin huecos entre ellos

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots, \quad \textbf{serie transfinita de alephs}. \tag{11}$$

Ejemplo 8. *Un ejemplo típico de espacio funcional es*

$$\mathcal{F} = \{\textit{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}.$$

Su cardinal correspondiente se calcula en la forma siguiente:

$$|\mathcal{F}| = |\mathbb{C}|^{|\mathbb{R}|} = c^c = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2. \tag{12}$$

Ejemplo 9. *El conjunto $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios de una variable real*

$$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0,$$

posee una correspondencia biyectiva con el conjunto de sucesiones de números reales $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ con solo un número finito de elementos no nulos. Luego el cardinal de $\mathbb{R}[x]$ es meor o igual que el del conjunto de todas las sucesiones que a su vez puede representarse como

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\textit{funciones } f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}.$$

De esta forma:

$$|\mathbb{R}[x]| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c.$$

Por otro lado $|\mathbb{R}[x]| \geq c$, pues el conjunto de polinomios constantes es equipotente a $\mathbb{R}$ y forma un subconjunto de $\mathbb{R}[x]$. En definitiva

$$|\mathbb{R}[x]| = c.$$

2. LA INTEGRAL DE LEBESGUE

Limitaciones de la integral de Riemann

- Solo son integrables Riemann funciones "casi continuas".
- Los intercambios con la operación de límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

  solo son ciertos bajo condiciones muy fuertes (convergencia uniforme...).
- Como consecuencia los espacios naturales de funciones integrables Riemann del tipo

$$\mathcal{L}^p = \{\text{funciones } \ f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ tales que } \textstyle\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x \text{ es finita } \},$$

  tienen una estructura deficiente.

El conjunto de Borel de $\mathbb{R}^N$

En $\mathbb{R}^N$ hay subconjuntos muy complicados , para definir un buen concepto de integral necesitamos selecionar una clase de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ que sean a la vez suficientemente generales y sencillos. Para ello podemos partir de los intervalos abiertos $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_N, b_N)$ y mediante operaciones sencillas (complementación, unión) formar dicha clase.

Definición 8. *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Es decir los elementos de $\mathcal{F}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^N$. Se dice que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$ cuando*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $X \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{X} \in \mathcal{F}$.
3. *Para toda familia infinita numerable $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{F}$*

$$\cup_{n\geq 1} X_n \in \mathcal{F}.$$

El propio conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es obviamente una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$.

Ejemplo 10. *Como consecuencias inmediatas se deduce que*

- $\mathbb{R}^N \in \mathcal{F}$
- *Para toda familia infinita numerable* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *de elementos de* $\mathcal{F}$

$$\cap_{n\geq 1} X_n \in \mathcal{F}.$$

Basta usar que $\overline{\emptyset} = \mathbb{R}^N$ *y que* $\overline{\cup_{n\geq 1} X_n} = \cap_{n\geq 1} \overline{X_n}$.

Ejemplo 11. *La intersección de σ-álgebras $\mathcal{F}_a$, $(a \in A)$ de $\mathbb{R}^N$*

$$\cup_{a\in A} \mathcal{F}_a,$$

es también una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$.

Definición 9. *Se define el conjunto de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ como la intersección de todas las σ-álgebras $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^N$ que contienen a la topología τ de $\mathbb{R}^N$ (τ es el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ formado por los abiertos de $\mathbb{R}^N$)*

$$\mathcal{B} = \cap_{\mathcal{F}\supset\tau} \mathcal{F}.$$

Los elementos de $\mathcal{B}$ se denominan conjuntos **Borelianos** *de $\mathbb{R}^N$.*

Se demuestran inmediatamente las siguientes propiedades

1. $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra de $\mathbb{R}^N$.
2. Los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^N$ son elementos de $\mathcal{B}$.
3. Toda unión o intersección numerable de elementos de $\mathcal{B}$ es un elemento de $\mathcal{B}$.
4. Todo conjunto finito o infinito numerable de puntos de $\mathbb{R}^N$ es un elemento de $\mathcal{B}$.

Ejemplo 12. *Sean los subconjuntos de $\mathbb{R}$*

$$A = \{\textit{números racionales en } [a,b]\ \}, \quad B = \{\textit{números irracionales en } [a,b]\ \}.$$

El conjunto A es Boreliano por ser un conjunto numerable. En cuanto a B también lo es ya que

$$B = \overline{A} \cap [a,b].$$

Medida de Borel en $\mathbb{R}^N$

Queremos definir el concepto de *medida* de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ (longitud en $\mathbb{R}$, área en $\mathbb{R}^2$, volumen en $\mathbb{R}^3$,...). No es posible hacerlo de una forma aceptable para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, pero sí lo es para los pertenecientes al conjunto de Borel.

Definición 10. *Comenzamos definiendo la medida de intervalos abiertos*

$$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_N, b_N)$$

de $\mathbb{R}^N$ *con* $b_i \geq a_i$ *en la forma usual:*

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^{N} |b_i - a_i|.$$

Definimos la noción de medida para un Boreliano B *cualquiera de* $\mathbb{R}^N$ *considerando sus recubrimientos mediante teselaciones de intervalos abiertos (familias numerables de intervalos abiertos* $\mathbb{T} = \{I_n\}_{n\in A}$ *tales que* $B \subset \cup_{n\in A} I_n$*)*

$$\mu(B) = Inf\{\textstyle\sum_{n\in A} \mu(I_n) \text{ tal que } \mathbb{T} = \{I_n\}_{n\in A} \text{ es una teselación que recubre a } B\}.$$

Es decir $\mu(B)$ *representa la "menor" de las medidas de tales recubrimientos.*

Teorema 4. *La noción de medida posee las siguientes propiedades:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) *Para toda familia infinita numerable* $\{B_n\}_{n\geq 1}$ *de Borelianos disjuntos dos a dos*

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

c) *Para todo Boreliano* B

$$\mu(B) = Sup\{\mu(K) \text{ tal que } K \text{ es compacto y } K \subset B\} = Inf\{\mu(A) \text{ tal que } A \text{ es abierto y } B \subset A\}.$$

Ejemplo 13. *Dados Borelianos* $B_1 \subset B_2$

$$\mu(B_1) \leq \mu(B_2).$$

dado que es la unión de dos Borelianos disjuntos

$$B_2 = B_1 \cup (B_2 - B_1), \quad B_2 - B_1 = \overline{B_1} \cap B_2.$$

Así que

$$\mu(B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2 - B_1) \geq \mu(B_1).$$

Ejemplo 14. *Una propiedad muy importante es :*

$$B \text{ finito o infinito numerable} \Longrightarrow \mu(B) = 0.$$

Para demostrarlo vemos en primer lugar que si B tiene un único punto $B = \{b\}$ podemos tomar recubrimientos de B con un solo intervalo $I(\epsilon)$ de lado $\epsilon > 0$ arbitrario. Por tanto

$$\mu(B) \leq \mu(I(\epsilon)) = \epsilon^N, \quad \forall \epsilon > 0,$$

Luego $\mu(B) = 0$. Para los restantes casos $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ usamos la propiedad b) de la medida (Teorema 4)

$$\mu(B) = \sum_{n \geq 1} \mu(\{b_n\}) = \sum_{n \geq 1} 0 = 0.$$

Definición de integral de Lebesgue

Sea $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}^N$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una **función positiva** $f(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Recordemos el concepto de integral de Riemann

$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x. \tag{13}$$

Para construir la integral en el sentido de Riemann se toman **particiones del dominio I de f**

$$I = \cup_{i=1}^n I_i,$$

en n intervalos con medida no nula $\mu(I_i) > 0$ y solapamientos con medida cero $(\mu(I_i \cap I_j) = 0\, i \neq j)$, se toma un punto arbitrario $x_i \in I_i$ en cada uno de ellos y se forma la suma de Riemann

$$R(\{I_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\, \mu(I_i).$$

La integral de Riemann se define cuando el límite $n \to \infty$ de cualquier sucesión de sumas de Riemann,en el que se supone que la medida de los miembros I_i de las particiones tiende a cero,existe y es el mismo valor finito independiente de la sucesión elegida. En ese caso se toma

$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x = \lim_{n \to \infty} R(\{I_i^{(n)}\}_{i=1}^n, \{x_i^{(n)}\}_{i=1}^n). \tag{14}$$

Sin embargo para construir la integral en el sentido de Lebesgue se toman **particiones de un intervalo $[m, M]$ de $\mathbb{R}$ que contenga al recorrido de f**

$$[m, M] = [m_0, m_1] \cup [m_1, m_2] \cup \ldots \cup [m_{n-1}, m_n], \quad m_0 = m < m_1 < m_2 < \ldots < m_n = M,$$

se toma un punto arbitrario $y_i \in [m_{i-1}, m_i]$ en cada uno de ellos y se forma la suma de Lebesgue

$$L(\{m_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n y_i\, \mu(f^{-1}([m_{i-1}, m_i])).$$

Si existe el límite cuando $n \to \infty$ de cualquier sucesión de estas sumas, en que todas las longitudes de los intervalos $[m_{i-1}, m_i]$ deben tender a cero, y es el mismo valor finito independientemente de la elección de los puntos y_i entonces la integral de Lebesgue se define como dicho límite

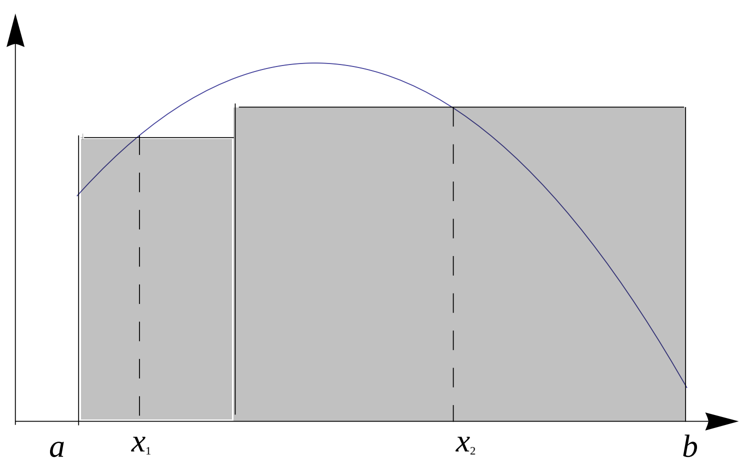
$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x = \lim_{n\to\infty} L(\{m_i^{(n)}\}_{i=1}^n, \{y_i^{(n)}\}_{i=1}^n), \tag{15}$$

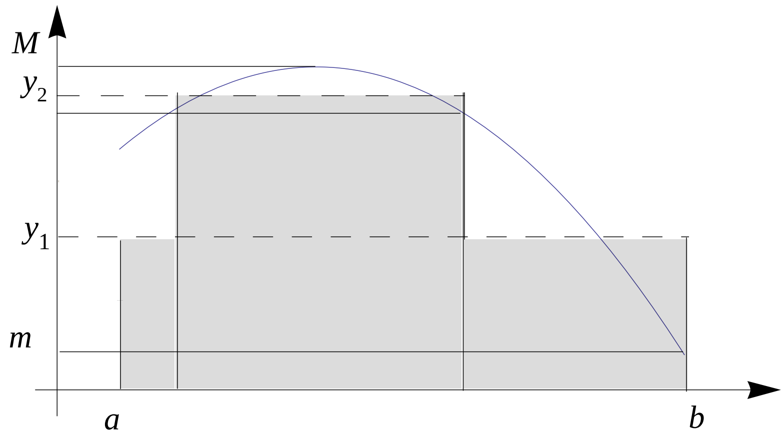
- Los dos conceptos son procedimientos distintos de medir lo mismo. Es como si para determinar el valor de una fila de distintas monedas seguimos los siguientes dos procedimientos.

  (Riemann) Vamos recorriendo la fila de monedas desde la primera a la última y vamos sumando los valores de cada moneda.

  (Lebesgue) Vemos que valores aparecen en la fila de monedas y vamos sumando los términos dados por cada valor multiplicado por el número de monedas con ese valor.

- Sin embargo el procedimiento de Lebesgue es mucho mejor pues permite integrar más funciones que el de Riemann.





Ejemplo 15. *Para funciones* **simples** *(aquellas que solo toman un número finito de valores sobre su dominio)*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{b} y_i \, \chi_{B_i}(x), \quad B_i = f^{-1}(y_i).$$

La integral de Lebesgue se reduce obviamente a

$$\int_I s(x) \, \mathrm{d}^N x = \sum_{i=1}^{p} y_i \, \mu(B_i). \tag{16}$$

Puede probarse que la integral de Lebesgue de una función positiva, que incluso puede tener singularidades en un conjunto de medida nula, $f : I \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ es dada por

$$\int_I f(x) \, \mathrm{d}^N x = Sup\{\int_I s(x) \, \mathrm{d}^N x \text{ con } s = s(x) \text{ simple y tal que } 0 \leq s \leq f\} \tag{17}$$

Ejemplo 16. *Un ejemplo de función que no es integrable Riemann pero si es integrable Lebesgue es la llamada función de Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida en la forma siguiente*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es un número racional en } [0,1] \\ \\ 1 \text{ si } x \text{ es un número irracional en } [0,1]. \end{cases}$$

Adviértase que f es una función simple:

$$f(x) = \chi_B(x), \quad B = \{\text{números irracionales en } [0,1]\}. \tag{18}$$

Veamos que f no es integrable Riemann. Para ello consideremos una partición cualquiera $[0,1] = \cup_{i=1}^n I_i$ del dominio $[0,1]$ de f. Cada intervalo I_i contiene siempre números racionales e irracionales, independientemente de su medida. Por tanto siempre podemos formar , en particular, sumas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \mu(I_i),$$

en que todos los puntos x_i son números racionales (caso 1) o en que todos los puntos x_i son números irracionales (caso 2). En cada caso tenemos que

$$f(x_i) = \begin{cases} 0,\ \forall i = 1, \ldots, n \text{ (caso 1)} \\ 1,\ \forall i = 1, \ldots, n \text{ (caso 2)}. \end{cases}$$

Así se obtiene que las sumas de Riemann correspondientes son

$$R(\{I_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n 0 \cdot \mu(I_i) = 0 \text{ (caso 1)} \\ \\ \sum_{i=1}^n 1 \cdot \mu(I_i) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i) = \mu([0,1]) = 1 \text{ (caso 2)}. \end{cases}$$

Luego está claro que el límite (14) no existe.

Por otro lado el recorrido de f está formado por los dos números $\{0, 1\}$ y un intervalo que contiene a este recorrido es el $[0, 1]$, las particiones del cual son de la forma

$$[0, 1] = [m_0, m_1] \cup [m_1, m_2] \cup \ldots \cup [m_{n-1}, m_n], \quad m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_n = 1.$$

Tomemos un punto arbitrario $y_i \in [m_{i-1}, m_i]$ en cada subintervalo de la partición y consideremos las sumas de Lebesgue

$$L(\{m_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \mu(f^{-1}([m_{i-1}, m_i])).$$

Obviamente todos los conjuntos $f^{-1}([m_{i-1}, m_i])$ son vacios salvo

$$f^{-1}([m_0, m_1]) = f^{-1}([0, m_1]) = f^{-1}(\{0\}) = \text{racionales en } [0, 1],$$

$$f^{-1}([m_{n-1}, m_n]) = f^{-1}([m_{n-1}, 1]) = f^{-1}(\{1\}) = \text{irracionales en } [0, 1].$$

cuyas medidas respectivas son 0 y 1. De esta forma

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, \mu(f^{-1}([m_{i-1}, m_i])) = y_0 \cdot 0 + y_n \cdot 1 = y_n,$$

así al tomar el límite $n \to \infty$ con todas las longitudes de los intervalos $[m_{i-1}, m_i]$ tendiendo a cero entonces $y_n \to 1$. Lo cual demuestra que el límite (15) existe y que en el sentido de Lebesgue

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Este mismo resultado se obtiene de forma inmediata usando (16) y (18) ya que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \chi_B(x)\,\mathrm{d}x = \mu(B) = 1.$$

Para la consistencia de la definición de integral de Lebesgue debemos aplicarla a una clase apropiada de funciones:

Definición 11. *Una función $f : I \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: es* **medible Borel** *si para todo Boreliano B de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ su imagen inversa $f^{-1}(B)$ es un Boreliano de $\mathbb{R}$.*

Se puede demostrar que

- $f = u + i\,v$ es medible Borel si y solo si lo son u y v.
- Si f y g son medibles Borel también lo son $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{C})$, fg.
- La composición de dos funciones medibles Borel es una función medible Borel.
- Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in I$, donde las f_n son medibles Borel, entonces también lo es f.
- Toda función continua salvo en un conjunto numerable de puntos es medible Borel.

En este curso supondremos que todas las funciones que empleamos son medibles Borel

Definición 12. *La definición* (15) *de integral de Lebesgue para funciones positivas puede extenderse a funciones $f : I \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definidas sobre intervalos (finitos o infinitos) $I \subset \mathbb{R}^N$ y con valores complejos $f(x) = u(x) + i\,v(x)$. Siguiendo el proceso de reducción siguiente*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}^N x = \int_I u(x)\,\mathrm{d}^N x + i \int_I v(x)\,\mathrm{d}^N x. \tag{19}$$

$$\int_I u(x)\,\mathrm{d}^N x = \int_I u_+(x)\,\mathrm{d}^N x - \int_I u_-(x)\,\mathrm{d}^N x, \quad \int_I v(x)\,\mathrm{d}^N x = \int_I v_+(x)\,\mathrm{d}^N x - \int_I v_-(x)\,\mathrm{d}^N x, \tag{20}$$

donde $u_\pm$ y $v_\pm$ son las funciones positivas siguientes:

$$u_\pm(x) = max\{\pm u(x), 0\}, \quad v_\pm(x) = max\{\pm v(x), 0\}.$$

Propiedades de la integral de Lebesgue

Muchas veces en este curso nos encontraremos con enunciados que se cumplen para todos los elementos de un conjunto salvo en un subconjunto de medida cero. En ese caso diremos que el enunciado se cumple en todo el conjunto **casi doquiera** y lo indicaremos escribiendo c.d.

$$\boxed{\textbf{c.d. quiere decir ''casi doquiera''}}$$

La integral de Lebesgue posee las propiedades siguientes:

1. Linealidad:
$$\int_I (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\, \mathrm{d}^N x = \alpha \int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x + \beta \int_I g(x)\, \mathrm{d}^N x.$$

2. Aditividad respecto del dominio: Si $I = I_1 \cup I_2$ con $\mu(I_1 \cap I_2) = 0$ entonces
$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x = \int_{I_1} f(x)\, \mathrm{d}^N x + \int_{I_2} f(x)\, \mathrm{d}^N x.$$

3. Desigualdad de valores absolutos
$$\Big| \int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x \Big| \leq \int_I |f(x)|\, \mathrm{d}^N x.$$

4. Conservación de desigualdad para funciones con valores reales
$$f \leq g \Longrightarrow, \int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x \leq \int_I g(x)\, \mathrm{d}^N x.$$

5. Si $f(x) = g(x)$ c.d. en I entonces
$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x = \int_I g(x)\, \mathrm{d}^N x.$$

6. f **es integrable Lebesgue si solo si** $|f|$ **es integrable Lebesgue**.

7. Si $f(x) \geq 0$ c.d. en I entonces
$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \text{ en } I \text{ c.d.}$$

Ejemplo 17. *Demostremos la propiedad 6 que es nueva respecto de lo que conocemos de la teoría de la integral de Riemann. Escribamos $f(x) = u(x) + i\, v(x)$. Obviamente por la propiedad 3) si la integral de $|f|$ es finita, tambien lo será la de f. Por otro lado*

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2} \leq \sqrt{(|u(x| + |v(x)|)^2} = |u(x)| + |v(x)| \\ &= u(x)_+ + u(x)_- + v(x)_+ + v(x)_-, \end{aligned}$$

entonces dado que si f es integrable también lo son las cuatro funciones que aparecen al final de esta desigualdad, por la propiedad 4) se deduce que si la integral de $f(x)$ es finita también la de $|f(x)|$ es finita.

Comparación entre las integrales de Riemann y de Lebesgue

En el teorema siguiente se proporciona: por un lado un criterio general para determinar si una función es integrable Riemann y por otro dos resultados que permiten rentabilizar nuestra experiencia de cálculo con la integral de Riemann para el cálculo de integrales de Lebesgue.

Teorema 5. *Se verifica:*

1. *Si $f : I \to \mathbb{C}$ es una función acotada sobre un intervalo I cerrado y acotado. Entonces f es integrable Riemann si y solo si f es continua en I c.d. En ese caso f es también integrable Lebesgue y las dos integrales correspondientes son iguales.*

2. *Sea $f : I \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ una función continua en I con, a lo sumo, un número finito de singularidades siendo I un intervalo cerrado y posiblemente no acotado. Entonces si existe la integral impropia en el sentido de Riemann*
$$\int_I |f(x)|\, \mathrm{d}^N x, \tag{21}$$
también existe la integral
$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}^N x, \tag{22}$$
en los sentidos de Riemann y Lebesgue y proporcionan el mismo valor. Si la integral impropia (21) *no existe en el sentido de Riemann entonces la integral* (22) *no existe en el sentido de Lebesgue.*

Espacios $\mathcal{L}^p$ de Lebesgue

Definición 13. *El espacio de funciones integrables Lebesgue sobre un intervalo I finito o infinito de $\mathbb{R}^N$ se define como*

$$\mathcal{L}(I) = \{\textit{Funciones } f : I \to \mathbb{C} \textit{ tales que } \textstyle\int_I |f(x)|\, \mathrm{d}^N x < \infty\ \}. \tag{23}$$

Pueden generalizarse tomando en la forma

$$\mathcal{L}^p(I) = \{\textit{Funciones } f : I \to \mathbb{C} \textit{ tales que } \textstyle\int_I |f(x)|^p\, \mathrm{d}^N x < \infty\ \}, \tag{24}$$

siendo $p \geq 1$ un número real.

Intercambio entre límites e integrales

Una de las aportaciones más importantes del concepto de integral de Lebesgue es el sigiente teorema de la (**convergencia dominada**)

Teorema 6. *Dada una sucesión de funciones* $f_n : I \to \mathbb{C}\,(n = 1, 2, \ldots)$, *donde* $I \subset \mathbb{R}^N$ *es un intervalo acotado o no acotado, si se cumple que*

1. *Existe* $\lim_{n\to} f_n(x)$ *para todo* $x \in I$ *c.d.*

2. *Existe una función* $f \in \mathcal{L}(I)$ *tal que* $|f_n(x)| \leq f(x)$, $\forall x \in I$ *c.d.*

entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *determina una función en* $\mathcal{L}(I)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\, \mathrm{d}^N x = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}^N x. \tag{25}$$

Intercambio entre derivadas e integrales

Una consecuencia importante del teorema de la convergencia dominada es el siguiente teorema sobre derivación de integrales dependientes de un parámetro:

Teorema 7. *Sea* $f = f(x, y)$ *una función definida sobre un dominio* $E = I\times[a, b]$ *con* $I \subset \mathbb{R}^N$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *tal que:*

1. *Para todo* $y_0 \in [a, b]$ *la función* $f(x, y_0)$ *es integrable Lebesgue respecto de* x.

2. *Para todo* $x \in I$ *c.d. y para todo* $y \in (a, b)$, *la derivada* $\partial f(x, y)/\partial y$ *existe y es continua como función de* y,

3. *Existe una función* $g \in \mathcal{L}(I)$ *tal que*

$$\Big|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Big| \leq g(x), \quad \forall (x, y) \in I \times (a, b)\, c.d.$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_I f(x, y)\, \mathrm{d}^N x = \int_I \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}^N x, \quad \forall y \in (a, b).$$

ESPACIOS FUNCIONALES

Espacios funcionales topológicos

Usaremos espacios $\mathcal{F}(X)$ de funciones $u = u(x)$ con valores complejos y definidas sobre un Boreliano no vacio $X \subset \mathbb{R}^N$. Necesitamos dos estructuras en estos espacios

1. **Una estructura de espacio lineal sobre** $\mathbb{C}$. Es decir hay definidas operaciones de suma $u + v$, $(u, v \in \mathcal{F}(X))$ y de multiplicación $\alpha\, u$, $(u \in \mathcal{F}(X))$ por números complejos $\alpha \in \mathbb{C}$, con las propiedades conocidas.

2. **Una noción de límite** $\lim_{n\to\infty} u_n$ **de sucesiones** $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}(X)$. Las sucesiones deben entonces clasificarse en *convergentes* y *divergentes* según que tengan o no límite. Esta operación de límite debe ser lineal. Es decir ha de cumplirse que

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha\, u_n + \beta\, v_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} u_n + \beta \lim_{n\to\infty} v_n,$$

para todo par de sucesiones convergentes $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ y números complejos α y β.

Ejemplo 18. *Consideremos $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ el espacio de todas las funciones $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$. Obviamente es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y de multiplicación de funciones por números complejos.*

Existe una noción natural de límite en $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$: decimos que $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ es el límite de una sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u,$$

cuando

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Esta noción de límite se denomina **límite puntual**

Funciones generalizadas (distribuciones)

Si $\mathcal{F}(X)$ es un espacio funcional topológico, denotaremos $\mathcal{F}'(X)$ a su **espacio dual** formado por las aplicaciones

$$T : \mathcal{F}(X) \to \mathbb{C}, \quad u \to \langle T, u \rangle,$$

que sean lineales y continuas. Es decir que verifiquen las dos propiedes siguientes

1. **Linealidad**: $\langle T, \alpha u + \beta v\rangle = \alpha \langle T, u\rangle + \beta \langle T, v\rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{F}(X)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. **Continuidad**: Para toda sucesión convergente $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}(X)$ se cumple que $\rightarrow \langle T, \lim_{n\to\infty} u_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T, u_n\rangle$.

Ejemplo 19. *(***La delta de Dirac** *) Consideremos $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de todas las funciones $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ con la operación de límite puntual. Se define la delta de Dirac δ_a centrada en un punto $a \in \mathbb{R}^n$ como la aplicación:*

$$\delta_a : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \langle \delta_a, u\rangle = u(a).$$

Es inmediato demostrar que δ_a es un funcional lineal continuo en $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$.

Espacios normados

Definición 14. *Sea $\mathcal{L}$ un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$. Una* **norma** *en $\mathcal{L}$ es una aplicación*

$$||\ || : \mathcal{L} \to \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{L} \to ||u|| \in \mathbb{R},$$

que satisface las siguientes propiedades

n1) $||u|| \geq 0,\ \forall u \in \mathcal{L}$ *y* $||u|| = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

n2) $||\lambda u|| = |\lambda|\,||u||, \forall u \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

n3) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in \mathcal{L}$.

En todo espacio normado existe una noción de distancia asociada con la norma:

Distancia entre $u, v \in \mathcal{L}$: $d(u, v) = ||u - v||$

Se cumplen las propiedades

d1) $d(u, v) = d(v, u),\ \forall u, v \in \mathcal{L}$.

d2) $d(u, v) = 0$ si y solo si $u = v$.

d3) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \forall u, v, w \in \mathcal{L}$.

Como consecuencia en todo espacio normado $(\mathcal{L}, ||\ ||)$ hay una noción de límite:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||u - u_n|| = 0.$$

Se cumplen las propiedades

1. **Unicidad** Si existe $\lim_{n\to\infty} u_n$ en $\mathcal{L}$, entonces es único.

2. **Linealidad** Para todo par de sucesiones convergentes $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{L}$ y números complejos α y β
$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\, u_n + \beta\, v_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} u_n + \beta \lim_{n\to\infty} v_n,$$

3. Toda sucesión convergente $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Es decir existe $M > 0$ tal que $||u_n|| < M$ para todo $n \geq 1$.

4. **Continuidad de la norma**: Si una sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es covergente entonces
$$\lim_{n\to\infty} ||u_n|| = || \lim_{n\to\infty} u_n||.$$

Comentarios

- Toda norma da lugar a una distancia. Pero no toda distancia procede de una norma.

- En espacios lineales $\mathcal{L}$ de dimensión finita se demuestra que todas las normas son **equivalentes** en el siguiente sentido: Dado un par $||\ ||_1$ y $||\ ||_2$ de definiciones de norma, existen números $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para todo $u \in \mathcal{L}$
$$||u||_1 \leq C_1\, ||u||_2, \quad ||u||_2 \leq C_2\, ||u||_1.$$
Como consequencia si $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ con respecto a una de las normas también $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ con respecto a la otra. Es decir que **todas las nociones de límite en espacios normados de dimensión finita son equivalentes**.

  Estas propiedades no se dán en espacios lineales de dimensión infinita, por lo que en estos espacios hay que precisar en que sentido se entiende el límite de las sucesiones.

Ejemplos de espacios normados

Ejemplo 20. *El conjunto $\mathbb{C}^N$ de vectores $u = (x_1, \ldots, x_N)$ con N componentes complejas $x_j \in \mathbb{C}$ es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$. Podemos definir las siguientes nociones de norma:*

- *Para cada número real $p > 1$ la p-norma de $u \in \mathbb{C}^N$ se define como*
$$||u||_p = \Big(|x_1|^p + \cdots |x_N|^p\Big)^{1/p}.$$
Para $p = 2$ se obtiene la denominada **norma euclidea**.

- *La norma* ∞ *de* $u = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ *se define como*

$$||u||_\infty = Max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}.$$

Como hemos comentado anteriormente todas estas definiciones de norma son equivalentes y como consecuencia determinan la misma noción de límite.

Ejemplo 21. *El conjunto* $\mathbb{C}^\infty$ *de sucesiones* $u = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ *con componentes complejas* $x_j \in \mathbb{C}$ *es un espacio lineal sobre* $\mathbb{C}$*. Podemos definir nociones de norma como las de* $\mathbb{C}^N$ *en ciertos subespacios lineales de* $\mathbb{C}^\infty$*:*

- *Para cada número real* $p > 1$ *se demuestra que el subconjunto*

  $$l^p = \{u \in \mathbb{C}^\infty \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

  es un subespacio lineal y que

  $$||u||_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{1/p},$$

  es una norma en l^p*.*

- *El subconjunto*

  $$l^\infty = \{u \in \mathbb{C}^\infty \mid |x_n| < M, \forall n \geq 1 \text{ para algún } M > 0\}\}$$

  La norma ∞ *de* $u \in l^\infty$ *se define como*

  $$||u||_\infty = Sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, \ldots\}.$$

Ejemplo 22. *Sea* I *un intervalo cerrado y acotado de* $\mathbb{R}^N$ *y consideremos el conjunto*

$$C(I) = \{\text{Funciones continuas } u : I \to \mathbb{C}\}.$$

Es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$*. Podemos definir la noción de norma* ∞ *de* $u \in C(I)$ *como:*

$$||u||_\infty = Sup_{x \in I}|u(x)|.$$

Recordemos que tal número existe dado que toda función continua (como $|u(x)|$*) en un intervalo cerrado y acotado alcanza su valor supremo (en este caso el máximo) en algún punto de ese intervalo. En este caso la noción de límite asociada es la* **convergencia uniforme**

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \Leftrightarrow \text{Las funciones } u_n \text{ convergen uniformemente a la función } u \text{ en } I$$

Podemos también introducir la noción de p-norma en $C(I)$

$$||u||_p = \Big(\int_I |u(x)|^p \, \mathrm{d}^N x \Big)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Como ejemplo de que en $C(I)$ no todas las normas son equivalentes, consideremos la sucesión de funciones

$$u_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

en $C([0,1])$.

Veamos que $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe en cualquiera de las p-normas y es la función $u \equiv 0$ en $C([0,1])$ Para ello aplicamos el terorema de la convergencia dominada ($|u_n(x)| \le 1, \forall n, \forall x \in [0,1]$) y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_p^p = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |u_n(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} |u_n(x)|^p \, \mathrm{d}x = 0,$$

dado que

$$\lim_{n\to\infty} |u_n(x)|^p = \lim_{n\to\infty} |x|^{np} = \begin{cases} 0 \ \textit{si} \ 0 \le x < 1 \\ 1 \ \textit{si} \ x = 1 \end{cases}$$

Sin embargo $\lim_{n\to\infty} u_n$ no existe en el sentido de la norma $||\ ||_\infty$. Debido a la convergencia uniforme, si existiera tal límite sería una función continua $u(x)$ que coincidiría en cada punto $x \in [0,1]$ con el límite puntual de la sucesión $u_n(x)$. Por tanto

$$u(x) = 0, \quad 0 \le x < 1, \quad u(1) = 1,$$

que contradice el hecho de que u es una función continua.

Espacios normados completos (Espacios de Banach)

Definición 15. *Sea $(u_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en un espacio normado $(\mathcal{L}, ||\ ||)$. Se dice que es una* **sucesión de Cauchy** *si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \ge 1 \ \Big| \ n, m > n_0 \Longrightarrow ||u_n - u_m|| < \epsilon.$$

Es decir la sucesión $(u_n)_{n=1}^\infty$ se "aprieta" tanto como se quiera avanzando suficientemente en el índice n.

- En cualquier espacio normado se cumple

$$(u_n)_{n=1}^\infty \text{ convergente} \Longrightarrow (u_n)_{n=1}^\infty \text{ es de Cauchy.}$$

- Sin embargo hay espacios normados en los que

$$(u_n)_{n=1}^\infty \text{ de Cauchy} \not\Longrightarrow (u_n)_{n=1}^\infty \text{ convergente.}$$

Definición 16. *Un espacio normado $(\mathcal{L}, ||\ ||)$ se dice completo (***espacio de Banach***) cuando*

$$(u_n)_{n=1}^\infty \textit{ convergente} \Longleftrightarrow (u_n)_{n=1}^\infty \textit{ es de Cauchy.}$$

Estos espacios tienen la gran ventaja de poseer un criterio (criterio de Cauchy) para determinar si una sucesión es convergente (si y solo es de Cauchy) sin nececesidad de tener que determinar el candidato a límite.

Ejemplo 23. *Ejemplos de espacios completos son:*

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}^N \text{ con las normas } ||\,||_p \text{ y } ||\,||_\infty,\\ &l^p \text{ con las normas } ||\,||_p \text{ y } ||\,||_\infty,\\ &C(I)\ (I \text{ intervalo cerrado y acotado}) \text{ con la norma } ||\,||_\infty.\end{aligned}$$

Sin embargo no son completos los espacios

$$C(I) \text{ con las normas } ||\,||_p.$$

Espacios L^p de Lebesgue

Los espacios normados completos de funciones con las normas $||\,||_p$ son básicamente los espacios $\mathcal{L}^p$ de Lebesgue, aunque hay que introducir una modificación. Recordemos que el espacio de funciones integrables Lebesgue sobre un intervalo I de $\mathbb{R}^N$ se define como

$$\mathcal{L}^p(I) = \{\text{Funciones } f : I \to \mathbb{C} \text{ tales que } \textstyle\int_I |f(x)|^p \, \mathrm{d}^N x < \infty \ \}. \tag{26}$$

Es natural, dada una función $f \in \mathcal{L}^p(I)$, definir su p-norma como

$$||f||_p = \Big(\int_I |f(x)|^p \, \mathrm{d}^N x \Big).$$

Pero esta definición no verifica la propiedad

$$||f||_p = 0 \Rightarrow f = 0, \quad \forall x \in I,$$

ya que lo que es cierto es que

$$||f||_p = 0 \Rightarrow f = 0, \quad \forall x \in I \ c.d.$$

La solución a este problema es muy simple: considerar dos funciones f_1 y f_2 en $\mathcal{L}^p(I)$ como iguales si y solo si

$$f_1(x) = f_2(x), \quad \forall x \in I, \ c.d. \tag{27}$$

En realidad esto significa que en lugar de considerar el espacio $\mathcal{L}^p(I)$ consideramos el espacio de clases de equivalencia $\mathcal{L}^p(I)$ con respecto a la relación de equivalencia (27). Estos espacios de clases de equivalencia se denotarán en adelante como

$$L^p(I) = \{\text{Clases de equivalencia de funciones } f : I \to \mathbb{C} \text{ tales que } \textstyle\int_I |f(x)|^p \, \mathrm{d}^N x < \infty \ \}$$

Teorema 8. *Los espacios* $(L^p(I), ||\,||)$ *son espacios normados completos.*

Norma del supremo y convergencia uniforme

Sea I un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}^N$ y consideremos el conjunto

$$C(I) = \{\text{Funciones continuas } u : I \to \mathbb{C}\}.$$

Es un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$. Podemos definir la noción de **norma del supremo** de $u \in C(I)$ como:

$$||u||_\infty = Sup_{x\in I}|u(x)|.$$

Recordemos que tal número existe dado que toda función continua (como $|u(x)|$) en un intervalo cerrado y acotado alcanza su valor supremo (en este caso el máximo) en algún punto de ese intervalo. En este caso la noción de límite asociada es la **convergencia uniforme**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ en } ||\,||_\infty \;\; \Leftrightarrow \; u_n \to u \text{ uniformemente en } I \text{ cuando } n \to \infty,}$$

que se expresa como

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ entonces } |u_n(x) - u(x)| < \epsilon \; \forall x \in I. \tag{28}$$

Es claro que

$$u_n \to u \text{ uniformemente en } I \; \Rightarrow \; u_n \to u \text{ puntualmente en } I$$

pero

$$u_n \to u \text{ puntualmente en } I \; \not\Rightarrow \; u_n \to u \text{ uniformemente en } I$$

De igual forma

$$u_n \to u \;\text{ en } ||\,||_\infty \; \Rightarrow \; u_n \to u \;\text{ en } ||\,||_p, \, \forall p \geq 1$$

pero

$$u_n \to u \text{ en } ||\,||_p \; \not\Rightarrow \; u_n \to u \;\text{ en } ||\,||_\infty$$

Una propiedad fundamental de la convergencia uniforme es que conserva la continuidad

Teorema 9. *Dada una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ de funciones continuas en I si $u_n \to u$ uniformemente en I entonces u es continua en I.*

Demostración
Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, debido a la convergencia uniforme de u_n a u existirá un $n_0 > 0$ tal que

$$n \geq n_0 \; \Rightarrow \; |u(x) - u_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \, \forall x \in I.$$

Dado un punto $x_0 \in I$ cualquiera, para ver que la función límite uniforme u es continua en x_0 escribamos

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(x_0)| &= |u(x)-u_n(x)+u_n(x)-u_n(x_0)+u_n(x_0)-u(x_0| \\
&\leq |u(x)-u_n(x)|+|u_n(x)-u_n(x_0)|+|u_n(x_0)-u(x_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{3}+|u_n(x)-u_n(x_0)|+\frac{\epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

donde hemos tomado cualquier $n \geq n_0$. Como u_n es una función continua en x_0 (lo es en todo I), existirá $\delta > 0$ tal que

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |u_n(x)-u_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3},$$

por tanto deducimos que

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |u(x)-u(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Es decir u es continua en x_0.

Otra de las propiedades fundamentales es la **completitud**

Teorema 10. *Los espacios normados $(C(I), ||\,||_\infty)$ son completos.*

Demostración

Supongamos que $(u_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(C(I), ||\,||_\infty)$. Entonces dado $\epsilon > 0$ cualquiera existirá un $n_0 > 0$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |u_n(x)-u_m(x)| < \epsilon, \forall x \in I.$$

Entonces para todo $x \in I$ la sucesión $(u_n(x))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy números complejos y como $\mathbb{C}$ es un espacio completo, cada una de estas sucesiones es convergente en $\mathbb{C}$. Así podemos definir una función u sobre I

$$u(x) = \lim_{n\to} u_n(x), \quad x \in I.$$

Veamos que $u_n \to u$ en $||\,||_\infty$. De nuevo aludiendo al hecho de que $(u_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(C(I), ||\,||_\infty)$, dado $\epsilon > 0$ cualquiera existirá un $n_0 > 0$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |u_n(x)-u_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in I.$$

Entonces para todo $x \in I$ (tomando $m \geq n_0$) tenemos que

$$|u(x)-u_m(x)| = |\lim_{n\to} u_n(x)-u_m(x)| = \lim_{n\to} |u_n(x)-u_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{29}$$

Por tanto si $m \geq n_0$

$$||u-u_m||_\infty = Sup_{x\in I}|u(x)-u_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Luego $u_n \to u$ en $||\,||_\infty$.

EL CRITERIO DE LOS MAYORANTES

El siguiente criterio es de gran utilidad para analizar la convergencia uniforme de series de funciones

Teorema 11. *Dada una sucesión* $(u_n)_{n\geq 1}$ *en* $C(I)$ *si existe una sucesión de mayorantes* $(M_n)_{n\geq 1}$ *en* $\mathbb{R}^+$

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in I,$$

tal que

$$\sum_{n\geq 1} M_n \textit{ convergente en } \mathbb{R}$$

entonces

$$\sum_{n\geq 1} u_n \textit{ convergente en } (C(I), ||\,||_\infty).$$

Demostración
Consideremos la sucesión de sumas parciales

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x),$$

y demostremos que es una sucesión de Cauchy en $(C(I), ||\,||_\infty)$. Tomemos $n > m$

$$||s_n - s_m||_\infty = Sup_{x\in I}|s_n(x) - s_m(x)| = Sup_{x\in I}\Big| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\Big|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} Sup_{x\in I}|u_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k.$$

Como $\sum_{n\geq 1} M_n$ convergente en $\mathbb{R}$ entonces al ser $\mathbb{R}$ completo la sucesión de sumas parciales

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k,$$

es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y dado que

$$||s_n - s_m||_\infty \leq |S_n - S_m|,$$

entonces la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $(C(I), ||\,||_\infty)$. Luego es convergente. Es decir

$$\sum_{n\geq 1} u_n \text{ convergente en } (C(I), ||\,||_\infty).$$

CONVERGENCIA UNIFORME Y DERIVACIÓN

En las aplicaciones a la teoría de ecuaciones diferenciales es muy importante el siguiente resultado

Teorema 12. *Dada una sucesión* $(u_n)_{n\geq 1}$ *en* $C([a,b])$ *tal que*

1) $\text{lím}_{n\to} u_n = u$ *uniformemente en* $[a,b]$

2) *Las funciones* u_n *son derivables en* $[a,b]$ *y* $\text{lím}_{n\to} u_n' = v$ *uniformemente en* $[a,b]$

Entonces u *es derivable en* $[a,b]$ *y* $u' = v$.

Demostración

Sea $c \in [a,b]$ y definamos las funciones

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c}, & x \neq c \\ \\ u_n'(c), & x = c, \end{cases}$$

que son continuas en $[a,b]$. Para $x \neq c$ la continuidad es obvia y por otra parte, debido a la existencia de $u_n'(c)$, tenemos que

$$\lim_{x\to c} v_n(x) = \lim_{x\to c} \frac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c} = u_n'(c) = v_n(c).$$

Luego también son continuas en $x = c$. Veamos ahora que la sucesión $(v_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en $[a,b]$. Para ello, escribimos

$$v_n(x) - v_m(x) = \frac{(u_n(x)-u_m(x)) - (u_n(c)-u_m(c))}{x-c}, \quad x \neq c.$$

Como el numerador es una función derivable en $[a,b]$ con derivada $u_n'(x) - u_m'(x)$, aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial tenemos que

$$(u_n(x)-u_m(x)) - (u_n(c)-u_m(c)) = (u_n'(x_1) - u_m'(x_1))\,(x-c), \quad \text{para algún } x_1 \text{ entre } x \text{ y } c.$$

Es decir

$$v_n(x) - v_m(x) = u_n'(x_1) - u_m'(x_1), \quad \text{para algún } x_1 \text{ entre } x \text{ y } c.$$

Como consecuencia

$$|v_n(x) - v_m(x)| \leq \text{Sup}_{x'\in[a,b]} |u_n'(x') - u_m'(x')| = ||u_n' - u_m'||_\infty, \quad \forall x \in [a,b],$$

y por tanto

$$||v_n - v_m||_\infty = \text{Sup}_{x\in[a,b]} |v_n(x) - v_m(x)| \leq ||u_n' - u_m'||_\infty.$$

Entonces, como la sucesión u_n' es de Cauchy respecto de $||\,||_\infty$ (pues es uniformemente convergente) también lo será la sucesión v_n. Como consecuencia, al ser $(C([a,b]), ||\,||_\infty)$ completo, la sucesión v_n será uniformemente convergente en $[a,b]$ a una función continua $w = w(x)$. Así en cada $x \neq c$ se verifica

$$w(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c} = \frac{u(x)-u(c)}{x-c},$$

y por la continuidad de w en $x = c$, vemos que existe $u'(c)$

$$w(c) = \lim_{x \to c} w(x) = \lim_{x \to c} \frac{u(x) - u(c)}{x - c} = u'(c).$$

Además, dado que

$$w(c) = \lim_{n \to \infty} v_n(c) = \lim_{n \to \infty} u_n'(c) = v(c),$$

concluimos que $u'(c) = v(c)$ Si en el teorema anterior consideramos sucesiones de sumas parciales, se obtiene el resultado siguiente

Teorema 13. *Dada una sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ en $C([a,b])$ tal que*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge uniformemente en $[a,b]$*

2) *Las funciones u_n son derivables en $[a,b]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ converge uniformemente en $[a,b]$*

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es derivable en $[a,b]$ y

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'.$$

3. ESPACIOS DE HILBERT

ESPACIOS CON PRODUCTO ESCALAR

Definición 17. *Sea $\mathcal{L}$ un espacio lineal sobre $\mathbb{C}$. Un* **producto escalar** *en $\mathcal{L}$ es una aplicación*

$$(\ , \ ) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{C},$$

que satisface las siguientes propiedades

1) *(u, u) es real y positivo ($(u, u) \geq 0$), $\forall u \in \mathcal{L}$ y $(u, u) = 0$ si y solo si $u = 0$.*

2) *$(u, v) = \overline{(v, u)}$, $\forall u, v \in \mathcal{L}$.*

3) *$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$, $\forall u, v_1, v_2 \in \mathcal{L}$.*

4) *$(u, \lambda\, v) = \lambda\, (u, v)$, $\forall u, v \in \mathcal{L}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.*

Se cumplen las propiedades siguientes muy fáciles de demostrar:

3)' $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$, $\forall u_1, u_2, v \in \mathcal{L}$

4)' $(\lambda\, u, v) = \overline{\lambda}\, (u, v)$, $\forall u, v \in \mathcal{L}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

5) $(u, v) = 0$, $\forall v \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow u = 0$.

6) $(u_1, v) = (u_2, v)$, $\forall v \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow u_1 = u_2$.

En todo espacio con producto escalar hay una noción de norma asociada al producto escalar:

Norma de $u \in \mathcal{L}$: $||u|| = +\sqrt{(u, u)}$

Como consecuencia en todo espacio con producto escalar $(\mathcal{L}, (,))$ hay una noción de distancia

$$d(u, v) = ||u - v|| = +\sqrt{(u - v, u - v)}$$

y de límite:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} d(u_n, u) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} ||u - u_n|| = 0.$$

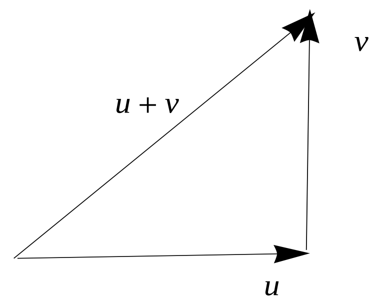


Figura 1: Teorema de Pitagoras

Otras propiedades

- Dos vectores $u, v \in \mathcal{L}$ se dice que son ortogonales entre si $(u \perp v)$ cuando $(u, v) = 0$. En ese caso se cumple el teorema de Pitágoras
$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$
- Se verifica la desigualdad siguiente (Cauchy-Schwarz)
$$|(u,v)| \leq ||u|| ||v||, \quad \forall u, v \in \mathcal{L}.$$

Demostración. Veamos la segunda propiedad. Si $v = 0$ los dos miembros valen cero y por tanto se verifica la igualdad de ambos. Si $v \neq 0$ entonces introducimos el vector
$$w = u - \frac{(v,u)}{||v||^2} v,$$
que está bién definido, ya que $||v|| \neq 0$, y es ortogonal a v
$$(v,w) = (v,u) - \frac{(v,u)}{||v||^2}(v,v) = 0.$$
Luego
$$w \perp \frac{(v,u)}{||v||^2} v,$$
Por tanto del teorema de Pitágoras se obtiene
$$||u||^2 = ||w + \frac{(v,u)}{||v||^2} v||^2 = ||w||^2 + ||\frac{(v,u)}{||v||^2} v||^2 \geq ||\frac{(v,u)}{||v||^2} v||^2 = \frac{|(v,u)|^2}{||v||^4} ||v||^2.$$
De donde se sigue la desigualdad. $\square$

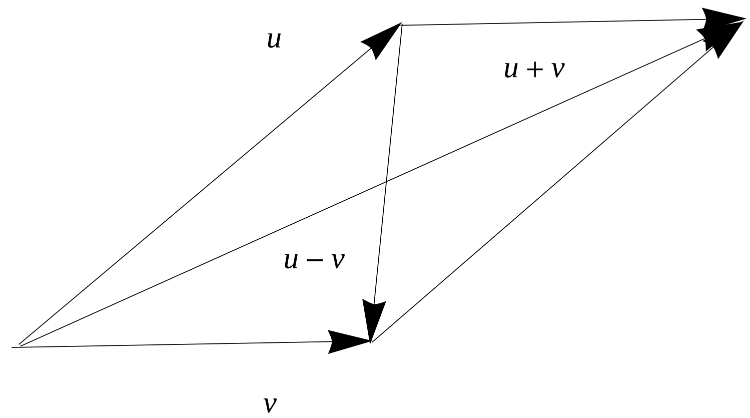


Figura 2: Identidad del paralelogramo

Comentarios

- Toda producto escalar da lugar a una norma. Pero no toda norma procede de un producto escalar, la condición necesaria y suficiente para que ello suceda es la **identidad del paralelogramo**

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\,||u||^2 + 2\,||v||^2, \quad \forall u, v \in \mathcal{L}.$$

- Las normas $||\ ||_p$ en los espacios $\mathbb{C}^N$, l^p, L^p, $C([a,b])$ solo provienen de un producto escalar en el caso $p=2$ (ver la hoja 3 de problemas).

Ejemplo 24. *El espacio de sucesiones de cuadrado sumable*

$$l^2 = \{u \in \mathbb{C}^\infty \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

está dotado de la norma

$$||u||_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{1/2},$$

que procede del producto escalar

$$(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n\, x'_n, \quad u = (x_n)_{n\geq 1},\ v = (x'_n)_{n\geq 1}.$$

Ejemplo 25. *El espacio de clases de funciones de cuadrado integrable sobre un intervalo* $I \subset \mathbb{R}^N$

$$L^2(I) = \{u : I \to \mathbb{C} \text{ tales que } \int_I |u(x)|^2 \, \mathrm{d}^N x < \infty \}$$

está dotado de la norma

$$||u||_2 = \Big(\int_I |u(x)|^2 \, \mathrm{d}^N x \Big)^{1/2},$$

que procede del producto escalar

$$(u, v) = \int_I \overline{u(x)} \, v(x) \, \mathrm{d}^N x.$$

Ejemplo 26. *El espacio de clases de funciones de cuadrado integrable respecto de una función positiva (función peso)* $\rho(x) \geq 0$ *sobre un intervalo* $I \subset \mathbb{R}^N$

$$L^2_\rho(I) = \{u : I \to \mathbb{C} \text{ tales que } \int_I |u(x)|^2 \, \rho(x) \, \mathrm{d}^N x < \infty \}$$

está dotado de la norma

$$||u||_2 = \Big(\int_I |u(x)|^2 \, \rho(x) \, \mathrm{d}^N x \Big)^{1/2},$$

que procede del producto escalar

$$(u, v) = \int_I \overline{u(x)} \, v(x) \, \rho(x) \, \mathrm{d}^N x.$$

Estos espacios aparecen en las aplicaciones al hacer cambios de variables de cartesianas a polares, esféricas, etc.

Continuidad del producto escalar

Límites en productos escalares

Dado un espacio con producto escalar $(\mathcal{L}, (\,,\,))$ se verifica :

1. Si $(u_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión convergente ($\exists u = \lim_{n\to\infty} u_n$) entonces:

$$(v, \lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} (v, u_n), \quad \forall v \in \mathcal{L}.$$

2. Si $\sum_{n=1}^\infty w_n$ es una serie convergente ($\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n w_k$) entonces:

$$(v, \sum_{n=1}^\infty w_n) = \sum_{n=1}^\infty (v, w_n), \quad \forall v \in \mathcal{L}.$$

Identidades equivalentes se obtienen situando la operación de límite en la posición izquierda del producto escalar.

Demostración. Veamos la primera (la segunda se deduce inmediatamente de esta). Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|(v, \lim_{n\to\infty} u_n) - (v, u_n)| = |(v, u - u_n)| \leq ||v||\, ||u - u_n|| \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

$\square$

Consecuencias de estas identidades son las siguientes que son de gran utilidad en las aplicaciones:

Dada una serie convergente de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, u_n; \quad (\lambda_n \in \mathbb{C},\ u_n \in \mathcal{L}),$$

entonces para todo $v \in \mathcal{L}$

$$(v, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, (v, u_n), \quad (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, u_n, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n\, (u_n, v).$$

Definición de espacio de Hilbert

Definición 18. *Un* **espacio de Hilbert** H *es un espacio con producto escalar* $(\ ,\ )$ *tal que es completo con respecto a la norma asociada (toda sucesión de Cauchy es convergente).*

Ejemplo 27. *Sabemos que los espacios*

$$\mathbb{C}^N, \quad l^2, \quad L^2(I), \quad L^2_\rho(I),$$

son completos respecto de las normas asociadas a sus productos escalares, luego son espacios de Hilbert.

EL TEOREMA DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL

Definición 19. *Un subconjunto* M *no vacio de un espacio de Hilbert* H *se dice que es un* **subespacio de Hilbert** *de* H *si cumple:*

1) M *es un subespacio lineal de* H*.*

2) *M es un conjunto cerrado en H.*

Todo subespacio de Hilbert es en si mismo un espacio de Hilbert con respecto al producto escalar y la norma heredados del espacio de Hilbert que lo contiene.

Comentarios

- Recordemos que un conjunto no vacio $X \subset H$ es **cerrado** si y solo si los límites $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ de todas las sucesiones $(u_n)_{n\geq 1} \subset X$ convergentes están en X $(u \in X)$. Dado un subconjunto no vacio $A \subset H$ el menor cerrado que lo contiene es el conjunto $\overline{A}$ denominado **el cierre de** A definido como

$$\overline{A} = \{\text{todos los límites } \lim_{n\to\infty} u_n \text{ de sucesiones convergentes } (u_n)_{n\geq 1} \subset A\ \}.$$

  Obsérvese que $A \subset \overline{A}$ dado que todo $u \in A$ puede escribirse como $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ con $u_n = u$, $\forall n \geq 1$.

- Podemos construir subespacios de Hilbert cerrando subespacios lineales S de H. Es decir tomando

$$M = \overline{S}, \quad S \text{ subespacio lineal de } H$$

  Por construcción M es un conjunto cerrado y es muy facil probar que también es un subespacio lineal. Si S es un subespacio lineal de dimensión vectorial finita N, entonces $S \approx \mathbb{C}^N$ luego es cerrado y $M = \overline{S} = S$.

Teorema de la proyección ortogonal

Una de las propiedades fundamentales de los espacios de Hilbert es el siguiente teorema

Teorema 14. *Sea M un subespacio de Hilbert de un espacio de Hilbert H. Entonces para todo vector $u \in H$ existe una descomposición única de la forma*

$$u = u_M + u_{M^\perp}, \quad u_M \in M,\ u_{M^\perp} \perp M.$$

Además el vector u_M es el mejor vector aproximante a u dentro del subespacio de Hilbert M. Es decir

$$d(u, u_M) = Inf\{d(u, v),\ v \in M\}.$$

El vector u_M se denomina proyección ortogonal de u sobre M.

BASES DE HILBERT

Definición 20. *Un subconjunto X no vacio de un espacio de Hilbert H se denomina* **conjunto ortonormal** *de H cuando*

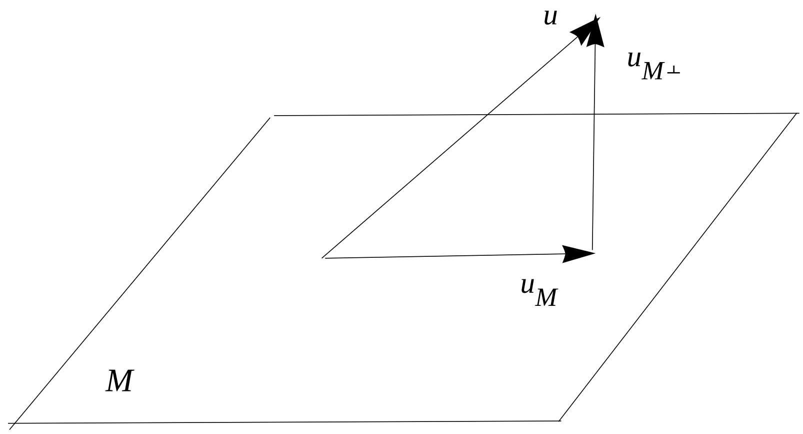


Figura 3: Proyección ortogonal

1) *Todos sus elementos tienen norma unidad ($||u|| = 1$, $\forall u \in X$).*

2) *Sus elementos son ortogonales dos a dos ($(u, v) = 0$, $\forall u, v \in X$, $u \neq v$).*

Ejemplo 28. *En el espacio l^2 los elementos*

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$

forman obviamente un conjunto ortonormal.

Ejemplo 29. *Se comprueba facilmente que en $L^2([a, b])$ con $[a, b]$ un intervalo real compacto las funciones*

$$\frac{e^{i\,n\,\omega\,x}}{\sqrt{b-a}}\,;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

donde $\omega = 2\,\pi/(b - a)$, forman un conjunto ortonormal. Lo mismo sucede con las funciones

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}},\ \sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\cos(n\,\omega\,x),\ \sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\mathrm{sen}(n\,\omega\,x);\ n = 1, 2, \ldots.$$

Denotemos mediante $\mathcal{X}$ al conjunto cuyos elementos son los conjuntos ortonormales de H. Podemos definir una relación de orden en $\mathcal{X}$ de la manera siguiente: Dados dos conjuntos ortonormales X_1 y X_2 decimos que $X_1 \leq X_2$ cuando, como subconjuntos de H, se cumple que $X_1 \subset X_2$. Consideremos ahora una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ totalmente ordenada de conjuntos ortonormales de H (dos elementos cualesquiera de la familia X_α y X_β son siempre comparables) entonces se demuestra que

$$X = \cup_{\alpha \in A} X_\alpha,$$

es otro conjunto ortonormal ya que

1. Si $u \in X$ entonces u pertenece a algún X_α y por tanto como X_α es un conjunto ortonormal $||u|| = 1$.

2. Si $u, v \in X$ entonces u pertenece a algún X_α y v a algún X_β. Ahora bién como X_α y X_β son comparables, uno de los dos, por ejemplo X_β contiene al otro X_α. Por tanto $u, v \in X_\beta$, y al ser X_β un conjunto ortonormal se verifica que $(u, v) = 0$.

Por otro lado X contiene a todos los miembros de la familia y por tanto $X_\alpha \leq X$ $\forall \alpha \in A$. Así que X es una cota superior de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. De esta forma hemos probado que toda familia totalmente ordenada de elementos de $\mathcal{X}$ posee una cota superior. Por el lema de Zorn concluimos que existen **elementos maximales** en $\mathcal{X}$.

Definición 21. *Se denomina* **base de Hilbert** B *de un espacio de Hilbert* H *a todo* **conjunto ortonormal maximal** B *en* H*.*

Se demuestra que

Teorema 15. *En un espacio de Hilbert* H *todas las bases ortonormales tienen el mismo cardinal.*

Un espacio de Hilbert H es un espacio vectorial luego tiene una dimensión vectorial $\mathrm{Dim}H$ que es el cardinal de sus bases vectoriales. Podemos definir también otro concepto de dimensión $\mathrm{dim}H$ dado por el cardinal de sus bases de Hilbert.

Definición 22. *El cardinal de las bases de Hilbert de un espacio de Hilbert* H *se denomina* **dimensión Hilbert del espacio** H *y se denota* $\mathrm{dim}H$*. Un espacio de Hilbert se dice* **separable** *si su dimensión Hilbert es finita o infinita numerable. Es decir si*

$$\mathrm{dim}H \leq \aleph_0.$$

Ejemplo 30. *En el espacio* l^2 *los elementos*

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$

forman un conjunto ortonormal . Además es maximal pues si $u = (\alpha_n)_{n \geq 1} \in l^2$ *es ortogonal a todos los* e_n *entonces*

$$0 = (e_n, u) = \alpha_n,$$

luego $u = 0$ *y* $||u|| = 0 \neq 1$*. Por tanto* $B = \{e_n\}_{n \geq 1}$ *es una base de Hilbert de* l^2 *con cardinal* $\aleph_0$*, lo que muestra que* l^2 *es un espacio de Hilbert separable.*

Se demuestra que todos los espacios $L^2(I)$ con I un intervalo cualquiera de $\mathbb{R}^N$ son espacios de Hilbert separables.

Ejemplo 31. *Bases de Hilbert usuales de* $L^2([a,b])$ *con* $[a,b]$ *un intervalo real compacto son las siguientes* **bases de Fourier trigonométricas** *donde* $L = b - a$ *y* $\omega = 2\,\pi/L$ *:*

$$B_1 = \Big\{ \frac{e^{i\,n\,\omega\,x}}{\sqrt{L}};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Big\}, \quad \textit{base de exponenciales},$$

$$B_2 = \Big\{ \sqrt{\frac{1}{L}},\ \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(n\,\omega\,x),\ \sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}(n\,\omega\,x);\ n = 1, 2, \dots \Big\} \quad \textit{base de cosenos y senos},$$

Ejemplo 32. Base de polinomios de Legendre en $L^2([-1,1])$

$$P_n(x) = (n + \frac{1}{2})^{1/2} \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Ejemplo 33. Base de funciones de Hermite en $L^2(\mathbb{R})$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} e^{x^2/2} D^n e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Propiedades de las bases de Hilbert

Consideremos un espacio de Hilbert separable H, por tanto de dimensión Hilbert finita o infinita numerable. Se verifican las siguientes propiedades fundamentales

P1) Sea $B = \{e_n\}_{n \in A}$ un conjunto ortonormal en H:

$$B \text{ es base de Hilbert de } H \ \Leftrightarrow\ \overline{\mathrm{lin} B} = H.$$

donde $\mathrm{lin}B$ denota el conjunto de combinaciones lineales de elementos de B.

P2) Si $B = \{e_n\}_{n \in A}$ es base de Hilbert de H entonces todo $u \in H$ puede descomponerse en la forma

$$u = \sum_n (e_n, u)\, e_n, \quad \text{desarrollo de Fourier en la base } B$$

P3) Si $B = \{e_n\}_{n \in A}$ es base de Hilbert de H entonces se verifican las siguientes identidades conocidas como identidades de Parseval y Bessel respectivamente.

$$(u, v) = \sum_n (u, e_n)\,(e_n, v), \quad \forall u, v \in H,$$

$$||u||^2 = \sum_n |(e_n, u)|^2, \quad \forall u \in H.$$

Demostración

P1) Si B es base de Hilbert de H y $\overline{\text{lin}B} \neq H$. Entonces existe algún $u \neq 0$ en H tal que $u \notin M = \overline{\text{lin}B}$. Aplicando el teorema de la proyección ortogonal a u y a M la componente $u_{M^\perp} \neq 0$ es ortogonal a M y por tanto también a B, lo cual no es posible al ser B un conjunto ortonormal maximal en H.

Recíprocamente, si $\overline{\text{lin}B} = H$ no puede existir un vector $u \neq 0$ tal que $u \perp B$, pues si existierá, también $u \perp \overline{\text{lin}B} = H$ y entonces $u = 0$. Por tanto B es un conjunto ortonormal maximal.

P2) Dado $u \in H = \overline{\text{lin}B}$ veamos que la serie

$$\sum_n \lambda_n \, e_n, \quad \lambda_n = (e_n, u), \tag{30}$$

es convergente. Para ello demostremos que las sumas parciales

$$w_n = \sum_{k \leq n} \lambda_k \, e_k,$$

forman una sucesión de Cauchy. Tenemos que

$$||w_n - w_m||^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2, \quad n > m. \tag{31}$$

Pero es inmediato comprobar que $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ implica $u - w_n \perp w_n$ para todo n y aplicando entonces el teorema de Pitágoras a la descomposición $u = w_n + (u - w_n)$ se obtiene $||u||^2 = ||w_n||^2 + ||u - w_n||^2$. Por tanto

$$||w_n||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \leq ||u||^2, \quad \forall n.$$

Luego también se cumple que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \leq ||u||^2.$$

Ello quiere decir que la serie numérica $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2$ es convergente, luego sus sumas parciales forman una sucesión de Cauchy.

De esta forma (31) prueba que la sucesión w_n es de Cauchy en H y por tanto podemos definir el vector

$$w = \sum_n \lambda_n \, e_n, \quad \lambda_n = (e_n, u).$$

Ahora bién $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ implica que $(u - w, e_i) = 0$ para todo i, así que

$$(u - w) \perp B \implies (u - w) \perp \text{lim}B \implies (u - w) \perp \overline{\text{lim}B} = H.$$

Luego $u - w = 0$.

P3) Se deduce inmediatamente de P2).

Comentarios

- En espacio de Hilbert de dimensión vectorial finita las bases de Hilbert son bases vectoriales (basta probar que un conjunto ortonormal es linealmente independiente). Recíprocamente, a partir de una base vectorial cualquiera $B = \{u_1, \ldots, u_N\}$ se puede construir una base de Hilbert mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

$$e_1 = \frac{u_1}{||u_1||},\ e_2 = \frac{u_2 - (e_1, u_2)\, e_1}{||u_2 - (e_1, u_2)\, e_1||}, \ldots, e_{j+1} = \frac{u_{j+1} - \sum_{n=1}^{j}(e_n, u_{j+1})\, e_n}{||u_{j+1} - \sum_{n=1}^{j}(e_n, u_{j+1})\, e_n||}, \ldots$$

  Por tanto si la dimensión vectorial es finita, entonces la dimensión Hilbert coincide con la dimensión vectorial. Es decir

$$DimH < \aleph_0 \implies dimH = DimH.$$

- En espacios de Hilbert de dimensión vectorial infinita las bases de Hilbert B son conjuntos linealmente independientes **pero no son bases vectoriales**. Basta pensar que elementos de H de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, e_n, \quad \lambda_n \neq 0,\ \forall n,$$

  por ejemplo con $\lambda_n = 1/n$,no son combinaciones lineales de elementos de B (no son sumas con un número finito de términos).

- Se puede demostrar que todo espacio de Hilbert separable de dimensión vectorial infinita tiene dimensión vectorial igual a $c = \aleph_1$ mientras que sus bases de Hilbert sabemos que tienen cardinal $\aleph_0$. Es decir

$$dimH = \aleph_0 \implies DimH = \aleph_1 > dimH.$$

Ejemplo 34. *A principio de curso demostrabamos que el espacio de Hilbert l^2 tiene cardinal*

$$|l^2| = c.$$

Veamos que su dimensión vectorial $\mathrm{Dim}\, l^2$ *es también igual a c: Obviamente* $\mathrm{Dim}\, l^2 \leq c$ *ya que toda base vectorial es un subconjunto de l^2. Si consideramos ahora el conjunto S de elementos de l^2 de la forma*

$$u_a = (a^{n-1})_{n\geq 1} = (1, a, a^2, \ldots), \quad 0 < a < 1,$$

es claro que $|S| = c$ y además S es un conjunto linealmente independiente (probarlo usando determinantes de las componentes). Luego se deduce que $\mathrm{Dim}\, l^2 = c$

Aproximación de funciones en media cuadrática

Dado un subespacio de Hilbert M de H para determinar las proyecciones ortogonales sobre M de los vectores H se procede del modo siguiente:

1. Se construye una base de Hilbert $B = \{e_n\}_{n\in A}$ de M.

2. Para cada vector $u \in H$ su proyección ortogonal sobre M viene dada por

$$u_M = \sum_{n\in A} (e_n, u)\, e_n. \tag{32}$$

Para demostrar esta fórmula nótese que $(e_n, u - u_M) = (e_n, u) - (e_n, u) = 0$ para todo $n \in A$, luego $(u - u_M) \perp M$ y $u = u_M + u_{M^\perp}$ con $u_{M^\perp} \equiv u - u_M$. Por el teorema de la proyección ortogonal se sigue entonces lo enunciado. Además aplicando el teorema de Pitagoras tenemos que

$$||u - u_M|| = ||u_{M^\perp}|| = \sqrt{||u||^2 - ||u_M||^2}, \tag{33}$$

donde $||u_M||^2$ puede calcularse usando la identidad de Bessel en la forma

$$||u_M||^2 = \sum_{n\in A} |(e_n, u)|^2. \tag{34}$$

Una de las aplicaciones más importantes de los espacios de Hilbert H de funciones es el de la obtención

de **aproximaciones en media cuadrática** (en el sentido de la norma $||\,||$ de H) de funciones en H por medio de combinaciones lineales de funciones sencillas. El procedimiento entonces es seleccionar un conjunto finito $\{u_n\}_{n=1}^m$ de estas funciones sencillas y considerar aproximaciones de funciones de H mediante funciones del subespacio de dimensión finita $M = \text{lin}\{u_1, \ldots, u_m\}$. Aplicando el teorema de la proyección ortogonal la mejor aproximación en M a una función $u \in H$ es su proyección ortogonal u_M. Lo que hacemos entonces es construir una base ortonormal de M (ortonormalizando si es necesario el conjunto $\{u_n\}_{n=1}^m$ mediante el método de Gram-Schmidt) y calculando u_M mediante la fórmula (32). Finalmente el error cometido $||u - u_M||$ en la aproximación $u \simeq u_M$ se determina con la fórmula (33).

De forma análoga, si tenemos una base ortonormal $B = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ de un espacio de Hilbert H de funciones, toda función $u \in H$ admite un desarrollo de la forma

$$u = \sum_{n=1}^\infty (e_n, u)\, e_n, \tag{35}$$

que converge en media cuadrática (en el sentido de la norma $||\,||$ de H). En ese caso si denotamos M al subespacio lineal generado por los N primeros elementos $\{e_n\}_{n=1}^N$ de B, entonces toda suma parcial del desarrollo

$$\sum_{n=1}^N (e_n, u)\, e_n,$$

es la mejor aproximación u_M a u mediante funciones en M. Además el error cometido $||u - u_M||$ en tal aproximación $u \simeq u_M$ se determina con la fórmula (33).

Ejemplo 35. *El espacio de Hilbert* $H = L^2([0, 2\pi])$ *posee la base ortonormal dada por*

$$B = \{e_n(x) = \ e^{inx}/\sqrt{2\pi}\,\}_{n=0,\pm1,\pm2,\dots}.$$

Sea la función $u(x) = \chi_{[0,\pi]}(x)$*. Determinar el error cometido al aproximarla mediante dos términos de su desarrollo en esa base*

$$u(x) \simeq (e_0, u)e_0(x) + (e_1, u)e_1(x).$$

Calculando los correspondientes productos escalares

$$(e_0, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \mathrm{d}x = \sqrt{\pi/2}, \quad (e_1, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi e^{-ix}\mathrm{d}x = -i\sqrt{2/\pi},$$

se obtiene

$$u_M \equiv (e_0, u)e_0(x) + (e_1, u)e_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}e^{ix}$$

El error cometido en la aproximación es

$$\sqrt{||u||^2 - ||u_M||^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}}.$$

Donde hemos usado

$$||u||^2 = \int_0^\pi \mathrm{d}x = \pi, \quad ||u_M||^2 = |(e_0, u)|^2 + |(e_1, u)|^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$$

Ejemplo 36. *Consideremos el desarrollo de Fourier en* $L^2[-\pi, \pi]$ *de la función* $u(x) = \cos(x/2)$

$$cos(x/2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx) \Big).$$

Si truncamos en la forma

$$cos(x/2) \approx u_{trunc} = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \mathrm{sen}(x).$$

Calculamos los coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}, \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}x \cos(x/2)\mathrm{d}x = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos(x/2)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(3x/2) + \cos(x/2))\mathrm{d}x = \frac{4}{3\pi}$$

Expresando u_{trunc} *en términos de la base ortonormalizada*

$$u_{trunc} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}c_0(x) + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}c_1(x).$$

Por tanto
$$||u_{trunc}||^2 = \Big|\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Big|^2 + \Big|\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Big|^2 = \frac{88}{9\,\pi}.$$
Por otra parte
$$||u||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x/2)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(1+\cos(x))\mathrm{d}x = \pi.$$
Así que el error al aproximar con la truncación es
$$||u - u_{trunc}|| = \sqrt{||u||^2 - ||u_{trunc}||^2} = \sqrt{\pi - 88/9\pi}.$$

SERIES DE FOURIER TRIGONOMÉTRICAS

Toda función $u \in L^2([a,b])$ puede desarrollarse en serie de Fourier de exponenciales
$$\boxed{u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\omega x}}$$
donde $\omega := 2\pi/(b-a)$ y los coeficientes son
$$\boxed{c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{-in\omega x}u(x)\mathrm{d}x.}$$
También en serie de Fourier de senos y cosenos:
$$\boxed{u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x),}$$
donde los coeficientes son
$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b \cos n\omega x\, u(x)\mathrm{d}x, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b \operatorname{sen} n\omega x\, u(x)\mathrm{d}x, \quad n \geq 1. \end{aligned}} \tag{36}$$
En estos desarrollos las series convergen a la función en **media cuadrática**. Es decir, en el sentido de la norma de $L^2([a,b])$. Sin embargo es natural preguntarse por la **convergencia puntual** de estas series. Este es uno de los problemas clásicos del análisis funcional.

- El resultado fundamental sobre la convergencia puntual de series de Fourier es debido a Carleson (1965) y establece que la serie de Fourier de una función $u \in L^2([a,b])$ converge puntualmente a u en todo punto $x \in [a,b]$ casi doquiera (salvo a lo sumo en un subconjunto de medida cero)

- Una clase de funciones de $L^2([a,b])$ que es importante en la práctica son las C^1 a trozos. Una función $u = u(x)$ es C^1 a trozos en $[a,b]$ cuando existe una partición $a = c_1 < c_2 < \ldots < c_M = b$ de $[a,b]$ tal que $\forall i = 1, \ldots, M-1$, tanto u como su derivada primera u' son continuas en los subintervalos (c_i, c_{i+1}) y tienen límites laterales finitos en los extremos c_i y c_{i+1}.

  Para estas funciones el problema de la convergencia puntual de sus series de Fourier está totalmente resuelto por el siguiente teorema de Dirichlet (1829): Si $u(x)$ es una función C^1 a trozos en $[a,b]$ entonces sus series de Fourier convergen puntualmente en todo punto $x \in [a,b]$ y su límite es

$$\begin{cases} u(x) \text{ si } x \text{ es un punto de } (a,b) \text{ en que } u \text{ es continua,} \\ \\ \frac{u(x+)+u(x-)}{2} \text{ si } x \text{ es un punto de } (a,b) \text{ en que } u \text{ es discontinua} \\ \\ \frac{u(a)+u(b)}{2} \text{ en } x = a, b \end{cases}$$

4. DISTRIBUCIONES

ESPACIOS DE FUNCIONES ”PRUEBA”

Cuando estudiemos espacios de distribuciones usaremos dos tipos de espacios funcionales que se denominan espacios de funciones ”prueba” o ”test”.

- Espacios $\mathcal{D}$ de funciones C^∞ de soporte compacto.
- Espacios $\mathcal{S}$ de funciones C^∞ que decrecen rápidamente en el infinito.

Denotaremos las derivadas parciales en la forma concisa:

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial^{\alpha_1}x_1 \cdots \partial^{\alpha_N}x_N},$$

con multi-índices

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N.$$

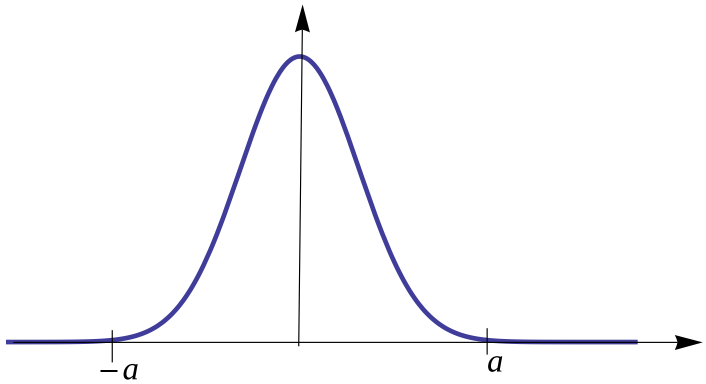
ESPACIOS $\mathcal{D}$

Definición 23. *El espacio $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ está formado por las funciones $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ de clase C^∞ que solo son distintas de cero en un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^N$*

Ejemplo 37. *Elementos de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ son las funciones ($a > 0$)*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{a^2}{x^2-a^2}\right) \ \textit{si } x \in (-a,a) \\ \\ \textit{cero si } x \notin (-a,a) \end{cases}$$

que se anulan fuera del intervalo $[-a,a]$ y son derivables a cualquier orden en todo punto de la recta.



La definición de límite en $\mathcal{D}$ es

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\, \exists\, R > 0 \text{ tal que } \varphi_n(x) = 0,\, \forall |x| > R \text{ y } n \geq 1 \\ \\ 2)\, D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi, \quad n \to \infty \text{ uniformemente } \forall |\alpha| \geq 0 \end{cases}$$

Comentarios

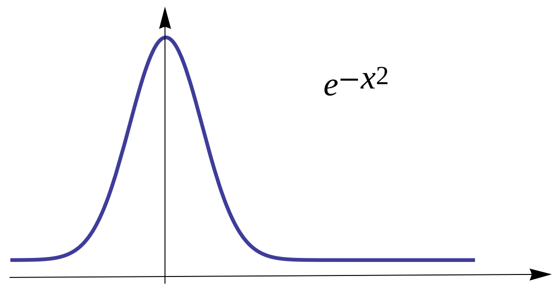
- De forma análoga de definen los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ siendo Ω un abierto no vacio de $\mathbb{R}^N$.
- Se verifica que
$$\mathcal{D} \subset_{denso} L^2.$$
- Los espacios $\mathcal{D}$ no heredan su operación de límite de una noción de norma. Sin embargo son **completos** en el sentido siguiente: si una sucesión $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ cumple que es de de Cauchy
$$\lim_{n,m\to\infty} (\varphi_n - \varphi_m) = 0, \quad \text{en } \mathcal{D},$$
entonces es convergente en $\mathcal{D}$. Es decir existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}$.
- Los operadores de derivación
$$D^\alpha : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \quad \varphi \to D^\alpha \varphi,$$
determinan aplicaciones lineales continuas

ESPACIOS $\mathcal{S}$

Definición 24. *El espacio $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ está formado por las funciones $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ de clase C^∞ tales que*
$$x^\alpha\, D^\beta \varphi(x) \to 0, \quad \forall |\alpha| \geq 0,\, |\beta| \geq 0, \quad x \to \infty.$$
donde denotamos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$.

Ejemplo 38. *Elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ son las funciones Gaussianas*

$$\varphi(x) = e^{-a^2\,x^2}, \quad a > 0.$$



La definición de límite en $\mathcal{S}$ es

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \Longleftrightarrow x^\alpha\, D^\beta \varphi_n \to x^\alpha\, D^\beta \varphi, \quad \forall |\alpha| \geq 0,\, |\beta| \geq 0, \quad n \to \infty,$$

uniformemente en $\mathbb{R}^N$.

Comentarios

- Es claro que $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, aunque $\mathcal{D} \subsetneqq \mathcal{S}$ (considerar por ejemplo las funciones Gaussianas).
- Se verifica que
$$\mathcal{D} \subset_{denso} \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} \subset_{denso} L^2.$$
- Los espacios $\mathcal{S}$ no heredan su operación de límite de una noción de norma. Sin embargo son **completos** en el sentido siguiente: Si una sucesión $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ cumple que es de de Cauchy
$$\lim_{n,m\to\infty} (\varphi_n - \varphi_m) = 0, \quad \text{en } \mathcal{S},$$
entonces es convergente en $\mathcal{S}$. Es decir existe $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{S}$.
- Los operadores de derivación
$$D^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \quad \varphi \to D^\alpha \varphi,$$
determinan aplicaciones lineales continuas.
- Dada una función $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ el operador de multiplicación
$$u \cdot : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \quad \varphi \to u \cdot \varphi,$$
es una aplicación lineal continua. Para una propiedad análoga en el caso del espacio $\mathcal{S}$ debemos tomar $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ pero con un crecimiento en el infinito a lo sumo polinomial.

ESPACIOS DE DISTRIBUCIONES

Recordemos que dado un espacio funcional $\mathcal{F}$, denotamos mediante $\mathcal{F}'$ a su **espacio dual** que denominaremos **espacio de distribuciones** asociado. Es decir al espacio formado por las aplicaciones

$$T : \mathcal{F} \to \mathbb{C}, \quad \varphi \to \langle T, \varphi \rangle,$$

que sean lineales y continuas:

1. **Linealidad**: $\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. **Continuidad**: Para toda sucesión convergente $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ se cumple que

$$\langle T, \lim_{n\to\infty} \varphi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle.$$

El espacio $\mathcal{F}'$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ definiendo las operaciones de suma $T_1 + T_2$ y producto λT en la forma

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \langle \lambda T, \varphi, \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

También posee una operación de límite que definimos así: Dada una sucesión $(T_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}'$ decimos que su límite es un elemento T de $\mathcal{F}'$ cuando

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}.$$

ESPACIOS $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{S}'$

Denotamos $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{S}'$ a los espacios de distribuciones asociados a $\mathcal{D}$ y $\mathcal{S}$ respectivamente.

Ejemplo 39. *Probar que*

$$\boxed{\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'}$$

Por un lado sabemos que

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}.$$

Luego si $T \in \mathcal{S}'$, al ser una aplicación lineal sobre $\mathcal{S}$ también lo será sobre $\mathcal{D}$. Por otro lado si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}$, también lo hace en $\mathcal{S}$ y al ser T continua en $\mathcal{S}$ se cumple que $\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$. Luego T es continua en $\mathcal{D}$

DISTRIBUCIONES REGULARES

Definición 25. *Dada una función $u = u(x)$ localmente integrable en $\mathbb{R}^N$ (es decir que u es integrable Lebesgue sobre cualquier intervalo cerrado y acotado I de $\mathbb{R}^N$), denotamos por T_u a la distribución en $\mathcal{D}'$*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}^N x, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Comentarios

- La imagen de $\varphi \in \mathcal{D}$ bajo T_u define una aplicación sobre $\mathcal{D}$, pues la imagen de cualquier $\varphi \in \mathcal{D}$ bajo T_u existe. Para verlo basta tomar un intervalo cerrado y acotado I fuera del cual se anule φ, se obtiene

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}^N x \Big| = \Big| \int_I u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}^N x \Big| \leq \mathrm{Max}_I |\varphi| \int_I |u(x)|\,\mathrm{d}^N x < \infty.$$

- La aplicación T_u es obviamente lineal. Para ver que es continua consideremos una sucesión $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ convergente en $\mathcal{D}$ con límite $\varphi \in \mathcal{D}$. Entonces

$$\begin{cases} 1)\ \exists\, R > 0 \text{ tal que } \varphi_n(x) = 0,\ \forall |x| > R \text{ y } n \geq 1 \\ \\ 2)\ D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi \text{ uniformemente } \forall |\alpha| \geq 0 \end{cases}$$

  Por tanto

$$|\langle T_u, \varphi_n - \varphi\rangle| = \Big| \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,(\varphi_n(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}^N x \Big|$$

$$= \Big| \textstyle\int_{|x|\leq R} u(x)\,(\varphi_n(x) - \varphi(x))\,\mathrm{d}^N x \Big| \leq \mathrm{Sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_{|x|<R} |u(x)|\,\mathrm{d}^N x \to 0, \quad n \to \infty,$$

  Dado que φ_n converge uniformemente a φ en todo $\mathbb{R}^N$. De esta forma hemos probado que

$$\langle T, \lim_{n\to\infty} \varphi_n\rangle = \langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle.$$

De igual forma

Definición 26. *Dada una función $u = u(x)$ localmente integrable en $\mathbb{R}^N$ y con comportamiento* **moderado** *en el infinito (es decir existe algún polinomio $p(x)$ tal que $u(x)/p(x) \to 0$ c.d. cuando $x \to \infty$), se demuestra que define una distribución T_u en $\mathcal{S}'$ dada por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}^N x, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Estas distribuciones definidas por funciones se denominan **distribuciones regulares** y en muchas ocasiones se denotan mediante el símbolo de la función

$$\boxed{\text{Si hablamos de } u \text{ como distribución estamos hablando de } T_u}$$

Ejemplo 40. *Toda función $u \in L^2$ define una función localmente integrable, pues dado un intervalo cerrado y acotado I tenemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que*

$$\int_I |u(x)|\, \mathrm{d}^N x = (|u|, \chi_I) = |(|u|\,\chi_I, \chi_I)| \leq ||u\,\chi_I||\,||\chi_I|| \leq ||u||\,\mu(I)^{1/2} < \infty.$$

Por tanto podemos decir que las funciones de cuadrado integrable son distribuciones

$$\boxed{L^2 \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'}$$

Lo mismo puede demostrarse para las funciones de $L^p\,(p \geq 1)$

DISTRIBUCIONES SINGULARES

No todas las distribuciones son regulares, las que no lo son se denominan **distribuciones singulares**.

Definición 27. *Dado un punto cualquiera $a \in \mathbb{R}^N$ la* **delta de Dirac centrada en** *a se define como*

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a),$$

y es una distribución en los espacios $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. De hecho podemos también considerar la delta como un elemento del espacio dual del espacio $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ dotado de la operación de límite puntual.

Comentarios

- Para $a = 0$ se denota $\delta_a = \delta$.
- No existe ninguna función localmente integrable tal que $T_u = \delta_a$, pues debería anularse para todo $x \in \mathbb{R}^N$ c.d. en cuyo caso su acción sobre todas las funciones de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{S}$ daría cero, lo cual es contradictorio con la definición de las distribuciones delta. Por tanto las deltas de Dirac son distribuciones singulares.
- A pesar de lo dicho se utiliza la notación

  $$\delta(x - a),$$

  para denotar la delta de Dirac, como si fuera una función, y se escribe

  $$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \delta(x - a)\,\varphi(x)\, \mathrm{d}^N x = \varphi(a).$$

- Las distribuciones singulares como la delta de Dirac pueden caracterizarse como límites, en el espacio de distribuciones, de sucesiones de distribuciones regulares.

- Es a veces de utilidad emplear la notación siguiente para operar con distribuciones emulando las propiedades de las distribuciones regulares

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} T(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}^N x.$$

Ejemplo 41. *Demostrar que*

$$\delta_a = \lim_{n\to\infty} T_{u_n}, \quad \textit{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ ,$$

siendo

$$u_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [a - \frac{1}{2\,n}, a + \frac{1}{2\,n}] \\ \\ \textit{cero en el resto de } \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplo 42. *Veamos que* **la delta es un límite de Gaussianas**

$$\delta = \lim_{n\to\infty} T_{u_n}, \quad \textit{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

siendo

$$u_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2\, x^2}.$$

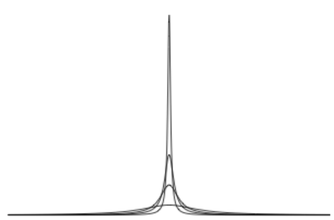


Fig. Límite de Gaussianas en $\mathcal{D}'$.

Usando el cambio de variable $y = n\, x$ se obtiene

$$\langle T_{u_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2\, x^2}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-y^2}\, \varphi(\frac{y}{n})\, \mathrm{d}y.$$

Podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para calcular el límite de la integral cuando $n \to \infty$ ya que

$$\left| e^{-y^2}\, \varphi(\frac{y}{n}) \right| \leq ||\varphi||_\infty\, e^{-y^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

De esta forma encontramos que

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{u_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-y^2}\, \varphi(0)\, \mathrm{d}y = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, \mathrm{d}y = \varphi(0),$$

lo cual demuestra lo que hemos enunciado.

Distribuciones en electrostática

La noción de distribución singular tiene su origen en problemas como los que se encuentran en electrostática al intentar describir ciertas distribuciones 3-dimensionales de carga $\rho = \rho(x)$, ($x \in \mathbb{R}^3$) de forma que para todo subconjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ con medida no nula

$$\int_V \rho(x)\,\mathrm{d}^3x = \text{carga contenida en } V.$$

Casos típicos son los siguientes.

1) Una carga puntual de magnitud q localizada en el punto a.

2) Una distribución de carga localizada sobre una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con densidad $\lambda = \lambda(x)$ por unidad de longitud.

3) Una distribución de carga localizada sobre una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con densidad $\sigma = \sigma(x)$ por unidad de área.

Las distribuciones correspondientes son

1) Para una carga puntual de magnitud q localizada en el punto a:

$$\rho(x) = q\,\delta_a.$$

Adviértase que efectivamente

$$\int_V \rho(x)\,\mathrm{d}^3x = \int_V q\,\delta(x-a)\mathrm{d}^3x = \langle q\,\delta_a, \chi_V\rangle = \begin{cases} q & x \in V, \\ \\ \text{cero en otro caso.} \end{cases}$$

2) Para una distribución de carga localizada sobre una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con densidad $\lambda = \lambda(x)$ por unidad de longitud:

$$\rho(x) = \lambda(x)\,\delta_\Gamma,$$

siendo por definición $\lambda(x)\,\delta_\Gamma$ la distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\langle \lambda(x)\,\delta_\Gamma, \varphi\rangle = \int_\Gamma \lambda(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}l,$$

donde $\mathrm{d}l$ indica el elemento diferencial de longitud sobre la curva.

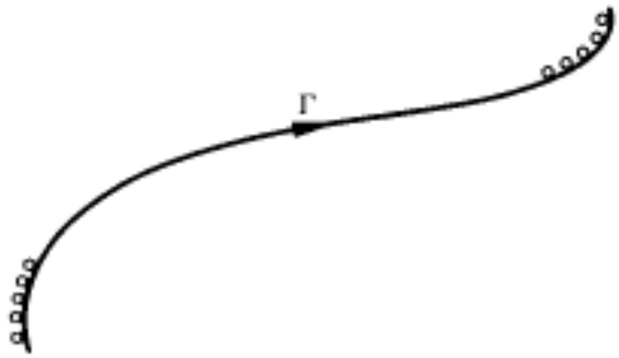


Fig. Distribución de carga sobre una curva conductora.

3) Para una distribución de carga localizada sobre una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con densidad $\sigma = \sigma(x)$ por unidad de área:

$$\rho(x) = \sigma(x)\,\delta_S,$$

siendo por definición $\sigma(x)\,\delta_S$ la distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\langle \sigma(x)\,\delta_S, \varphi\rangle = \int_S \sigma(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}S,$$

donde $\mathrm{d}S$ indica el elemento diferencial de área sobre la superficie.

Otro ejemplo importante de distribución singular es el siguiente:

Definición 28. *En $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se define la distribución* **valor principal de Cauchy***:*

$$\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Podemos ver que dada $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si se anula fuera de $[-a, a]$ entonces

$$\int_{a\geq|x|\geq\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0,$$

pues es una integral de una función impar sobre un dominio simétrico de $\mathbb{R}$. Por tanto

$$\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\geq|x|\geq\epsilon} \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

siendo

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}.$$

Aplicando el teorema del valor medio obtenemos

$$\psi(x) = \varphi'(c(x)),$$

con $c(x)$ *algún punto intermedio entre* 0 *y* x *. Por tanto*

$$|\psi(x)| \leq ||\varphi'||_\infty,$$

y como consecuencia

$$\left|\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\rangle\right| \leq 2a||\varphi'||_\infty.$$

De donde se deduce inmediatamente que $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ *define un elemento de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$*.*

PRODUCTO DE FUNCIONES POR DISTRIBUCIONES

Definición 29. *El producto de una función* $u = u(x)$ *por una distribución* T *se define como*

$$\langle u\,T, \varphi\rangle = \langle T, u\,\varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\text{ó } \forall\varphi \in \mathcal{S}.$$

Para que tenga sentido la definición la función u *ha de estar en* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *en el caso* $T \in \mathcal{D}'$ *y en* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *con crecimiento en el infinito a lo sumo polinomial en el caso* $T \in \mathcal{S}'$ *.*

Ejemplo 43. *Probar que* $u(x)\,\delta(x-a) = u(a)\,\delta(x-a)$*.*

$$\langle u\,\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, u\varphi\rangle = u(a)\,\varphi(a) = u(a)\langle\,\delta_a, \varphi\rangle = \langle u(a)\,\delta_a, \varphi\rangle$$

Adviertase en particular que

$$x\,\delta(x-a) = a\,\delta(x-a),$$

Lo cual en términos de la Fisica Cuántica significa que $\psi_a(x) = \delta(x-a)$ *es una autofunción con autovalor* $\lambda = a$ *del operador de posición* $Q\,\psi(x) = x\,\psi(x)$*.*

DERIVADAS DE DISTRIBUCIONES

CASO DE 1 VARIABLE

Definición 30. *Sea T una distribución en $\mathcal{F}'$ donde $\mathcal{F}$ es el espacio de funciones prueba $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Para todo entero $n \geq 1$ se define la derivada n-ésima de T respecto de x como*

$$\langle D^n T, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, D^n \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

Comentarios

- Las derivadas $D^n T$ son distribuciones, es decir funcionales lineales continuos. La linealidad es trivial. Demostrar la continuidad.
- Es también inmediato demostrar las propiedades

$$D^n (T_1 + T_2) = D^n T_1 + D^n T_2, \quad D^n (\lambda T) = \lambda D^n T, \ (\lambda \in \mathbb{C}).$$

- Dada una función $u = u(x)$ localmente integrable, no tiene por que existir su derivada respecto de x como función, sin embargo **siempre existe como distribución**.

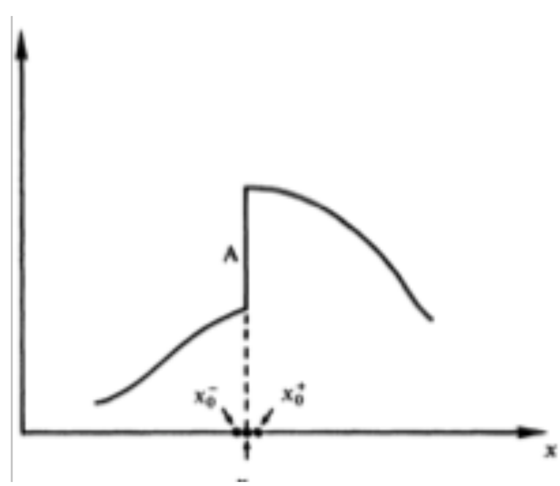
Ejemplo 44. *Para la delta de Dirac se obtiene*

$$\langle D^n \delta_a, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta_a, D^n \varphi \rangle = (-1)^n D^n \varphi(a).$$

Derivadas de funciones como distribuciones

Sea $u = u(x)$ una función que tiene derivada $Du(x)$ continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$ salvo en un punto x_0 en el que la función no es derivable (por lo tanto u no es continua en x_0). Supongamos que en x_0 la función tiene una discontinuidad de primera especie

$$u(x_0^+) - u(x_0^-) = A.$$



Veamos que en ese caso se verifica

$$DT_u = T_{Du} + A\,\delta_{x_0}. \tag{37}$$

Primero rompemos la integral en dos intervalos en los que la función u es una función con derivada continua y así poder aplicar integración por partes

$$\langle DT_u, \varphi\rangle = -\langle T_u, D\varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} u\, D\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{x_0} u\, D\varphi\,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{\infty} u\, D\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Integrando por partes ambas integrales se obtiene

$$\langle DT_u, \varphi\rangle = -(u\varphi)\Big|_{-\infty}^{x_0^-} - (u\varphi)\Big|_{x_0^+}^{\infty} + \textstyle\int_{-\infty}^{x_0} Du\,\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{\infty} Du\,\varphi\,\mathrm{d}x$$

$$= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} Du\,\varphi\,\mathrm{d}x - u(x_0^-)\,\varphi(x_0) + u(x_0^+)\,\varphi(x_0) = \langle T_{Du} + A\,\delta_{x_0}, \varphi\rangle$$

La fórmula (37) es de gran importancia y a veces es conveniente escribirla en la forma

$$\boxed{D'u = Du + [u]_{x_0}\,\delta(x - x_0),}$$

donde $D'u$ denota la derivada de la distribución que determina u, Du la distribución que determina la derivada de u y $[u]_{x_0} = u(x_0^+) - u(x_0^-)$ el salto de u en x_0 .

Por supuesto si son varios puntos $x_i\,(i = 1,\ldots,n)$ en los que la función no es derivable y tiene discontinuidades de primera especie

$$u(x_i^+) - u(x_i^-) = [u]_{x_i}.$$

Entonces la fórmula se generaliza a

$$\boxed{D'u = Du + \textstyle\sum_{i=1}^{n} [u]_{x_i}\,\delta(x - x_i).}$$

Ejemplo 45. *Consideremos la función escalón*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Evidentemente $\theta(x)$ es derivable salvo en $x_0 = 0$ y su derivada vale cero. Además el salto que efectúa en $x_0 = 0$ es de magnitud 1. Luego

$$D'\theta(x) = \delta.$$

Ejemplo 46. *Consideremos la función $|x|$*

$$|x| = \begin{cases} -x, & -\infty < x \le 0, \\ x, & 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Evidentemente $|x|$ es derivable salvo en $x_0 = 0$ y su derivada en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ es la función signo

$$\epsilon(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Además $|x|$ es continua en $x_0 = 0$ (no salta). Luego en el sentido de distribuciones

$$D'|x| = \epsilon(x).$$

Del mismo modo, dado que $\epsilon(x)$ tiene derivada cero para $x \neq 0$ y salta en $x_0 = 0$ con una magnitud igual a 2, deducimos que

$$(D')^2|x| = D'\epsilon(x) = 2\,\delta(x).$$

CASO GENERAL DE N VARIABLES

Definición 31. *Sea T una distribución en $\mathcal{F}'$ donde $\mathcal{F}$ es el espacio de funciones prueba $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ó $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ se define la derivada $D^\alpha T$ respecto de las variables x como*

$$\langle D^\alpha\, T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle T, D^\alpha\,\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

Comentarios

- Las derivadas $D^\alpha\,T$ son distribuciones, es decir funcionales lineales continuos.
- Es también inmediato demostrar las propiedades

  $$D^\alpha\,(T_1 + T_2) = D^\alpha\,T_1 + D^\alpha\,T_2, \quad D^n\,(\lambda\,T) = \lambda\,D^n\,T,\ (\lambda \in \mathbb{C}).$$

- Dada una función $u = u(x)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ si consideramos su distribución regular asociada T_u es claro que

  $$\langle D^\alpha\,T_u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle T_u, D^\alpha\,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\int_{\mathbb{R}^N} u(x) D^\alpha\,\varphi \mathrm{d}^N x$$

  $$= \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha u(x)\,\varphi \mathrm{d}^N x = \langle T_{D^\alpha u}, \varphi\rangle. \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

  Es decir $D^\alpha\,T_u = T_{D^\alpha u}$. Por tanto las derivadas de u como distribución coinciden con las derivadas de u como función.

- Dada una función $u = u(x)$ localmente integrable, no tienen por que existir sus derivadas respecto de las variables x como función, sin embargo **siempre existen como distribuciones**.
- La derivación es siempre una operación continua sobre las distribuciones. Es decir siempre se cumple que

  $$\boxed{D^\alpha\,\text{lím}_{n\to\infty}\,T_n = \text{lím}_{n\to\infty}\,D^\alpha T_n.}$$

  La demostración es muy simple teniendo en cuenta las definiciones de límite y de derivación de distribuciones:

  $$\langle D^\alpha\,\text{lím}_{n\to\infty}\,T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \text{lím}_{n\to\infty}\,T_n, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\text{lím}_{n\to\infty}\langle T_n, D^\alpha\varphi\rangle$$

  $$= \text{lím}_{n\to\infty}\langle D^\alpha T_n, \varphi\rangle = \langle \text{lím}_{n\to\infty}\,D^\alpha T_n, \varphi\rangle.$$

- Como vimos anteriormente, el producto $u\,T$ de una función $u = u(x)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ por una distribución T está bién definido para $T \in \mathcal{D}'$ y también para $T \in \mathcal{S}'$ si u tiene un comportamiento moderado en el infinito. En tales casos se verifica la regla de la derivada del producto. Por ejemplo en el caso de una variable
$$D(u\,T) = (Du)T + u\,DT.$$
La demostración es muy sencilla ya que para todo φ en $\mathcal{D}$ o en $\mathcal{S}$ se verifica:
$$\begin{aligned}\langle D(u\,T), \varphi\rangle &= -\langle u\,T, D\varphi\rangle = -\langle T, u\,D\varphi\rangle \\ &= -\langle T, D(u\,\varphi) - (Du)\varphi\rangle = \langle DT, u\,\varphi\rangle + \langle (Du)T, \varphi\rangle \\ &= \langle (Du)T + u\,DT, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Ejemplo 47. *Calculemos*
$$(D')^2(|x|\cos x)$$
La primera derivada es
$$D'(|x|\cos x) = D(\cos x)\,|x| + \cos x\,(D'|x|) = -(\mathrm{sen}x)|x| + \cos x\,\epsilon(x).$$
Por tanto
$$\begin{aligned}(D')^2(|x|\cos x) &= -D(\mathrm{sen}x)\,|x| - (\mathrm{sen}x)D'|x| + D(\cos x)\,\epsilon(x) + \cos x\,D'\epsilon(x) \\ &= -(\cos x)|x| - 2(\mathrm{sen}x)\,\epsilon(x) + 2\,\cos x\,\delta(x) \\ &= -(\cos x)|x| - 2(\mathrm{sen}x)\,\epsilon(x) + 2\,\delta(x).\end{aligned}$$

Sea $u = u(x)$ una función sobre $\mathbb{R}^N$ que admite derivadas primeras continuas respecto de todas las variables salvo en una hipersuperficie S orientada con un vector unitario saliente perpendicular
$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x) = (n_1(x), \ldots, n_N(x))$$
en donde sufre discontinuidades de primera especie
$$\lim_{x\to 0}(u(x + \epsilon\mathbf{n}(x)) - u(x - \epsilon\mathbf{n}(x))) = [u(x)]_S, \quad x \in S.$$
Entonces se verifica la identidad
$$\boxed{\partial'_{x_i} u = \partial_{x_i} u + n_i(x)[u(x)]_S\,\delta_S,}$$
Para demostrar esta propiedad suponemos que $\mathbb{R}^N$ queda dividido en dos porciones $G_{int} \cup G_{ext}$ separadas por la hipersuperficie S y aplicamos la fórmula de Green a cada una de ellas
$$\begin{aligned}\langle \partial'_{x_i} u, \varphi\rangle &= -\langle u, \partial_{x_i}\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\partial_{x_i}\varphi\,\mathrm{d}^N x \\ & - \int_{G_1} u(x)\partial_{x_i}\varphi\,\mathrm{d}^N x - \int_{G_2} u(x)\partial_{x_i}\varphi\,\mathrm{d}^N x \\ &= \int_{G_1} \partial_{x_i} u(x)\,\varphi\,\mathrm{d}^N x + \int_{G_2} \partial_{x_i} u(x)\,\varphi\,\mathrm{d}^N x + \int_S [u(x)]_S\,n_i(x)\,\varphi\,\mathrm{d}S \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i} u(x)\,\varphi\,\mathrm{d}^N x + \int_S [u(x)]_S\,n_i(x)\,\varphi\,\mathrm{d}S, \quad \varphi \in \mathcal{D},\end{aligned}$$

En particular para la divergencia $\nabla'\mathbf{u}$ de un campo vectorial $\mathbf{u} = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ con componentes de este tipo, la fórmula anterior nos dice

$$\nabla'\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}(x)]_S \, \delta_S. \tag{38}$$

Aplicación: Discontinuidad del campo electrico sobre una superficie cargada

La fórmula anterior puede aplicarse para calcular el campo eléctrico creado por una distribución de carga sobre una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con densidad $\sigma(x)$. Por las ecuaciones de la electrostática sabemos que

$$\nabla'\vec{E} = 4\,\pi\,\rho,$$

donde la distribución de carga viene dada por

$$\rho(\vec{x}) = \sigma(\vec{x})\,\delta_S.$$

Aplicando entonces la fórmula (38) deducimos que la distribución regular asociada a $\nabla\vec{E}$ es cero y que la componente normal del campo eléctrico sufre una discontinuidad sobre S dada por

$$(\vec{E}_2(\vec{x}) - \vec{E}_1(\vec{x})) \cdot \vec{n} = 4\,\pi\,\sigma(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S.$$

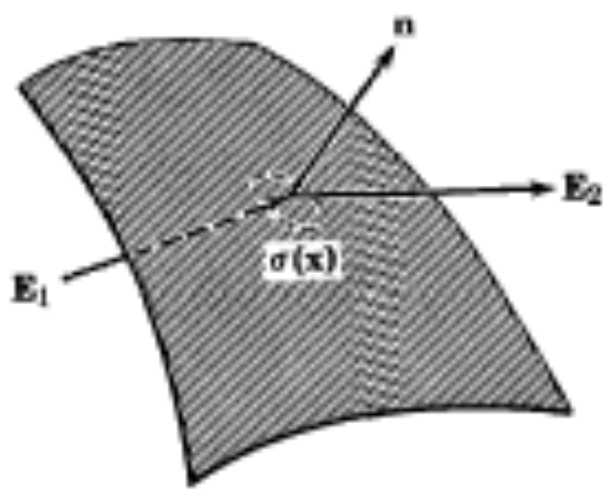


Fig. Discontinuidad del campo eléctrico

Ejercicio 1. *Determinar la discontinuidad del campo eléctrico producida por una densidad de carga sobre la superficie esférica dada por* $\sigma(\theta, \phi) = \cos\theta$.

ECUACIONES DIFERENCIALES EN ESPACIOS DE DISTRIBUCIONES

Una ecuación diferencial en un espacio de distribuciones $\mathcal{F}'$ es un problema de la forma: dada $T_0 \in \mathcal{F}'$ determinar las soluciones $T \in \mathcal{F}'$ de la ecuación

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} T = T_0.$$

La solución general es dada por

$$T = T_{part} + T_{hom},$$

con T_{part} una solución particular cualquiera y T_{hom} la solución general de la ecuación homogenea. Resolver problemas de ecuaciones diferenciales en todo el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$ es en general muy complicado. Sin embargo es mucho más simple hacerlo en subespacios de $\mathcal{D}'$ como los de distribuciones regulares del tipo

$$C^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i=1}^n) = \{\text{funciones } u \text{ de clase } C^{\infty} \text{ a trozos en } \mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i=1}^n\},$$

en los que podemos emplear fórmulas como

$$D'u = Du + \sum_{i=1}^{n} [u]_{x_i}\, \delta(x - x_i),$$

$$(D')^2 u = D^2 u + \sum_{i=1}^{n} [u]_{x_i}\, D\delta(x - x_i) + \sum_{i=1}^{n} [Du]_{x_i}\, \delta(x - x_i).$$

Ejemplo 48. *Resolver la ecuación*

$$x\, DT = 0,$$

en $C^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. En este caso la ecuación se escribe

$$x\, Du + x[u]_0 \delta(x) = 0.$$

Por tanto como $x\delta(x) = 0$ la solución es cualquier $u \in C^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ con $Du(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es decir

$$u(x) = \begin{cases} C_-, & x < 0 \\ C_+, & x > 0, \end{cases}$$

con $C_{\pm}$ arbitrarias.

Ejemplo 49. *Resolver la ecuación*

$$D^2T = \delta'(x),$$

en $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. *En este caso la ecuación se escribe*

$$D^2u + [u]_0\delta'(x) + [u']_0\delta(x) = \delta'(x).$$

Por tanto buscamos $u \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *tal que*

$$D^2u(x) = 0, \quad \forall x \neq 0 \Longleftrightarrow u(x) = \begin{cases} A_1x + B_1, & x < 0 \\ A_2x + B_2, & x > 0 \end{cases}$$

verificando

$$[u]_0 = u(0+) - u(0-) = 1, \quad [u']_0 = u'(0+) - u'(0-) = 0.$$

Es decir

$$B_2 - B_1 = 1, \quad A_2 - A_1 = 0.$$

Lo cual nos lleva a la solución

$$u(x) = Ax + B + \theta(x).$$

Ejercicio 2. *Resolver en* $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *la ecuación de Newton en una dimensión*

$$m\, D_t^2 x = F,$$

con una fuerza

1. $F(t) = C\delta(t)$.
2. $F(t) = C\delta'(t)$.

FUNCIONES DE GREEN

Definición 32. *Dado una ecuaciones diferencial lineal con un término inhomogeneo*

$$\sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) = f(x).$$

una **función de Green** *para esta ecuación es una función $G = G(x, x')$ de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^{2N}$ salvo para $x = x'$ que satisface*

$$\sum_\alpha a_\alpha(x)(D'_x)^\alpha G(x, x') = \delta(x - x').$$

Sin entrar en detalles sobre las condiciones de contorno necesarias, si conocemos una función de Green G entonces un candidato a solución particular es

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x, x')\, f(x')\, \mathrm{d}^N x',$$

ya que, operando de forma no rigurosa , se obtiene

$$\sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha u_0(x) = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha \Big(\int_{\mathbb{R}^N} G(x, x')\, f(x')\, \mathrm{d}^N x' \Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\sum_\alpha a_\alpha(x)(D'_x)^\alpha G(x, x') \Big) f(x')\, \mathrm{d}^N x' = \int_{\mathbb{R}^N} \delta(x - x')\, f(x')\, \mathrm{d}^N x' = f(x).$$

FUNCIONES DE GREEN PARA ECUACIONES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN

Consideremos el cálculo de funciones de Green para una EDO de segundo orden:

$$a_2(x) D^2 u + a_1(x) D u + a_0(x) u = f. \tag{39}$$

La ecuación para $G(x, x')$ es

$$a_2(x)(D'_x)^2 G(x, x') + a_1(x) D'_x G(x, x') + a_0(x) G(x, x') = \delta(x - x').$$

Aplicando las fórmulas anteriores de derivación de distribuciones nos queda

$$a_2(x) D_x^2 G(x, x') + a_1(x) D_x G(x, x') + a_0(x) G(x, x') + a_2(x)[G]_{x=x'} \delta'(x - x')$$

$$+ a_2(x)[D_x G]_{x=x'} \delta(x - y) + a_1(x)[G]_{x=x'} \delta(x - x') = \delta(x - x').$$

Por tanto

$$a_2(x) D_x^2 G(x, x') + a_1(x) D_x G(x, x') + a_0(x) G(x, x') = 0, \quad \text{para } x \neq x'. \tag{40}$$

y

$$[G]_{x=x'} = 0, \quad a_2(x')[D_x G]_{x=x'} = 1. \tag{41}$$

Para resolver estas ecuaciones determinamos una base $\{u_1(x), u_2(x)\}$ de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogenea $a_2 D^2 u + a_1 Du + a_0 u = 0$ y construimos una solución de (40) de la forma

$$G(x,x') = \begin{cases} A(x')u_1(x), & \text{para } x < x' \\ \\ B(x')u_2(x), & \text{para } x > x' \end{cases} \tag{42}$$

donde $A(x')$ y $B(x')$ son coeficientes a determinar. Imponiendo ahora las condiciones (41) nos queda el sistema de dos ecuaciones lineales para nuestras incógnitas $A(x')$ y $B(x')$:

$$\begin{cases} A(x')u_1(x') - B(x')u_2(x') = 0, \\ \\ A(x')u_1'(x') - B(x')u_2'(x') = -\frac{1}{a_2(x')}. \end{cases}$$

Resolviendo por la regla de Cramer nos queda

$$A(x') = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -u_2(x') \\ -1/a_2(x') & -u_2'(x') \end{vmatrix}}{-W(u_1,u_2)(x')} = \frac{u_2(x')}{a_2(x')W(u_1,u_2)(x')},$$

$$B(x') = \frac{\begin{vmatrix} u_1(x') & 0 \\ u_1'(x') & -1/a_2(x') \end{vmatrix}}{-W(u_1,u_2)(x')} = \frac{u_1(x')}{a_2(x')W(u_1,u_2)(x')},$$

donde

$$W(u_1, u_2) = u_1 u_2' - u_1' u_2,$$

es el determinante Wronskiano de u_1 y u_2. LLevando este resultado a (62) obtenemos finalmente

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)u_2(x')}{a_2(x')W(u_1,u_2)(x')}, & \text{para } x < x' \\ \\ \dfrac{u_1(x')u_2(x)}{a_2(x')W(u_1,u_2)(x')}, & \text{para } x > x' \end{cases} \tag{43}$$

Cualquier otra función de Green de (39) se obtendrá sumando a esta una solución de la ecuación homogenea $a_2 D_x^2 G_0(x,x') + a_1 D_x G_0(x,x') + a_0 G_0(x,x') = 0$ en $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Ejemplo 50. *Para*

$$D^2u = f,$$

tomando

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = 1,$$

se obtiene

$$G(x,x') = \begin{cases} -x, & \text{para } x < x' \\ \\ -x', & \text{para } x > x' \end{cases}$$

Ejemplo 51. *Consideremos la ecuación de Bessel*

$$x^2D^2u + xDu + x^2u = 0.$$

En este caso podemos tomar

$$u_1(x) = J_0(x), \quad u_2(x) = N_0(x),$$

y sabemos del curso de ecuaciones ordinarias que

$$W(J_0, N_0)(x') = \frac{2}{\pi x'}.$$

Entonces como en este caso $a_2(x) = x^2$ *se obtiene*

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2x'} J_0(x)N_0(x'), & \text{para } x < x' \\ \\ \dfrac{\pi}{2x'} J_0(x')N_0(x), & \text{para } x > x' \end{cases}$$

No entraremos en la teora de funciones de Green para ecuaciones en derivadas parciales, solamente sealaremos que para la ecuación de Poisson en N dimensiones

$$\triangle u = f,$$

es sencillo determinar una funci 'on de Green.Por ejemplo

$$G(x,x') = \frac{2}{\pi} \log|x - x'| \text{ en } \mathbb{R}^2$$

$$G(x,x') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x'|} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

CAMBIOS DE VARIABLE EN DISTRIBUCIONES

Para definir la operación de cambio de variable en una distribución nos inspiramos en lo que se hace en el caso de funciones derivables. Supongamos una integral en una variable x del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y(x))\, \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

siendo $y = y(x)$ una función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva con derivada continua y no nula en todo $\mathbb{R}$. Entonces podemos efectuar el cambio de variable en la integral anterior con las sustituciones

$$u(y(x)) \to u(y), \quad \varphi(x) \to \varphi(x(y)), \quad \mathrm{d}x \to x'(y)\mathrm{d}y.$$

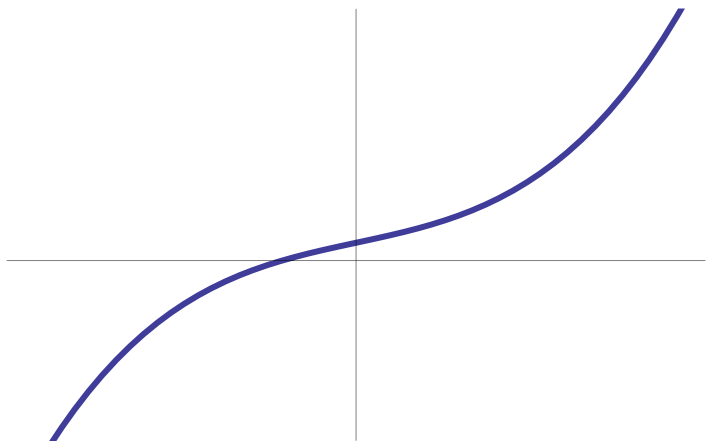


Fig. Función $y = y(x)$ biyectiva

Con lo cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y(x))\, \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, \varphi(x(y))|x'(y)|\mathrm{d}y.$$

Donde el valor absoluto de la derivada $|x'(y)|$ aparece para que sea correcto el orden de asignación de los límites de la segunda integral $(y(\pm\infty) = ($ signo de $x'(y)\,(\pm\infty))$.

De esta forma podemos extender este resultado usando la notación simbólica

Definición 33. *Sea $y = y(x)$ una función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y con derivada no nula en todo $\mathbb{R}$. Entonces dada una distribución $T = T(y)$ en $\mathcal{D}'$ que actua sobre funciones $\varphi = \varphi(y)$ en $\mathcal{D}$ se define*

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(y(x))\, \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} T(y)\, \varphi(x(y))|x'(y)|\mathrm{d}y.$$

Ejemplo 52. *Sea por ejemplo $\delta(-2\,x+1)$. En este caso*

$$y(x) = -2\,x + 1, \quad x(y) = \frac{1}{2}(1-y).$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-2\,x+1)\,\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\,\varphi(\frac{1}{2}(1-y))\,\frac{1}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\varphi(\frac{1}{2}).$$

La definición de cambio de variable es más complicada cuando $y = y(x)$ es una función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya derivada $y'(x)$ se anula en una serie de puntos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. En ese caso la función no es biyectiva sobre $\mathbb{R}$ y no se puede efectuar el cambio de variable globalmente. Sin embargo podemos partir $\mathbb{R}$ en la forma

$$\mathbb{R} = (-\infty, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n] \cup [x_n, +\infty),$$

donde en cada uno de los intervalos individuales la función $y(x)$ es biyectiva (es monótona estricta al no anularse en ellos su derivada). Por tanto podemos efectuar el cambio de variable en cada uno de esos subintervalos por separado y obtener así

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y(x))\,\varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(y(x))\,\varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \int_{y_i}^{y_{i+1}} u(y)\,\varphi(x(y))|x'(y)|\mathrm{d}y,$$

donde denotamos

$$x_0 = -\infty, \quad x_{n+1} = +\infty, \quad [y_i, y_{i+1}] = y([x_i, x_{i+1}]),\ (\text{con } y_i < y_{i+1}).$$

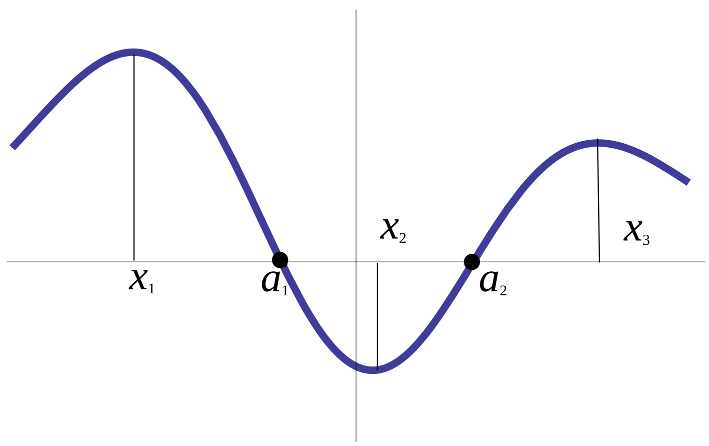


Fig. Función $y = y(x)$ no biyectiva

No es sencillo extender este resultado a distribuciones generales y por tanto nos contentaremos con el caso de deltas de Dirac y cambios de variable en que hay un cero simple a_i de $y(x)$ ($y(a_i) = 0$, $y'(a_i) \neq 0$) en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. En ese caso dejandonos llevar con la notación simbólica tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y(x))\,\varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \delta(y)\,\varphi(x(y))|x'(y)|\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi(a_i)}{|y'(a_i)|},$$

donde hemos usado el hecho de que en cada intervalo imagen $[y_i, y_{i+1}] = y([x_i, x_{i+1}])$ la función $x(y)$ satisface $x(0) = a_i$ y la derivada $x'(y) = 1/y'(x)$ en $y = 0$ es dada por $x'(0) = 1/y'(a_i)$. Este razonamiento motiva la siguiente definición

Definición 34. *Sea $y = y(x)$ una función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya derivada $y'(x)$ se anula en $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ y tal que hay un cero simple a_i de $y(x)$ ($y(a_i) = 0$, $y'(a_i) \neq 0$) en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Entonces se define*

$$\delta(y(x)) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\delta(x - a_i)}{|y'(a_i)|}.$$

Ejemplo 53. *Sea por ejemplo $\delta(x^2 - a^2)$ con $a > 0$. En este caso*

$$y(x) = x^2 - a^2, \quad y'(x) = 2x \text{ se anula en } x_1 = 0 \ .$$

Dividimos $\mathbb{R}$ en dos subintervalos

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty),$$

La función $y(x)$ tiene un cero simple en cada subintervalo

$$-a \in (-\infty, 0], \quad a \in [0, +\infty).$$

Por tanto

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}(\delta(x - a) + \delta(x + a)).$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES

La transformada de Fourier de una función $u = u(x)$ de N variables $x = (x_1, \ldots, x_N)$ se define como

$$c(k) = \mathcal{F}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot x} u(x) \mathrm{d}^N x, \tag{44}$$

donde estamos empleando la notación de producto escalar

$$k \cdot x = x \cdot k = x_1 k_1 + \cdots + x_N k_N.$$

Para que exista la transformada de Fourier $c = \mathcal{F}(u)$ de una función $u = u(x)$ es necesario y suficiente que $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Además en ese caso, el teorema de la convergencia dominada, nos dice que $\mathcal{F}(u)$ es una función continua en todo $\mathbb{R}^N$. Por tanto la transformada de Fourier define una aplicación

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \to C(\mathbb{R}^N),$$

que es obviamente lineal. Es decir

$$\mathcal{F}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \mathcal{F}(u_1) + \alpha_2 \mathcal{F}(u_2), \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{C},\ \forall u_i \in L^1(\mathbb{R}^N)\,(i = 1, 2).$$

Cálculo de transformadas de Fourier mediante integración por residuos

Supongamos que $u = u(x)$ es una función que admite una extensión $u = u(z)$ analítica en el plano complejo salvo en un número finito de polos $\{a_i\}_{i=1}^N$ fuera del eje real y $u(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$. Aplicando el teorema de los residuos podemos evaluar la integral que define su transformada de Fourier $c = c(k)$ y deducimos que:

$$c(k) = \begin{cases} -i\sqrt{2\pi} \sum_{Im a_i < 0} \mathrm{Res}(e^{-ikz} u(z), a_i) & \text{para } k > 0 \\ \\ i\sqrt{2\pi} \sum_{Im a_i > 0} \mathrm{Res}(e^{-ikz} u(z), a_i) & \text{para } k < 0. \end{cases}$$

El espacio $L^1(\mathbb{R}^N)$ tiene el inconveniente de no ser invariante bajo la transformada de Fourier. Es decir, existen funciones $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tales que $\mathcal{F}(u) \notin L^1(\mathbb{R}^N)$.

Como veremos inmediatamente $\mathcal{F}$ define una aplicación lineal continua y biyectiva de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$. M

TRANSFORMADA DE FOURIER EN $\mathcal{S}$

Los espacios de funciones más convenientes para definir la transformada de Fourier son los *espacios de Schwartz* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Dado que $\mathcal{S}$ es un subespacio lineal de L^1, para toda $u \in \mathcal{S}$ la transformada $\mathcal{F}(u)$ existe y es una función continua . Pero ademas se verifica el teorema siguiente:

Teorema 16. *La transformada de Fourier*

$$c(k) = \mathcal{F}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot x} u(x) \mathrm{d}^N x,$$

define una aplicación lineal biyectiva y continua en el espacio $\mathcal{S}$

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}.$$

cuya aplicación inversa es dada por

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}(c) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ik\cdot x} c(k) \mathrm{d}^N k, \tag{45}$$

Demostraremos solo parte de las afirmaciones de este teorema.

Demostración de que $u \in \mathcal{S} \implies \mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}$

Usamos la notación D_x^α, D_k^α para denotar los operadores de derivación múltiple D^α con respecto a las variables x ó k, respectivamente. Denotaremos x^α y k^α a los monomios

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}, \quad k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \cdots k_N^{\alpha_N}.$$

Veamos dos de las propiedades fundamentales de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{S}$:

P1) Si $u \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F}(u)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Además se verifica :

$$\boxed{\mathcal{F}(x^\alpha u) = (iD_k)^\alpha \mathcal{F}(u).} \tag{46}$$

P2) Si $u \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F}(u)$ y todas sus derivadas decrecen rapidamente en el infinito. Además se verifica:

$$\boxed{\mathcal{F}(D_x^\alpha u) = (ik)^\alpha \mathcal{F}(u).} \tag{47}$$

Demostración. **P1)** Sea $u \in \mathcal{S}$ y escribamos su transformada de Fourier en la forma

$$c(k) = \int_{\mathbb{R}^N} f(k,x)\mathrm{d}^N x, \quad f(k,x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-ik\cdot x} u(x). \tag{48}$$

Dado que las derivadas de $f(k,x)$ con respecto de las variables k_i son

$$D_k^\alpha f(k,x) = (-ix)^\alpha f(k,x),$$

tenemos que

$$|D_k^\alpha f(k,x)| = |x^\alpha u(x)|, \quad \forall k \in \mathbb{R}^N.$$

Como $u \in \mathcal{S}$ también $x^\alpha u \in \mathcal{S} \subset L^1$ luego como consecuencia del teorema de derivación de integrales dependientes de parámetros , la función $c(k)$ es derivable a cualquier orden sobre $\mathbb{R}^N$ y podemos derivarla introduciendo D_k^α dentro de la integral de (48)

$$D_k^\alpha c(k) = \int_{\mathbb{R}^N} D_k^\alpha f(k,x)\mathrm{d}^N x = \int_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha f(k,x)\mathrm{d}^N x = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha e^{-ik\cdot x} u(x)\mathrm{d}^N x.$$

Lo cual equivale a la propiedad P1).

P2) En primer lugar tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot x} \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{d}^N x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big[e^{-ik\cdot x} u(x)\Big|_{x_i=-\infty}^{\infty} \\
&\qquad - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik_i) e^{-ik\cdot x} u(x)\mathrm{d}x_i \Big] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_N,
\end{aligned}$$

en donde hemos integrado por partes. Si $u \in \mathcal{S}$ se cumple que

$$u(x)\Big|_{x_i=-\infty}^{\infty} = 0,$$

luego por tanto obtenemos

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = ik_i \mathcal{F}(u).$$

Por ello, iterando esta identidad, obtenemos (47). Ahora teniendo en cuenta que (67) implica

$$\Big|\mathcal{F}(u)(k)\Big| \le \frac{||u||_1}{(2\pi)^{N/2}}, \quad \forall k \in \mathbb{R}^N,$$

de (47) se deduce que

$$\Big|\mathcal{F}(u)(k)\Big| \le \frac{||D_x^\alpha u||_1}{(2\pi)^{N/2}\,|k|^\alpha}, \forall k \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha.$$

Luego para toda $u \in \mathcal{S}$ se cumple que $\mathcal{F}(u)$ decrece rápidamente en el infinito. Lo mismo ocurrira por tanto con cualquiera de sus derivadas $D^\alpha u$.

$\square$

Ejercicio 3. *Probar que bajo $\mathcal{F}$ las traslaciones y productos por exponenciales de exponente lineal se transforman según:*

$$\mathcal{F}(u(x+a)) = e^{ik\cdot a}\, c(k),$$

$$\mathcal{F}(e^{ia\cdot x} u(x)) = c(k-a),$$

siendo $c(k) = \mathcal{F}(u)$.

Ejercicio 4. *Probar que la transformada de Fourier de la función gaussiana de una variable*

$$\varphi(x) = e^{-a^2x^2}, \quad a > 0,$$

es dada por

$$c(k) = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4a^2}}.$$

Es decir, la transformada de una gaussiana es de nuevo una gaussiana.

La aplicación $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

Si $c \in \mathcal{S}$ entonces se define

$$\mathcal{F}^{-1}(c)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ik\cdot x} c(k) \mathrm{d}^N k.$$

Veamos que

$$\mathcal{F}^{-1}(c) = \overline{\mathcal{F}(\overline{c})}. \tag{49}$$

La demostración es muy simple

$$\overline{\mathcal{F}^{-1}(c)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot x} \overline{c}(k) \mathrm{d}^N k = \mathcal{F}(\overline{c})(x).$$

Debido a la identidad (49) es claro que $\mathcal{F}^{-1}$ define una aplicación lineal $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Probar que $\mathcal{F}^{-1}$ es la aplicación inversa de $\mathcal{F}$ es más complicado. Una forma de hacerlo es mediante límites de desarrollos en serie de Fourier.

Dada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la restricción de u a un intervalo cualquiera $[-a, a]$ con $a > 0$ posee serie de Fourier de exponenciales en dicho intervalo

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{ik_n x}, \quad k_n = n\frac{\pi}{a},$$

siendo

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_n x} u(x) \mathrm{d}x.$$

Introduciendo una *función* sobre los puntos k_n en la forma

$$c(k_n) = \sqrt{2\pi}\,\frac{c_n}{\Delta k}, \quad \text{siendo } \Delta k = k_{n+1} - k_n = \tfrac{\pi}{a},$$

la serie de Fourier de u se escribe como una suma de Riemann

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k_n} c(k_n)\, e^{ik_n x} \Delta,$$

que haciendo $a \to \infty$ ($\Delta k \to 0$) se convierte en la integral

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} c(k) \mathrm{d}k, \tag{50}$$

donde

$$c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x) \mathrm{d}x,$$

es $\mathcal{F}(u)$, luego (50) es $\mathcal{F}^{-1}(c)$.

Convolución y transformada de Fourier

La operación de *convolución* de dos funciones u y v de $\mathcal{S}$ se define como

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y)\mathrm{d}^N y = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)v(x-y)\mathrm{d}^N y = (v * u)(x).$$

Veamos un par de propiedades fundamentales de la transformada de Fourier relacionadas con la operación de convolución.

P3) Transformada de una convolución:

$$\boxed{\mathcal{F}(u * v) = (2\pi)^{N/2} \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v).}$$

P4) Invarianza de productos escalares y normas L^2 (Identidades de Parseval):

$$\boxed{(\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v)) = (u, v)}, \quad \boxed{||\mathcal{F}(u)|| = ||u||.}$$

Demostración. **P3)** Escribamos la transformada de una convolución

$$\mathcal{F}(u * v) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot x} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} u(y)v(x-y)\mathrm{d}^N y \Big] \mathrm{d}^N x.$$

Como $u, v \in \mathcal{S}$ la integral múltiple es independiente del orden en que hagamos las integrales sobre cada variable. Por tanto podemos escribir

$$\mathcal{F}(u * v) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot x} u(x-y)v(y)\mathrm{d}^N y \mathrm{d}^N x,$$

que con el cambio de variables

$$x = \xi + \eta, \quad y = \eta,$$

se transforma en

$$\mathcal{F}(u * v) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot(\xi+\eta)} u(\xi)v(\eta)\mathrm{d}^N \xi \mathrm{d}^N \eta = (2\pi)^{N/2}\mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v),$$

como queríamos demostrar.

P4) El producto escalar en $L^2(\mathbb{R}^N)$ de $u, v \in \mathcal{S}$ se puede escribir como

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u(y)} v(y) \mathrm{d}^n y = (\overline{Pu} * v)(0),$$

donde $Pu(x) = u(-x)$. Por ello, utilizando P3) tenemos

$$(u, v) = (2\pi)^{N/2}[\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\overline{Pu})\mathcal{F}(v))](0),$$

esto es

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x}\overline{a(k)} b(k) \mathrm{d}^n k \Big|_{x=0}$$

donde a, b son las transformadas Fourier de u, v, respectivamente. Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{u(x)} v(x) \mathrm{d}^N x = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{a(k)} b(k) \mathrm{d}^N k,$$

que es la primera identidad de Parseval y, en particular, para $u = v$ se obtiene la segunda identidad.

$\square$

5. TRANSFORMADA DE FOURIER EN $\mathcal{S}'$

Sean $u, \varphi \in \mathcal{S}$, por la identidad de Parseval tenemos que

$$(\mathcal{F}^{-1}(u), \varphi) = (u, \mathcal{F}(\varphi)).$$

En términos de la acción de las distribuciones regulares asociadas a $\mathcal{F}^{-1}(u)$ y $\overline{u}$ esta igualdad se escribe en la forma

$$\langle \overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}, \varphi \rangle = \langle \overline{u}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle,$$

y usando (49) denotando $v = \overline{u}$ concluimos que

$$\langle \mathcal{F}(v), \varphi \rangle = \langle v, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \forall v, \varphi \in \mathcal{S}. \tag{51}$$

Esta identidad nos lleva a la siguiente definición de transformada de Fourier en $\mathcal{S}'$

Definición 35. *Dada $T \in \mathcal{S}'$ se define su transformada de Fourier $\mathcal{F}(T)$ como*

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \tag{52}$$

En lugar de usar las variables $x = (x_1, \ldots, x_N)$ en las fórmulas (51) y (52) supondremos por conveniencia que tanto $\mathcal{F}(v)$ como φ son funciones de $k = (k_1, \ldots, k_n)$.

Ejercicio 5. *$\mathcal{F}(T)$ es una distribución en $\mathcal{S}'$.*

- *Linealidad*

$$\langle \mathcal{F}(T), \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) \rangle = \langle T, \alpha\mathcal{F}(\varphi_1) + \beta\mathcal{F}(\varphi_2) \rangle$$

$$= \alpha\langle T, \mathcal{F}(\varphi_1) \rangle + \beta\langle T, \mathcal{F}(\varphi_2) \rangle = \alpha\langle \mathcal{F}(T), \varphi_1 \rangle + \beta\langle \mathcal{F}(T), \varphi_2 \rangle.$$

- *Continuidad*

Definición 36. *Dada $T \in \mathcal{S}'$ se define su transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}(T)$ como*

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \tag{53}$$

Ejercicio 6. *$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ es una aplicación lineal biyectiva y continua con aplicación inversa $\mathcal{F}^{-1}$.*

La demostración es sencilla, veamos solo como muestra el detalle de la contiuidad

$$\langle \mathcal{F}(\lim_{n\to\infty} T_n), \varphi \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} T_n, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{F}(T_n), \varphi \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(T_n), \varphi \rangle$$

Es a menudo de utilidad usar la notación simbólica

$$\mathcal{F}(T)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot x} T(x) \mathrm{d}^N x, \tag{54}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(T)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ik\cdot x} T(k) \mathrm{d}^N k. \tag{55}$$

Propiedades de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'$

Las siguientes propiedades básicas de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{S}'$ son análogas a las que se verifican en $\mathcal{S}$.

P1)' Transformadas de productos por monomios:

$$\boxed{\mathcal{F}(x^\alpha T) = (iD_k)^\alpha \mathcal{F}(T).}$$

P2') Transformadas de derivadas:

$$\boxed{\mathcal{F}(D_x^\alpha T) = (ik)^\alpha \mathcal{F}(T).}$$

Demostración. P1)'

$$\langle \mathcal{F}(x^\alpha T), \varphi \rangle = \langle x^\alpha T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle T, x^\alpha \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

$$= \langle T, \mathcal{F}((1/i)^{|\alpha|} D_k^\alpha \varphi) \rangle = \langle (iD_k)^\alpha \mathcal{F}(T), k^\alpha \varphi \rangle$$

P2')

$$\langle \mathcal{F}(D_x^\alpha T), \varphi \rangle = \langle D_x^\alpha T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D_x^\alpha \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{F}((1/i)^{|\alpha|} k^\alpha \varphi) \rangle = i^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}(T), k^\alpha \varphi \rangle = \langle (ik)^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi \rangle$$

□

Ejemplo 54. *La transformada de Fourier de la delta de Dirac δ_a se cálcula inmediatamente.*

$$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \mathcal{F}(\varphi)(a) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ia\cdot k} \varphi(k) \mathrm{d}^N k.$$

Por tanto la transformada de la delta es la distribución regular T_u con $u = e^{-ia\cdot k}/(2\pi)^{N/2}$. Es más conveniente en este caso escribir el resultado como

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta(x-a)) = \frac{e^{-ia\cdot k}}{(2\pi)^{N/2}}.}$$

En particular para $a = 0$ se obtiene una constante

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta(x)) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}.}$$

Ejemplo 55. *La función constante $u(x) \equiv 1$ no tiene transformada de Fourier como función, pero si la tiene como distribución*

$$\langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} 1 \cdot \mathcal{F}(\varphi)(k) \mathrm{d}^N k = (2\pi)^{N/2} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) \Big|_{k=0} = (2\pi)^{N/2} \varphi(0).$$

Es decir

$$\boxed{\mathcal{F}(1) = (2\pi)^{N/2}\, \delta(k).}$$

Ejemplo 56. *Las funciones tipo* onda plana $u_p(x) = e^{ip\cdot x}$ *no tienen transformada de Fourier como funciones, pero si la tienen como distribuciones.*

$$\langle \mathcal{F}(e^{ip\cdot x}), \varphi \rangle = \langle e^{ip\cdot x}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ip\cdot x} \mathcal{F}(\varphi)(x) \mathrm{d}^N x = (2\pi)^{N/2} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) \Big|_{k=p} = (2\pi)^{N/2} \varphi(p).$$

Es decir

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{ip\cdot x}) = (2\pi)^{N/2}\, \delta(k-p).}$$

Ejercicios

1. Calcular la transformada de Fourier de las derivadas $D^\alpha \delta(x-a)$ de las deltas de Dirac.
2. Calcular la transformada de Fourier de las funciones monomio x^α.
3. Probar que las transformadas de distribuciones anteriores son consistentes con la notación simbólica (54).

Transformada de Fourier en L^1 y L^2

Los espacios $L^1(\mathbb{R}^N)$ y $L^2(\mathbb{R}^N)$ pueden considerarse como espacios de distribuciones regulares contenidos en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{S}'$ generá mediante restricción las transformadas de Fourier cásicas sobre L^1 y L^2 dadas por

1. Para $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$
$$\mathcal{F}(u)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ik\cdot x} u(x) \mathrm{d}^N x.$$
2. Para $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$
$$\mathcal{F}(u) = \lim_{R\to\infty} u_R, \quad u_R = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|x|\leq R} e^{-ik\cdot x} u(x) \mathrm{d}^N x, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N),$$
donde la operación de límite es el sentido de L^2. Es decir $\lim_{R\to\infty} ||\mathcal{F}(u) - u_R||_2 = 0$.

Transformada de Fourier y funciones de Green

La transformada de Fourier de distribuciones proporciona un potente método de cálculo de funciones de Green

$$\sum_{\alpha} a_\alpha (D'_x)^\alpha G(x) = \delta(x), \tag{56}$$

para EDP's con coeficientes constantes ($a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\forall \alpha$). El primer paso de este método es aplicar la transformada de Fourier a ambos miembros de (56). De esta forma se obtiene

$$p(k)\mathcal{F}(G) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}},$$

donde $p(k)$ es el polinomio

$$p(k) = \sum_{\alpha} a_\alpha i^{|\alpha|}\, k^\alpha, \quad (k^\alpha = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \cdot k_N^{\alpha_N}).$$

Por tanto despejando encontramos

$$\mathcal{F}(G) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{p(k)},$$

así que aplicando ahora la transformada de Fourier inversa se obtiene

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{p(k)}\Big).$$

Sin embargo hay un problema en esta estrategia cuando la función $1/p(k)$ no es localmente integrable y por tanto no determina una distribución, pues en ese caso no está definida su transformada de Fourier inversa. Esto ocurre cuando el polinomio $p(k)$ se anula en puntos de $\mathbb{R}^N$. En ese caso hay que emplear un procedimiento de **regularización** de $1/p(k)$ en la forma siguiente:

1. Se introduce una familia de polinomios $p_\epsilon(k)$ ($\epsilon > 0$) de la forma

$$p_\epsilon(k) = \sum_{\alpha} a_\alpha(\epsilon) i^{|\alpha|}\, k^\alpha, \tag{57}$$

   que no se anulen en puntos de $\mathbb{R}^N$ y tales que $\lim_{\epsilon \to 0} p_\epsilon(k) = p(k)$ c.d.. Es decir

$$\lim_{\epsilon \to 0} a_\alpha(\epsilon) = a_\alpha, \quad \forall \alpha. \tag{58}$$

2. Las funciones $1/p_\epsilon(k)$ son localmente integrables $\forall \epsilon > 0$ así que podemos determinar mediante el método anterior sus transformadas de Fourier inversas

$$G_\epsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{p_\epsilon(k)}\Big).$$

Estas transformadas satisfacen

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(\epsilon)(D'_x)^{\alpha} G_{\epsilon}(x) = \delta(x), \tag{59}$$

y por tanto, si existe el límite en $\mathcal{D}'$

$$G(x) \equiv \lim_{\epsilon\to 0} G_{\epsilon}(x),$$

tomando el límite en (59) y debido a (57)-(58) se deduce que la distribución $G(x)$ satisface (56).

Ejemplo 57. *Sea la función de Green en una dimensión*

$$D_x G(x) = \delta(x)$$

Tomando la transformada de Fourier

$$ik\mathcal{F}(G) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Luego

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{ik}\Big).$$

Como $1/ik$ no es localmente integrable (es singular en $k = 0$) la regularizamos en la forma $1/i(k - i\epsilon)$ y definimos

$$G_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{i(k-i\epsilon)}\Big).$$

Integrando ahora mediante el teorema de los residuos obtenemos

$$G_{\epsilon}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\Big(\frac{1}{i(k-i\epsilon)}\Big)\mathrm{d}k = \begin{cases} \mathrm{Res}(e^{ikx}/i(k-i\epsilon), k = i\epsilon) = e^{-\epsilon x} & \textit{para } x > 0 \\ \\ 0 \quad \textit{para } x < 0 \end{cases}.$$

Por tanto

$$G(x) \equiv \lim_{\epsilon\to 0} G_{\epsilon}(x) = \theta(x).$$

Ejemplo 58. *Sea la función de Green en tres dimensiones*

$$\triangle G(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$$

Tomando la transformada de Fourier

$$-k^2\mathcal{F}(G) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2).$$

Luego

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{k^2}\Big) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2}\mathrm{d}^3k.$$

Para calcular esta integral tomemos los ejes en el espacio (k_1, k_2, k_3) de forma que el eje k_3 esté en al dirección y sentido del vector $\vec{x}$. De esta forma tomando coordenadas esféricas (k, θ, ϕ) en el espacio de las k's y dado que $\mathrm{d}^3k = k^2 \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}k \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$ tenemos que

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = k\, r \, \cos\theta, \quad (r \equiv |\vec{x}|)$$

y

$$G(\vec{x}) = -\tfrac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \operatorname{sen}\theta \, e^{ik\, r \, \cos\theta}$$

$$= -\tfrac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \operatorname{sen}\theta \, e^{ik\, r\, \cos\theta} = -\tfrac{1}{4\pi^2\, r\, i} \int_0^\infty \mathrm{d}k \tfrac{e^{ik\, r} - e^{-ikr}}{k} = -\tfrac{1}{8\pi^2\, r\, i} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \tfrac{e^{ik\, r} - e^{-ikr}}{k}.$$

Regularizamos el integrando cambiando en el denominador $k \to k + i\epsilon \, (\epsilon > 0)$. Integrando por residuos se obtiene

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \frac{e^{ik\, r}}{k + i\epsilon} = 0, \quad \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \frac{e^{-ik\, r}}{k + i\epsilon} = -2\pi i e^{-\epsilon\, r}.$$

Luego

$$G_\epsilon(\vec{x}) = -\frac{e^{-\epsilon\, r}}{4\pi r},$$

y finalmente encontramos

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\, r}.$$

Ejemplo 59. *Sea la EDP con coeficientes constantes en $\mathbb{R}^3$ siguiente*

$$\boxed{\Delta u - a^2 u = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad a > 0.}$$

Las funciones de Green correspondientes son las soluciones de

$$\Delta G(\vec{x}) - a^2 \, G(\vec{x}) = \delta(\vec{x}). \tag{60}$$

Apliquemos la transformada de Fourier a esta última ecuación, obtenemos

$$-k^2 \, \mathcal{F}(G) - a^2 \, \mathcal{F}(G) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}, \quad k^2 \equiv |\vec{k}|^2, \tag{61}$$

y despejando $\mathcal{F}(G)$ encontramos

$$\mathcal{F}(G)(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \, \frac{1}{k^2 + a^2}.$$

Esta función es localmente integrable en $\mathbb{R}^3$ (el denominador solo se anula para $k = \pm i\, a$) y por tanto admite transformad de Fourier inversa. Así encontramos que

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \, \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{k^2 + a^2}\Big) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\, \vec{k} \cdot \vec{x}}}{k^2 + a^2} \, \mathrm{d}^3k. \tag{62}$$

Calculemos la integral que aparece en esta expresión tomando coordenadas esféricas en el espacio $\vec{k}$ con el eje k_3 en la dirección y sentido de $\vec{x}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2+a^2}\,\mathrm{d}^3k = \int_0^\infty k^2\,\mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{i\,k\,r\,\cos\theta}}{k^2+a^2}, \quad r \equiv |\vec{x}|.$$

Efectuando las integraciones en φ y θ teniendo en cuenta que

$$\mathrm{sen}\theta\, e^{i\,k\,r\,\cos\theta} = \frac{i}{k\,r}\frac{\partial e^{i\,k\,r\,\cos\theta}}{\partial\theta},$$

reducimos el cálculo a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2+a^2}\,\mathrm{d}^3k = \frac{2\,\pi}{i\,r}\int_0^\infty \frac{k\,(e^{i\,k\,r}-e^{-i\,k\,r})}{k^2+a^2} = \frac{2\,\pi}{i\,r}\int_{-\infty}^\infty \frac{k\,e^{i\,k\,r}}{k^2+a^2} = \frac{2\,\pi}{r}\,e^{-a\,r}$$

Esta última integral se ha calculado por el método de los residuos cerrando el dominio de integración en el semiplano complejo superior de la variable k

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{k\,e^{i\,k\,r}}{k^2+a^2} = 2\,\pi\,i\,\mathrm{Res}\Big(\frac{k\,e^{i\,k\,r}}{k^2+a^2},\,k=i\,a\Big) = \pi\,i\,e^{-a\,r}.$$

LLevando este resultado a (62) *concluimos que*

$$\boxed{G(\vec{x}) = -\tfrac{e^{-a\,r}}{4\,\pi^2\,r}.}$$

El método que acabamos de usar no sirve para $a=0$ pues en ese caso al despejar $\mathcal{F}(G)$ en (61) *se obtiene*

$$\mathcal{F}(G)(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{1}{k^2}.$$

que no es localmente integrable en $\mathbb{R}^3$ debido a que su denominador posee un cero de orden 2 en $k=0$. Sin embargo las funciones de Green que acabamos de calcular dependen del parámetro $a>0$

$$G_a(\vec{x}) = -\frac{e^{-a\,r}}{4\,\pi^2\,r},$$

y su límite puntual cuando $a\to 0$ viene dado por

$$\boxed{G_0(\vec{x}) = -\tfrac{1}{4\,\pi^2\,r},}$$

que es localmente integrable en $\mathbb{R}^3$. Además podemos demostrar que es una función de Green para el operador Laplaciano

$$\Delta G_0(\vec{x}) = \delta(\vec{x}). \tag{63}$$

Basta recordar que

1. *Los operadores diferenciales con coeficiente constantes son aplicaciones continuas en $\mathcal{D}'$*

2. Las funciones de Green $G_a(\vec{x})$ definen distribuciones regulares en en $\mathcal{D}'$ con límite $G(\vec{x})$ en $\mathcal{D}'$

Por tanto dado que

$$\Delta G_a(\vec{x}) - a^2\, G_a(\vec{x}) = \delta(\vec{x}), \tag{64}$$

tomando el límite cuando $a \to 0$ de esta ecuación en $\mathcal{D}'$ concluimos que $G_0(\vec{x})$ satisface (63). De esta forma encontramos de una forma alternativa la función de Green para resolver la ecuación de Poisson

$$\boxed{\Delta u = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad a > 0,}$$

El método de la transformada de Fourier en EDP's

Sea un problema de valores iniciales con una EDP con coeficientes constantes **homogénea** y variables independientes t y $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^r u}{\partial t^r} + \sum_\alpha a_\alpha D_x^\alpha u = 0, \quad t > 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^N, \\ \\ \frac{\partial^n u}{\partial t^n}\Big|_{t=0} = f_n(\vec{x}), \quad n = 0, \ldots, r-1. \end{cases} \tag{65}$$

Efectuemos la transformada de Fourier con repecto a las N variables $\vec{x}$ de las ecuaciones de este problema, se reduce a un problema de valores iniciales para una EDO

$$\begin{cases} \frac{\partial^r c(t,\vec{k})}{\partial t^r} + \sum_\alpha (i\,k)^\alpha a_\alpha\, c(t,\vec{k}) = 0, \quad t > 0, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^N, \\ \\ \frac{\partial^n c(t,\vec{k})}{\partial t^l}\Big|_{t=0} = b_n(\vec{k}), \quad n = 0, \ldots, r-1, \end{cases} \tag{66}$$

siendo

$$c(t,\vec{k}) = \mathcal{F}(u(t,\cdot)) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\, u(t,\vec{x})\, \mathrm{d}^N x, \quad b_n(\vec{k}) = \mathcal{F}(f_n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\, f_n(\vec{x})\, \mathrm{d}^N x. \tag{67}$$

la solución de (66) puede escribirse en la forma

$$c(t,\vec{k}) = \sum_{n=0}^{r-1} b_n(\vec{k})\, e_n(t,\vec{k}), \tag{68}$$

siendo las funciones $\{e_n = e_n(t,\vec{k})\}_{n=0}^{r-1}$ una base de soluciones de la EDO de (66) tal que

$$\frac{\partial^l e_n(t,\vec{k})}{\partial t^l}\Big|_{t=0} = \delta_{ln} b_n(\vec{k}), \quad l, n = 0, \ldots, r-1.$$

Apliquemos ahora la transformada de Fourier inversa a la ecuación (68)

$$u(t,\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}(c(t,\cdot))(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{r-1} \mathcal{F}^{-1}(e_n(t,\cdot)\, b_n) = \sum_{n=0}^{r-1} \mathcal{F}^{-1}(e_n(t,\cdot)\, \mathcal{F}(f_n)),$$

e introduzcamos las transformadas inversas de las funciones e_n

$$G_n(t,\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}(e_n(t,\cdot)(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e_n(t,\vec{k})\, \mathrm{d}^N k.$$

Entonces tenemos que aplicando la propiedad de la convolución

$$u(t,\vec{x}) = \sum_{n=0}^{r-1} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(G_n(t,\cdot)\, \mathcal{F}(f_n)) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sum_{n=0}^{r-1} \Big(G_n(t,\cdot) \star f_n\Big)(\vec{x}).$$

Es decir la solución del problema (65) se expresa en la forma

$$\boxed{u(t,\vec{x}) = \tfrac{1}{(2\pi)^{N/2}} \textstyle\sum_{n=0}^{r-1} \int_{\mathbb{R}^n} G_n(t,\vec{x}-\vec{y})\, f_n(\vec{y})\, \mathrm{d}^N y.}$$

Ejercicio 7. *Considerar el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas en dos variables* (t,x)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \\ u\Big|_{t=0} = f_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_1(x). \end{cases} \tag{69}$$

1. Aplicar la transformada de Fourier respecto de x para reducir el problema a

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 c(t,k)}{\partial t^2} + c_0^2\, c(t,k) = 0, \quad t>0, \quad k \in \mathbb{R}, \\ \\ c\Big|_{t=0} = b_0(k), \quad \frac{\partial c}{\partial t}\Big|_{t=0} = b_1(k), \end{cases} \tag{70}$$

   donde c, b_0, b_1 son las transformadas de u, f_0, f_1 respectivamente.

2. Probar que la solución de (70) es

$$c(t,k) = b_0(k)\, \cos(c_0\, k\, t) + b_1(k)\, \frac{\operatorname{sen}(c_0\, k\, t)}{c_0\, k}.$$

3. Probar que las transformadas inversas son

$$G_0(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\cos(c_0\, k\, t)) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{F}^{-1}(e^{ic_0kt}) + \mathcal{F}^{-1}(e^{-ic_0kt})\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\delta(x+c_0t) + \delta(x-c_0t)\Big).$$

$$G_1(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\operatorname{sen}(c_0\, k\, t)}{c_0\, k}\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{c_0}\, \chi_{[-c-0t,c_0t]}(x).$$

4. Demostrar finalmente que la solución de (69) se escribe en la forma

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(f_0(x+c_0t) + f_0(x-c_0t)\Big) + \frac{1}{2\, c_0} \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} f_1(y)\, \mathrm{d}y.$$

6. OPERADORES LINEALES

Definición 37. *Dados dos espacios vectoriales* $\mathcal{L}_1$ *y* $\mathcal{L}_2$ *sobre* $\mathbb{C}$*, un* **operador lineal** *de* $\mathcal{L}_1$ *en* $\mathcal{L}_2$ *es una aplicación* $L : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *tal que*

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha\, Lu + \beta\, Lv, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\, u, v \in \mathcal{L}_1.$$

Se denomina

$$\textit{Nucleo de L: } \mathcal{N}(L) \equiv \{u \in \mathcal{L}_1 \,|\, Lu = 0\ \}$$

$$\textit{Recorrido de L (conjunto imagen): } \mathcal{R}(L) \equiv L(\mathcal{L}_1).$$

Se demuestran facilmente las propiedades siguientes

1) $\mathcal{N}(L)$ y $\mathcal{R}(L)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente.

2) Si $L : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ es un operador lineal inyectivo entonces su aplicación inversa L^{-1} define una aplicación lineal $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to \mathcal{L}_1$.

3) Si L y M son operadores lineales de $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$ sus combinaciones lineales definidas como

$$(\alpha L + \beta M)u = \alpha\, Lu + \beta\, Mu, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\, u \in \mathcal{L}_1.$$

son operadores lineales de $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$

Ejercicio 8. *Probar que: L inyectiva* $\Longleftrightarrow \mathcal{N}(L) = \{0\}$

Operadores lineales en espacios vectoriales de dimensión finita

Los operadores lineales en espacios vectoriales de dimensión finita $L : \mathbb{C}^N \to C^M$ son las matrices $L = (L_{ij})\,(i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N)$

$$(Lu)_i = \sum_{j=1}^{N} L_{ij} u_j, \quad u = (u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, \dots, M.$$

Operadores lineales en espacios funcionales

En espacios funcionales los operadores lineales son básicamente de dos tipos

1. Operadores diferenciales
$$Lu = \sum_{\alpha} a_\alpha(x) D^\alpha u.$$

2. Operadores integrales
$$(Lu)(x) = \int_I G(x, x')\, u(x')\, \mathrm{d}x^N.$$

OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT

Definición 38. *Un operador lineal en un espacio de Hilbert H es una aplicación*

$$L : \mathrm{D} \to H, \quad u \to Lu$$

definida sobre un subespacio lineal D *denso en H ($\overline{\mathrm{D}} = H$) tal que*

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad u, v \in \mathrm{D}.$$

El subespacio D *se denomina* **dominio** *del operador L.*

Comentarios

- Siempre supondremos que D es denso en H.
- Adviértase que una misma operación lineal puede definirse sobre diferentes dominios en H, así que en realidad cuando se habla de un operador hay que especificar su dominio.

El operador adjunto

La operación característica en un espacio de Hilbert es el producto escalar (,). En particular el producto escalar dá lugar a la noción de operador adjunto $L^\dagger$.

Definición 39. *Dado un operador lineal $L : \mathrm{D} \to H$ con dominio* D *se define el dominio adjunto* $\mathrm{D}^\dagger$ *como*

$$\mathrm{D}^\dagger = \{\ v \in H \text{ para los que existe algún } w \in H \text{ tal que } (v, Lu) = (w, u),\ \forall u \in \mathrm{D}\}$$

- *Para cada $v \in \mathrm{D}^\dagger$ el vector w que aparece en esta definición es único ya que si existierán dos w_1 y w_2 entonces*

  $$(w_1, u) = (w_2, u),\ \forall u \in \mathrm{D} \Longrightarrow (w_1 - w_2, u) = 0,\ \forall u \in \mathrm{D} \Longrightarrow (w_1 - w_2, u) = 0,\ \forall u \in H \Longrightarrow w_1 = w_2.$$

  donde hemos usado el hecho de que D *es denso en H.*

- *El único vector w asociado de esta forma a cada $v \in \mathrm{D}^\dagger$ se denota como $L^\dagger v$ y por tanto verifica la relación fundamental*

  $$\boxed{(v, Lu) = (L^\dagger v, u), \quad \forall u \in \mathrm{D},\ v \in \mathrm{D}^\dagger.}$$

- *Se comprueba de forma simple que $\mathrm{D}^\dagger$ es un subespacio lineal de H y que $L^\dagger$ define una operador lineal con dominio $\mathrm{D}^\dagger$.*

Operadores simétricos, autoadjuntos y unitarios

En la Física Cuántica aparecen los siguientes tipos de operadores lineales.

Definición 40. $A : \mathrm{D} \to H$ *es* **simétrico** *si se cumplen dos condiciones*

1) $\mathrm{D} \subset \mathrm{D}^\dagger$.

2) $Au = A^\dagger u, \forall u \in \mathrm{D}$.

$\boxed{\text{Los operadores simétricos son los denominados } \textbf{operadores hermíticos} \text{ en la Física Cuántica.}}$

Ejercicio Probar que

$$A : \mathrm{D} \to H \text{ simétrico} \Longleftrightarrow (v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in \mathrm{D}.$$

Definición 41. $A : \mathrm{D} \to H$ *es* **autoadjunto** *si coincide con su adjunto: Es decir se cumplen las condiciones*

1) $\mathrm{D} = \mathrm{D}^\dagger$.

2) $Au = A^\dagger u, \forall u \in \mathrm{D}$.

En tal caso se escribe

$$A = A^\dagger.$$

$\boxed{\text{Los operadores autoadjuntos son los que representan las magnitudes físicas en la Física Cuántica.}}$

Definición 42. $U : H \to H$ *es* **unitario** *si cumple las condiciones*

1) *U es una aplicación biyectiva de H en H.*

2) $(Uv, Uu) = (v, u), \forall u, v \in H$.

Ejercicio Probar que si U es unitario entonces $U^{-1} = U^\dagger$.

$\boxed{\text{Los operadores unitarios son los que representan las simetrías en la Física Cuántica.}}$

Operadores diferenciales simétricos

El tipo fundamental de operador simétrico que aparece en las aplicaciones de los espacios de Hilbert es el de Sturm–Liouville. Un operador diferencial de segundo orden definido sobre un dominio $\mathrm{D} \subset L^2_\rho([a,b])$ se dice que es del tipo de Sturm–Liouville cuando es de la forma

$$\boxed{Lu = -\frac{1}{\rho} D(p\,Du) + qu}$$

con ρ, p, q funciones en $C^\infty((a,b))$ reales tales que $\rho, p > 0$ en (a,b).

Un operador de Sturm–Liouville L sobre un dominio $\mathrm{D} \subset L^2_\rho([a,b])$ es simétrico si y sólo si $\forall v, w \in \mathrm{D}$ se verifica

$$\boxed{p(a) \begin{vmatrix} \bar{v}(a) & w(a) \\ v_x(a) & w_x(a) \end{vmatrix} = p(b) \begin{vmatrix} \bar{v}(b) & w(b) \\ v_x(b) & w_x(b) \end{vmatrix}.}$$

Ejemplo 60. *El ejemplo más simple de operador de Sturm-Liouville es el operador derivada segunda:*

$$Lu = -D^2 u,$$

para el cual $\rho \equiv p \equiv 1$, $q \equiv 0$.

Autovalores y autofunciones de operadores diferenciales simétricos

Definición 43. *Dado un operador lineal* $A : \mathrm{D} \to H$ *un número complejo* λ *se dice que es un* **autovalor** *del operador si existe un vector* $u \neq 0$ *en el domino* D *tal que*

$$\boxed{Au = \lambda u}.$$

En ese caso se dice que u *es un* **autovector** *(***autofunción***) del operador* A.

La propiedad fundamental de los operadores simétricos que los convierte en los proveedores de bases ortonormales es la segunda parte del siguiente enunciado

Teorema 17. *Dado un operador simétrico* $A : \mathrm{D} \to H$

1) *Los autovalores de* A *son números reales.*

2) *Autofunciones de* A *correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

Demostración. Si $Au = \lambda u$ con $u \neq 0$ entonces

$$(u, Au) = (u, \lambda u) = \lambda(u, u) = \lambda ||u||^2, \quad (Au, u) = (\lambda u, u) = \overline{\lambda}(u, u) = \overline{\lambda}||u||^2.$$

Al ser A simétrico $(u, Au) = (Au, u)$ y por otra parte $||u|| \neq 0$ por ser $u \neq 0$. Luego $\lambda = \overline{\lambda}$.

Sean $Av = \lambda_1 v$ con $v \neq 0$ y $Aw = \lambda_2 w$ con $w \neq 0$. Supongamos $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces al ser A simétrico $(v, Aw) = (Av, w)$ pero

$$(v, Aw) = (v, \lambda_2 w) = \lambda_2(v, w), \quad (Av, w) = (\lambda_1 v, w) = \overline{\lambda}_1(v, w) = \lambda_1(v, w).$$

Por tanto,como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se cumple que $(v, w) = 0$. □

De esta forma las autofunciones de un operador simétrico, una vez normalizadas, nos proporcionan conjuntos ortogonales. El problema es saber cuando estos conjuntos son maximales (propiedad de **completitud**). Para operadores de Sturm-Liouville se conocen tipos importantes de dominios en los que son simétricos y poseen la propiedad de completitud. Sin embargo esto no sucede en general y ,como sabemos que ocurre en Física Cuántica, solo con las autofunciones del dominio del espacio de Hilbert no es posible construir un conjunto completo y deben utilizarse autofunciones generalizadas (fuera del espacio de Hilbert) para obtener un conjunto completo en un sentido más amplio.

OPERADORES DIFERENCIALES EN ESPACIOS DE DISTRIBUCIONES

Consideremos operadores diferenciales de la forma

$$L = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha},$$

donde los coeficientes $a_{\alpha}(x)$ son funciones en $C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ y se supone que solo hay un número finito de ellos no nulos. Por lo que hemos visto anteriormente es claro que definen operadores lineales continuos en los espacios de distribuciones $\mathcal{F}' = \mathcal{D}'$ ó $\mathcal{S}'$ (en el caso de $\mathcal{S}'$ los coeficientes de L deben ser de crecimiento a lo sumo polinomial en el infinito).

$$L : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}', \quad T \to LT = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} T.$$

Es decir satisfacen

1. **Linealidad**: $L(\alpha T_1 + \beta T_2) = \alpha\, LT_1 + \beta\, LT_2, \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{F}'$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. **Continuidad**: Para toda sucesión convergente $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}'$ se cumple que

$$L(\lim_{n\to\infty} T_n) = \lim_{n\to\infty} LT_n.$$

Comentarios

- Adviértase que de acuerdo a las definiciones de derivadas de distribuciones y de producto de funciones por distribuciones

$$\langle LT, \varphi\rangle = \langle \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha T, \varphi\rangle = \sum_\alpha \langle a_\alpha D^\alpha T, \varphi\rangle$$

$$= \sum_\alpha \langle D^\alpha T, a_\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \sum_\alpha \langle T, D^\alpha(a_\alpha \varphi)\rangle = \langle T, L^\top \varphi\rangle,$$

  donde $L^\top$ es el operador traspuesto

$$L^\top \varphi = (-1)^{|\alpha|} \sum_\alpha D^\alpha(a_\alpha \varphi).$$

- Recordemos que los espacios de funciones que hemos venido utilizando podemos verlos contenidos en lo espacios de distribuciones ya que tales funciones son localmente integrables y definen distribuciones regulares

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset C^\infty(\mathbb{R}^N) \subset C(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'; \quad L^p \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}',\, p \geq 1.$$

  Por tanto podemos definir la acción de estos operadores diferenciales sobre estas funciones consideradas como distribuciones.

Ejemplo 61. *Sea el operador en una variable:*

$$L = D^2 + \cos x D.$$

Consideremos la distribución $|x|$ su imagen bajo L es

$$L|x| = (D')^2|x| + \cos x D'|x| = 2\delta(x) + \epsilon(x)\cos x.$$

LOS OPERADORES DE POSICION Y MOMENTO EN FISICA CUANTICA

El operador de posición $Q\psi(x) = x\psi(x)$ de la Física Cuántica determina una aplicación lineal y continua sobre todo $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$Q : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}', \quad QT(x) = xT(x),$$

y posee en $\mathcal{S}'$ un conjunto de autofunciones dadas por

$$\psi_q(x) = \delta(x-q), \quad Q\psi_q(x) = x\delta(x-q) = q\delta(x-q),\, q \in \mathbb{R}.$$

Podemos interpretar la identidad

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x-q')\delta(x-q)\mathrm{d}x = \delta(q'-q)$$

como la propiedad de ortonormalización *a la delta de Dirac* de las autofunciones ψ_q

$$(\psi_{q'}, \psi_q) = \delta(q'-q).$$

El conjunto de estas autofunciones es completo en el sentido de que toda función ϕ de $\mathcal{S}$ puede desarrollarse en la forma

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-q)\varphi(q)\mathrm{d}q = \int_{\mathbb{R}} a(q)\psi_q(x)\mathrm{d}q,$$

siendo

$$a(q) = \varphi(q) = (\psi_q, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-q)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

El operador momento $P\psi(x) = -i\, D_x\psi(x)$ de la Física Cuántica determina una aplicación lineal y continua sobre todo $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$P : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}', \quad PT(x) = -iD_xT(x).$$

Este operador posee en $\mathcal{S}'$ un conjunto de autofunciones (distribuciones regulares) dadas por

$$\psi_p(x) = e^{ip\cdot x}/(2\pi)^{1/2}, \quad P\,\psi_p(x) = p\,\psi_p(x),\ (p \in \mathbb{R}).$$

Podemos interpretar la identidad

$$\mathcal{F}(e^{ip\cdot x}) = (2\pi)^{1/2}\,\delta(k-p),$$

escrita en la forma

$$\frac{1}{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} e^{i(p-p')\cdot x}\mathrm{d}x = \delta(p'-p),$$

como la propiedad de ortonormalización *a la delta de Dirac* de las autofunciones ψ_p

$$(\psi_{p'}, \psi_p) = \delta(p'-p).$$

Adems estas autofunciones forman un conjunto completo **generalizado** en el sentido siguiente: toda función de $\mathcal{S}$ puede desarrollarse en la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} c(k)\, e^{ikx}\mathrm{d}k = \int_{\mathbb{R}} c(p)\,\psi_p(x)\mathrm{d}p,$$

donde $c(k)$ es $\mathcal{F}(\varphi)$. Es decir

$$c(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\varphi(x)\mathrm{d}x = (\psi_p, \varphi).$$