

Ecuaciones Diferenciales I

Artemio González López

Madrid, enero de 2004

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Preliminares	1
1.2	Técnicas elementales de integración	2
1.2.1	$y' = f(x)$	2
1.2.2	Ecuaciones con variables separadas	3
1.2.3	Ecuaciones homogéneas	6
1.2.4	Ecuaciones lineales	7
1.2.5	Ecuación de Bernoulli	9
1.2.6	Ecuación de Riccati	10
1.2.7	Ecuaciones exactas y factores integrantes	12
1.3	Existencia y unicidad de soluciones	16
1.3.1	Funciones lipschitzianas	19
2	Ecuaciones y sistemas lineales	27
2.1	Estructura del espacio de soluciones	28
2.2	Wronskiano	30
2.2.1	Fórmula de Abel–Liouville	32
2.2.2	Método de variación de constantes de Lagrange	33
2.3	Sistemas con coeficientes constantes	34
2.4	Cálculo de la exponencial de una matriz	37
2.4.1	Polinomio interpolador de Lagrange	41
2.5	Ecuaciones de orden n	45
2.5.1	Ecuaciones lineales	46
2.6	Ecuaciones lineales con coeficientes constantes	52
2.6.1	Solución de la ecuación inhomogénea	54
2.7	Estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales	57
2.7.1	Criterio de Routh–Hurwitz	62
3	Soluciones en forma de serie	65
3.1	Puntos regulares	65
3.1.1	Funciones analíticas	66
3.1.2	La ecuación de Hermite	71
3.2	Puntos singulares regulares	78
3.2.1	La ecuación de Bessel	85
3.2.2	El punto del infinito	93

4	Sistemas dinámicos en el plano	97
4.1	Resultados generales	97
4.2	Sistemas dinámicos lineales en \mathbf{R}^2	103
4.3	Sistemas dinámicos no lineales en \mathbf{R}^2	107

Capítulo 1

Introducción

1.1 Preliminares

• En general, una **ecuación diferencial** es una expresión que relaciona el valor de una función (o funciones) incógnita(s) en cada punto con el de sus derivadas parciales en el *mismo* punto. Por ejemplo, la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

es una ecuación diferencial. Las **soluciones** de la ecuación anterior, es decir las funciones $u(x, y)$ para las cuales dicha ecuación se verifica *idénticamente* (en todos los puntos (x, y) pertenecientes a un *abierto* $D \subset \mathbf{R}^2$), son las funciones de la forma

$$u(x, y) = f(x - y),$$

donde f es una función derivable arbitraria.

Ejemplo 1.1. La ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(y, x) = 0$$

no es una ecuación diferencial, ya que las derivadas parciales de u no están evaluadas en el mismo punto.

Una ecuación como (1.1), en la que la función incógnita u depende de más de una variable, se denomina **ecuación en derivadas parciales**. Por el contrario, si u es una función de una variable la ecuación diferencial se dice **ordinaria**. Son éstas ecuaciones las que nos interesarán fundamentalmente en este curso, por lo que daremos a continuación una definición más cuidadosa de ellas.

Definición 1.2. Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDOs) es un sistema de ecuaciones del tipo

$$\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,} \quad (1.2)$$

donde $F = (F_1, \dots, F_p) : \mathbf{R} \times \underbrace{\mathbf{R}^m \times \dots \times \mathbf{R}^m}_{n+1 \text{ veces}} \rightarrow \mathbf{R}^p$ es una función definida en un

abierto U . Una **solución** de (1.2) es una función $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ n veces derivable en un intervalo *abierto* $D \subset \mathbf{R}$ que verifica

$$\boxed{F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in D.}$$

Notación:

- $u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}$
- $p =$ número de ecuaciones del sistema (el sistema $F = 0$ es equivalente a las p ecuaciones $F_1 = \dots = F_p = 0$, donde F_i es la i -ésima componente de F).
- $m =$ número de funciones incógnitas (la función incógnita vectorial $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ es equivalente a las m funciones incógnitas escalares $y_1, \dots, y_m : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, donde y_i es la i -ésima componente de y). Generalmente, $\boxed{p = m}$.
- $n =$ **orden** del sistema. Se supone que alguna derivada parcial $\frac{\partial F_i}{\partial y_j^{(n)}}$ no es idénticamente cero, para que alguna derivada n -ésima de y aparezca en el sistema.

Ejemplo 1.3.

$$\begin{aligned}y_1'' &= B(y_1, y_2) y_2' \\y_2'' &= -B(y_1, y_2) y_1'\end{aligned}$$

(donde $B(y_1, y_2)$ es una función dada) es un sistema de dos ecuaciones de orden 2 (describe el movimiento de una partícula de carga unidad en el plano (y_1, y_2) bajo la acción de un campo magnético de intensidad $B(y_1, y_2)$ perpendicular a dicho plano).

1.2 Técnicas elementales de integración

Comenzaremos estudiando el caso más sencillo de una **ecuación escalar de primer orden** ($n = m = p = 1$)

$$\boxed{F(x, y, y') = 0.}$$

Muchas veces es posible despejar y' en función de (x, y) de la ecuación anterior, obteniéndose así la ecuación escalar de primer orden en **forma normal**

$$\boxed{y' = f(x, y).}$$

1.2.1 $y' = f(x)$

Si f es continua en un intervalo abierto D , la ecuación se resuelve integrando ambos miembros a partir de un punto cualquiera $x_0 \in D$:

$$\boxed{y = \int_{x_0}^x f(s) ds + c,}$$

donde $c = y(x_0)$ es una constante arbitraria.

- La solución general de la ecuación anterior depende de una *constante arbitraria* $c \in \mathbf{R}$ (el punto x_0 se fija de antemano).
- El **problema de valor inicial**

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

tiene la *solución única* $y = \int_{x_0}^x f(s) ds + y_0$.

1.2.2 Ecuaciones con variables separadas

$$\boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}}, \quad (1.3)$$

con f, g continuas en sendos intervalos abiertos U, V , y $g(y) \neq 0$ para todo $y \in V$.

Solución. Toda solución $y(x)$ satisface

$$g(y(s))y'(s) = f(s) \implies \int_{x_0}^x g(y(s))y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

Haciendo el cambio de variable $t = y(s)$ en la primera integral se obtiene

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} g(t) dt = \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

Si y_0 es un punto arbitrario (pero fijo) de V , vemos que toda solución $y(x)$ ha de satisfacer la **ecuación implícita**

$$\boxed{\int_{y_0}^y g(s) ds = \int_{x_0}^x f(s) ds + c}, \quad (1.4)$$

donde $c = \int_{y_0}^{y(x_0)} g(s) ds$ es una constante arbitraria. Recíprocamente, derivando (1.4) (considerando a y como función de x) se comprueba que toda función $y(x)$ que verifique (1.4) es solución de (1.3). Se dice que la expresión (1.4) es la **solución general** de (1.3).

- Estudiemos más detenidamente la solución general (1.4). Es de la forma

$$\phi(x, y) = c, \quad \text{con} \quad \phi(x, y) = \int_{y_0}^y g(s) ds - \int_{x_0}^x f(s) ds. \quad (1.5)$$

La ecuación (1.5) define implícitamente una **familia a un parámetro** de curvas planas. Cada curva de la familia (que se obtiene fijando el valor del parámetro c) tiene la propiedad de que *su pendiente y' en un punto cualquiera (x, y) de la curva satisface la ecuación (1.3)*, es decir $y' = f(x)/g(y)$. Este tipo de curvas se denominan **curvas integrales** de la ecuación (1.3). Nótese que una solución de (1.3) no es más que una función cuya gráfica está contenida en una curva integral.

Sea $(a, b) \in U \times V$ un punto del plano, por el que pasa la curva de la familia (1.5) con $c = \phi(a, b)$. Por el *teorema de la función implícita*, la relación (1.5) define en un entorno del punto (a, b) una *función $y(x)$* tal que $y(a) = b$ si

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(a, b) = g(b) \neq 0,$$

condición que se cumple por la hipótesis hecha sobre g . (Nótese que ϕ es de clase $C^1(U \times V)$, por lo que el teorema es aplicable.) Esta función es solución de la ecuación diferencial (1.3) (ya que satisface la relación implícita (1.5)) con la condición inicial $y(a) = b$. El teorema de la función implícita garantiza que esta solución es única localmente (en un entorno de a), ya que dicho teorema garantiza la unicidad local de la función $y(x)$ que satisface la relación implícita (1.5) junto con la condición $y(a) = b$. Por tanto, el problema de valor inicial asociado a la ecuación (1.3) tiene *solución única local* si los datos iniciales están en el abierto $U \times V$.

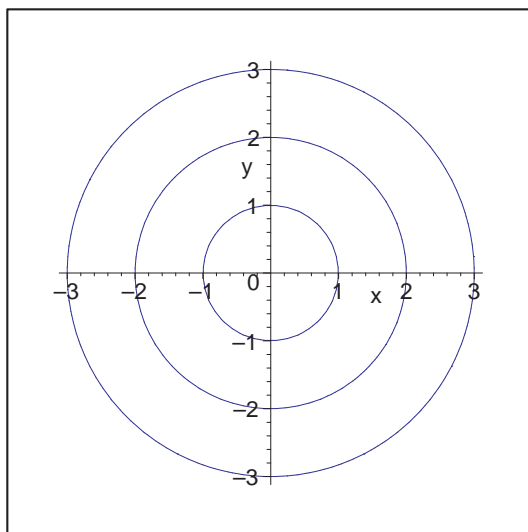


Figura 1.1: Curvas integrales de la ecuación $y' = -x/y$.

Ejemplo 1.4. Consideremos la ecuación

$$\boxed{y' = -\frac{x}{y}}, \quad (1.6)$$

que es del tipo anterior con $f(x) = -x$, $U = \mathbf{R}$, $g(y) = y$. Como g se anula en 0, como intervalo V podemos tomar o bien $V_+ = \mathbf{R}^+$ (números reales positivos) o bien $V_- = \mathbf{R}^-$, pero no $V = \mathbf{R}$. La integración de esta ecuación es inmediata, siendo la solución general

$$\boxed{y^2 + x^2 = c}, \quad (1.7)$$

con $c > 0$ una constante arbitraria. Las curvas integrales son pues circunferencias de radio \sqrt{c} (fig. 1.4). Si hemos tomado $V = \mathbf{R}^+$, entonces $y > 0$, y por tanto de (1.7) se sigue que

$$y = \sqrt{c - x^2}, \quad (1.8)$$

que está definida (y es derivable) en el intervalo abierto $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$. Por el contrario, si tomamos $V = \mathbf{R}^-$ entonces $y < 0$, y la solución general es entonces

$$y = -\sqrt{c - x^2}, \quad -\sqrt{c} < x < \sqrt{c}. \quad (1.9)$$

Así, en este caso cada curva integral (1.7) da lugar a dos soluciones (tiene dos *ramas*).

Utilizando las expresiones (1.8) y (1.9) es fácil probar que el problema de valor inicial $y(x_0) = y_0$ para la ecuación (1.6) tiene solución única para todo (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$. La ecuación diferencial (1.6) no tiene sentido en el eje horizontal, ya que ahí se anula el denominador del miembro derecho. En cuanto a las soluciones (1.8)–(1.9), ambas tienen límite cero cuando $x \rightarrow \pm\sqrt{c} \mp$, pero su derivada tiende a infinito en estos puntos.

Ejemplo 1.5. Sea ahora la ecuación con variables separadas

$$\boxed{y' = y^2 \cos x}. \quad (1.10)$$

Ahora $f(x) = \cos^2 x$, $U = \mathbf{R}$, $g(y) = \frac{1}{y^2}$, $V = \mathbf{R}^+$ ó $V = \mathbf{R}^-$. Sin embargo, nótese que ahora el miembro derecho de la ecuación tiene sentido (es continuo, de hecho C^∞) en

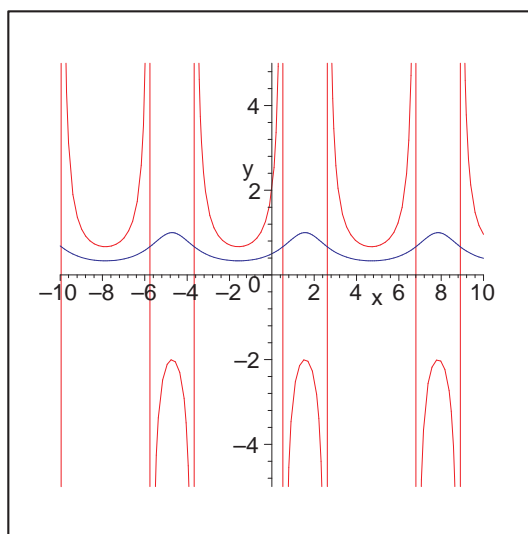


Figura 1.2: Soluciones de la ecuación $y' = y^2 \cos x$.

todo el plano (x, y) . De hecho, en este caso $y(x) = 0$ es obviamente solución de (1.10). Si $y \neq 0$ la ecuación se integra de la forma usual (dividiendo por y^2):

$$\frac{y'}{y^2} = \cos x \implies -\frac{1}{y} = \sin x - c \iff \boxed{y = \frac{1}{c - \sin x}}, \quad (1.11)$$

con $c \in \mathbf{R}$ constante arbitraria. Nótese que la solución $y = 0$ no está contenida en la expresión anterior para ningún valor de *finito* de c (formalmente, se obtendría haciendo $c \rightarrow \pm\infty$). También es evidente que ninguna de las soluciones (1.11) corta a la solución $y = 0$.

El comportamiento de las soluciones (1.11) depende de que $|c| \leq 1$ ó $|c| > 1$. En este último caso el denominador de (1.11) nunca se anula, por lo que las soluciones con $|c| > 1$ están definidas en todo \mathbf{R} (fig. 1.5). Sin embargo, si $|c| \leq 1$ entonces

$$c = \sin x \iff x = \arcsen c + 2k\pi \quad \text{ó} \quad x = -\arcsen c + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

por lo que el denominador se anula infinitas veces, y la solución $y = (c - \sin x)^{-1}$ tiene infinitas asíntotas verticales (cf. fig. 1.5). Más propiamente, si $|c| \leq 1$ la expresión (1.11) define infinitas soluciones, cada una de ellas con intervalo de definición (x_i, x_{i+1}) limitado por dos ceros sucesivos de la ecuación $\sin x = c$. En este caso tanto la solución como sus(s) derivada(s) tienden a infinito cuando nos aproximamos a los límites de dicho intervalo.

Nótese que tanto en este ejemplo (para $|c| \leq 1$) como en el anterior las soluciones no están definidas en toda la recta real. En el ejemplo anterior, esto era debido a que eventualmente toda solución se aproxima a la recta $y = 0$, en que el miembro derecho de la ecuación (1.6) es discontinuo (tiende a infinito, si $x \neq 0$). Sin embargo, en este caso las soluciones tienen singularidades en puntos en que el miembro derecho de la ecuación diferencial es continuo (en este caso, el miembro derecho de (1.10) es continuo, de hecho C^∞ , en todo el plano). Dicho de otro modo, no es posible averiguar la existencia y la posición de estas singularidades estudiando las singularidades del miembro derecho de (1.10). Estas singularidades aparecen no porque el miembro derecho de (1.10) sea discontinuo, sino porque la derivada de la solución crece cada vez más rápido, de forma que la solución “explota” en un tiempo finito.

Ejercicio. Probar que el problema de valor inicial $y(x_0) = y_0$ para la ecuación (1.10) tiene solución única para todo (x_0, y_0) , dada por

$$y = \frac{y_0}{1 + y_0(\operatorname{sen} x_0 - \operatorname{sen} x)}.$$

Nótese que esta expresión contiene a la solución $y = 0$ (se obtiene para $y_0 = 0$).

1.2.3 Ecuaciones homogéneas

Se trata de ecuaciones de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad (1.12)$$

en que la función f es continua en un abierto $U \subset \mathbf{R}^2$ y *homogénea* de grado cero, es decir

$$\boxed{f(tx, ty) = f(x, y), \quad \forall x, y \in U, t \in \mathbf{R}, t \neq 0.}$$

Este tipo de ecuaciones se resuelven transformándolas en una ecuación de variables separadas mediante el cambio

$$\boxed{y = xz}, \quad (1.13)$$

válido para $x \neq 0$. En efecto,

$$y' = xz' + z = f(x, xz) = f(1, z) \implies \boxed{z' = \frac{f(1, z) - z}{x}}. \quad (1.14)$$

La ecuación anterior tiene soluciones constantes $z = \lambda$ para toda raíz λ de la ecuación

$$\lambda = f(1, \lambda).$$

En la variable y éstas son soluciones lineales $y = \lambda x$, mientras que las demás soluciones se obtienen integrando (1.14), es decir son de la forma

$$\boxed{\log |x| + c = \int^{y/x} \frac{dz}{f(1, z) - z}}.$$

Ejemplo 1.6.

$$\boxed{y' = \frac{3xy + 2y^2}{x^2 + xy}}. \quad (1.15)$$

Es una ecuación homogénea (tanto el numerador como el denominador son homogéneos de grado 2), con

$$f(1, z) = \frac{3z + 2z^2}{1 + z} \implies f(1, z) - z = \frac{z(z + 2)}{z + 1}.$$

Las soluciones lineales son por tanto $y = 0$ e $y = -2x$. Las demás soluciones están dadas por

$$\log |x| + c = \int \frac{z + 1}{z(z + 2)} dz = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z + 2} \right) dz = \frac{1}{2} \log |z(z + 2)|,$$

de donde

$$z(z + 2) = Cx^2$$

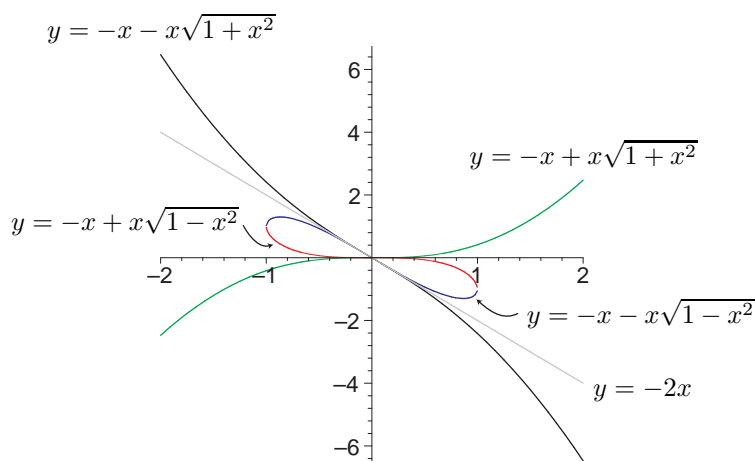


Figura 1.3: Soluciones de la ecuación (1.15).

con $C = \pm e^{2c}$ constante no nula. Resolviendo esta ecuación cuadrática en z y sustituyendo $z = y/x$ obtenemos finalmente

$$\boxed{y = -x \pm x \sqrt{1 + Cx^2}} \quad (1.16)$$

Esta solución está definida para todo x si $C > 0$, y para $|x| < 1/\sqrt{|C|}$ si $C < 0$ (cf. fig. 1.3). En este caso f es singular en las rectas $x = 0$ y $x + y = 0$, por lo que el abierto U estará contenido en una de las cuatro regiones abiertas determinadas por la intersección de estas rectas. En cada una de estas regiones el signo del radical en la fórmula anterior está bien determinado: por ejemplo, si $x < 0$ y $x + y > 0$ deberá tomarse el signo “-”. Finalmente, nótese que haciendo $C = 0$ en la fórmula (1.16) obtenemos las dos soluciones lineales de la ecuación (1.15).

1.2.4 Ecuaciones lineales

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}, \quad (1.17)$$

donde a y b son funciones continuas en un intervalo abierto U . La ecuación se dice **homogénea** si $b \equiv 0$, e inhomogénea (o completa) en caso contrario. La ecuación lineal homogénea

$$\boxed{y' = a(x)y} \quad (1.18)$$

es de variables separadas, y por tanto se resuelve fácilmente. En efecto, $y = 0$ es solución, y si $y \neq 0$ se tiene

$$\frac{y'}{y} = a(x) \implies \log |y| = \int_{x_0}^x a(s) ds + c_0 \implies \boxed{y = c e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}},$$

donde $c = \pm e^{c_0}$ es una constante real arbitraria (si $c = 0$ obtenemos la solución particular $y = 0$ excluida al principio). Obsérvese que el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea (1.18) es un espacio vectorial de dimensión uno.

Para hallar la solución de la ecuación completa utilizaremos el método de **variación de las constantes**, debido a Lagrange, que consiste en expresar la solución en la forma

$$y = c(x) e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}, \quad (1.19)$$

evidentemente basada en la solución general de la homogénea. Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} y' - a(x)y - b(x) &= c'(x) e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} + c(x) a(x) e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} - a(x) c(x) e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} - b(x) \\ &= 0 \iff c'(x) = b(x) e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$c(x) = c + \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{x_0}^t a(s) ds} dt,$$

donde $c \in \mathbf{R}$ es una constante arbitraria. Utilizando la ecuación (1.19) llegamos a la siguiente expresión para la solución general de la ecuación lineal completa (1.17):

$$y = c e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} + e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{x_0}^t a(s) ds} dt,$$

o, equivalentemente,

$$y = c e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} + \int_{x_0}^x b(t) e^{\int_t^x a(s) ds} dt. \quad (1.20)$$

De nuevo, la solución depende del parámetro arbitrario c .

- Nótese que la expresión anterior tiene la estructura

$$y = c e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} + y_p(x),$$

donde el primer término es la solución general de la ecuación homogénea e $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación completa. Recíprocamente, si se conoce *cualquier* solución particular $y_1(x)$ de la ecuación completa entonces $y - y_1(x)$ es solución de la ecuación homogénea para toda solución y de la ecuación completa, por lo que

$$y = c e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} + y_1(x).$$

- De (1.20) se deduce que una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación completa puede calcularse a partir de una solución cualquiera no trivial (no idénticamente nula) $y_H(x)$ de la ecuación homogénea mediante la fórmula

$$y_1(x) = y_H(x) \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{y_H(t)} dt,$$

por lo que la solución general de (1.17) se puede escribir como sigue:

$$y = c y_H(x) + y_H(x) \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{y_H(t)} dt.$$

Ejemplo 1.7.

$$\boxed{y' = \frac{x + 2y}{x}}. \quad (1.21)$$

Esta ecuación (que tiene sentido sólo si $x \neq 0$, es decir si x pertenece a las semirrectas \mathbf{R}^+ ó \mathbf{R}^-) es lineal (inhomogénea), ya que se puede escribir

$$y' = \frac{2}{x}y + 1.$$

La ecuación anterior es homogénea, por lo que podría resolverse utilizando el procedimiento explicado en la Sección 1.2.3; sin embargo, en esta sección la resolveremos tratándola como una ecuación lineal.

Solución general de la homogénea:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \implies \log |y| = 2 \log |x| + c_0 \implies y = cx^2, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Solución particular de la completa:

$$y_p(x) = x^2 \int \frac{dt}{t^2} = x^2 (-x^{-1}) = -x.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación (1.21) es

$$\boxed{y = cx^2 - x}$$

(familia de parábolas tangentes a la recta $y = -x$ en el origen). Nótese que, aunque la ecuación es singular en $x = 0$, las funciones anteriores son C^∞ en el origen.

1.2.5 Ecuación de Bernoulli

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^r}, \quad r \in \mathbf{R}, \quad r \neq 0, 1, \quad (1.22)$$

con a, b continuas en un intervalo abierto U (los valores $r = 0$ y $r = 1$ corresponden a ecuaciones lineales, ya resueltas). (Nótese que, en general, y^r sólo tiene sentido para $y > 0$.) Esta ecuación se integra reduciéndola a una ecuación lineal mediante un cambio de variable dependiente del tipo

$$z = y^p,$$

con $p \neq 0$ escogido apropiadamente. En efecto, sustituyendo $y = z^{1/p}$ en la ecuación (1.22) y operando se obtiene la siguiente ecuación para z :

$$z' = p \left[a(x)z + b(x)z^{1+\frac{r-1}{p}} \right],$$

que es lineal si

$$1 + \frac{r-1}{p} = 0, 1.$$

El último caso hay que descartarlo (ya que $r \neq 1$), por lo que queda $\boxed{p = 1 - r}$, y la ecuación anterior se convierte en la ecuación lineal

$$z' = (1 - r)[a(x)z + b(x)] \quad (y = z^{\frac{1}{1-r}}).$$

Ejemplo 1.8.

$$\boxed{y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}}. \quad (1.23)$$

Se trata de una ecuación de Bernoulli con $r = 2$, ya que puede escribirse

$$y' = \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^2}y^2.$$

Haciendo el cambio $z = 1/y$ se obtiene por la ecuación lineal en z

$$z' = -\frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2}. \quad (1.24)$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$z = \frac{c}{x^2}.$$

Una solución particular de la ecuación (1.24) es

$$z_p(x) = \frac{1}{x^2} \int^x dt = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, la solución general de (1.24) es

$$z = \frac{x + c}{x^2},$$

y la de la ecuación propuesta (1.23)

$$\boxed{y = \frac{x^2}{x + c}}.$$

Ejercicio. Resolver la ecuación (1.23) considerándola como una ecuación homogénea.

1.2.6 Ecuación de Riccati

$$\boxed{y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2}, \quad (1.25)$$

con a, b, c continuas en un intervalo abierto U . (Si $c \equiv 0$ la ecuación de Riccati se reduce a una ecuación lineal, y si $a \equiv 0$ a una de Bernoulli.)

Esta ecuación, de gran importancia en Física Matemática, en general no se puede resolver *por cuadraturas* (es decir, no es posible obtener una expresión explícita para la solución general de la ecuación en términos de los coeficientes a, b, c y sus primitivas). Sin embargo, si conocemos una solución particular $y_0(x)$ de la ecuación podemos reducirla mediante el cambio de variable

$$\boxed{u = \frac{1}{y - y_0(x)}}$$

a una ecuación lineal, que ya hemos visto como resolver en la sección 1.2.4. En efecto, efectuando el cambio anterior obtenemos

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{y' - y_0'(x)}{(y - y_0(x))^2} = -\frac{b(x)(y - y_0(x)) + c(x)(y^2 - y_0(x)^2)}{(y - y_0(x))^2} = -b(x)u - c(x)\frac{y + y_0(x)}{y - y_0(x)} \\ &= \boxed{-[b(x) + 2c(x)y_0(x)]u - c(x)}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ejemplo 1.9.

$$y' = \cos x - y - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} y^2.$$

Es una ecuación de Riccati, con solución particular $y_0(x) = \cos x$. Efectuando el cambio de variable

$$u = \frac{1}{y - \cos x}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{y' + \operatorname{sen} x}{(y - \cos x)^2} = u^2 \left[-\operatorname{sen} x - \cos x + y + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} y^2 \right] \\ &= u^2 \left[-\operatorname{sen} x + \frac{1}{u} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{2 \cos x}{u} + \cos^2 x \right) \right], \end{aligned}$$

y por tanto u verifica la ecuación lineal

$$u' = (1 + 2 \tan x)u + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}. \quad (1.27)$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$u = c \frac{e^x}{\cos^2 x},$$

con c constante. Una solución particular de la ecuación completa es

$$\frac{e^x}{\cos^2 x} \int e^{-t} \operatorname{sen} t \, dt = -\frac{1}{2} \frac{e^x}{\cos^2 x} \cdot e^{-x} (\operatorname{sen} x + \cos x) = -\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2 \cos^2 x}.$$

Por tanto la solución de la ecuación lineal (1.27) es

$$u = c \frac{e^x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2 \cos^2 x},$$

y la de la ecuación de partida

$$y = \cos x + \frac{2 \cos^2 x}{C e^x - \operatorname{sen} x - \cos x},$$

donde $C = 2c$ es una constante arbitraria.

• Si c no es idénticamente nula, la ecuación de Riccati (1.25) se linealiza mediante el cambio de variable

$$y = -\frac{1}{c(x)} \frac{z'}{z},$$

que la transforma en una ecuación lineal de segundo orden en z . En efecto,

$$y' = -\frac{1}{c(x)} \frac{z''}{z} + \frac{c'(x)}{c(x)^2} \frac{z'}{z} + \frac{1}{c(x)} \frac{z'^2}{z^2} = a(x) - \frac{b(x)}{c(x)} \frac{z'}{z} + \frac{1}{c(x)} \frac{z'^2}{z^2}$$

y por tanto z es solución de

$$z'' - \left[b(x) + \frac{c'(x)}{c(x)} \right] z' + a(x)c(x)z = 0. \quad (1.28)$$

Veremos en el capítulo siguiente que la solución general de esta ecuación puede expresarse en la forma

$$z = k_1 z_1(x) + k_2 z_2(x),$$

con $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ y z_1, z_2 dos soluciones particulares linealmente independientes. Si conseguimos hallar explícitamente la solución general de la ecuación lineal (1.28), la de la ecuación de Riccati de partida está dada por

$$y = -\frac{1}{c(x)} \frac{k_1 z_1'(x) + k_2 z_2'(x)}{k_1 z_1(x) + k_2 z_2(x)}.$$

Nótese que esta solución depende de una sólo constante arbitraria (el cociente k_1/k_2 ó k_2/k_1).

Ejercicio. La solución general de la ecuación de Riccati

$$y' = x + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}.$$

es

$$y = x \tan(x - c), \quad c \in \mathbf{R}.$$

Obtener esta solución linealizando la ecuación dada y resolviendo la ecuación lineal correspondiente. [*Ayuda:* la solución general de la ecuación $z'' + z = 0$ es $z = k_1 \cos x + k_2 \sin x$.]

• La estrecha relación entre la ecuación de Riccati (1.25) y la ecuación lineal (1.28) da lugar a multitud de importantes propiedades de las soluciones de la ecuación de Riccati. Así, por ejemplo, si $y_i(x)$ ($1 \leq i \leq 4$) son cuatro soluciones distintas de la ecuación de Riccati entonces puede probarse que la *razón cuádruple*

$$\frac{(y_4 - y_2)(y_3 - y_1)}{(y_4 - y_1)(y_3 - y_2)} \tag{1.29}$$

es constante. En particular, si se conocen tres soluciones particulares distintas y_1, y_2, y_3 de la ecuación de Riccati (1.25) entonces su solución general $y(x)$ se obtiene despejando y de la ecuación

$$\frac{(y - y_2)(y_3 - y_1)}{(y - y_1)(y_3 - y_2)} = c, \quad c \in \mathbf{R}. \tag{1.30}$$

1.2.7 Ecuaciones exactas y factores integrantes

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y) y' = 0, \tag{1.31}$$

con P, Q funciones continuas en un abierto $U \subset \mathbf{R}^2$ y $Q(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in U$, se dice **exacta** en U si existe una función $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$P(x, y) = f_x(x, y), \quad Q(x, y) = f_y(x, y), \quad \forall (x, y) \in U. \tag{1.32}$$

En otras palabras, la ecuación (1.31) es exacta si

$$(P, Q) = \nabla f \quad \text{en } U.$$

Por tanto, una ecuación exacta (1.31) puede escribirse

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) y' = 0.$$

Si $y(x)$ es una solución cualquiera de dicha ecuación entonces

$$f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) y'(x) = \frac{d}{dx} [f(x, y(x))] = 0.$$

De esto se deduce que la solución general de la ecuación exacta (1.31)–(1.33) está dada implícitamente por

$$\boxed{f(x, y) = c.}$$

Por el teorema de la función implícita, la ecuación anterior define localmente a y como función de x en un entorno de cada punto de U (ya que $f_y(x, y) = Q(x, y)$ no se anula en U por hipótesis).

Obsérvese que si (1.31) es una ecuación exacta y P, Q son de clase $C^1(U)$ entonces

$$\boxed{P_y(x, y) = Q_x(x, y)}, \quad \forall (x, y) \in U, \quad (1.33)$$

ya que (lema de Schwarz) ambos miembros son iguales a $f_{xy}(x, y)$. Recíprocamente, puede probarse que si se cumple la condición (1.33) en un abierto **simplemente conexo** U entonces la ecuación es exacta. (Un abierto de \mathbf{R}^2 es *conexo* si dos puntos cualesquiera de dicho abierto se pueden unir por una curva continua enteramente contenida en el abierto. Un abierto conexo es *simplemente conexo* si toda curva cerrada continua contenida en el abierto puede deformarse de forma continua a un punto sin salirse del abierto. Intuitivamente, un abierto es simplemente conexo si es conexo (consta “de una sola pieza”) y no tiene “agujeros”. Ejemplos de abiertos simplemente conexos son el conjunto \mathbf{R}^2 , un disco abierto, un rectángulo abierto, un triángulo abierto, etc. Los abiertos *estrellados* y, en particular, *convexos* de \mathbf{R}^2 son simplemente conexos. Un abierto no simplemente conexo es, por ejemplo, \mathbf{R}^2 menos un punto, un disco abierto menos uno de sus puntos, ó un anillo.)

Probemos que la condición (1.33) es *suficiente* para que la ecuación (1.31) sea exacta si $U = (a, b) \times (c, d)$ es un rectángulo abierto (en particular, si $U = \mathbf{R}^2$). En efecto, sea (x_0, y_0) un punto fijo de U . Integrando la ecuación $f_x = P$ respecto de x obtenemos

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(s, y) ds + g(y),$$

donde la función g sólo puede depender de y . (Nótese que los puntos de la forma (s, y) pertenecen a U si $y \in (c, d)$ y $s \in (a, b)$.) Imponiendo la segunda ecuación $f_y = Q$ y aplicando la relación (1.33) obtenemos una ecuación diferencial para g :

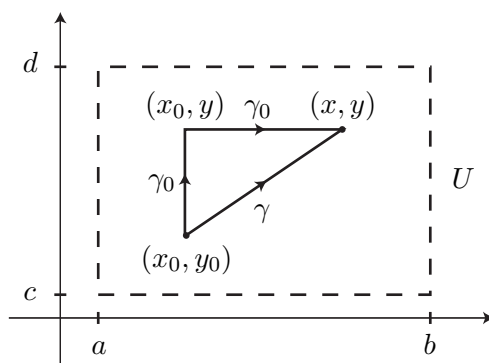
$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= g'(y) + \int_{x_0}^x P_y(s, y) ds = g'(y) + \int_{x_0}^x Q_x(s, y) ds = g'(y) + Q(x, y) - Q(x_0, y) \\ &= Q(x, y) \iff g'(y) = Q(x_0, y). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds + c,$$

y

$$\boxed{f(x, y) = \int_{x_0}^x P(s, y) ds + \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds + c.} \quad (1.34)$$


 Figura 1.4: Caminos que unen (x_0, y_0) con (x, y) en U .

(De nuevo, el segmento vertical (x_0, s) con $s \in (c, d)$ está contenido en U .)

La función f está definida a menos de una constante arbitraria. Nótese que la fórmula (1.34) se puede escribir como la **integral de línea**

$$f(x, y) = \int_{\gamma_0} (P, Q) \cdot d\vec{r} \equiv \int_{\gamma_0} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy],$$

donde γ_0 es el camino quebrado de la fig. 1.4. Como la condición (1.33) garantiza la *independencia del camino* de la integral de línea $\int_{\gamma} (P dx + Q dy)$, para toda curva C^1 a trozos $\gamma \subset U$, también podemos escribir

$$f(x, y) = \int_{\gamma} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy],$$

donde γ es cualquier curva contenida en U que una el punto fijo $(x_0, y_0) \in U$ con el punto variable $(x, y) \in U$. Por ejemplo, si γ es el *segmento* que une (x_0, y_0) con (x, y) , es decir

$$\gamma(t) = (x_0, y_0) + t(x - x_0, y - y_0), \quad t \in [0, 1],$$

entonces $dx = (x - x_0) dt$, $dy = (y - y_0) dt$, y por tanto

$$f(x, y) = \int_0^1 [(x - x_0)P(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) + (y - y_0)Q(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))] dt.$$

Ejemplo 1.10.

$$\boxed{12x + 5y - 9 + (5x + 2y - 3)y' = 0.} \quad (1.35)$$

Se trata de una ecuación exacta, ya que

$$P = 12x + 5y - 9, \quad Q = 5x + 2y - 3 \implies P_y = Q_x = 5.$$

La función f tal que $\nabla f = (P, Q)$ se encuentra fácilmente:

$$\begin{aligned} f_x = 12x + 5y - 9 &\implies f = 6x^2 + 5xy - 9x + g(y); \\ f_y = 5x + g'(y) = 5x + 2y - 3 &\iff g'(y) = 2y - 3 \\ &\iff g(y) = y^2 - 3y + \text{const.} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación propuesta está dada implícitamente por la ecuación

$$6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 3y = c.$$

(Se trata de una familia de hipérbolas.)

Obsérvese que si $\mu(x, y)$ es una función no nula en U la ecuación (1.31) es equivalente a la ecuación

$$\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)y' = 0. \quad (1.36)$$

A toda función μ tal que la ecuación anterior sea exacta se le llama un **factor integrante** para la ecuación de partida (1.31). La ecuación que ha de cumplir el factor integrante μ es por tanto (si U es, de nuevo, un abierto simplemente conexo del plano)

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x,$$

que se puede escribir como la siguiente ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden para μ :

$$P(x, y) \mu_y - Q(x, y) \mu_x + [P_y(x, y) - Q_x(x, y)] \mu = 0. \quad (1.37)$$

Si se conoce un factor integrante cualquiera de la ecuación (1.31) dicha ecuación se resuelve integrando la ecuación exacta (1.36). Se puede probar que la ecuación (1.37) tiene (localmente) infinitas soluciones si P, Q son, por ejemplo, de clase C^1 en U . Por tanto, toda ecuación de la forma (1.31) posee un factor integrante. El problema es que, en general, no hay ninguna forma sistemática para encontrar dicho factor integrante, ya que la ecuación en derivadas parciales (1.37) es casi siempre mucho más difícil de resolver que la ecuación diferencial ordinaria de partida (1.31). Sólo si $P_y - Q_x$ es particularmente sencillo se puede dar alguna regla práctica para calcular el factor integrante μ . Por ejemplo, si

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} \equiv g(x)$$

sólo depende de x entonces (1.31) admite un factor integrante $\mu(x)$ función sólo de x , ya que en este caso haciendo $\mu_y = 0$ en la ecuación (1.37) se obtiene la ecuación diferencial ordinaria en x

$$\mu'(x) = g(x) \mu(x) \implies \mu(x) = c e^{\int g(t) dt}.$$

Análogamente, si

$$\frac{P_y - Q_x}{P} \equiv h(y)$$

la ecuación (1.31) posee el factor integrante función de y únicamente:

$$\mu(y) = c e^{-\int h(t) dt}.$$

Ejercicio. Probar que la ecuación (1.31) posee un factor integrante $\mu(r)$ función de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ si y sólo si

$$\frac{P_y - Q_x}{yP - xQ} = g(r),$$

y que en tal caso μ puede calcularse por la fórmula

$$\mu(r) = c e^{-\int r g(t) dt}.$$

Ejemplo 1.11. Consideremos la ecuación

$$\boxed{y^2(x^2 + y^3)y' - x = 0.} \quad (1.38)$$

Aquí

$$P_y = 0, \quad Q_x = 2xy^2, \quad \implies \quad \frac{P_y - Q_x}{P} = 2y^2 = h(y).$$

La ecuación posee por tanto el factor integrante

$$\mu(y) = e^{-\int^y 2t^2 dt} = \boxed{e^{-\frac{2}{3}y^3}.$$

Para integrar la ecuación hallamos una función f tal que $\nabla f = e^{-\frac{2}{3}y^3}(P, Q)$, es decir

$$\begin{aligned} f_x = -x e^{-\frac{2}{3}y^3} &\implies f = -\frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{2}{3}y^3} + g(y); \\ f_y = x^2 y^2 e^{-\frac{2}{3}y^3} + g'(y) &= (x^2 y^2 + y^5) e^{-\frac{2}{3}y^3} \implies g'(y) = y^5 e^{-\frac{2}{3}y^3}. \end{aligned}$$

Por tanto (omitiendo la constante arbitraria)

$$g(y) = \int y^5 e^{-\frac{2}{3}y^3} dy = \frac{1}{3} \int^{y^3} t e^{-\frac{2}{3}t} dt = -\frac{1}{4} (2y^3 + 3) e^{-\frac{2}{3}y^3},$$

de donde

$$f(x, y) = -\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}(2y^3 + 3) \right] e^{-\frac{2}{3}y^3}.$$

La solución general de la ecuación de partida es pues

$$\boxed{x^2 + y^3 = c e^{\frac{2}{3}y^3} - \frac{3}{2}.$$

(Nótese que en este caso puede despejarse x en función de y .)

Ejercicio. Resolver la ecuación (1.38) convirtiéndola en una de variables separadas mediante el cambio $z = x^2 + y^3$.

1.3 Existencia y unicidad de soluciones

Hemos visto en la sección anterior que el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y) \quad (1.39)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.40)$$

asociado a la ecuación diferencial de primer orden (1.39) tenía solución única, salvo para datos iniciales (1.40) en que la función f no era suficientemente regular. En esta sección vamos a estudiar en detalle el problema de la existencia y unicidad de soluciones del problema (1.39)–(1.40), intentando precisar bajo qué condiciones sobre la función f y los datos iniciales (x_0, y_0) la solución es única. Consideraremos el caso más general en que la variable dependiente (función incógnita) y toma valores en \mathbf{R}^n :

$$\boxed{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n,} \quad (1.41)$$

por lo que la función f ha de ser una función vectorial que tome valores en \mathbf{R}^n y definida en un abierto U de \mathbf{R}^{n+1} :

$$\boxed{f = (f_1, \dots, f_n) : U \subset \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad U \text{ abierto}}. \quad (1.42)$$

La ecuación (1.39) es por tanto un *sistema* de n ecuaciones diferenciales de primer orden en forma normal

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases}$$

y el dato inicial (1.40) es equivalente a las n condiciones

$$y_1(x_0) = y_{01}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n},$$

si $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})$.

La ventaja de considerar a y como una función vectorial es que la solución del problema (1.39)–(1.40) implica la solución de otros problemas interesantes. En efecto, consideremos la ecuación escalar más general de orden n en forma normal

$$\boxed{u^{(n)} = F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)})}, \quad (1.43)$$

donde $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Esta ecuación se puede escribir como un sistema de primer orden introduciendo (por ejemplo) las variables

$$\boxed{y_i = u^{(i-1)}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.44)$$

($u^{(0)} \equiv u$) convirtiéndose entonces en la ecuación vectorial (1.39) con

$$\boxed{f(x, y) = (y_2, \dots, y_n, F(x, y_1, \dots, y_n))}. \quad (1.45)$$

(Más precisamente, $y(x)$ es solución de la ecuación (1.39)–(1.45) si y sólo si $y(x) = (u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x))$, con $u(x)$ solución de (1.43).) La condición inicial (1.40) se escribe en términos de la función incógnita original u como sigue:

$$u^{(i)}(x_0) = y_{0,i+1}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

En otras palabras, en este caso se asignan valores iniciales (en $x = x_0$) a la función u y a sus primeras $n-1$ derivadas. La solución del problema (1.39)–(1.40) conlleva por tanto la solución del problema de valor inicial para una ecuación normal de orden n

$$u^{(n)} = F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \quad (1.46)$$

$$u^{(i)}(x_0) = u_{0i}, \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (1.47)$$

La existencia *local* de soluciones del problema de valor inicial (1.39)–(1.40) está garantizada si la función f es *continua* en su abierto de definición, según afirma el siguiente teorema, debido al matemático italiano G. Peano (1858–1932):

Teorema de existencia de Peano. Sea $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ continua en el abierto U , y sea $(x_0, y_0) \in U$. Entonces el problema (1.39)–(1.40) tiene (al menos) una solución $y(x)$ definida en un intervalo de la forma $(x_0 - h, x_0 + h)$, para $h > 0$ suficientemente pequeño.

(El número h , que es función (x_0, y_0) , se puede estimar explícitamente, y depende esencialmente de lo grande que sea el valor de $\|f(x, y)\|$ en U .)

Es fácil convencerse de que la continuidad de f en U no garantiza la unicidad (ni siquiera local) del problema de valor inicial (1.39)–(1.40) con datos iniciales en U . Un ejemplo muy sencillo es el de la ecuación

$$\boxed{y' = 3y^{2/3}}, \quad (1.48)$$

para la cual $f(x, y) = 3y^{2/3}$ es continua en $U = \mathbf{R}^2$. El teorema de Peano garantiza por tanto la existencia de *por lo menos* una solución del problema de valor inicial asociado a la ecuación (1.48) para cualquier dato inicial (x_0, y_0) . Nótese, sin embargo, que no existe la derivada parcial de primer orden de f respecto de y en el eje horizontal $y = 0$. (En particular, f no es derivable en dicho eje.)

Una solución de (1.48) es la función $y(x) = 0$, definida en todo \mathbf{R} . Si $y \neq 0$, integrando la ecuación (es de variables separadas) obtenemos

$$y = (x + c)^3, \quad (1.49)$$

función también definida en toda la recta real (fig. 1.5). (Se demuestra que la solución

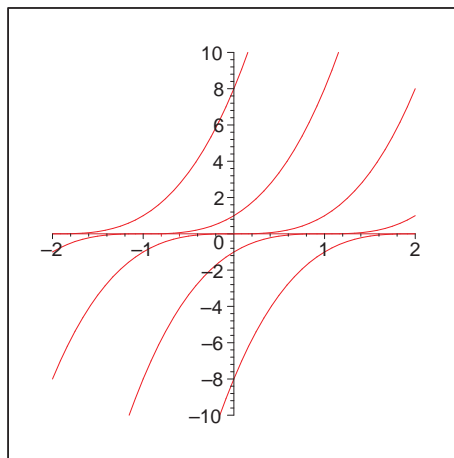


Figura 1.5: Soluciones de la ecuación $y' = 3y^{2/3}$.

particular $y = 0$, que no se obtiene de (1.49) para ningún valor de $c \in \mathbf{R}$, es la *envolvente* de la familia de parábolas cúbicas (1.49).) Es fácil ver que el problema de valor inicial para la ecuación (1.48) con la condición inicial

$$\boxed{y(x_0) = 0} \quad (1.50)$$

no tiene solución única, ni siquiera localmente. Por ejemplo, las funciones $y(x) = 0$ e $y(x) = (x - x_0)^3$ son dos soluciones de dicho problema que no coinciden en ningún intervalo abierto centrado en x_0 .

1.3.1 Funciones lipschitzianas

Introduciremos a continuación una condición sobre la función f más fuerte que la continuidad, que será suficiente para que el problema de valor inicial (1.39)–(1.40) tenga solución única local. Comenzaremos con el caso sencillo de funciones de una variable.

Definición 1.12. Una función $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ (siendo I un intervalo) es **lipschitziana** si existe una constante positiva $L > 0$ (*constante de Lipschitz*) tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in I. \quad (1.51)$$

- f lipschitziana en $I \implies f$ uniformemente continua en I .
- Sin embargo, f lipschitziana en $I \not\implies f$ derivable en I . Por ejemplo, $f(x) = |x|$ es lipschitziana en cualquier intervalo (con constante de Lipschitz igual a 1), ya que de la desigualdad triangular se deduce que

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|.$$

- La derivabilidad de f no implica en general su lipschitzianidad. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ no es lipschitziana en $I = \mathbf{R}$. En efecto, si lo fuera existiría $L > 0$ tal que

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R},$$

lo que implicaría el resultado absurdo

$$|x_1 + x_2| \leq L, \quad \forall x_1 \neq x_2.$$

Proposición 1.13. Si f es derivable en un intervalo I y f' está acotada en I , entonces f es lipschitziana en I .

Demostración. En efecto, si $|f'(x)| \leq L$ para todo $x \in I$ aplicando el teorema del valor medio se obtiene

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|,$$

ya que $\xi \in (\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)) \subset I$.

Q.E.D.

Corolario 1.14. $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 en un intervalo compacto $I \implies f$ lipschitziana en I .

Demostración. Si $f \in C^1(I)$ con I intervalo compacto, f' es continua en el intervalo compacto I , por lo que f' es necesariamente acotada en dicho conjunto (alcanza, de hecho, sus valores máximo y mínimo en I). La proposición anterior implica entonces que f es lipschitziana en I . *Q.E.D.*

Pasemos a continuación al caso que en realidad nos interesa, en el que $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Definición 1.15. Sea $f : I \times D \rightarrow \mathbf{R}^n$, siendo $I \subset \mathbf{R}$ un intervalo y $D \subset \mathbf{R}^n$ (no necesariamente abierto). Diremos que f es **lipschitziana en la segunda variable** (o *en el segundo argumento*) en $I \times D$ si existe $L > 0$ (de nuevo llamada *constante de Lipschitz*) tal que

$$\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| \leq L \|y^1 - y^2\|, \quad \forall x \in I, \quad \forall y^1, y^2 \in D. \quad (1.52)$$

En la fórmula anterior, $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana en \mathbf{R}^n , es decir

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n \implies \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

La definición 1.15 es análoga a la 1.12, considerando a la variable x como un parámetro y cambiando el valor absoluto por la norma.

Proposición 1.16. Sea $f : I \times D \rightarrow \mathbf{R}^n$, con D abierto convexo. Si las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ($1 \leq i \leq n$) existen, son continuas y están acotadas en $I \times D$, entonces f es lipschitziana en $I \times D$.

Demostración. Sean $(x, y^1), (x, y^2) \in I \times D$. Aplicando el teorema del valor medio a cada componente f_i de f obtenemos

$$f_i(x, y^1) - f_i(x, y^2) = \nabla f_i(x, \eta_i) \cdot (y^1 - y^2),$$

para algún punto η_i del segmento que une y^1 con y^2 (contenido en D por ser dicho conjunto convexo), donde el gradiente está tomado respecto de las variables (y_1, \dots, y_n) . Por la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$|f_i(x, y^1) - f_i(x, y^2)| \leq \|\nabla f_i(x, \eta_i)\| \|y^1 - y^2\| \leq \sqrt{n}M \cdot \|y^1 - y^2\|$$

siendo M una cota superior de los valores absolutos de las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ en $I \times D$. De esta desigualdad se sigue que

$$\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| \leq nM \cdot \|y^1 - y^2\|$$

Por tanto, f es lipschitziana en $I \times D$, y se puede tomar $L = nM$.

Q.E.D.

Si las derivadas parciales de $f(x, y)$ respecto de las variables y_i son *continuas* en un abierto $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ entonces f es **localmente lipschitziana** en cada punto de U . Esto quiere decir que para todo $(x_0, y_0) \in U$ la función f es lipschitziana en cualquier cilindro compacto $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \overline{B}_r(y_0)$ contenido en U , donde

$$B_r(y_0) = \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - y_0\| < r\}, \quad \overline{B}_r(y_0) = \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - y_0\| \leq r\}$$

denotan respectivamente la bola abierta o cerrada de centro y_0 y radio r . En efecto, al ser $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ continua en el compacto $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \overline{B}_r(y_0) \subset U$ automáticamente está acotada en dicho compacto, y por tanto puede aplicarse la proposición anterior.

Repasemos a continuación algunos resultados relativos a la noción de convergencia uniforme, que serán fundamentales para la demostración del teorema de Picard–Lindelöf.

• Una sucesión de funciones $g_k : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($k \in \mathbf{N}$) se dice **uniformemente convergente** a la función g en $U \subset \mathbf{R}^m$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$k \geq N \implies \|g(x) - g_k(x)\| < \epsilon, \quad \text{para todo } x \in U.$$

Nótese que N sólo puede depender de ϵ , no del punto $x \in U$.

- Análogamente, la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente en U si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(x) \right\| < \epsilon, \quad \text{para todo } x \in U.$$

- Obviamente, la convergencia uniforme de una función (o serie de funciones) en U implica su convergencia puntual en cada punto de U , pero el recíproco no tiene por qué ser cierto.

- *Criterio M de Weierstrass:* si $\|g_k(x)\| \leq M_k$ para todo $x \in U \subset \mathbf{R}^m$ y $k \in \mathbf{N}$, y la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente en U .

- Si la sucesión de funciones $g_k : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($k \in \mathbf{N}$) converge *uniformemente* en $U \subset \mathbf{R}^m$, y cada g_k es *continua* en U , entonces el límite de la sucesión $g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$ es una función continua en U . Un resultado análogo vale para la suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas (enunciarlo).

- Si la sucesión de funciones $g_k : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{N}$) converge *uniformemente* en $[a, b]$, y cada g_k es una función integrable en $[a, b]$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k$ es integrable en $[a, b]$, y se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g_k(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t) \right) dt.$$

Un resultado análogo vale para series uniformemente convergentes de funciones integrables en un intervalo.

Teorema de Picard–Lindelöf. Sea $f : A \equiv [x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_b(y_0) \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ (con $a > 0, b > 0$) continua y lipschitziana con respecto a la segunda variable en el conjunto A . Entonces el problema de valor inicial (1.39)–(1.40) tiene una solución única $y(x)$ definida en el intervalo $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, siendo

$$\alpha = \min(a, b/M)$$

y M el supremo de $\|f\|$ en A .

Demostración. (Nótese, antes de empezar, que la existencia de M está garantizada por ser f continua en el conjunto compacto A .) La demostración está basada en un argumento muy sencillo de *aproximaciones sucesivas* (de Picard) a la solución del problema (1.39)–(1.40). Por sencillez, nos restringiremos al caso $n = 1$ (ecuación escalar), en que A es un rectángulo cerrado

$$A = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

y $\|f(x, y)\| = |f(x, y)|$.

i) En primer lugar, podemos transformar el problema de valor inicial en una **ecuación integral** integrando la ecuación diferencial entre x_0 y x (con $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$), obteniendo

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.} \quad (1.53)$$

Más precisamente, la función $y(x)$ es solución del problema de valor inicial (1.39)–(1.40) si y sólo si $y(x)$ es una solución *continua* de la ecuación integral (1.53). (*Ejercicio:* pruébese esto en detalle.)

ii) A continuación construimos recursivamente una familia de funciones $y_k : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$ ($k = 0, 1, \dots$) diferenciables en el intervalo $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ de la forma siguiente. En primer lugar, definimos

$$y_0(x) = y_0, \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

A continuación definimos

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt, \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

La función y_1 está claramente definida y es diferenciable en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ (por la continuidad de f en A). Además, se tiene

$$|y_1(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq b, \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]. \quad (1.54)$$

Procediendo recursivamente, supongamos que hemos definido las funciones diferenciables $y_0, \dots, y_k : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$. Entonces se define

$$\boxed{y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt,} \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]. \quad (1.55)$$

Por hipótesis de inducción, y_k es diferenciable en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ e $y_k(t) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ para $t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Esto implica que $f(t, y_k(t))$ es continua si $t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, y por tanto (teorema fundamental del Cálculo) y_{k+1} es diferenciable en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Utilizando de nuevo la hipótesis de inducción ($y_k(t) \in [y_0 - b, y_0 + b]$) se obtiene

$$|y_k(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq b, \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

iii) Probaremos a continuación por inducción la importante desigualdad

$$\boxed{|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{M L^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad k = 0, 1, \dots,} \quad (1.56)$$

donde $L > 0$ es una constante de Lipschitz de f en A . En efecto, para $k = 0$ la desigualdad ya está probada (véase (1.54)). Supuesta la desigualdad anterior cierta para $k = 0, 1, \dots, m - 1$ con $m \geq 1$, utilizando la hipótesis de inducción y la lipschitzianidad

de f en la variable y obtenemos

$$\begin{aligned}
 |y_{m+1}(x) - y_m(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_m(t)) - f(t, y_{m-1}(t))] dt \right| \\
 &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_m(t)) - f(t, y_{m-1}(t))| dt \right| \\
 &\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_m(t) - y_{m-1}(t)| dt \right| \leq L \cdot \frac{M L^{m-1}}{m!} \left| \int_{x_0}^x |t - x_0|^m dt \right| \\
 &= \frac{M L^m}{m!} \left| \int_{x_0}^x (t - x_0)^m dt \right| = \frac{M L^m}{m!} \cdot \frac{|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)} \\
 &= \frac{M L^m |x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!}.
 \end{aligned}$$

Esto prueba la desigualdad (1.56) para $k = m$, completando así el proceso de inducción.

iv) Probemos a continuación que la sucesión de funciones y_k ($k \in \mathbf{N}$) converge *uniformemente* en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ a una función *continua* y . En efecto, consideremos la *serie telescópica*

$$y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [y_{k+1} - y_k], \quad (1.57)$$

cuya convergencia uniforme es equivalente a la de la sucesión de funciones y_k ($k \in \mathbf{N}$) (ejercicio). Utilizando la desigualdad (1.56) se obtiene

$$x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \implies |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{M L^k \alpha^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L} \frac{(\alpha L)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Como la serie numérica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha L)^{k+1}}{(k+1)!} = e^{\alpha L} - 1$$

es convergente, la serie (1.57) y, por tanto, la sucesión y_k , converge *uniformemente* en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ (criterio M de Weierstrass). Al ser las funciones y_k continuas en el intervalo $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ y uniformemente convergentes a y en dicho intervalo, la función y es *continua* en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

v) Probaremos a continuación que la función $y(x)$ definida por

$$\boxed{y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x), \quad x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]} \quad (1.58)$$

es solución del problema de valor inicial. En efecto, pasando al límite cuando $k \rightarrow \infty$ en la desigualdad $|y_k(x) - y_0| \leq b$ se obtiene $|y(x) - y_0| \leq b$, para todo $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. La convergencia uniforme de la sucesión y_k ($k \in \mathbf{N}$) a la función y en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ también garantiza que la sucesión de funciones $g_k : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$g_k(t) = f(t, y_k(t))$$

converge *uniformemente* a la función $g(t) = f(t, y(t))$ para $t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, ya que (aplicando de nuevo la lipschitzianidad de f)

$$|g(t) - g_k(t)| = |f(t, y(t)) - f(t, y_k(t))| \leq L |y(t) - y_k(t)|$$

De esto se deduce que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Tomando por tanto el límite cuando $k \rightarrow \infty$ en la igualdad (1.55) vemos que y es solución de la ecuación integral (1.53). Como y es *continua* en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, esto implica que y es solución del problema de valor inicial (1.39)–(1.40). (Nótese que el teorema de Peano garantizaba la existencia de por lo menos una solución de dicho problema.)

vi) Probemos, por último, la *unicidad*. A tal efecto, supongamos que $z : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$ es solución del problema de valor inicial (1.39)–(1.40). Demostremos por inducción que si y_k ($k \in \mathbf{N}$) es una de las funciones construidas anteriormente entonces se tiene la importante desigualdad

$$|z(x) - y_k(x)| \leq \frac{M L^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.59)$$

En efecto, la desigualdad es claramente cierta para $k = 0$, ya que al ser z solución de la ecuación integral (1.53) se tiene:

$$|z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt \right| \leq M |x - x_0|.$$

Supongamos la desigualdad cierta para $k = 0, \dots, m-1$ (con $m \geq 1$). Entonces la desigualdad para $k = m$ se obtiene como obtuvimos (1.56) para $k = m$, sin más que reemplazar y_{m+1} por z , ya que

$$z(x) - y_m(x) = \int_{x_0}^x [f(t, z(t)) - f(t, y_{m-1}(t))] dt.$$

Esto prueba por inducción las desigualdades (1.59). Finalmente, tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ en (1.59) se obtiene

$$|z(x) - y(x)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M}{L} \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} = 0, \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],$$

lo cual implica que $z = y$ en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. (Recuérdese que para todo $t \in \mathbf{R}$ se tiene $\lim_{m \rightarrow \infty} t^m/m! = 0$.) Esto concluye la demostración. Q.E.D.

Comentarios

- Las funciones $y_k(x)$ ($k \in \mathbf{N}$) construidas en la demostración del teorema de Picard–Lindelöf, cuyo límite es la solución $y(x)$ del problema de valor inicial (1.39)–(1.40), se denominan **aproximantes de Picard** de la solución $y(x)$. De (1.59) con $z = y$ se obtiene una estimación del error cometido al aproximar $y(x)$ por su k -ésimo aproximante:

$$\|y(x) - y_k(x)\| \leq \frac{M L^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.60)$$

Nótese que, aunque para x fijo el miembro derecho tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$, para k fijo la aproximación (1.60) sólo es buena si $|x - x_0|$ es suficientemente pequeño. Además, el cálculo del aproximante y_k requiere calcular k integrales definidas. Esto hace que, en

la práctica, los aproximantes de Picard no tengan excesiva utilidad, aunque su valor teórico es indudable.

• Ni la continuidad ni la lipschitzianidad de f son condiciones *necesarias* para la existencia ó la unicidad de soluciones del problema de valor inicial (1.39)–(1.40). Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} -2\frac{y}{x} + 4x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es discontinua en el eje vertical $x = 0$. La solución general de la ecuación lineal $y' = f(x, y)$ se calcula fácilmente, y es igual a

$$y(x) = x^2 + \frac{c}{x^2}.$$

Por tanto, el problema de valor inicial para la ecuación $y' = f(x, y)$ con la condición inicial $y(0) = 0$ tiene la solución única $y(x) = x^2$. Nótese, sin embargo, que si la condición inicial es $y(0) = y_0 \neq 0$ entonces el problema (1.39)–(1.40) no tiene solución, ya que la única solución de la ecuación diferencial definida en $x = 0$ es $y(x) = x^2$.

• En la práctica, en lugar del teorema de Picard–Lindelöf se aplican sus dos corolarios siguientes:

Proposición 1.17. *Si $f : A \equiv I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ (siendo $I \subset \mathbf{R}$ un intervalo) es continua y lipschitziana respecto de la segunda variable en A , entonces para todo $x_0 \in I$ el problema de valor inicial (1.39)–(1.40) tiene una solución única en el intervalo I .*

Demostración. Repasando la demostración del teorema de Picard–Lindelöf se observa que la restricción $\alpha \leq b/M$ sólo es necesaria para asegurar que $y_k(x) \in \overline{B}_b(y_0)$. Al reemplazar $\overline{B}_b(y_0)$ por \mathbf{R}^n , esta condición deja de ser necesaria. Q.E.D.

Proposición 1.18. *Si la función $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ($1 \leq i, j \leq n$) son continuas en el abierto $U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, entonces para todo $(x_0, y_0) \in U$ el problema de valor inicial (1.39)–(1.40) tiene una solución única en un intervalo de la forma $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, con $\alpha > 0$ (dependiente de (x_0, y_0)) suficientemente pequeño.*

Demostración. Basta tomar $a, b > 0$ lo suficientemente pequeños para que el compacto $A = [x_0 - a, x_0 + a] \times \overline{B}_b(y_0)$ esté contenido en U . Al ser f continua y lipschitziana respecto de la segunda variable A (por el comentario que sigue a la Proposición 1.16), podemos aplicar el teorema de Picard–Lindelöf a f en dicho conjunto. Q.E.D.

Corolario 1.19. *Si $f : U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es de clase C^1 en el abierto U , el problema de valor inicial (1.39)–(1.40) tiene solución única local para todo dato inicial $(x_0, y_0) \in U$.*

Ejemplo 1.20. Hallemos los aproximantes de Picard para el problema

$$\boxed{y' = xy, \quad y(0) = 1}, \tag{1.61}$$

cuya solución exacta es

$$y(x) = e^{x^2/2}. \tag{1.62}$$

En este caso la función $f(x, y) = xy$ es C^∞ y lipschitziana respecto de la segunda variable en todo $J \times \mathbf{R}$ para todo intervalo compacto $J \subset \mathbf{R}$, por lo que los aproximantes de Picard

están definidos (y convergen a la solución) en todo \mathbf{R} (ver los comentarios anteriores). Como $y_0 = 1$ se tiene

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x t \, dt = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x t \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8},$$

y, en general,

$$\boxed{y_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{x^{2n}}{2^n n!}}. \quad (1.63)$$

En efecto, asumiendo esta fórmula cierta para $k = 0, 1, \dots, m-1$ ($m \geq 1$) y aplicando la definición de y_m se obtiene

$$y_m(x) = 1 + \int_0^x t \sum_{n=0}^{m-1} \frac{t^{2n}}{2^n n!} dt = 1 + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^{2n+2}}{2^n (2n+2) n!} = 1 + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^{2(n+1)}}{2^{n+1} (n+1)!},$$

que es (1.63) con $k = m$. Esto prueba (1.63) por inducción.

Nótese que en este caso y_k no es otra caso que el polinomio de Taylor de orden $2k$ de la solución exacta. Esto, sin embargo, no es general; por ejemplo, considérese el problema $y' = y^2$, $y(0) = 1$.

Capítulo 2

Ecuaciones y sistemas lineales

Un **sistema lineal de primer orden** es un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias en n funciones incógnitas $(y_1, \dots, y_n) \equiv y$ de la forma

$$\boxed{y' = A(x)y + b(x)}, \quad (2.1)$$

donde $b = (b_1, \dots, b_n) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una función vectorial (el **término inhomogéneo** de la ecuación (2.1)) y $A : \mathbf{R} \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ es una función matricial. En otras palabras, para cada x

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

es una matriz $n \times n$ con coeficientes reales $a_{ij}(x)$ ($1 \leq i, j \leq n$). Si $b \equiv 0$ diremos que el sistema (2.1) es **homogéneo**, e **inhomogéneo** en caso contrario.

Nota: El conjunto $M_n(\mathbf{R})$ es un *espacio vectorial real* de dimensión n^2 . Una base de dicho espacio es la formada por las matrices E_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) cuyo único elemento de matriz no nulo es un 1 en la posición ij . En el espacio vectorial $M_n(\mathbf{R})$ se suele definir la **norma del supremo**

$$\|A\| = \max \{ \|Av\| : \|v\| = 1 \}, \quad \forall A \in M_n(\mathbf{R}),$$

en términos de la cual

$$\|Aw\| \leq \|A\| \|w\|, \quad \forall w \in \mathbf{R}^n.$$

Un cálculo sencillo muestra que si $\|v\| = 1$ entonces $\|Av\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$, por lo que

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n \max \{ |a_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n \}.$$

Nótese, finalmente, que una función matricial $A : \mathbf{R} \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ es continua en $x \in \mathbf{R}$ si y sólo si sus n^2 elementos de matriz $a_{ij} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($1 \leq i, j \leq n$) son funciones continuas en x .

Utilizando el teorema de Picard–Lindelöf es inmediato probar el siguiente teorema de *existencia y unicidad* para el problema de valor inicial asociado al sistema lineal (2.1):

Teorema 2.1. *Si $b : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $A : I \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ son continuas en el intervalo $I \subset \mathbf{R}$, entonces para todo $x_0 \in I$ y para todo $y_0 \in \mathbf{R}^n$ el problema de valor inicial (2.1) con la condición inicial $y(x_0) = y_0$ tiene una única solución en el intervalo I .*

Demostración. Basta probar (¿por qué?) la existencia y unicidad del problema planteado en todo intervalo *compacto* $J \subset I$. Por la Proposición 1.17, es suficiente probar que la función $f : J \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ definida por

$$f(x, y) = A(x)y + b(x)$$

es continua y lipschitziana respecto de la segunda variable en $J \times \mathbf{R}^n$. La continuidad de f en $J \times \mathbf{R}^n$ es inmediata a partir de la de las funciones A y b en $J \subset I$, ya que para todo $(x_1, y_1) \in J \times \mathbf{R}^n$ se tiene

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = A(x_2)(y_2 - y_1) + [A(x_2) - A(x_1)]y_1 + b(x_2) - b(x_1) \rightarrow 0$$

si $(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)$. La lipschitzianidad de f respecto de la variable y es también inmediata de establecer, ya que si $(x, y_1), (x, y_2) \in J \times \mathbf{R}^n$ se tiene

$$\|f(x, y_2) - f(x, y_1)\| = \|A(x)(y_2 - y_1)\| \leq \|A(x)\| \|y_2 - y_1\| \leq nM \|y_2 - y_1\| ,$$

si

$$M = \max \{|a_{ij}(x)| : 1 \leq i, j \leq n, x \in J\} .$$

(La existencia de M se deduce de la continuidad de las n^2 funciones a_{ij} en el *compacto* J .) *Q.E.D.*

En particular, *las soluciones de un sistema lineal (2.1) con coeficientes constantes están definidas en toda la recta real.*

2.1 Estructura del espacio de soluciones

Llamaremos **espacio de soluciones** del sistema lineal (2.1) al conjunto \mathcal{S} formado por todas sus soluciones, es decir

$$\mathcal{S} = \{y : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \mid y'(x) = A(x)y + b(x), \forall x \in I\} \subset C^1(I) .$$

(*Ejercicio:* justifíquese esta última inclusión.) Una de las propiedades fundamentales de los sistemas lineales *homogéneos*

$$\boxed{y' = A(x)y} , \quad y \in \mathbf{R}^n , \quad (2.3)$$

es que si φ^1 y φ^2 son soluciones del sistema, entonces $\lambda\varphi^1 + \mu\varphi^2$ es solución para todo $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, ya que

$$(\lambda\varphi^1 + \mu\varphi^2)'(x) = \lambda\varphi^{1'}(x) + \mu\varphi^{2'}(x) = \lambda A(x)\varphi^1(x) + \mu A(x)\varphi^2(x) = A(x)(\lambda\varphi^1(x) + \mu\varphi^2(x)) .$$

En otras palabras:

Teorema 2.2. *El espacio de soluciones de un sistema homogéneo es un espacio vectorial real.*

Para sistemas lineales *inhomogéneos* el resultado anterior admite una generalización inmediata. En efecto, si y_p es una solución particular fija del sistema e y es cualquier solución entonces $y - y_p$ es solución del sistema homogéneo (2.3) asociado a (2.1). Si llamamos \mathcal{S}_0 al espacio de soluciones del sistema homogéneo (2.3) entonces $y - y_p \in \mathcal{S}_0$, o equivalentemente $y \in y_p + \mathcal{S}_0$. Recíprocamente, si y_H es cualquier solución del sistema

homogéneo (2.3) entonces $y_p + y_H$ es claramente una solución de (2.1). Esto prueba que el espacio de soluciones \mathcal{S} del sistema (2.1) es el **espacio afín**

$$\boxed{\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0}. \quad (2.4)$$

Hemos probado por tanto el siguiente

Teorema 2.3. *El espacio de soluciones del sistema lineal inhomogéneo (2.1) es un espacio afín paralelo al espacio de soluciones del sistema homogéneo asociado.*

Estudiemos a continuación cuál es la **dimensión** del espacio de soluciones del sistema homogéneo (2.3). Para ello, llamemos $Y^i(x)$ a la solución del problema de valor inicial

$$Y^{i'} = A(x)Y^i, \quad Y^i(x_0) = e_i,$$

siendo $x_0 \in I$ un punto fijo pero arbitrario, y e_i el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbf{R}^n (de hecho, para el razonamiento que sigue podríamos tomar cualquier otra base). Sea ahora $y(x)$ una solución cualquiera del sistema lineal homogéneo, y llamemos

$$y_0 = y(x_0) \equiv (y_{01}, \dots, y_{0n}) = \sum_{i=1}^n y_{0i} e_i.$$

Entonces la función

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n y_{0i} Y^i(x)$$

es solución del sistema (2.3) (por ser combinación lineal de soluciones) y verifica la condición inicial

$$\tilde{y}(x_0) = \sum_{i=1}^n y_{0i} e_i = y_0 = y(x_0).$$

Por el teorema de unicidad, $y = \tilde{y}$ en I . En otras palabras, *toda solución del sistema homogéneo (2.3) puede expresarse como una combinación lineal*

$$\boxed{y = \sum_{i=1}^n y_{0i} Y^i}$$

de las n soluciones Y^i . Esto prueba, en particular, que

$$\dim \mathcal{S}_0 \leq n.$$

Para probar que, de hecho, la dimensión del espacio de soluciones del sistema (2.3) es exactamente igual a n basta probar que las n soluciones Y^i ($1 \leq i \leq n$) son linealmente independientes. Para ello, supongamos que existieran n constantes reales λ_i ($1 \leq i \leq n$) tales que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Y^i = 0,$$

es decir

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Y^i(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

En particular, haciendo $x = x_0$ en la igualdad anterior obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

por la independencia lineal de los vectores de la base canónica. Hemos probado por tanto el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.4. *El espacio de soluciones del sistema homogéneo $y' = A(x)y$ (con $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$) es un espacio vectorial real de dimensión n .*

2.2 Wronskiano

Llamaremos **sistema fundamental de soluciones** del sistema homogéneo (2.3) a toda base de su espacio de soluciones, es decir a todo conjunto de n soluciones linealmente independientes y^1, \dots, y^n . (Por ejemplo, las n soluciones Y^1, \dots, Y^n forman un sistema fundamental de soluciones.) Por definición, toda solución de (2.3) es una combinación lineal de las soluciones y^1, \dots, y^n . En otras palabras, si $y(x)$ es solución de (2.3) entonces

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y^i(x), \quad \forall x \in I,$$

para ciertas constantes reales c_1, \dots, c_n . Igualando la k -ésima componente de ambos miembros obtenemos las n igualdades escalares

$$y_k(x) = \sum_{i=1}^n y_k^i(x) c_i, \quad 1 \leq k \leq n,$$

equivalentes a la igualdad matricial

$$\boxed{y(x) = Y(x)c} \tag{2.5}$$

con $c = (c_1 \cdots c_n)^t$ y

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) & y^2(x) & \cdots & y^n(x) \\ y_1^1(x) & y_1^2(x) & \cdots & y_1^n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, es inmediato comprobar que si $y(x)$ está dada por (2.5) entonces es solución del sistema homogéneo (2.3) cualquiera que sea el vector constante $c \in \mathbf{R}^n$.

Definición 2.5. Una **matriz fundamental** del sistema (2.3) es cualquier función matricial $x \mapsto Y(x) \in M_n(\mathbf{R})$ cuyas *columnas* forman un sistema fundamental de soluciones.

En general, dadas n soluciones $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ del sistema homogéneo (2.3) (no necesariamente independientes), consideremos la matriz

$$\Phi(x) = (\varphi^1(x) \quad \varphi^2(x) \quad \cdots \quad \varphi^n(x))$$

asociada a dichas soluciones. Nótese que la matriz $\Phi(x)$ es solución de la ecuación matricial

$$\boxed{\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)}. \quad (2.6)$$

En efecto, operando con matrices columna se tiene

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= (\varphi^1'(x) \quad \varphi^2'(x) \quad \dots \quad \varphi^n'(x)) = (A(x)\varphi^1(x) \quad A(x)\varphi^2(x) \quad \dots \quad A(x)\varphi^n(x)) \\ &= A(x)\Phi(x). \end{aligned}$$

De la misma forma se demuestra que si la matriz $n \times n$ $\Phi(x)$ satisface la ecuación (2.6) entonces cada una de las n columnas de Φ es solución del sistema (2.3).

Definición 2.6. Llamaremos **wronskiano** de las soluciones $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ al determinante de la matriz $\Phi(x)$, es decir

$$W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) = \det \Phi(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix}.$$

Escribiremos a partir de ahora $W(x)$ cuando quede claro del contexto a qué soluciones φ^i ($1 \leq i \leq n$) nos estamos refiriendo.

Si las soluciones φ^k ($1 \leq k \leq n$) son linealmente dependientes (como *funciones*) entonces los *vectores* $\{\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)\}$ son linealmente dependientes en cada punto $x \in I$, por lo que el determinante de la matriz $\Phi(x)$ cuyas columnas son dichos vectores es idénticamente nulo. En otras palabras,

$$\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\} \text{ linealmente dependientes} \implies W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Recíprocamente, si el wronskiano de las soluciones $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ se anula idénticamente entonces dichas soluciones son linealmente dependientes. De hecho, probaremos que si $W(x_0) = 0$ para *algún* $x_0 \in I$ entonces las soluciones $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ son linealmente independientes. En efecto, nótese que la anulación de $W(x_0)$ implica que los vectores

$$\varphi^k(x_0), \quad 1 \leq k \leq n.$$

son linealmente dependientes, es decir que existen constantes λ_k ($1 \leq k \leq n$) tales que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi^k(x_0) = 0.$$

Pero entonces la función

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi^k(x)$$

es solución del sistema homogéneo (2.3) con dato inicial $y(x_0) = 0$. Por la unicidad de soluciones de (2.3), de esto se deduce que $y(x) = 0$ para todo $x \in I$, lo cual prueba la dependencia lineal de las soluciones $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$. Hemos pues demostrado el siguiente resultado fundamental:

$$\boxed{\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\} \text{ linealmente dependientes} \iff W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) = 0, \quad \forall x \in I}. \quad (2.7)$$

- Si φ^k ($1 \leq k \leq n$) son soluciones del sistema homogéneo (2.3), entonces o bien $W(x) = 0$ para todo $x \in I$, o bien $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

En efecto, si las soluciones son linealmente dependientes entonces su wronskiano se anula idénticamente, mientras que si son independientes de la demostración del resultado anterior se deduce que el wronskiano no se puede anular en ningún punto.

- Una función matricial $\Phi : I \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ es una matriz fundamental del sistema (2.3) si y sólo si

i) $\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$, para todo $x \in I$

ii) $\det \Phi(x) \neq 0$, para todo $x \in I$.

Nótese que la condición ii) es equivalente a pedir que $\det \Phi(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$.

- Obsérvese que si $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ son funciones (diferenciables) arbitrarias la anulación de su wronskiano en todos los puntos *no* implica la dependencia lineal. Por ejemplo, las funciones

$$\varphi^1(x) = (\sin x, x), \quad \varphi^2(x) = (x \sin x, x^2)$$

son linealmente independientes, aunque su wronskiano se anula para todo $x \in \mathbf{R}$.

Ejercicio. ¿Son las funciones

$$\varphi^1(x) = (1, x), \quad \varphi^2(x) = (x, 1 - x^2)$$

solución de algún sistema lineal homogéneo (con coeficientes continuos) en $I = \mathbf{R}$?

Solución. El wronskiano de las funciones $\{\varphi^1, \varphi^2\}$ es igual a

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 - x^2 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2.$$

Dicho wronskiano se anula en los puntos $x = \pm 1/\sqrt{2}$, y es distinto de cero en los demás puntos. Como W ni es idénticamente nulo ni tampoco es distinto de cero en \mathbf{R} , las funciones dadas no pueden ser solución de ningún sistema lineal homogéneo en \mathbf{R} .

El wronskiano de φ^1 y φ^2 no se anula en los intervalos $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$, por lo que no está descartado que dichas funciones puedan ser solución de algún sistema lineal homogéneo si nos restringimos a estos intervalos. De hecho, puede probarse que en dichos intervalos φ^1 y φ^2 son soluciones (linealmente independientes) del sistema homogéneo

$$y' = \frac{1}{1 - 2x^2} \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 + x^2 & -3x \end{pmatrix} y.$$

□

2.2.1 Fórmula de Abel–Liouville

Sean, de nuevo, $\varphi^k(x)$ ($1 \leq k \leq n$) n soluciones del sistema homogéneo (2.3). Derivando su wronskiano $W(x)$ respecto de x obtenemos

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_i^{1'}(x) & \dots & \varphi_i^{n'}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix}. \tag{2.8}$$

Dado que

$$\varphi_i^{k'}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \varphi_j^k(x), \quad \forall x \in I, \quad 1 \leq i, k \leq n,$$

la i -ésima fila del i -ésimo determinante en (2.8) es igual a

$$a_{ii}(x) \Phi_i(x) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}(x) \Phi_j(x)$$

(donde Φ_j denota la j -ésima fila de Φ). De esto se sigue que el i -ésimo determinante que aparece en (2.8) es igual a

$$a_{ii}(x) W(x),$$

puesto que un determinante no varía al añadir a una fila cualquier combinación lineal de las restantes. Obtenemos así la igualdad

$$W'(x) = W(x) \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \equiv \operatorname{tr} A(x) \cdot W(x).$$

Integrando esta ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden en $W(x)$ obtenemos la **fórmula de Abel–Liouville**

$$\boxed{W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(t) dt}}, \quad \forall x \in I, \quad (2.9)$$

donde x_0 es un punto cualquiera de I . De esta fórmula se sigue inmediatamente el resultado sobre el wronskiano probado anteriormente ($W(x) = 0$ para todo $x \in I$ ó $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$).

2.2.2 Método de variación de constantes de Lagrange

Los resultados de esta sección se refieren al sistema homogéneo (2.3). Sin embargo, si se conoce una matriz fundamental de dicho sistema homogéneo podemos hallar la solución general del sistema inhomogéneo (2.1) aplicando el método de *variación de constantes* de Lagrange. En efecto, la fórmula (2.5) para la solución general del sistema homogéneo sugiere expresar una solución cualquiera del sistema inhomogéneo mediante

$$y(x) = Y(x)z(x),$$

siendo Y una matriz fundamental del sistema homogéneo y $z : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ la nueva función incógnita. Sustituyendo en (2.1) se obtiene

$$y' = Y(x)z' + Y'(x)z = Y(x)z' + A(x)Y(x)z = A(x)y + b(x) \iff z' = Y(x)^{-1}b(x).$$

(Nótese que $Y(x)$ es invertible en cada punto, ya que su determinante es el wronskiano de n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2.3), y por tanto no se anula en ningún punto.) Integrando esta ecuación entre $x_0 \in I$ y x obtenemos

$$z(x) = \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t) dt + c,$$

(con $c \in \mathbf{R}^n$ constante) de donde se obtiene la siguiente fórmula para la solución general del sistema inhomogéneo (2.1):

$$\boxed{y(x) = Y(x)c + Y(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t) dt = Y(x)c + \int_{x_0}^x Y(x)Y(t)^{-1}b(t) dt}. \quad (2.10)$$

Nótese que el primer término ($Y(x)c$) es la solución general del sistema homogéneo asociado, mientras que el término restante proporciona una expresión explícita de una solución particular del sistema inhomogéneo en términos de la matriz fundamental $Y(x)$ y el término inhomogéneo $b(x)$.

2.3 Sistemas con coeficientes constantes

En general (a diferencia de lo que ocurre para una ecuación lineal escalar) no es posible dar un método general para hallar una matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo en función de sus coeficientes. De hecho, sólo en muy contados casos en que dichos coeficientes son funciones particularmente sencillas de x es posible calcular explícitamente una matriz fundamental del sistema (2.3) (y, por variación de constantes, obtener así la solución general del sistema inhomogéneo (2.1)).

Un caso muy importante en que se puede calcular la matriz fundamental del sistema lineal (2.3) es aquél en que la matriz de coeficientes del sistema es *constante*. En otras palabras, en este caso el sistema (2.3) adopta la forma sencilla

$$\boxed{y' = Ay, \quad A \in M_n(\mathbf{R})}. \quad (2.11)$$

Formalmente, la solución de este sistema con la condición inicial $y(0) = y_0$ es

$$y = e^{xA} y_0.$$

Pero ¿qué sentido tiene la exponencial de la *matriz* xA en esta fórmula?

Para responder a esta pregunta, recuérdese que para todo $t \in \mathbf{R}$ se define e^t como la suma de la serie de potencias

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Se demuestra que la serie anterior es absolutamente convergente para todo $t \in \mathbf{R}$, siendo la convergencia uniforme en cada intervalo compacto de la recta real. Guiados por lo anterior, definamos

$$\boxed{e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}, \quad \forall B \in M_n(\mathbf{R})}, \quad (2.12)$$

donde $B^0 = \mathbf{1}$ denota la matriz identidad. Para que la definición tenga sentido, debemos probar que la serie anterior converge en el *espacio vectorial* $M_n(\mathbf{R})$ para toda matriz $B \in M_n(\mathbf{R})$. Para probar este resultado, nótese primero que

$$\|B^k\| \leq \|B\|^k, \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

puesto que si $v \in \mathbf{R}^n$ con $\|v\| = 1$ por definición de la norma del supremo se tiene

$$\|B^k v\| \leq \|B\| \|B^{k-1} v\| \leq \|B\|^2 \|B^{k-2} v\| \leq \dots \leq \|B\|^k \|v\| = \|B\|^k.$$

La convergencia (absoluta) de la serie (2.12) para toda matriz $B \in M_n(\mathbf{R})$ se deduce del *criterio de Cauchy*. En efecto, si $N > m$ se verifica

$$\left\| \sum_{k=m+1}^N \frac{B^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^N \frac{\|B^k\|}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^N \frac{\|B\|^k}{k!} \xrightarrow{m, N \rightarrow \infty} 0,$$

en virtud de la convergencia de la serie numérica de $e^{\|B\|}$. En particular, por lo que acabamos de demostrar la serie de potencias (con coeficientes matriciales)

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} \quad (2.13)$$

converge para todo $x \in \mathbf{R}$, para cualquier matriz $A \in M_n(\mathbf{R})$. Además, la convergencia de esta serie es *uniforme* en todo intervalo compacto por el criterio M de Weierstrass, ya que si $x \in [a, b]$ se tiene

$$\left\| \frac{x^k A^k}{k!} \right\| \leq \frac{|x|^k \|A\|^k}{k!} \leq \frac{(M \|A\|)^k}{k!} \quad (M = \max(|a|, |b|)),$$

siendo la serie *numérica*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M \|A\|)^k}{k!} = e^{M \|A\|}$$

convergente. Derivando término a término la serie (2.13) se obtiene la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1} A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} \right) A.$$

Esta última serie es uniformemente convergente en todo intervalo compacto, por lo visto anteriormente. Por tanto, en todo intervalo compacto de la recta real la función matricial e^{xA} es derivable, siendo su derivada la serie anterior. En definitiva, hemos probado la fórmula

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA}} = e^{xA} A, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (2.14)$$

Esta fórmula demuestra que las n columnas de la matriz e^{xA} son soluciones del sistema (2.11). Estas soluciones son linealmente independientes, ya que su wronskiano en $x = 0$ es igual a

$$\det(e^0) = \det \mathbf{1} = 1 \neq 0.$$

Hemos probado por tanto el siguiente resultado:

Teorema 2.7. *La matriz e^{xA} es una matriz fundamental del sistema homogéneo con coeficientes constantes $y' = Ay$.*

En otras palabras, la solución general del sistema (2.11) está dada por

$$y(x) = e^{xA} c, \quad (2.15)$$

con $c \in \mathbf{R}^n$ un vector constante. (Nótese que, como ya sabíamos por uno de los corolarios del teorema de Picard–Lindelöf, las soluciones de (2.11) están definidas para todo $x \in \mathbf{R}$.) En particular, dado que e^0 es la matriz identidad, la solución del problema de valor inicial

$$\boxed{y' = Ay, \quad y(0) = y_0}$$

es simplemente

$$\boxed{y(x) = e^{xA} y_0}.$$

La función exponencial matricial verifica las siguientes propiedades:

i) $\boxed{e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}}$, $\forall s, t \in \mathbf{R}$

ii) e^A es invertible, siendo $\boxed{(e^A)^{-1} = e^{-A}}$

iii) Para toda matriz invertible P se tiene $\boxed{P e^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}}$

En efecto, la primera propiedad se deduce (como para la función exponencial en \mathbf{R}) manipulando adecuadamente la serie de $e^{(s+t)A}$, lo cual es posible dado que esta serie converge absolutamente. La segunda propiedad es consecuencia de la primera y de la identidad $e^0 = \mathbf{1}$. Por último,

$$P e^A P^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P A^k P^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P A P^{-1})^k}{k!} = e^{P A P^{-1}}.$$

En relación con la propiedad i), nótese que si $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ son dos matrices que **conmutan**, es decir satisfacen la igualdad

$$[A, B] \equiv AB - BA = 0,$$

entonces se puede probar que

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Sin embargo, esta última igualdad no es cierta, en general, para matrices A y B arbitrarias

Por lo dicho en la sección anterior, la solución general del problema de valor inicial para el sistema homogéneo

$$y' = A x + b(x) \tag{2.16}$$

es

$$y = e^{xA} c + \int_{x_0}^x e^{(x-t)A} b(t) dt, \tag{2.17}$$

con $c \in \mathbf{R}^n$ un vector constante. La solución de (2.16) con la condición inicial $y(x_0) = y_0$ se calcula resolviendo la ecuación matricial

$$y_0 = e^{x_0 A} c \iff c = e^{-x_0 A} y_0.$$

Utilizando la propiedad ii) se obtiene

$$y = e^{(x-x_0)A} y_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-t)A} b(t) dt.$$

Ejercicio. Pruébese la fórmula $\boxed{\det(e^A) = e^{\text{tr} A}}$, válida para toda matriz $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Solución. Al ser las columnas de e^{xA} solución del sistema lineal (2.11), $\det(e^{xA})$ es el *wronskiano* de dichas soluciones. Aplicando la fórmula de Abel–Liouville obtenemos

$$\det(e^{xA}) = \det(e^0) e^{\int_0^x \text{tr} A dt} = e^{x \text{tr} A}.$$

Haciendo $x = 1$ se obtiene la fórmula propuesta. □

2.4 Cálculo de la exponencial de una matriz

Estudiaremos en esta sección algunos métodos prácticos para calcular la exponencial de una matriz. Por lo visto en la sección anterior, esto nos permitirá encontrar la solución general de un sistema homogéneo con coeficientes constantes vía la fórmula (2.15) (o, más generalmente, la solución del sistema inhomogéneo (2.16) vía la ecuación (2.17)).

Recordemos, en primer lugar, que toda matriz $A \in M_n(\mathbf{R})$ es semejante a una matriz diagonal por bloques (en general con elementos de matriz *complejos*)

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix},$$

donde cada **bloque de Jordan** J_i es de la forma

$$J_i = \lambda_i \mathbf{1} + N_i,$$

siendo N_i una matriz nilpotente del tipo

$$N_i = \begin{pmatrix} N[n_i] & & & \\ & N[n'_i] & & \\ & & \ddots & \\ & & & N[n_i^{(s_i-1)}] \end{pmatrix}.$$

En esta fórmula $n_i \geq n'_i \geq \dots \geq n_i^{(s_i-1)}$, y $N[k] \in M_k(\mathbf{R})$ denota la matriz nilpotente elemental de orden k

$$N[k] = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la igualdad

$$\det(J - t\mathbf{1}) = \det(P^{-1}AP - t\mathbf{1}) = \det[P^{-1}(A - t\mathbf{1})P] = \det(A - t\mathbf{1})$$

se deduce que

$$\boxed{\det(A - t\mathbf{1}) = (\lambda_1 - t)^{r_1} \dots (\lambda_m - t)^{r_m}},$$

donde los enteros $r_i = n_i + n'_i + \dots + n_i^{(s_i-1)}$ son las **multiplicidades algebraicas** de los autovalores λ_i . Los m números distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{C}$, denominados los **autovalores** de la matriz A , son por tanto las m raíces distintas de la ecuación

$$\boxed{p_A(t) \equiv \det(A - t\mathbf{1}) = 0}.$$

Al polinomio (de grado n) $p_A(t)$ se le denomina **polinomio característico** de la matriz A .

La matriz $N[k]$ es una matriz nilpotente de orden k , es decir $N[k]^j$ se anula si y sólo si $j \geq k$. De esto se deduce que las matrices N_i son matrices nilpotentes de orden n_i (el **índice** del autovalor λ_i), es decir

$$N_i^{n_i-1} \neq 0, \quad N_i^{n_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.18)$$

A la matriz $J \in M_n(\mathbf{C})$ (que es *única salvo por el orden de los bloques*) se le llama la **forma canónica de Jordan** de la matriz A . Nótese que $N[1] = 0$, y por tanto que J es una matriz diagonal (cuyos elementos de matriz diagonales son los autovalores de la matriz A , repetidos tantas veces cuanto sea su multiplicidad algebraica) *si y sólo si* $n_1 = \dots = n_m = 1$.

El cálculo de la exponencial de la matriz xA se reduce a la de xJ , ya que

$$\boxed{e^{xA} = e^{P(xJ)P^{-1}} = P e^{xJ} P^{-1}}.$$

(Nótese que, aunque J y P pueden ser complejas, e^{xA} es real si A es real.) Para calcular la exponencial de xJ , obsérvese que de las igualdades

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m^k \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

se deduce que

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & & \\ & e^{xJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_m} \end{pmatrix}.$$

El problema se reduce por tanto a calcular la exponencial de cada bloque xJ_i . Pero esto es inmediato, ya que al conmutar las matrices $\lambda_i \mathbf{1}$ y N_i se tiene

$$e^{xJ_i} = e^{x\lambda_i \mathbf{1}} e^{xN_i} = e^{\lambda_i x} e^{xN_i}.$$

Por último, de la nilpotencia de N_i (ec. (2.18)) se deduce que la serie de e^{xN_i} se reduce a la suma finita

$$e^{xN_i} = \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{x^k}{k!} N_i^k.$$

Nótese que e^{xN_i} se puede calcular por bloques mediante la fórmula

$$e^{xN_i} = \begin{pmatrix} e^{xN[n_i]} & & & \\ & e^{xN[n'_i]} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xN[n_i^{(s_i-1)}]} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

donde

$$\boxed{e^{xN[k]} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ x & 1 & & & \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x & 1 \end{pmatrix}}. \quad (2.20)$$

En definitiva, la exponencial de la matriz $xA \in M_n(\mathbf{R})$ está dada por la siguiente fórmula:

$$e^{xA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} e^{xN_1} & & & \\ & e^{\lambda_2 x} e^{xN_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_m x} e^{xN_m} \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde e^{xN_i} se calcula utilizando las ecuaciones (2.19) y (2.20).

Las columnas de la matriz P forman una base de \mathbf{C}^n respecto de la cual la matriz del operador lineal $v \mapsto Av$ adopta su forma canónica J (**base de Jordan** de A). Nótese que la matriz Pe^{xJ} (que es más fácil que calcular que $e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}$, ya que para su cálculo no se necesita conocer la inversa de la matriz P) es también una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo (2.11). En efecto, de las igualdades

$$(Pe^{xJ})e_i = (Pe^{xJ}P^{-1})(Pe_i) = e^{xA}(Pe_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

se deduce que las columnas de Pe^{xJ} son soluciones del sistema. Además, el wronskiano de estas soluciones es no nulo, ya que

$$\det(Pe^{xJ}) = \det P \cdot \det(e^{xJ}) \neq 0,$$

al ser P y e^{xJ} matrices invertibles. Sin embargo (a diferencia de e^{xA} , que es siempre real si A es real) la matriz Pe^{xJ} puede ser compleja, por lo que para obtener a partir de ella una matriz fundamental real habrá que tomar, en general, combinaciones lineales adecuadas de sus columnas.

• Si λ es un autovalor de A y v un autovector correspondiente a este autovalor, $e^{\lambda x}v$ es una solución del sistema (2.11), ya que

$$\frac{d}{dx}(e^{\lambda x}v) = e^{\lambda x}(\lambda v) = e^{\lambda x}(Av) = A(e^{\lambda x}v).$$

Si $\lambda \in \mathbf{R}$ la solución $e^{\lambda x}v$ es real (pues el autovector v se puede tomar real). Si $\lambda = a + ib$ con $b \neq 0$, al ser la matriz A real posee también el autovalor $\bar{\lambda}$ con autovector \bar{v} . Sumando y restando las dos soluciones $e^{\lambda x}v$ y $e^{\bar{\lambda}x}\bar{v} \equiv \overline{e^{\lambda x}v}$ se obtienen las dos soluciones reales $\operatorname{Re}(e^{\lambda x}v)$ e $\operatorname{Im}(e^{\lambda x}v)$, dadas respectivamente por

$$e^{ax}[\cos(bx)\operatorname{Re}v - \operatorname{sen}(bx)\operatorname{Im}v], \quad e^{ax}[\cos(bx)\operatorname{Im}v + \operatorname{sen}(bx)\operatorname{Re}v]. \quad (2.21)$$

Si A es **diagonalizable** entonces

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

(donde ahora no suponemos que los números μ_i son distintos dos a dos) y por tanto

$$Pe^{xJ} = (P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n) \begin{pmatrix} e^{\mu_1 x} & & & \\ & e^{\mu_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mu_n x} \end{pmatrix} = (e^{\mu_1 x} P_1 \ e^{\mu_2 x} P_2 \ \dots \ e^{\mu_n x} P_n).$$

Estas observaciones demuestran el siguiente teorema:

Teorema 2.8. *Las soluciones del sistema homogéneo con coeficientes constantes $y' = Ay$ ($A \in M_n(\mathbf{R})$) son combinaciones lineales (con coeficientes en \mathbf{R}^n) de funciones de la forma*

$$x^j e^{ax} \cos(bx), \quad x^k e^{ax} \sin(bx). \quad (2.26)$$

En esta fórmula $a + ib$ (con $b \geq 0$) recorre todos los autovalores de la matriz A , y los exponentes j, k han de ser menores que el índice del autovalor $a + ib$.

2.4.1 Polinomio interpolador de Lagrange

Uno de los métodos más efectivos para el cálculo de la exponencial de una matriz (o, en general, de una función matricial) es el basado en el polinomio interpolador de Lagrange, que describiremos a continuación. El método es consecuencia del teorema de Cayley–Hamilton, según el cual

$$p_A(A) = 0, \quad \forall A \in M_n(\mathbf{R}).$$

Por definición, el **polinomio mínimo** de la matriz A es el polinomio mónico de grado mínimo ϕ_A que anula a la matriz A , es decir tal que

$$\boxed{\phi_A(A) = 0}. \quad (2.27)$$

Se demuestra que tal polinomio es único, y está dado por

$$\boxed{\phi_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} (t - \lambda_2)^{n_2} \cdots (t - \lambda_m)^{n_m}}, \quad (2.28)$$

siendo de nuevo n_i el índice del autovalor λ_i de A . Es también fácil probar que si P es un polinomio que anula a A entonces P es divisible por ϕ_A .

Sea ahora $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función analítica real definida por la serie de potencias

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < R,$$

donde $R > 0$ es el radio de convergencia de la serie ($R = \infty$ en el caso de la exponencial). Igual que se hizo al principio de este capítulo con la función exponencial, se demuestra que la serie matricial

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, \quad X \in M_n(\mathbf{R}),$$

es convergente si $\|X\| < R$. Para calcular $f(A)$ para una matriz concreta $A \in M_n(\mathbf{R})$ con $\|A\| < R$, obsérvese que la igualdad (2.27) permite expresar cualquier potencia de la matriz A de exponente mayor o igual al grado

$$d(A) = n_1 + \cdots + n_m$$

del polinomio mínimo de A en términos de potencias con exponentes menores que $d(A)$. Esto demuestra que existe un polinomio $P_{f,A}$ (dependiente de f y de A) de grado menor o igual que $d(A) - 1$ tal que

$$\boxed{f(A) = P_{f,A}(A)}. \quad (2.29)$$

Tal polinomio es único, ya que si $f(A) = Q(A)$ con $\deg Q \leq d(A) - 1$ entonces $P_{f,A} - Q$ es un polinomio de grado menor ó igual al del polinomio mínimo de A que anula a la matriz A , y por tanto $P_{f,A} - Q = 0$. Al polinomio $P_{f,A}$ de grado $\leq d(A) - 1$ definido por (2.29) se le denomina el **polinomio interpolador de Lagrange** de la matriz A para la función f . Para el cálculo de $P_{f,A}$ se suele utilizar en la práctica el siguiente resultado:

Proposición 2.9. *El polinomio interpolador $P_{f,A}$ está unívocamente determinado por las $d(A)$ ecuaciones lineales en los coeficientes de $P_{f,A}$*

$$P_{f,A}^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_i), \quad 0 \leq k \leq n_i - 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.30)$$

siendo n_i el índice del autovalor λ_i de A (es decir, la dimensión del mayor bloque elemental de Jordan correspondiente al autovalor λ_i).

Aunque no intentaremos dar una demostración rigurosa de este resultado, es fácil dar una justificación heurística del mismo observando que $f(A) = P_{f,A}(A)$ si y sólo si $f(A)v = P_{f,A}(A)v$ para todo v perteneciente a la base de Jordan de A . Esta última condición es equivalente a las ecuaciones (2.30), ya que si v_k es un vector de la base canónica de Jordan de A correspondiente al autovalor λ_i entonces

$$(A - \lambda_i)^j v_k = v_{k+j}, \quad 0 \leq j \leq m - 1; \quad (A - \lambda_i)^m v_k = 0$$

para algún número natural $m \leq n_i$. Escribiendo

$$f(t) - P_{f,A}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (t - \lambda_i)^j$$

(la serie es convergente para $|t|$ suficientemente pequeño) se tendrá

$$[f(A) - P_{f,A}(A)]v_k = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (A - \lambda_i)^j v_k = \sum_{j=0}^{m-1} b_j v_{k+j},$$

que es cero si y sólo si

$$b_j = \frac{1}{j!} (f - P_{f,A})^{(j)}(\lambda_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq m - 1.$$

Ejemplo 2.10. Calculemos por el método anterior e^{xA} , siendo $A \in M_3(\mathbf{R})$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -7 \\ -4 & 9 & -6 \\ -4 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -3-t & 9 & -7 \\ -4 & 9-t & -6 \\ -4 & 8 & -5-t \end{vmatrix} = -(t-1)^2(t+1).$$

Los autovalores son por tanto $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$ (doble), y la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

En esta fórmula $\epsilon = 0$ si $n_2 = 1$ (es decir, hay dos bloques elementales de Jordan de dimensión 1 correspondientes al autovalor $\lambda_2 = 1$) ó $\epsilon = 1$ si $n_2 = 2$ (hay un único bloque elemental de dimensión 2 correspondiente a dicho autovalor). Nótese que el número total de bloques elementales de Jordan de una matriz cualquiera $A \in M_n(\mathbf{R})$ correspondientes a un autovalor λ es igual a la dimensión de $\ker(A - \lambda)$, que a su vez es igual a $n - \text{rank}(A - \lambda)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\epsilon = 0 &\iff \dim \ker(A - 1) = 2 \iff \text{rank}(A - 1) = 1 \\ \epsilon = 1 &\iff \dim \ker(A - 1) = 1 \iff \text{rank}(A - 1) = 2.\end{aligned}$$

Como

$$A - 1 = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -7 \\ -4 & 8 & -6 \\ -4 & 8 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 9 & -7 \\ -4 & 8 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 9 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2, concluimos que $n_2 = 2$, y

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El índice n_1 es claramente igual a 1, por ser λ_1 autovalor simple. El polinomio mínimo de la matriz A es por tanto

$$\phi_A(t) = (t + 1)(t - 1)^2,$$

siendo su grado $d(A) = 3$. Por lo visto anteriormente, llamando $f(t) = e^{xt}$ (donde x se trata como un parámetro y t es la variable independiente) se tiene

$$e^{xA} = P(A),$$

siendo $P(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ un polinomio de grado menor o igual que 2. Las ecuaciones que determinan este polinomio son:

$$\begin{aligned}f(-1) &= P(-1) \\ f(1) &= P(1) \\ f'(1) &= P'(1).\end{aligned}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $f(t) = e^{xt}$ y la expresión para P se obtiene

$$\begin{aligned}e^{-x} &= \alpha - \beta + \gamma \\ e^x &= \alpha + \beta + \gamma \\ x e^x &= \beta + 2\gamma.\end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$\alpha = \frac{1}{2}(\sinh x + 2 \cosh x - x e^x), \quad \beta = \sinh x, \quad \gamma = \frac{1}{2}(x e^x - \sinh x).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}e^{xA} &= \frac{1}{2}(\sinh x + 2 \cosh x - x e^x) \mathbf{1} + \sinh x A + \frac{1}{2}(x e^x - \sinh x) A^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-x} - e^x & -5e^{-x} + (5 - x)e^x & 4e^{-x} + (x - 4)e^x \\ 2e^{-x} - 2e^x & -5e^{-x} + 2(3 - x)e^x & 4e^{-x} + 2(x - 2)e^x \\ 2e^{-x} - 2e^x & -5e^{-x} + (5 - 2x)e^x & 4e^{-x} + (2x - 3)e^x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Un sistema fundamental de soluciones del sistema $y' = Ay$ es el dado por las columnas de esta matriz, es decir

$$\begin{aligned} y^1 &= e^{-x} (2, 2, 2) + e^x (-1, -2, -2) \\ y^2 &= e^{-x} (-5, -5, -5) + e^x (5, 6, 5) + x e^x (-1, -2, -2) \\ y^3 &= e^{-x} (4, 4, 4) + e^x (-4, -4, -3) + x e^x (1, 2, 2). \end{aligned}$$

La solución general del sistema es una combinación lineal arbitraria $c_1 y^1 + c_2 y^2 + c_3 y^3$ de estas soluciones fundamentales. Nótese que, de acuerdo con el Teorema 2.8, las soluciones del sistema $y' = Ay$ son combinaciones lineales con coeficientes en \mathbf{R}^3 de las funciones

$$\boxed{e^{-x}, \quad e^x, \quad x e^x.}$$

Por ejemplo, la solución del problema de valor inicial

$$y' = Ay, \quad y(0) = (0, 1, 1)$$

es

$$y(x) = e^{xA} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-x} + e^x \\ -e^{-x} + 2e^x \\ -e^{-x} + 2e^x \end{pmatrix} = e^{-x} (-1, -1, -1) + e^x (1, 2, 2).$$

Ejercicio. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 2x - y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

Solución. En este caso las variables dependientes son (x, y) , por lo que la variable independiente será denotada por t . El sistema de ecuaciones que hay que resolver es lineal homogéneo con coeficientes constantes, ya que se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz A se hallan fácilmente:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)^2 + 2 = 0 \iff \lambda = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Por tanto en este caso la matriz A es diagonalizable, y

$$\phi_A(\lambda) = p_A(\lambda) = (1 + \lambda)^2 + 2.$$

La matriz e^{tA} es igual al polinomio interpolador de primer grado $P(\lambda) = \alpha + \beta \lambda$ para la función $f(\lambda) = e^{t\lambda}$, donde los coeficientes α y β se calculan a partir de las ecuaciones

$$f(-1 \pm i\sqrt{2}) = e^{-t} e^{\pm i\sqrt{2}t} = P(-1 \pm i\sqrt{2}) = \alpha + \beta(-1 \pm i\sqrt{2}).$$

La solución de estas ecuaciones es

$$\alpha = e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) + \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t), \quad \beta = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t).$$

Por tanto la matriz fundamental del sistema es

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{-t} \left[\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \right] \mathbf{1} + \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) A \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Finalmente, la solución del problema propuesto es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ 2 \cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

□

2.5 Ecuaciones de orden n

En general, una **ecuación escalar de orden n en forma normal** es una expresión de la forma

$$\boxed{u^{(n)} = F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)})}, \quad (2.32)$$

donde $x \in \mathbf{R}$, $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Una ecuación de este tipo siempre se puede reescribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden mediante la introducción de la variable

$$\boxed{y = (u, u', \dots, u^{(n-1)}) \in \mathbf{R}^n}.$$

En efecto, la ecuación (2.32) es equivalente al sistema

$$y' = f(x, y)$$

con

$$\boxed{f(x, y) = (y_2, \dots, y_n, F(x, y))}. \quad (2.33)$$

Nótese que las condiciones iniciales adecuadas para el sistema (2.33)

$$y(x_0) = y_0$$

se traducen en las condiciones

$$\boxed{u^{(k)}(x_0) = u_0^k, \quad 0 \leq k \leq n-1}, \quad (2.34)$$

sobre las derivadas de orden $\leq n-1$ de la función escalar u en el punto x_0 . La función f es continua, derivable, de clase C^1 , etc. si y sólo si la función F lo es. En cuanto a la condición de Lipschitz, nótese que, al ser

$$\begin{aligned} \|f(x, y^1) - f(x, y^2)\|^2 &= \sum_{i=2}^n (y_i^1 - y_i^2)^2 + [F(x, y^1) - F(x, y^2)]^2, \\ &\leq \|y^1 - y^2\|^2 + [F(x, y^1) - F(x, y^2)]^2. \end{aligned}$$

si la función F es lipschitziana respecto al segundo argumento en un conjunto también lo será f , pues de la ecuación anterior y

$$|F(x, y^1) - F(x, y^2)| \leq M \|y^1 - y^2\|$$

se deduce que

$$\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| \leq \sqrt{M^2 + 1} \|y^1 - y^2\| .$$

Por tanto, son válidos todos los teoremas de existencia y unicidad que dedujimos en el Capítulo 1 sin más que sustituir la función f por F y los datos iniciales $y(x_0) = y_0$ por las condiciones (2.34) sobre las derivadas de u en x_0 . Los resultados que aplicaremos más a menudo son los siguientes:

Teorema 2.11. Si $F : U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es continua en el abierto U , entonces para todo $(x_0, u_0, \dots, u_0^{(n-1)}) \in U$ el problema de valor inicial (2.32)–(2.34) tiene al menos una solución $u(x)$ definida en un intervalo de la forma $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, con $\alpha \equiv \alpha(x_0, u_0, \dots, u_0^{(n-1)}) > 0$.

Teorema 2.12. Si $F : U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial u^{(i)}}$, $0 \leq i \leq n-1$, son continuas en el abierto U (en particular, si F es de clase $C^1(U)$), entonces para todo $(x_0, u_0, \dots, u_0^{(n-1)}) \in U$ el problema de valor inicial (2.32)–(2.34) tiene una solución única en un intervalo de la forma $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, con $\alpha \equiv \alpha(x_0, u_0, \dots, u_0^{(n-1)}) > 0$.

Teorema 2.13. Si $F : A = I \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (con $I \subset \mathbf{R}$ un intervalo) es continua y lipschitziana respecto de la segunda variable en A , entonces para todo $x_0 \in I$ el problema de valor inicial (2.32)–(2.34) tiene una solución única en el intervalo I .

2.5.1 Ecuaciones lineales

Consideraremos a continuación el caso en que la función F es lineal (o, hablando con más propiedad, afín) en u y sus derivadas. La ecuación (2.32) se puede entonces escribir como sigue:

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x)}, \quad (2.35)$$

donde las funciones $a_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($0 \leq i \leq n-1$) y $b : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ se suponen *continuas* en un intervalo $I \subset \mathbf{R}$. La ecuación (2.35) se dirá **homogénea** si $b(x) = 0$ para todo $x \in I$, e inhomogénea (o completa) en caso contrario. El sistema de primer orden asociado a la ecuación (2.35) es también lineal, ya que puede escribirse en la forma

$$y' = A(x)y + b(x)e_n \quad (2.36)$$

con

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

A la matriz $n \times n$ (2.37) se le llama **matriz compañera** de la ecuación lineal de orden n (2.35). Nótese, en particular, que

$$\boxed{\operatorname{tr} A(x) = -a_{n-1}(x)}, \quad \forall x \in I. \quad (2.38)$$

Al ser continuos en el intervalo I los coeficientes del sistema lineal (2.36) (por la hipótesis hecha sobre las funciones a_i y b), el problema de valor inicial asociado a dicho sistema posee una única solución en I para todo dato inicial en $I \times \mathbf{R}^n$. Por tanto:

Teorema 2.14. *Si las funciones $a_i : I \rightarrow \mathbf{R}$ ($1 \leq i \leq n$) y $b : I \rightarrow \mathbf{R}$ son continuas en un intervalo I , el problema de valor inicial (2.34)–(2.35) posee una única solución en I para todo $x_0 \in I$.*

Es evidente que si u_1 y u_2 denotan dos soluciones de la ecuación homogénea

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0}, \quad (2.39)$$

entonces cualquier combinación lineal $\lambda u^1 + \mu u^2$ (con $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$) es también solución de dicha ecuación. El espacio de soluciones de la ecuación *homogénea* (2.39) es por tanto un *subespacio vectorial* del espacio $C^n(I)$. Además, si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ son soluciones linealmente independientes de (2.39) entonces las m soluciones del sistema lineal de primer orden asociado a (2.39)

$$y^i = (\varphi_i, \varphi_i', \dots, \varphi_i^{(n-1)}), \quad 1 \leq i \leq m,$$

son obviamente linealmente independientes. Recíprocamente, si las funciones $\{y^1, \dots, y^m\}$ son linealmente independientes también lo son las soluciones $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, ya que derivando $n - 1$ veces la igualdad

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_m \varphi_m = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbf{R}, \quad 1 \leq i \leq m)$$

se deduce que

$$\lambda_1 y^1 + \cdots + \lambda_m y^m = 0,$$

de donde se sigue que $\lambda_i = 0$ para $1 \leq i \leq m$ por la independencia lineal de $\{y^1, \dots, y^m\}$. Utilizando este hecho y las propiedades de los sistemas lineales de primer orden se deducen fácilmente los siguientes resultados:

- El espacio \mathcal{S}_0 de las soluciones $u(x)$ de la ecuación lineal homogénea (2.39) es un *subespacio vectorial de dimensión n* del espacio $C^n(I)$.
- El espacio \mathcal{S} de las soluciones $u(x)$ de la ecuación lineal completa (2.35) es un *subespacio afín paralelo al subespacio vectorial \mathcal{S}_0* . En otras palabras, las soluciones de (2.35) son de la forma

$$u(x) = u_0(x) + u_p(x),$$

donde u_p es una solución particular arbitraria (pero fija) de (2.35), y $u_0 \in \mathcal{S}_0$ es cualquier solución del sistema homogéneo asociado.

Ejemplo 2.15. Consideremos la ecuación de segundo orden

$$\boxed{u'' + \omega^2 u = 0}, \quad (2.40)$$

con $\omega > 0$. El sistema de primer orden asociado es

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} y \equiv Ay$$

siendo $y = (u, u')$. Los autovalores de la matriz A son las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \iff \lambda = \pm i\omega.$$

Por lo visto anteriormente, dos soluciones reales linealmente independientes de la ecuación están dadas por

$$y^1 = \operatorname{Re}(e^{i\omega x}v), \quad y^2 = \operatorname{Im}(e^{i\omega x}v),$$

siendo v un autovector correspondiente al autovalor $i\omega$. Tomando $v = (1, i\omega)$ se obtiene

$$y^1 = (\cos(\omega x), -\omega \operatorname{sen}(\omega x)), \quad y^2 = (\operatorname{sen}(\omega x), \omega \cos(\omega x)).$$

Por tanto un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2.40) es el formada por las funciones

$$\boxed{\cos(\omega x), \quad \operatorname{sen}(\omega x)}.$$

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son n soluciones de la ecuación homogénea de orden n (2.39), el **wronskiano** $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)$ de dichas soluciones es por definición el wronskiano de las soluciones correspondientes del sistema lineal de primer orden asociado a (2.39), es decir

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.41)$$

Muchas veces escribiremos abreviadamente $W(x)$ en lugar de $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x)$. Diremos que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ forman un **sistema fundamental de soluciones** de (2.39) si son linealmente independientes, y por lo tanto forman una base del espacio de soluciones de dicha ecuación. Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ forman un sistema fundamental de soluciones de (2.39) entonces cualquier solución $u(x)$ de dicha ecuación puede expresarse en la forma

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

para ciertas constantes reales c_i ($1 \leq i \leq n$).

Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ son linealmente independientes entonces las n soluciones del sistema lineal de primer orden asociado a (2.39) $\{y^1, \dots, y^n\}$ también son linealmente independientes, por lo que

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) = W[y^1, \dots, y^n](x) \neq 0, \quad \forall x \in I.$$

Recíprocamente, si $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$ entonces $W[y^1, \dots, y^n](x_0) \neq 0$, por lo que las funciones $\{y^1, \dots, y^n\}$, y por tanto también $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, son linealmente independientes. Hemos probado por tanto el siguiente resultado:

$$\boxed{\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ linealmente independientes} \iff W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x_0) \neq 0 \text{ para algún } x_0 \in I \\ \iff W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) \neq 0 \text{ para todo } x \in I.}$$

De nuevo, nótese que estas equivalencias sólo son ciertas, en general, si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ son soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n (2.39).

Sean, como antes, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ soluciones (no necesariamente independientes) de la ecuación homogénea (2.39). Aplicando la fórmula de Abel–Liouville y teniendo en cuenta la fórmula (2.38) se obtiene la identidad

$$\boxed{W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt}}. \quad (2.42)$$

En particular, el wronskiano es constante si a_{n-1} es idénticamente cero.

Veamos ahora cómo construir la solución general de la ecuación inhomogénea de orden n (2.35) a partir de un sistema fundamental de soluciones $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de la ecuación homogénea asociada. Para ello, consideremos la matriz fundamental

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

del sistema de primer orden asociado a la ecuación homogénea (2.39). La solución general del sistema lineal (2.36) asociado a (2.35) es (por variación de constantes)

$$y(x) = \Phi(x)c + \int_{x_0}^x b(t) \Phi(x) \Phi(t)^{-1} e_n dt. \quad (2.43)$$

La primera componente del miembro derecho es por tanto la solución general de (2.35). Para escribir esta solución más explícitamente, nótese que la primera componente de $\Phi(x) \Phi(t)^{-1} e_n$ es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(x) [\Phi(t)^{-1}]_{in} &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) (-1)^{i+n} \frac{M_{ni}(t)}{W(t)} \\ &= \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

donde $M_{ni}(t)$ denota el menor asociado al elemento de matriz ni de la matriz $\Phi(t)$. Sustituyendo esta fórmula en (2.43) se obtiene finalmente la siguiente expresión para la solución general de la ecuación (2.35):

$$\boxed{u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) + \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix} \frac{b(t)}{W(t)} dt}. \quad (2.44)$$

Por ejemplo, para la ecuación lineal de segundo orden

$$\boxed{u'' + a_1(x) u' + a_0(x) u = b(x)} \quad (2.45)$$

se tiene

$$u(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} \frac{b(t)}{W(t)} dt. \quad (2.46)$$

En otras palabras, la función

$$\boxed{u_p(x) = \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} \frac{b(t)}{W(t)} dt} \quad (2.47)$$

es una solución particular de la ecuación inhomogénea (2.45). Nótese que esta solución particular tiene como condiciones iniciales en x_0

$$u_p(x_0) = u_p'(x_0) = 0.$$

Ejemplo 2.16. Consideremos la ecuación de segundo orden

$$\boxed{u'' + \omega^2 u = F(x)}, \quad \omega > 0, \quad (2.48)$$

que describe el movimiento de un oscilador armónico sometido a una fuerza externa $F(x)$ (movimiento forzado). Tomando

$$\varphi_1(x) = \cos(\omega x), \quad \varphi_2(x) = \operatorname{sen}(\omega x)$$

se tiene

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(\omega x) & \operatorname{sen}(\omega x) \\ -\omega \operatorname{sen}(\omega x) & \omega \cos(\omega x) \end{vmatrix} = \omega.$$

(Nótese que $W(x)$ es constante; esto es consecuencia de la fórmula de Abel–Liouville (2.42), ya que en este caso $a_{n-1} \equiv a_1 = 0$.) Como

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \operatorname{sen}(\omega t) \\ \cos(\omega x) & \operatorname{sen}(\omega x) \end{vmatrix} = \operatorname{sen} \omega(x - t)$$

la solución general de (2.48) es

$$\boxed{u(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \operatorname{sen}(\omega x) + \frac{1}{\omega} \int_0^x \operatorname{sen} \omega(x - t) F(t) dt},$$

que también se puede escribir

$$\boxed{u(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \operatorname{sen}(\omega x) + \frac{1}{\omega} \int_0^x \operatorname{sen}(\omega s) F(x - s) ds}.$$

Supongamos, por ejemplo, que la fuerza externa es de tipo sinusoidal:

$$F(x) = F_0 \operatorname{sen}(\lambda x), \quad \lambda > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{sen}(\omega s) F(x - s) ds &= F_0 \int_0^x \operatorname{sen}(\omega s) \operatorname{sen} \lambda(x - s) ds \\ &= \frac{F_0}{2} \int_0^x [\cos((\omega + \lambda)s - \lambda x) - \cos((\omega - \lambda)s + \lambda x)] ds \\ &= \frac{F_0}{2(\omega + \lambda)} (\operatorname{sen}(\omega x) + \operatorname{sen}(\lambda x)) - \frac{F_0}{2} \int_0^x \cos((\omega - \lambda)s + \lambda x) ds. \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq \omega$ (es decir, la frecuencia de la fuerza externa no es igual a la frecuencia natural del sistema) entonces

$$\int_0^x \cos((\omega - \lambda)s + \lambda x) ds = \frac{1}{\omega - \lambda} [\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\lambda x)].$$

Por tanto la solución general de la ecuación (2.48) es en este caso de la forma

$$u = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \operatorname{sen}(\omega x) + \frac{F_0}{\omega^2 - \lambda^2} \operatorname{sen}(\lambda x),$$

con C_1, C_2 constantes. Todas las soluciones de (2.48), aunque no son periódicas a menos que $\omega/\lambda \in \mathbf{Q}$, son en este caso acotadas. Por el contrario, si $\lambda = \omega$ se tiene

$$\int_0^x \cos((\omega - \lambda)s + \lambda x) ds = \int_0^x \cos(\omega x) ds = x \cos(\omega x),$$

y por tanto en este caso la solución de (2.48) es

$$u = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \operatorname{sen}(\omega x) - \frac{F_0}{2\omega} x \cos(\omega x).$$

En particular, en este caso ninguna solución está acotada cuando $x \rightarrow \pm\infty$, debido al último término. Este es el conocido fenómeno de la *resonancia*.

En general, no es posible expresar la solución general de una ecuación lineal de orden n en términos de sus coeficientes y de las primitivas de dichos coeficientes. Sin embargo, en el caso de la ecuación de segundo orden (2.45) *si se conoce una solución (no idénticamente nula) de la ecuación homogénea se puede hallar la solución general de la ecuación de partida*. En efecto, si $\varphi(x)$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada a (2.45), y denotamos por $u(x)$ a una solución cualquiera de dicha ecuación, entonces la fórmula de Abel–Liouville proporciona la identidad

$$\varphi(x)u' - \varphi'(x)u = k e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt}$$

siendo $k = W[\varphi, u](x_0)$. Integrando esta ecuación diferencial de *primer* orden para u obtenemos fácilmente

$$u(x) = c\varphi(x) + k\varphi(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int_{x_0}^t a_1(s) ds} dt.$$

Esta es la solución general de la ecuación homogénea asociada a (2.45). En particular, nótese que $\varphi(x)$ y

$$\boxed{\psi(x) = \varphi(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int_{x_0}^t a_1(s) ds} ds} \quad (2.49)$$

forman un *sistema fundamental* de soluciones de dicha ecuación, ya que (por construcción) $W[\varphi, \psi](x_0) = 1 \neq 0$.

En el caso de una ecuación homogénea (2.39) de orden $n > 2$, el conocimiento de una solución particular $\varphi(x)$ permite reducir la ecuación a otra ecuación lineal homogénea de orden $n - 1$ mediante el cambio de variable dependiente

$$z = \left(\frac{u}{\varphi(x)} \right)'$$

En este caso, también se puede probar que si se conocen $n - 1$ soluciones linealmente independientes de la ecuación entonces se puede hallar la solución general de la misma.

2.6 Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Veremos en esta sección cómo hallar la solución general de la ecuación lineal (2.35) cuando los coeficientes a_i ($0 \leq i \leq n-1$) son *constantes*. Para ello, consideremos en primer lugar la ecuación homogénea

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0}, \quad (2.50)$$

donde a_0, \dots, a_{n-1} son n constantes reales. La matriz compañera de esta ecuación es la matriz constante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

El polinomio característico de la matriz A se calcula fácilmente desarrollando el determinante de $A - \lambda$ por la última fila, obteniéndose

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) = 0. \quad (2.52)$$

Por definición, al polinomio

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0} \quad (2.53)$$

se le llama **polinomio característico** de la ecuación (2.50). Los autovalores de la matriz A son por tanto las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dichos autovalores (tomados distintos dos a dos), y sea r_i la multiplicidad algebraica del autovalor λ_i , es decir

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}, \quad r_1 + \cdots + r_m = n.$$

Es fácil ver que el índice n_i del autovalor λ_i de la matriz A es igual en este caso a su multiplicidad algebraica r_i . En efecto, nótese que la igualdad $n_i = r_i$ es equivalente a que el bloque de Jordan del autovalor λ_i conste de un sólo bloque de Jordan elemental

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{r_i}(\mathbf{C}).$$

A su vez, esta última condición equivale a que $\dim \ker(A - \lambda_i) = 1$. Pero esto es evidente dada la forma de la matriz A , puesto que la ecuación $(A - \lambda_i)v = 0$ determina completamente las componentes v_2, \dots, v_n de v en términos de v_1 . En efecto,

$$\ker(A - \lambda_i) = \mathbf{R} \cdot (1, \lambda_i, \dots, \lambda_i^{n-1}). \quad (2.54)$$

Por tanto, el sistema lineal $y' = Ay$ asociado a la ecuación (2.50) tiene un sistema fundamental de soluciones (complejas, en general) de la forma

$$e^{\lambda_i x} \sum_{j=0}^k x^j v_{r_i-k+j}^i, \quad 0 \leq k \leq r_i - 1, \quad 1 \leq i \leq m,$$

donde los n vectores constantes (en general complejos) v_l^i ($1 \leq l \leq r_i$, $1 \leq i \leq m$) forman una base de Jordan de la matriz A , siendo además $v_{r_i}^i$ un autovector de A de autovalor λ_i . Tomando la primera componente de cada una de las funciones anteriores obtenemos un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2.50) de la forma

$$e^{\lambda_i x} \sum_{j=0}^k x^j c_{r_i-k+j}^i, \quad 0 \leq k \leq r_i-1, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.55)$$

donde la constante c_l^i es la primera componente del vector v_l^i . Nótese que ninguna de las constantes $c_{r_i}^i$ puede anularse, en virtud de (2.54). Utilizando esta propiedad es fácil demostrar por inducción a partir de (2.55) que las n funciones

$$\boxed{x^k e^{\lambda_i x}, \quad 0 \leq k \leq r_i-1, \quad 1 \leq i \leq m}, \quad (2.56)$$

forman un sistema de generadores del espacio de soluciones de (2.50). Al ser la dimensión de dicho espacio también igual a n , las funciones (2.56) forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2.50).

Si $\lambda_i \in \mathbf{R}$, las r_i soluciones de la forma anterior correspondientes a este autovalor son reales. Si $\lambda_i = a_i + i b_i$ con $b_i \neq 0$, podemos sustituir las $2r_i$ soluciones complejas asociadas a los autovalores λ_i y $\bar{\lambda}_i$ por la parte real y la parte imaginaria de las soluciones correspondientes al autovalor λ_i , obteniéndose así las soluciones

$$\boxed{x^k e^{a_i x} \cos(b_i x), \quad x^k e^{a_i x} \operatorname{sen}(b_i x), \quad 0 \leq k \leq r_i - 1}. \quad (2.57)$$

En resumen, hemos probado el siguiente resultado:

La ecuación (2.50) tiene un sistema fundamental de soluciones reales formado por funciones de la forma (2.56) si λ_i es una raíz real de multiplicidad r_i del polinomio característico (2.53), o de la forma (2.57) si $a_i + i b_i$ (con $b_i > 0$) es una raíz compleja del polinomio característico, también de multiplicidad r_i .

Este resultado se puede probar directamente observando que la ecuación (2.50) se puede escribir en la forma

$$p(D)u = 0,$$

siendo D el operador derivada:

$$D = \frac{d}{dx}.$$

De la igualdad

$$(D - \lambda)(f(x)e^{\lambda x}) = f'(x)e^{\lambda x}$$

se sigue que

$$\boxed{(D - \lambda)^k (f(x)e^{\lambda x}) = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}}.$$

Si λ_i es una raíz de p de multiplicidad r_i entonces

$$p(\lambda) = q(\lambda) (\lambda - \lambda_i)^{r_i},$$

siendo $q(\lambda)$ un polinomio de grado $n - r_i$ con $q(\lambda_i) \neq 0$. Entonces $p(D) = q(D)(D - \lambda_i)^{r_i}$, y por tanto

$$p(D)(x^k e^{\lambda_i x}) = q(D) \left[e^{\lambda_i x} \frac{d^{r_i}}{dx^{r_i}} x^k \right] = 0, \quad 0 \leq k \leq r_i - 1,$$

lo que prueba que las funciones (2.56) son soluciones de la ecuación (2.50). La independencia lineal de las soluciones (2.56)–(2.57) también se puede probar directamente de forma sencilla.

Ejemplo 2.17. Hallemos la solución general de la ecuación de tercer orden con coeficientes constantes

$$\boxed{u^{(IV)} + u''' + u' + u = 0}. \quad (2.58)$$

El polinomio característico asociado a esta ecuación es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Los autovalores son por tanto $\lambda_1 = -1$ (de multiplicidad $r_1 = 2$) y las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

es decir

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}),$$

de multiplicidad $r_2 = r_3 = 1$. La solución general de la ecuación (2.58) es por tanto

$$\boxed{u(x) = e^{-x}(c_1 + c_2 x) + e^{\frac{x}{2}} \left[c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right]}, \quad (2.59)$$

con c_1, \dots, c_4 constantes arbitrarias.

2.6.1 Solución de la ecuación inhomogénea

Consideremos a continuación la ecuación inhomogénea con coeficientes constantes

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = b(x)}. \quad (2.60)$$

Por supuesto, una vez hallada la solución general de la ecuación homogénea (2.50) por el procedimiento que acabamos de explicar, la solución general de la ecuación homogénea (2.60) se puede calcular cualquiera que sea el término inhomogéneo $b(x)$ utilizando la fórmula (2.44). Sin embargo, para ciertas formas sencillas, pero que se presentan frecuentemente en la práctica, del miembro derecho de la ecuación (2.60), el *método de los coeficientes indeterminados* que describiremos a continuación permite calcular una solución particular de (2.60) de manera más sencilla. La solución general de (2.60) se halla entonces sumando a esta solución particular la solución general de la ecuación homogénea.

Supongamos, en primer lugar, que

$$b(x) = q(x)e^{\mu x}, \quad (2.61)$$

donde $q(x)$ es un polinomio. Si r es la multiplicidad de μ como raíz del polinomio característico (2.53) de la ecuación homogénea (2.50) ($r = 0$ si $p(\mu) \neq 0$), entonces

$$p(\lambda) = p_0(\lambda - \mu)^r + p_1(\lambda - \mu)^{r+1} + \dots + (\lambda - \mu)^n,$$

con $p_i \in \mathbf{R}$ (o \mathbf{C} , si μ es complejo) para $i = 0, \dots, n - r - 1$ y $p_0 \neq 0$. Por tanto

$$p(D)(\tilde{q}(x)e^{\mu x}) = \left[p_0\tilde{q}^{(r)}(x) + p_1\tilde{q}^{(r+1)}(x) + \dots + \tilde{q}^{(n)}(x) \right] e^{\mu x}.$$

Luego en este caso la ecuación (2.60)–(2.61) tiene una solución particular de la forma

$$\boxed{u_p(x) = x^r Q(x) e^{\mu x}}, \quad (2.62)$$

con

$$\boxed{Q(x) = Q_0 + Q_1 x + \cdots + Q_d x^d, \quad d = \text{gr } q} \quad (2.63)$$

un polinomio de grado igual al grado de q cuyos coeficientes se calculan igualando los coeficientes de las potencias de x en la ecuación

$$p_0 (x^r Q)^{(r)} + p_1 (x^r Q)^{(r+1)} + \cdots + (x^r Q)^{(n)} = q.$$

En efecto, la ecuación anterior proporciona un sistema lineal de $d + 1$ ecuaciones en los $d + 1$ coeficientes de Q , que puede demostrarse siempre es compatible. En la práctica no es preciso recordar la ecuación anterior, ya que el polinomio Q se calcula simplemente sustituyendo (2.62) en la ecuación (2.60).

Ejemplo 2.18. Hallemos una solución particular de la ecuación

$$\boxed{u^{(IV)} + u''' + u' + u = x e^{-x}}. \quad (2.64)$$

Aquí $\mu = -1$ es un autovalor del polinomio característico de la ecuación homogénea de multiplicidad 2, y $q(x) = x$ es un polinomio de grado 1. Buscamos por tanto una solución particular de la forma

$$u_p(x) = x^2(a + bx) e^{-x}.$$

Para calcular $p(D) u_p$ es conveniente desarrollar $p(D)$ en potencias de $D + 1$, ya que $(D + 1)^k (f(x) e^{-x}) = f^{(k)}(x) e^{-x}$. Utilizando la fórmula de Taylor se obtiene

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2 [3 - 3(\lambda + 1) + (\lambda + 1)^2].$$

Por tanto

$$p(D) u_p = [3(2a + 6bx) - 3 \cdot 6b] e^{-x} = x e^{-x} \iff 3(2a + 6bx) - 18b = x,$$

lo que conduce a las ecuaciones

$$6a - 18b = 0, \quad 18b = 1.$$

La solución particular buscada es por tanto

$$\boxed{u_p(x) = \frac{1}{18}(x^3 + 3x^2) e^{-x}}. \quad (2.65)$$

La solución general de la ecuación (2.64) es la suma de esta solución particular y la solución (2.59) de la ecuación homogénea.

Ejemplo 2.19. Hallemos ahora una solución particular de la ecuación

$$\boxed{u^{(IV)} + u''' + u' + u = x + \cos^2 x}. \quad (2.66)$$

Aparentemente, no se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados a esta ecuación. Sin embargo, podemos escribir el miembro derecho de la misma como

$$x + \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Por linealidad, una solución particular de (2.66) es la suma de una solución particular de cada una de las ecuaciones

$$u^{(IV)} + u''' + u' + u = x + \frac{1}{2}. \quad (2.67)$$

y

$$u^{(IV)} + u''' + u' + u = \frac{1}{2} \cos(2x). \quad (2.68)$$

El miembro derecho de la ecuación (2.67) es de la forma (2.61), con $\mu = 0$, $r = 0$ (ya que 0 no es raíz del polinomio característico de (2.58)) y $q(x) = x + \frac{1}{2}$. Debemos buscar por tanto una solución particular de la forma

$$u_1(x) = a + bx,$$

lo que conduce a la ecuación

$$b + (a + bx) = x + \frac{1}{2} \iff a = -\frac{1}{2}, \quad b = 1.$$

Por tanto, la primera solución particular es

$$u_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

Para encontrar una solución particular de (2.68), obsérvese que si $u(x)$ es una solución de

$$u^{(IV)} + u''' + u' + u = \frac{1}{2} e^{2ix}. \quad (2.69)$$

entonces $u_2 = \operatorname{Re} u$ es una solución de (2.68). El miembro derecho de (2.69) es de nuevo de la forma (2.61), con $\mu = 2i$, $r = 0$ y $q(x) = \frac{1}{2}$. Esta ecuación posee por tanto una solución particular de la forma

$$u(x) = c e^{2ix}.$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$(16 - 8i + 2i + 1)c = \frac{1}{2},$$

de donde

$$c = \frac{1}{2(17 - 6i)} = \frac{17 + 6i}{650}.$$

Por tanto

$$u(x) = \frac{17 + 6i}{650} e^{2ix}$$

y

$$u_2(x) = \operatorname{Re} u(x) = \frac{1}{650} [17 \cos(2x) - 6 \operatorname{sen}(2x)].$$

Una solución particular de la ecuación (2.66) es por tanto

$$u_p(x) = u_1(x) + u_2(x) = \boxed{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{650} [17 \cos(2x) - 6 \operatorname{sen}(2x)]}.$$

Está claro, en definitiva, que aplicando el método de los coeficientes indeterminados se puede hallar de manera sencilla una solución particular de (2.60) si $b(x)$ es de la forma

$$b(x) = \sum_{i=1}^N [q_i(x) e^{\mu_i x} + r_i(x) e^{a_i x} \cos(b_i x) + s_i(x) e^{c_i x} \operatorname{sen}(d_i x)],$$

siendo $\mu_i, a_i, b_i, c_i, d_i$ constantes reales y q_i, r_i, s_i polinomios.

2.7 Estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales

Consideraremos en esta sección el problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (no necesariamente lineal)

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \eta \end{cases} \quad (2.70)$$

Supongamos que para $\eta = y_0$ el problema (2.70) tiene una solución *única* $Y(x; y_0)$ en la semirrecta $[x_0, \infty)$. Diremos que dicha solución es **estable** si:

- i) Existe un $R > 0$ tal que si $\|\eta - y_0\| < R$ el problema (2.70) tiene una solución única $Y(x; \eta)$ en el intervalo $[x_0, \infty)$
- ii) Para todo $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < R$ tal que

$$\|\eta - y_0\| < \delta \implies \|Y(x; \eta) - Y(x; y_0)\| < \epsilon, \forall x \geq x_0. \quad (2.71)$$

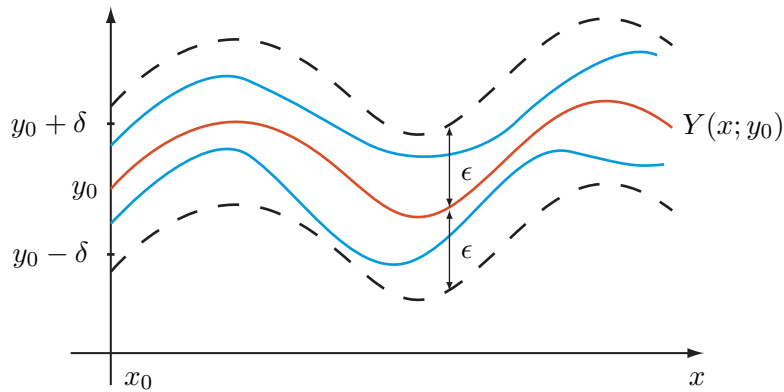


Figura 2.1: Estabilidad de la solución $Y(x; y_0)$.

La solución $Y(x; y_0)$ se dice **asintóticamente estable** si es *estable*, y además existe $0 < r < R$ tal que

$$\|\eta - y_0\| < r \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \|Y(x; \eta) - Y(x; y_0)\| = 0. \quad (2.72)$$

Nota. En general, la condición (2.72) por sí sola no basta para garantizar la estabilidad asintótica de la solución $Y(x; y_0)$, ya que (2.72) *no* implica en general (2.71) (excepto si f es una función afín de y , o si $y \in \mathbf{R}$ y f es continua y lipschitziana respecto de la segunda variable).

Aunque la definición de estabilidad es válida para un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden arbitrario, las propiedades de estabilidad de las soluciones de los sistemas *lineales* son particularmente sencillas, y por ello merecen un estudio especial.

La propiedad fundamental de los sistemas lineales es que todas sus soluciones tienen el *mismo* tipo de estabilidad:

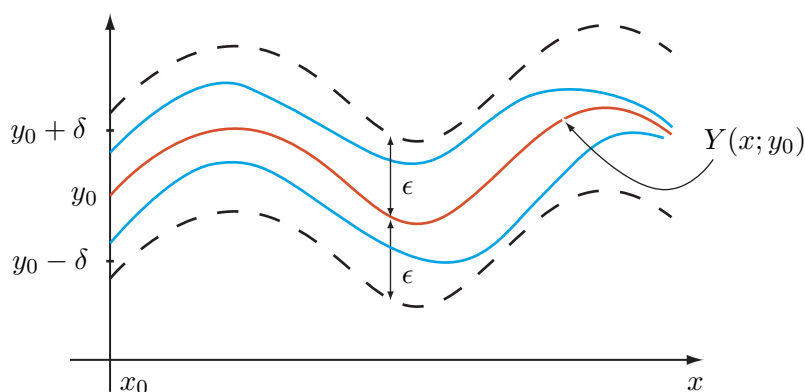


Figura 2.2: Estabilidad asintótica ($\delta \leq r$).

Proposición 2.20. *Una solución cualquiera del sistema lineal*

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{2.73}$$

(con $A : I \rightarrow M_n(\mathbf{R})$, $b : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ continuas en el intervalo $I = [x_0, \infty)$) es estable (resp. asintóticamente estable) si y sólo si la **solución trivial** $y(x) = 0$ del sistema homogéneo asociado es estable (resp. asintóticamente estable).

Demostración. En primer lugar, la continuidad de A y b en el intervalo $[x_0, \infty)$ garantiza la existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial asociado al sistema (2.73) para todo dato inicial $y(x_0) = \eta$. Sea $Y(x; \eta)$ la solución de (2.73) con dato inicial $Y(x_0; \eta) = \eta$, y denotemos por $Y_0(x; \eta)$ la solución del problema de valor inicial para el sistema homogéneo correspondiente a (2.73) con la condición inicial $Y_0(x_0; \eta) = \eta$. Entonces $Y(x; \eta) - Y(x; y_0)$ es una solución del sistema homogéneo asociado a (2.73) con dato inicial

$$Y(x_0; \eta) - Y(x_0; y_0) = \eta - y_0.$$

Por unicidad,

$$\boxed{Y(x; \eta) - Y(x; y_0) = Y_0(x; \eta - y_0)},$$

de donde se sigue el enunciado. Q.E.D.

Debido a este resultado, diremos que *un sistema lineal es estable (resp. asintóticamente estable) si todas sus soluciones son estables (resp. asintóticamente estables) o, equivalentemente, si la solución trivial del sistema homogéneo asociado es estable (resp. asintóticamente estable)*. Nótese, en particular, que *un sistema lineal tiene el mismo tipo de estabilidad que el sistema homogéneo asociado*.

Proposición 2.21. *El sistema lineal homogéneo*

$$y' = A(x)y \tag{2.74}$$

es estable si y sólo si todas sus soluciones son acotadas en $[x_0, \infty)$.

Demostración.

\implies) Si el sistema es estable, la solución trivial es estable, y por tanto existe $\delta > 0$ tal que (por ejemplo)

$$\|Y_0(x; \eta)\| < 1, \quad \forall x \geq x_0, \quad \|\eta\| < \delta.$$

Entonces para todo $x \geq x_0$ se tiene

$$\|Y_0(x; y_0)\| = \left\| Y_0\left(x; \frac{\delta y_0}{1 + \|y_0\|} \frac{1 + \|y_0\|}{\delta}\right) \right\| = \frac{1 + \|y_0\|}{\delta} \left\| Y_0\left(x; \frac{\delta y_0}{1 + \|y_0\|}\right) \right\| < \frac{1 + \|y_0\|}{\delta}.$$

\Leftarrow) Si todas las soluciones son acotadas para todo $x \geq x_0$ se tiene

$$\|Y_0(x; e_i)\| < M_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pero entonces se tiene

$$\|Y_0(x; \eta)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i Y_0(x; e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\eta_i| M_i \leq \left(\sum_{i=1}^n M_i \right) \|\eta\|.$$

Esto implica fácilmente que la solución trivial del sistema, y por tanto dicho sistema, es estable. *Q.E.D.*

Nota. Si el sistema homogéneo (2.74) es estable y sus coeficientes son continuos en \mathbf{R} , de modo que las soluciones de dicho sistema están definidas en todo \mathbf{R} , dichas soluciones no tienen por qué estar acotadas en el intervalo $(-\infty, x_0]$.

Ejercicio. Probar que un sistema lineal con coeficientes continuos es asintóticamente estable si y sólo si toda solución $y(x)$ del sistema homogéneo asociado tiende a 0 cuando $x \rightarrow \infty$.

La Proposición 2.21 no es cierta para sistemas más generales, ni siquiera para sistemas lineales inhomogéneos (2.73). Las propiedades de estabilidad del sistema lineal inhomogéneo (2.73) se pueden resumir en los siguientes enunciados:

- i) La estabilidad de (2.73) no implica la acotación de sus soluciones. Sin embargo, si (2.73) es estable entonces o bien todas sus soluciones son acotadas, o bien todas ellas son no acotadas.
- ii) Si todas las soluciones de (2.73) son acotadas, entonces el sistema es estable.

Estos resultados se prueban fácilmente teniendo en cuenta que cualquier solución de (2.73) es la suma de una solución particular más una solución arbitraria del sistema homogéneo asociado (2.74).

Estudiemos a continuación la estabilidad de un sistema lineal con matriz de coeficientes constante

$$y' = Ay + b(x). \quad (2.75)$$

La estabilidad de este sistema depende, por la Proposición 2.20, de la estabilidad de la solución trivial del sistema homogéneo con coeficientes constantes

$$y' = Ay. \quad (2.76)$$

Por el Teorema 2.8, la solución general de (2.76) se puede escribir

$$y(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} v_{ik} x^k e^{\lambda_i x}, \quad (2.77)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{C}$ son los autovalores de la matriz A , n_i es el índice del autovalor λ_i , y $v_{ik} \in \mathbf{C}^n$. Los vectores v_{ik} con $0 \leq k \leq n_i - 1$ son reales si el autovalor λ_i es real, y

$v_{ik} = \bar{v}_{jk}$ para $k = 0, \dots, n_i - 1 = n_j - 1$ si $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$ es un par de autovalores complejos conjugados. Aplicando la desigualdad triangular se obtiene

$$\|y(x)\| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} \|v_{ik}\| |x|^k e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)x}. \quad (2.78)$$

En esta fórmula $\|\cdot\|$ denota la norma en \mathbf{C}^n , definida por

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2},$$

donde $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ y $|z_i|$ es el módulo de z_i . De (2.78) se sigue que si

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

entonces todas las soluciones de (2.76) son acotadas para $x \geq x_0$, y además se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|y(x)\| = 0.$$

Esto implica que la solución trivial de (2.76), y por tanto el sistema (2.75), es *asintóticamente estable*.

Supongamos a continuación que

$$\operatorname{Re} \lambda_i > 0, \quad \text{para algún } i = 1, \dots, m.$$

Entonces (2.76) tiene una solución de la forma

$$y(x) = v e^{\lambda_i x}, \quad \text{si } \lambda_i \in \mathbf{R},$$

o

$$y(x) = e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)x} (v \cos(\operatorname{Im} \lambda_i x) + w \operatorname{sen}(\operatorname{Im} \lambda_i x)), \quad \text{si } \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$$

(con $v, w \in \mathbf{R}^n$, $v^2 + w^2 \neq 0$). Como $y(x)$ no está acotada en $[x_0, \infty)$ (al ser $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$), el sistema homogéneo (2.76), y por tanto también (2.75), es *inestable*.

Supongamos ahora que

$$\operatorname{Re} \lambda_i = 0 \text{ para } i = 1, \dots, j \quad \text{y} \quad \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \text{ para } i = j + 1, \dots, m.$$

Si

$$n_i = 1, \quad \forall i = 1, \dots, j,$$

entonces (2.78) se reduce a

$$\|y(x)\| \leq \sum_{i=1}^j \|v_{i0}\| + \sum_{i=j+1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} \|v_{ik}\| |x|^k e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)x}. \quad (2.79)$$

Esto muestra que toda solución de (2.76) está acotada, y por tanto el sistema (2.75) es *estable*. Sin embargo, (2.75) *no* es asintóticamente estable, ya que si $i = 1, \dots, j$ posee soluciones de la forma

$$v \cos(\operatorname{Im} \lambda_i x) + w \operatorname{sen}(\operatorname{Im} \lambda_i x) \quad (v, w \in \mathbf{R}^n, v^2 + w^2 \neq 0)$$

(esta solución se reduce a una constante si $\text{Im } \lambda_i = 0$), que no tienden a 0 si $x \rightarrow \infty$. Por el contrario, si

$$n_i > 1 \quad \text{para algún } i = 1, \dots, j$$

entonces el sistema (2.75) es *inestable*. En efecto, en este caso el sistema homogéneo (2.76) posee alguna solución no acotada de la forma

$$\sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{x^k}{k!} [u_{ik} \cos(\text{Im } \lambda_i x) + w_{ik} \text{sen}(\text{Im } \lambda_i x)] \quad (u_{ik}, w_{ik} \in \mathbf{R}^n, u_{ik}^2 + w_{ik}^2 \neq 0)$$

($i \in \{1, \dots, j\}$), en virtud de la ecuación (2.25). (Nótese que $u_{ik}^2 + w_{ik}^2 \neq 0$ porque $w_{ik} + i u_{ik}$ pertenece a la base de Jordan de A .)

Esto prueba por tanto el siguiente resultado:

- i) Si todos los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa, el sistema (2.75) es **asintóticamente estable**
- ii) Si algún autovalor de A tiene parte real positiva, el sistema (2.75) es **inestable**
- iii) Si todos los autovalores de A tienen parte real no positiva, el sistema (2.75) es **estable** (pero no asintóticamente estable) si los índices de todos los autovalores con parte real nula son iguales a uno, e **inestable** en caso contrario.

Nota. Obsérvese que la condición $n_i = 1$ es equivalente a que la *multiplicidad algebraica* del autovalor λ_i sea igual a su *multiplicidad geométrica* (es decir, a que $J_i = \lambda_i \mathbf{1}$).

Se define la estabilidad de las soluciones de una ecuación escalar de orden n en términos de las correspondientes soluciones del sistema de primer orden asociado. En particular, para la ecuación lineal

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x)$$

(con $a_i, b : I \rightarrow \mathbf{R}$ continuas en $I = [x_0, \infty)$) una solución es estable (resp. asintóticamente estable) si y sólo si lo es la solución trivial del sistema homogéneo correspondiente. Podemos hablar por tanto de ecuaciones lineales estables, asintóticamente estables, o inestables. Si todos los coeficientes a_i ($0 \leq i \leq n - 1$) son *constantes*, el resultado que acabamos de probar para un sistema lineal de primer orden con matriz de coeficientes constante implica que en este caso la ecuación es *asintóticamente estable* si todas las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa, *estable* (pero no asintóticamente estable) si todas las raíces tienen parte real no positiva, y los que tienen parte real cero son *simples*, e *inestable* en cualquier otro caso (en particular, si alguna raíz tiene parte real positiva). En efecto, hemos visto en la Sección 2.6 que el índice de los autovalores del sistema lineal de primer orden asociado a una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n es igual a la multiplicidad de dichos autovalores como raíces del polinomio característico.

Ejemplo 2.22. Estudiemos la estabilidad del sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \\ y_3' &= -y_4 \\ y_4' &= 2y_1 + y_3. \end{aligned} \tag{2.80}$$

La matriz de coeficientes es en este caso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2,$$

por tanto los autovalores son

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i,$$

ambos de multiplicidad algebraica 2. El sistema no puede ser asintóticamente estable (ningún autovalor tiene parte real negativa), y será estable sólo si la multiplicidad geométrica de cada uno de los autovalores es 2, es decir si

$$\dim \ker(A \pm i) = 2,$$

o, equivalentemente, si y sólo si

$$\text{rank}(A \pm i) = 4 - 2 = 2,$$

Como (por ejemplo)

$$A - i = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 2i & 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & -1 \end{pmatrix},$$

la matriz $A - i$ tiene rango 3, y por tanto el sistema (2.80) es *inestable*.

2.7.1 Criterio de Routh–Hurwitz

El criterio de estabilidad de un sistema o ecuación lineal con coeficientes constantes que acabamos de deducir requiere conocer las raíces del polinomio característico del sistema o ecuación considerado. Aunque el cálculo *aproximado* de estas raíces no presenta ningún problema, el cálculo exacto es difícil para polinomios de grado 3 y 4, y en general imposible para polinomios de grado superior. Sería por tanto deseable disponer de algún criterio de estabilidad formulado exclusivamente en términos de los *coeficientes* del sistema o ecuación, particularmente cuando dichos coeficientes dependen de *parámetros*. El caso más interesante en la práctica, y por tanto el más estudiado, es el de estabilidad asintótica. Diremos por tanto que un polinomio es **estable** si todas sus raíces tienen parte real negativa. En lo que queda de sección sólo consideraremos polinomios mónicos, lo que no supone ninguna pérdida de generalidad y simplifica los criterios que formularemos a continuación.

Es fácil deducir una condición *necesaria* para que un polinomio sea estable. En efecto, si las raíces (no necesariamente distintas) son $-\mu_1, \dots, -\mu_r$ y $-\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, -\alpha_s \pm i\beta_s$ con $\mu_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i \in \mathbf{R}$ y $r + s = n$, entonces el polinomio se puede escribir

$$\begin{aligned} p(t) &= (t + \mu_1) \cdots (t + \mu_r) [(t + \alpha_1)^2 + \beta_1^2] \cdots [(t + \alpha_s)^2 + \beta_s^2] \\ &= (t + \mu_1) \cdots (t + \mu_r) (t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_1^2 + \beta_1^2) \cdots (t^2 + 2\alpha_s t + \alpha_s^2 + \beta_s^2). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Es evidente de esta fórmula que todos los coeficientes de p son estrictamente positivos. Por tanto, una condición *necesaria* para que el polinomio

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0 \quad (2.82)$$

sea estable es que

$$\boxed{a_i > 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1}.$$

Esta condición no es, en general, suficiente (excepto para polinomios de grado 2). El criterio que formularemos a continuación proporciona una condición *necesaria y suficiente* para la estabilidad del polinomio (2.82):

Criterio de Routh–Hurwitz. *Una condición necesaria y suficiente para que el polinomio (2.82) sea estable es que todos los menores principales del siguiente determinante sean positivos:*

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{vmatrix}. \quad (2.83)$$

Además, si alguno de dichos menores es negativo el polinomio (2.82) tiene alguna raíz con parte real positiva.

El criterio de Routh–Hurwitz proporciona condiciones necesarias y suficientes de estabilidad muy sencillas para valores pequeños de n . Por ejemplo, para $n = 2$ dichas condiciones se reducen a

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 a_1 > 0,$$

es decir

$$\boxed{a_0 > 0, \quad a_1 > 0}.$$

Para $n = 3$ el determinante (2.83) es

$$\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix},$$

y por tanto el criterio de Routh–Hurwitz proporciona las condiciones

$$a_2 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 > 0, \quad a_0(a_1 a_2 - a_0) > 0,$$

o bien

$$\boxed{a_0 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 > 0}. \quad (2.84)$$

Es claro que estas condiciones implican que $a_1 > 0$. Finalmente, para $n = 4$ hay que considerar el determinante

$$\begin{vmatrix} a_3 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix},$$

y las condiciones de Routh–Hurwitz son por tanto

$$a_3 > 0, \quad a_2 a_3 - a_1 > 0, \quad H \equiv a_1(a_2 a_3 - a_1) - a_0 a_3^2 > 0, \quad a_0 H > 0$$

o bien

$$\boxed{a_0 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2 a_3 - a_1 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_0 a_3^2 > 0}.$$

De nuevo, es fácil ver que estas condiciones implican que $a_1, a_2 > 0$.

Ejemplo 2.23. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -z \\ z' &= ax - 5z, \end{aligned} \tag{2.85}$$

donde (x, y, z) son las variables dependientes, $a \in \mathbf{R}$ es un parámetro, y denotaremos por t a la variable independiente. El polinomio característico del sistema es

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ a & 0 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 7\lambda^2 - 10\lambda - a.$$

Para determinar la estabilidad del sistema (2.85), debemos por tanto estudiar el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 10\lambda + a. \tag{2.86}$$

Una condición necesaria para que haya estabilidad asintótica es por tanto que el parámetro a sea positivo. Las condiciones de Routh–Hurwitz (2.84), necesarias y suficientes para la estabilidad asintótica del sistema, son en este caso

$$\boxed{0 < a < 70}. \tag{2.87}$$

La *región de estabilidad* (asintótica) en el espacio de parámetros (la recta real) es por tanto el intervalo $(0, 70)$. Del criterio de Routh–Hurwitz también se sigue que si $a < 0$ ó $a > 70$ el sistema es inestable. Si $a = 0$ el polinomio (2.86) tiene una raíz simple igual a 0 y 2 raíces reales negativas, y por tanto el sistema (2.85) es *estable* (pero no asintóticamente estable). Si $a = 70$, ha de haber alguna raíz de p con parte real nula. En efecto, si no fuera este el caso habría alguna raíz con parte real positiva, ya que el sistema no puede ser asintóticamente estable para $a = 70$ por no cumplirse las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica (2.87). Dicha raíz tendría entonces parte real negativa para $a < 70$ y positiva para $a = 70$, por lo que sería una función *discontinua* de a para $a = 70$, lo cual es imposible. En efecto, se demuestra que las raíces de un polinomio son funciones *continuas* de los coeficientes de dicho polinomio para todos los valores de dichos coeficientes para los cuales las raíces son simples (teorema de la función implícita). (Nótese que para $a = 70$ las raíces de p son todas simples, ya que p y p' no tienen raíces comunes para dicho valor de a .) Como 0 no es raíz de p para $a = 70$, en este caso p tiene dos raíces complejas conjugadas $\pm i\omega$ y una raíz real $\mu < 0$ (μ no puede ser positiva por el razonamiento anterior). Por tanto, para $a = 70$ el sistema (2.85) es *estable* (pero no asintóticamente estable).

Capítulo 3

Soluciones en forma de serie

3.1 Puntos regulares

Nos dedicaremos en este capítulo al estudio de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$\boxed{u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0}, \quad (3.1)$$

aunque los métodos que vamos a introducir a continuación se generalizan sin dificultad a ecuaciones lineales homogéneas de orden $n > 2$. En general, salvo en casos muy particulares (por ejemplo, si los coeficientes a_i son constantes), es imposible resolver exactamente la ecuación (3.1), es decir expresar su solución general en términos de sus coeficientes y las primitivas de dichos coeficientes.

Ejemplo 3.1. La ecuación de Schrödinger (independiente del tiempo) para una partícula cuántica unidimensional de masa m sometida a un potencial $V(s)$ en un estado estacionario de energía E es

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(s) + (V(s) - E)\psi(s) = 0}, \quad (3.2)$$

siendo $\hbar \approx 1,055 \cdot 10^{-34}$ Js la constante de Planck reducida y $\psi(s)$ la amplitud de la densidad de probabilidad (en general compleja) de la partícula. En otras palabras, la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo $[a, b]$ es $\int_a^b |\psi(s)|^2 ds$. La ecuación anterior es una ecuación lineal homogénea de segundo orden, que se puede escribir en la forma reducida

$$\psi''(s) + (\epsilon - U(s))\psi(s) = 0, \quad (3.3)$$

siendo

$$\epsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad U(s) = \frac{2m}{\hbar^2}V(s). \quad (3.4)$$

Supongamos, en primer lugar, que la partícula se mueve en un campo de fuerzas constante $F > 0$. Entonces $V(s) = -Fs$, y por tanto

$$U(s) = -U_0s, \quad U_0 = \frac{2mF}{\hbar^2} > 0.$$

Efectuando el cambio de variable

$$x = -U_0^{-2/3}(\epsilon + U_0s), \quad u(x) = \psi(s)$$

(el signo menos se debe a razones históricas) se obtiene la *ecuación de Airy*

$$\boxed{u'' - x u = 0}. \quad (3.5)$$

Esta ecuación no se puede resolver en términos de funciones elementales. De hecho, su solución general se expresa en términos de funciones de Airy (que a su vez se pueden escribir en términos de funciones de Bessel).

Consideremos ahora el oscilador armónico cuántico, para el cual el potencial es

$$V(s) = \frac{1}{2} m \omega^2 s^2.$$

La ecuación de Schrödinger reducida es por tanto

$$\psi'' + \left[\epsilon - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 s^2 \right] \psi = 0.$$

Efectuando el cambio

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} s, \quad u(x) = \psi(s)$$

se obtiene la *ecuación de Weber*

$$\boxed{u'' + (\lambda - x^2)u = 0}, \quad (3.6)$$

siendo

$$\lambda = \frac{\hbar\epsilon}{m\omega} = \frac{2E}{\hbar\omega}.$$

De nuevo, para valores arbitrarios de λ la solución general de la ecuación anterior no es expresable en términos de funciones elementales, sino a través de funciones cilíndricas parabólicas. Sin embargo, si $\lambda = 2m + 1$ con $m = 0, 1, 2, \dots$ entonces la ecuación (3.6) tiene una solución particular de la forma

$$u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} P_m(x),$$

siendo P_m un polinomio de grado m llamado el m -ésimo *polinomio de Hermite*. Obsérvese que si $\lambda = 2m + 1$ entonces

$$E = \left(m + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$$

es la energía del $(m + 1)$ -ésimo estado ligado (de energía bien definida) del oscilador.

3.1.1 Funciones analíticas

Recuérdese que una función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ se dice **analítica** en el punto $x_0 \in \mathbf{R}$ si f es la suma de una serie de potencias convergente en la variable $x - x_0$, es decir si

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i, \quad (3.7)$$

siendo el *radio de convergencia* R de la serie anterior positivo. En lo que sigue utilizaremos las siguientes propiedades bien conocidas de las series de potencias:

- La serie de potencias (3.7) *converge absolutamente* en su *intervalo de convergencia* $(x_0 - R, x_0 + R)$, siendo la convergencia *uniforme* en cada subintervalo cerrado contenido en el intervalo de convergencia.
- Una serie de potencias es *infinitas veces derivable* en su intervalo de convergencia, y sus derivadas se pueden calcular derivando término a término la serie. De esta propiedad se deduce fácilmente la *fórmula de Taylor* para los coeficientes de la serie:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

- De la propiedad anterior se sigue inmediatamente que una función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es analítica en x_0 si es C^∞ en un entorno de x_0 , y la serie de Taylor de f converge a f en un entorno de dicho punto.
- Si $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ son analíticas en x_0 , las funciones $\lambda f + \mu g$ (con $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$) y $f g$ son analíticas en x_0 . Si, además, $g(x_0) \neq 0$, el cociente f/g es analítico en x_0 .

Ejemplo 3.2. La función $f(x) = x^\alpha$ (con $\alpha \in \mathbf{R}$) sólo es analítica en $x = 0$ si $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. En efecto, para cualquier otro valor de α las derivadas de la función de orden mayor que α son singulares en el origen. De hecho, f no está ni siquiera bien definida para $x < 0$ a menos que α no sea un racional p/q con $p, q \in \mathbf{Z}$ primos entre sí y q impar. La función $g(x) = |x|^\alpha$ está definida en toda la recta real para $\alpha \geq 0$, pero no es C^∞ (y por tanto tampoco analítica) en $x = 0$ si α no es un entero no negativo par.

Ejemplo 3.3. Existen funciones C^∞ que no son analíticas. Por ejemplo, la función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es C^∞ en \mathbf{R} , pero no es analítica en el origen (todas sus derivadas en el origen se anulan).

Definición 3.4. Diremos que $x_0 \in \mathbf{R}$ es un **punto regular** de la ecuación (3.1) si los coeficientes $a_0(x)$ y $a_1(x)$ son funciones *analíticas* en el punto x_0 .

En otras palabras, tanto a_0 como a_1 admiten desarrollos en serie de potencias de $x - x_0$

$$a_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k,i} (x - x_0)^i, \quad k = 0, 1,$$

con *radios de convergencia* positivos R_0 y R_1 , respectivamente. Tomando, por tanto, $R = \min(R_0, R_1) > 0$ ambas series convergen *simultáneamente* para $|x - x_0| < R$.

Ejemplo 3.5. Si los coeficientes de la ecuación (3.1) son *polinomios* en la variable independiente todo punto es regular para dicha ecuación. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, para las ecuaciones de Airy y de Hermite.

Ejemplo 3.6. Estudiemos cuáles son los puntos regulares de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$\boxed{(e^x - 1)u'' + x^2u' + \operatorname{sen} xu = 0}. \quad (3.9)$$

Para ello, debemos primero escribir la ecuación en la forma (3.1), es decir

$$u'' + \frac{x^2}{e^x - 1} u' + \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1} u = 0.$$

Los coeficientes de la ecuación son por tanto

$$a_0(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1}, \quad a_1(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}.$$

En primer lugar, ambas funciones son C^∞ en $\mathbf{R} - \{0\}$, ya que si $x \in \mathbf{R}$ $e^x - 1$ sólo se anula en $x = 0$. Como el numerador y el denominador que definen a a_0 y a_1 son funciones analíticas en todo punto, y el cociente de funciones analíticas es una función analítica en los puntos donde no se anula el denominador, concluimos que a_0 y a_1 son analíticas en cualquier punto $x_0 \neq 0$. Por tanto $x_0 \neq 0$ es un punto regular de la ecuación (3.9).

En cuanto al punto $x = 0$, aunque el denominador $e^x - 1$ se anula en este punto, ocurre lo mismo con los numeradores $\operatorname{sen} x$ y x^2 . De hecho, definiendo (como es habitual)

$$a_0(0) = \lim_{x \rightarrow 0} a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = 1, \quad a_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x} = 0,$$

los coeficientes a_k son funciones analíticas en $x = 0$. En efecto,

$$a_0(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i+1)!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!}},$$

siendo tanto el numerador como el denominador funciones analíticas en \mathbf{R} (series convergentes de potencias de x con radio de convergencia infinito; aplíquese, por ejemplo, el criterio del cociente). Como la serie en el denominador no se anula (vale 1) para $x = 0$, el cociente $a_0(x)$ es analítico en $x = 0$. Análogamente,

$$a_1(x) = \frac{x^2}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}} = \frac{x}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!}},$$

es de nuevo el cociente de dos series de potencias de x convergentes en toda la recta real, con denominador distinto de cero en el origen. Luego también el origen es un punto regular de la ecuación (3.9), y por tanto todos los puntos son regulares para esta ecuación.

¿Cuál es el radio de convergencia de las series de Taylor de a_0 y a_1 centradas en el punto x_0 ? En principio parece difícil responder a esta pregunta, ya que no es fácil obtener la expresión general de los coeficientes en estos desarrollos. Sin embargo, para calcular el radio de convergencia lo mejor es considerar a las funciones a_0 y a_1 en el plano complejo, es decir

$$a_0(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{e^z - 1}, \quad a_1(z) = \frac{z^2}{e^z - 1}, \quad z \in \mathbf{C},$$

ya que puede probarse que el radio de convergencia de una serie de potencias en \mathbf{R} no varía cuando se considera dicha serie en el plano complejo. Las funciones a_0 y a_1 (con

$a_0(0)$ y $a_1(0)$ definidos como antes) son analíticas en todo el plano complejo excepto en los puntos

$$z_k = 2k\pi i, \quad k \in \mathbf{Z} - \{0\},$$

pues en estos puntos se anula el denominador en las expresiones que definen a_0 y a_1 , mientras que el numerador es distinto de cero. El radio de convergencia del desarrollo de $a_i(z)$ en serie de potencias de $z - z_0$ ($i = 0, 1, z_0 \in \mathbf{C}$) es la distancia de z_0 a la singularidad más próxima de la función a_i , ya que a_k no está acotada en un entorno de dicha singularidad. Aplicando este resultado a un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ obtenemos fácilmente las fórmulas

$$R_0 = R_1 = \sqrt{4\pi^2 + x_0^2},$$

ya que las singularidades más próximas de las funciones a_0 ó a_1 a un punto del eje real son los puntos $\pm 2\pi i$. Por tanto en este caso $R = \min(R_0, R_1)$ está dado por la fórmula anterior. En particular, para $x_0 = 0$ obtenemos $R = 2\pi$.

Teorema 3.7. Si x_0 es un punto regular de la ecuación (3.1), toda solución de dicha ecuación es una función analítica en el punto x_0 , siendo el radio de convergencia de su serie de Taylor centrada en el punto x_0 mayor ó igual que el mínimo de los radios de convergencia de las series de Taylor centradas en x_0 para a_0 y a_1 .

En otras palabras, si x_0 es un punto regular para la ecuación (3.1) y R es el mínimo de los radios de convergencia de las series de Taylor centradas en x_0 de los coeficientes de dicha ecuación, toda solución $u(x)$ admite un desarrollo en serie de potencias

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i \quad (3.10)$$

convergente para $|x - x_0| < R$. Los coeficientes $c_i \in \mathbf{R}$ ($i = 0, 1, \dots$) de este desarrollo se calculan sustituyendo la serie anterior en la ecuación diferencial e igualando a cero los coeficientes de las potencias de x en la expresión resultante. Nótese que para calcular u'' y u' podemos derivar la serie (3.10) término a término, por las propiedades de las series de potencias. Por ejemplo, el teorema anterior permite asegurar que las soluciones de la ecuación (3.9) son analíticas en el origen con radio de convergencia 2π , es decir pueden representarse por una serie de Maclaurin

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

convergente para $|x| < 2\pi$.

Ejemplo 3.8. Consideremos la ecuación con coeficientes constantes

$$u'' - u = 0. \quad (3.11)$$

Todo punto $x_0 \in \mathbf{R}$ es regular para esta ecuación, con radio de convergencia $R = \infty$ (ya que los coeficientes son funciones constantes). Por tanto las soluciones de esta ecuación son funciones analíticas en todo \mathbf{R} . Desarrollemos, por ejemplo, alrededor de $x_0 = 0$. Sustituyendo la serie (3.10) (con $x_0 = 0$) en la ecuación (3.11) obtenemos

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2} - \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} [(i+2)(i+1)c_{i+2} - c_i] x^i = 0.$$

Igualando a cero el coeficiente de x^i en esta expresión obtenemos la siguiente *relación de recurrencia* que han de satisfacer los coeficientes c_i :

$$\boxed{(i+2)(i+1)c_{i+2} = c_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots}. \quad (3.12)$$

La relación anterior determina los coeficientes pares en términos de c_0 y los impares en términos de c_1 , ya que relaciona c_i con c_{i+2} (nótese que el coeficiente de c_{i+2} en (3.12) no se anula para ningún $i = 0, 1, \dots$). Los coeficientes $c_0 = u(0)$ y $c_1 = u'(0)$ quedan completamente indeterminados por la relación de recurrencia (3.12), lo cual es razonable, dado que la ecuación (3.11) debe tener una solución para todo valor de las condiciones iniciales $u(0) = c_0$ y $u'(0) = c_1$. La relación de recurrencia (3.12) se resuelve fácilmente. En efecto, si $c_0 \neq 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{c_{2k}}{c_0} &= \frac{c_{2k}}{c_{2k-2}} \frac{c_{2k-2}}{c_{2k-4}} \cdots \frac{c_2}{c_0} = \frac{1}{2k(2k-1)} \frac{1}{(2k-2)(2k-3)} \cdots \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{(2k)!} \\ \implies &\boxed{c_{2k} = \frac{c_0}{(2k)!}}, \end{aligned}$$

expresión que es obviamente válida también si $c_0 = 0$. Análogamente, si $c_1 \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{c_{2k+1}}{c_1} &= \frac{c_{2k+1}}{c_{2k-1}} \frac{c_{2k-1}}{c_{2k-3}} \cdots \frac{c_3}{c_1} = \frac{1}{(2k+1)(2k)} \frac{1}{(2k-1)(2k-2)} \cdots \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{(2k+1)!} \\ \implies &\boxed{c_{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!}}, \end{aligned}$$

que de nuevo vale también para $c_1 = 0$ en virtud de (3.12). La solución general de la ecuación (3.12) es por tanto

$$u(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = c_0 \cosh x + c_1 \sinh x.$$

Ejemplo 3.9. Consideremos a continuación la ecuación de Airy (3.5), para la cual todos los puntos son regulares y con radio de convergencia infinito (pues los coeficientes son polinomios). Desarrollando de nuevo alrededor de $x_0 = 0$ obtenemos la ecuación

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2} - \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+1} = 2c_2 + \sum_{i=1}^{\infty} [(i+2)(i+1)c_{i+2} - c_{i-1}] x^i = 0.$$

Igualando a cero los coeficientes de las potencias de x obtenemos

$$c_2 = 0 \quad (3.13)$$

junto con la relación de recurrencia

$$\boxed{(i+2)(i+1)c_{i+2} = c_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots}. \quad (3.14)$$

Nótese que ahora la relación de recurrencia relaciona c_k con c_{k+3} . De esta propiedad y la ecuación (3.13) se sigue que

$$\boxed{c_{3k+2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots}. \quad (3.15)$$

Ahora c_0 determina todos los coeficientes de índice múltiplo de 3, mientras que c_1 determina los coeficientes c_{3k+1} con $k = 0, 1, 2 \dots$. Más concretamente, para calcular c_{3k} reescribamos la relación de recurrencia (3.14) en la forma

$$3^2 k \left(k - \frac{1}{3} \right) c_{3k} = c_{3k-3}.$$

Si $c_0 \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{c_{3k}}{c_0} &= \frac{c_{3k}}{c_{3k-3}} \frac{c_{3k-3}}{c_{3k-6}} \dots \frac{c_3}{c_0} = \frac{3^{-2}}{k \left(k - \frac{1}{3} \right)} \frac{3^{-2}}{(k-1) \left(k - \frac{4}{3} \right)} \dots \frac{3^{-2}}{1 \cdot \frac{2}{3}} \\ \implies c_{3k} &= \frac{3^{-2k} c_0}{k! \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \dots \left(k - \frac{1}{3} \right)}, \end{aligned}$$

relación válida también para $c_0 = 0$. Análogamente, de (3.14) se sigue que

$$3^2 k \left(k + \frac{1}{3} \right) c_{3k+1} = c_{3k-2},$$

y por tanto si $c_1 \neq 0$ se verifica

$$\begin{aligned} \frac{c_{3k+1}}{c_1} &= \frac{c_{3k+1}}{c_{3k-2}} \frac{c_{3k-2}}{c_{3k-5}} \dots \frac{c_4}{c_1} = \frac{3^{-2}}{k \left(k + \frac{1}{3} \right)} \frac{3^{-2}}{(k-1) \left(k - \frac{2}{3} \right)} \dots \frac{3^{-2}}{1 \cdot \frac{4}{3}} \\ \implies c_{3k+1} &= \frac{3^{-2k} c_1}{k! \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3} \dots \left(k + \frac{1}{3} \right)}. \end{aligned}$$

Por consiguiente la solución general de la ecuación de Airy está dada por

$$u(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k k! 2 \cdot 5 \dots (3k-1)} + c_1 x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k k! 4 \cdot 7 \dots (3k+1)}. \quad (3.16)$$

Como los coeficientes de la ecuación de Airy son funciones analíticas en todo \mathbf{R} (polinomios), el radio de convergencia de las series (3.16) que definen a $u(x)$ es infinito.

3.1.2 La ecuación de Hermite

Si en la ecuación de Weber

$$\psi'' + (\lambda - x^2) \psi = 0$$

efectuamos el cambio de variable dependiente

$$\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} u(x)$$

obtenemos la *ecuación de Hermite*

$$u'' - 2x u' + 2\mu u = 0, \quad (3.17)$$

donde $2\mu = \lambda - 1$ es un parámetro real. Como los coeficientes de esta ecuación son polinomios, todo punto es regular, y el radio de convergencia de la serie de Taylor

centrada en cualquier punto de las soluciones de la ecuación es infinito. Desarrollando alrededor del origen

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

y sustituyendo en la ecuación obtenemos la identidad

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2} - 2 \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^i + 2\mu \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0$$

que podemos reescribir como sigue:

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(i+2)(i+1)c_{i+2} + 2(\mu-i)c_i] x^i = 0.$$

De esta ecuación se obtiene la relación de recurrencia

$$\boxed{(i+2)(i+1)c_{i+2} = 2(i-\mu)c_i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$

Como el coeficiente de c_{i+2} no se anula para ningún $i = 0, 1, \dots$, la relación anterior determina todos los coeficientes pares (impares) en términos de c_0 (c_1). Para calcular los coeficientes pares escribimos (3.18) para $i = 2k - 2$ ($k = 1, 2, \dots$), obteniendo

$$2k(2k-1)c_{2k} = -2(\mu-2k+2)c_{2k-2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Por tanto (suponiendo que $c_0 \neq 0$, ya que si $c_0 = 0$ todos los coeficientes pares se anulan)

$$\begin{aligned} \frac{c_{2n}}{c_0} &= \frac{c_{2n}}{c_{2n-2}} \frac{c_{2n-2}}{c_{2n-4}} \dots \frac{c_2}{c_0} = \frac{-2(\mu-2n+2)}{2n(2n-1)} \frac{-2(\mu-2n+4)}{(2n-2)(2n-3)} \dots \frac{-2\mu}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{(-2)^n}{(2n)!} \mu(\mu-2) \dots (\mu-2n+2) \end{aligned}$$

y

$$\boxed{c_{2n} = \frac{(-2)^n}{(2n)!} \mu(\mu-2) \dots (\mu-2n+2) c_0}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.20)$$

Análogamente, para los coeficientes impares c_{2k+1} la relación de recurrencia se escribe

$$(2k+1)(2k)c_{2k+1} = -2(\mu-2k+1)c_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

por lo que (si $c_1 \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{c_{2n+1}}{c_1} &= \frac{c_{2n+1}}{c_{2n-1}} \frac{c_{2n-1}}{c_{2n-3}} \dots \frac{c_3}{c_1} = \frac{-2(\mu-2n+1)}{(2n+1)(2n)} \frac{-2(\mu-2n+3)}{(2n-1)(2n-2)} \dots \frac{-2(\mu-1)}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} (\mu-1)(\mu-3) \dots (\mu-2n+1). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\boxed{c_{2n+1} = \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} (\mu-1)(\mu-3) \dots (\mu-2n+1) c_1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.21)$$

expresión obviamente válida también si $c_1 = 0$. Por tanto la solución general de la ecuación de Hermite (3.17) es

$$u(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x),$$

donde

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\mu-2)\dots(\mu-2n+2) \frac{(-2)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (3.22)$$

y

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu-1)(\mu-3)\dots(\mu-2n+1) \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad (3.23)$$

siendo estas series convergentes para todo $x \in \mathbf{R}$. Las funciones $u_k(x)$ ($k = 0, 1$) son ambas soluciones de la ecuación de Hermite (3.17), siendo u_0 una función par y u_1 impar, es decir

$$u_k(-x) = (-1)^k u_k(x), \quad k = 0, 1. \quad (3.24)$$

Las condiciones iniciales satisfechas por las funciones $u_k(x)$ son

$$u_0(0) = 1, \quad u'_0(0) = 0; \quad u_1(0) = 0, \quad u'_1(0) = 1. \quad (3.25)$$

Las funciones u_0 y u_1 , que como hemos visto anteriormente forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación de Hermite, se reducen a *polinomios* para ciertos valores del parámetro μ que aparece en la ecuación. En efecto, la solución par $u_0(x)$ se reduce a un polinomio si se anula el coeficiente c_{2n} para algún valor de $n = 1, 2, \dots$, es decir si

$$\mu(\mu-2)\dots(\mu-2n+2) = 0$$

para algún n . Esto sólo es posible si $\mu = 2N$ ($N = 0, 1, \dots$) es igual a un entero *par* no negativo. En tal caso c_{2N+2} es proporcional a

$$\mu(\mu-2)\dots(\mu-2N) = 0$$

y todos los coeficientes pares c_{2k} con $k \geq N+1$ se anulan, ya que contienen el factor $\mu-2N$. Por tanto si $\mu = 2N$ (con $N = 0, 1, \dots$) la solución u_0 se reduce al polinomio de grado $2N$

$$P_{2N}(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \quad (\mu = 2N).$$

Nótese que ninguno de los coeficientes en este desarrollo se anula. Por el contrario, si $\mu = 2N$ la solución impar u_1 *no* es polinómica, ya que

$$(2N-1)(2N-3)\dots(2N-2n+1) \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

La solución u_1 será sin embargo polinómica si $\mu = 2N+1$ ($N = 0, 1, \dots$) es igual a un entero *impar* ya que entonces

$$c_{2N+3} \propto (\mu-1)(\mu-3)\dots(\mu-2N-1) = 0,$$

lo cual implica (por la relación de recurrencia) que $c_{2k+3} = 0$ para $k \geq N$. En este caso la solución u_1 se reduce al polinomio de grado $2N+1$

$$P_{2N+1}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\mu = 2N+1).$$

De nuevo, para estos valores de μ la solución par u_0 no se reduce a un polinomio.

Puede probarse que si μ no es un entero no negativo, en cuyo caso ninguna de las soluciones $u_k(x)$ se reduce a un polinomio, cualquier solución no nula de la ecuación de Hermite se comporta como e^{x^2} para $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$. Ello se debe, esencialmente, a que las funciones $u_k(x)$ verifican

$$\frac{c_{i+2}}{c_i} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{i},$$

mientras que

$$e^{x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j} x^{2j}$$

cumple

$$\frac{b_{i+2}}{b_i} \underset{i=2j}{=} \frac{1/(j+1)!}{1/j!} = \frac{1}{j+1} \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{j} = \frac{2}{i}.$$

Esto implica (teniendo en cuenta la paridad de u_k) que si μ no es un entero no negativo se tiene

$$u_0(x) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} A_0 e^{x^2}, \quad u_1(x) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} A_1 \operatorname{sig} x e^{x^2},$$

para ciertas constantes no nulas A_0 y A_1 , y por tanto el comportamiento de *cualquier* solución no nula de la ecuación de Hermite para μ distinto de un entero no negativo es como e^{x^2} en $+\infty$ o en $-\infty$. Pero entonces el comportamiento de una solución no nula de la ecuación de Weber $\psi(x) = e^{-x^2/2} u(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$ es como $e^{x^2/2}$. En particular, para estos valores de μ ninguna solución no nula de la ecuación de Weber verifica la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2 dx < \infty. \tag{3.26}$$

Por tanto, si μ no es un entero no negativo el oscilador cuántico no puede tener un estado ligado de energía

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \lambda = \left(\mu + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega.$$

Por el contrario, si $\mu = m$ es un entero no negativo, la ecuación de Hermite tiene una solución polinómica $P_m(x)$, y por tanto la ecuación de Weber para $\lambda = 2m + 1$ tiene una solución de la forma

$$\boxed{\psi(x) = P_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

que verifica obviamente la condición de normalización (3.26). De esto se deduce que las energías de los estados ligados del oscilador armónico cuántico están dadas por la fórmula

$$\boxed{E = \left(m + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad m = 0, 1, \dots}$$

Esta fórmula fue deducida empíricamente por Planck en 1900 para explicar la distribución de frecuencias del espectro de radiación de un cuerpo negro, y con ella puede decirse que comenzó la Mecánica Cuántica.

Los **polinomios de Hermite** $H_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) son proporcionales a los polinomios $P_k(x)$ que acabamos de introducir. En la práctica, los polinomios de Hermite se

suelen definir mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} H_{2m}(x) &= (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} P_{2m}(x) = \sum_{n=0}^m (-1)^{n+m} \frac{(2m)!}{(2n)!(m-n)!} (2x)^{2n} \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{(2m)!}{i!(2m-2i)!} (2x)^{2m-2i} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H_{2m+1}(x) &= 2(-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} P_{2m+1}(x) = \sum_{n=0}^m (-1)^{n+m} \frac{(2m+1)!}{(2n+1)!(m-n)!} (2x)^{2n+1} \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{(2m+1)!}{i!(2m+1-2i)!} (2x)^{2m+1-2i}. \end{aligned}$$

Ambas fórmulas se pueden englobar en la siguiente:

$$H_k(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^i k!}{i!(k-2i)!} (2x)^{k-2i}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.27)$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x (mayor entero menor ó igual que x). Al ser H_k proporcional a P_k para todo $k = 0, 1, \dots$, H_k es solución de la ecuación de Hermite con $\mu = k$, es decir

$$\boxed{H_k'' - 2x H_k' + 2k H_k = 0}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.28)$$

Los primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

Se define la **función generatriz** de los polinomios de Hermite como la función

$$\boxed{F(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x)}{k!} z^k}. \quad (3.29)$$

Procediendo formalmente se obtiene

$$\begin{aligned} F(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^i}{i!(k-2i)!} (2x)^{k-2i} z^k = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! j!} (2x)^j z^{j+2i} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2xz)^j}{j!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^i}{i!} = e^{2xz} e^{-z^2} = \boxed{e^{2xz-z^2}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como, por definición de F ,

$$H_k(x) = \left. \frac{\partial^k}{\partial z^k} F(x, z) \right|_{z=0},$$

utilizando la fórmula anterior para $F(x, z)$ se obtiene

$$\begin{aligned} H_k(x) &= \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left[e^{-(z-x)^2} e^{x^2} \right]_{z=0} = e^{x^2} \frac{\partial^k}{\partial z^k} e^{-(z-x)^2} \Big|_{z=0} = e^{x^2} \frac{d^k}{dw^k} e^{-w^2} \Big|_{w=-x} \\ &= (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{ds^k} e^{-s^2} \Big|_{s=x}, \end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}}. \quad (3.31)$$

La identidad anterior es la llamada *fórmula de Rodrigues* para los polinomios de Hermite.

Derivando la definición (3.29) de la función generatriz respecto de z y x y utilizando (3.30) se obtienen propiedades importantes de los polinomios de Hermite. En efecto, derivando parcialmente respecto de z se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} e^{2xz-z^2} &= 2(x-z) e^{2xz-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x H_k(x)}{k!} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 H_k(x)}{k!} z^{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} [2x H_j(x) - 2j H_{j-1}(x)] \frac{z^j}{j!}, \end{aligned}$$

que por (3.29) ha de ser igual a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k(x)}{(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(x) \frac{z^j}{j!}.$$

Igualando los coeficientes de z^j en ambas expresiones se obtiene la identidad

$$\boxed{H_{j+1}(x) = 2x H_j(x) - 2j H_{j-1}(x)}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.32)$$

que puede ser utilizada para calcular recursivamente los polinomios de Hermite a partir de $H_0(x) = 1$. Análogamente, derivando la función generatriz respecto de x se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{2xz-z^2} = 2z e^{2xz-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 H_k(x)}{k!} z^{k+1} = \sum_{j=0}^{\infty} 2j H_{j-1}(x) \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} H'_j(x) \frac{z^j}{j!},$$

de donde se deduce la relación

$$\boxed{H'_j(x) = 2j H_{j-1}(x)}, \quad j = 0, 1, \dots. \quad (3.33)$$

Nótese que combinando las relaciones (3.32) y (3.33) se deduce fácilmente que el polinomio H_j es solución de la ecuación de Hermite con $\mu = j$, ya que

$$\begin{aligned} H''_j(x) &= 2j H'_{j-1}(x) = \frac{d}{dx} [2x H_j(x) - H_{j+1}(x)] = 2x H'_j(x) + 2H_j(x) - H'_{j+1}(x) \\ &= 2x H'_j(x) + 2H_j(x) - 2(j+1) H_j(x) = 2x H'_j(x) - 2j H_j(x). \end{aligned}$$

Otra de las propiedades importantes de los polinomios de Hermite es su **ortogonalidad** en la recta real respecto de la función peso e^{-x^2} , es decir

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0, \quad m \neq n}. \quad (3.34)$$

Para probar esta relación, basta recordar que las funciones $\psi_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ verifican la ecuación de Weber con $\lambda = 2k + 1$, es decir

$$\psi_k''(x) + (2k + 1 - x^2) \psi_k(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

De esta ecuación se deduce que

$$0 = \psi_n [\psi_m'' + (2m+1-x^2)\psi_m] - \psi_m [\psi_n'' + (2n+1-x^2)\psi_n] = \psi_n \psi_m'' - \psi_m \psi_n'' - 2(n-m)\psi_n \psi_m,$$

es decir

$$\frac{d}{dx} (\psi_n \psi_m' - \psi_m \psi_n') = 2(n-m)\psi_n \psi_m.$$

Integrando esta igualdad entre $-\infty$ y $+\infty$ se obtiene (3.34), ya que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_n(x) \psi_m'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (H_m'(x) - x H_m(x)) H_n(x) e^{-x^2} = 0.$$

En Mecánica Cuántica es también de gran interés el cálculo de la integral (3.34) para $m = n$. Para evaluar dicha integral, multipliquemos (3.32) por $H_{j+1} e^{-x^2}$ e integremos entre $-\infty$ y $+\infty$. Aplicando las relaciones de ortogonalidad (3.34) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_{j+1}^2(x) e^{-x^2} dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) H_j(x) H_{j+1}(x) dx \\ &= - [e^{-x^2} H_j(x) H_{j+1}(x)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d}{dx} [H_j(x) H_{j+1}(x)] dx. \end{aligned}$$

Utilizando de nuevo las relaciones de ortogonalidad (3.34) y la identidad (3.33) queda

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_{j+1}^2(x) e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_j'(x) H_{j+1}(x) + H_j(x) H_{j+1}'(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [2j H_{j-1}(x) H_{j+1}(x) + 2(j+1) H_j^2(x)] e^{-x^2} dx \\ &= 2(j+1) \int_{-\infty}^{\infty} H_j^2(x) e^{-x^2} dx, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

De esta igualdad se deduce fácilmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} H_0^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Como la última integral es igual a $\sqrt{\pi}$, se tiene finalmente

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}}. \quad (3.35)$$

Ejercicio.

- i) Probar que si a_0 es una función par y a_1 es impar (y ambas son continuas), entonces $\pm u(-x)$ es solución de la ecuación (3.1) si $u(x)$ es solución.
- ii) Deducir que las soluciones $u_k(x)$ de la ecuación (3.1) definidas por las condiciones iniciales (3.25) tienen la paridad de $(-1)^k$, es decir satisfacen (3.24).
- iii) Concluir que, si el punto $x = 0$ es regular y $u(x)$ es solución de la ecuación (3.1) con las condiciones iniciales $u(0) = c_0$, $u'(0) = c_1$, entonces u admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$u(x) = c_0 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^{2i} + c_1 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^{2i+1}.$$

3.2 Puntos singulares regulares

Consideremos de nuevo la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0. \quad (3.36)$$

Estudiaremos en esta sección el comportamiento de las soluciones de (3.36) en las proximidades de un punto x_0 que *no* es regular para dicha ecuación. Diremos en tal caso que x_0 es un punto **singular** para la ecuación (3.36). En estas notas sólo vamos a considerar un tipo especial (aunque muy importante) de puntos singulares de la ecuación (3.36), las llamadas singularidades aisladas.

Definición 3.10. Diremos que el punto $x_0 \in \mathbf{R}$ es una **singularidad aislada** de la función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ si f *no* es analítica en x_0 , pero existe $r > 0$ tal que f es analítica si $0 < |x - x_0| < r$. El punto x_0 es una singularidad aislada de la ecuación (3.36) si es una singularidad aislada de uno de sus coeficientes a_0 ó a_1 , siendo singularidad aislada o punto regular del otro coeficiente.

Por ejemplo, las funciones $1/x$, $\sqrt{|x|}$, $\log|x|$ y e^{1/x^2} tienen una singularidad aislada en $x = 0$, y la ecuación

$$u'' + \log|x|u' + \sin xu = 0$$

tiene una singularidad aislada en $x = 0$.

Las definiciones anteriores tienen sentido si x es una variable *compleja*, sin más que interpretar $|x - x_0|$ como el módulo del número complejo $x - x_0$ o, lo que es lo mismo, la distancia entre los puntos x_0 y x en el plano complejo. Sin embargo, si $x \in \mathbf{C}$ es una variable compleja las funciones $\log x$ y $x^r \equiv e^{r \log x}$ con $r \notin \mathbf{Z}$ *no* tienen una singularidad aislada en $x = 0$, ya que son ambas discontinuas en una semirrecta que parte del origen. Se suele decir que $\log x$ y x^r ($r \notin \mathbf{Z}$) tienen un *punto de ramificación* en el origen.

Supongamos que x_0 es una singularidad aislada de la ecuación (3.36). En tal caso el punto x_0 *no* es regular para la ecuación (3.36), por lo que no es aplicable el Teorema 3.7. El matemático alemán L. Fuchs probó en 1868 que una ecuación lineal homogénea (3.36) (con $x \in \mathbf{C}$) con una singularidad aislada en $x_0 \in \mathbf{C}$ tiene la propiedad de que toda solución suya $u(x)$ definida en las proximidades de x_0 satisface la condición

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0)^M u(x)] = 0 \quad (3.37)$$

para alguna constante M si y sólo si los coeficientes de la ecuación son de la forma

$$\boxed{a_1(x) = \frac{p(x)}{x - x_0}, \quad a_0(x) = \frac{q(x)}{(x - x_0)^2}, \quad x \neq x_0,} \quad (3.38)$$

con p y q funciones *analíticas* en x_0 .

Definición 3.11. Diremos que una singularidad aislada x_0 de la ecuación (3.36) es un punto **singular regular** de dicha ecuación si los coeficientes de la ecuación son de la forma (3.38), siendo p y q funciones analíticas en x_0 .

En otras palabras, para que una singularidad aislada x_0 sea un punto singular regular las funciones p y q definidas por

$$\boxed{p(x) = (x - x_0)a_1(x), \quad q(x) = (x - x_0)^2 a_0(x)} \quad (3.39)$$

para $x \neq x_0$ y

$$p(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0)a_1(x)], \quad q(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0)^2 a_0(x)]$$

deben ser analíticas en x_0 .

Ejemplo 3.12. Consideremos la ecuación

$$x u'' + u' + \log |x| u = 0. \quad (3.40)$$

Todo punto $x_0 \neq 0$ es un punto regular de la ecuación (3.40), ya que los coeficientes de la ecuación

$$a_1(x) = \frac{1}{x}, \quad a_0(x) = \frac{\log |x|}{x}$$

son funciones analíticas en $x_0 \neq 0$. En efecto,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(x - x_0) + x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + \frac{x - x_0}{x_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x_0^{k+1}} (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < |x_0|.$$

Por otra parte, $\frac{\log |x|}{x}$ es analítica en $x_0 \neq 0$, al ser el producto de dos funciones analíticas en x_0 ($1/x$ y $\log |x|$). Recuerdese que $\log |x|$ es analítica en todo punto $x_0 \neq 0$, ya que

$$\begin{aligned} \log |x| &= \log |x_0| + \log \left| 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right| \stackrel{|x - x_0| < |x_0|}{=} \log |x_0| + \log \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right) \\ &= \log |x_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k x_0^k} (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < |x_0|. \end{aligned}$$

El punto $x_0 = 0$ es una singularidad aislada de la ecuación (3.40), ya que es singularidad aislada de ambos coeficientes de la ecuación. Para que dicho punto sea un punto singular regular de la ecuación, las funciones

$$p(x) = x a_1(x) = 1, \quad q(x) = x^2 a_0(x) = x \log |x|$$

han de ser analíticas en 0. Pero esto es falso, ya que aunque p es analítica (constante) en \mathbf{R} , y existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = 0,$$

q no es ni siquiera una vez derivable en el origen. Por tanto, 0 es un punto singular *irregular* de la ecuación (3.40).

Para tener una idea aproximada acerca de qué tipos de comportamiento cabe esperar para las soluciones de la ecuación (3.36) en las proximidades de un punto singular regular x_0 , empezaremos estudiando la ecuación más sencilla que tiene una singularidad de este tipo. Para ello tomamos (por sencillez) $x_0 = 0$ e imponemos que las funciones $p(x)$ y $q(x)$ se reduzcan a sendas constantes p_0 y q_0 , respectivamente, lo que conduce a la **ecuación de Euler** de segundo orden

$$\boxed{x^2 u'' + p_0 x u' + q_0 u = 0}. \quad (3.41)$$

Esta ecuación se resuelve fácilmente mediante el cambio de variable dependiente

$$t = \log |x|, \quad x \neq 0.$$

En efecto, si hacemos

$$y(t) = u(x)$$

entonces $\frac{dx}{dt} = x$ para todo t , por lo que

$$\frac{dy}{dt} = u'(x) \frac{dx}{dt} = x u'(x), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x^2 u''(x) + x u'(x),$$

y por tanto $y(t)$ satisface la ecuación lineal homogénea de coeficientes *constantes*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p_0 - 1) \frac{dy}{dt} + q_0 y = 0. \quad (3.42)$$

Nótese que el polinomio característico de esta ecuación es

$$p(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r(r - 1) + p_0 r + q_0. \quad (3.43)$$

Si r_i ($i = 1, 2$) son las dos raíces (posiblemente complejas) del polinomio característico, la solución general de la ecuación (3.42) está dada por

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, & \text{si } r_1 \neq r_2, r_1, r_2 \in \mathbf{R} \\ (c_1 + c_2 t) e^{r t}, & \text{si } r_1 = r_2 \equiv r \in \mathbf{R} \\ (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)) e^{\alpha t}, & \text{si } r_{1,2} = \alpha \pm i \beta \in \mathbf{C}. \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación de Euler (3.41) es

$$u(x) = \begin{cases} c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2}, & \text{si } r_1 \neq r_2, r_1, r_2 \in \mathbf{R} \\ (c_1 + c_2 \log |x|) |x|^r, & \text{si } r_1 = r_2 \equiv r \in \mathbf{R} \\ (c_1 \cos(\beta \log |x|) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \log |x|)) |x|^\alpha, & \text{si } r_{1,2} = \alpha \pm i \beta \in \mathbf{C}. \end{cases} \quad (3.44)$$

Obsérvese que para ciertos valores de las raíces r_1 y r_2 (o, lo que es lo mismo, de los coeficientes p_0 y q_0), algunas o incluso todas las soluciones de la ecuación de Euler (3.41) pueden ser analíticas en $x = 0$, aunque los coeficientes de la ecuación no lo sean. Más concretamente, si $r_1 \neq r_2$ son enteros no negativos entonces todas las soluciones son analíticas en $x = 0$, mientras que si $r_1 = r_2 \equiv r$ es un entero no negativo entonces hay una sólo solución linealmente independiente que es analítica en $x = 0$, a saber $u(x) = x^r$. (¿Por qué se puede sustituir $|x|^{r_i}$ por x^{r_i} en (3.44) si r_i es un entero?) En cualquier caso, cualquiera que sean r_1 y r_2 es evidente que existe una constante M suficientemente grande tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^M u(x)) = 0$$

para toda solución $u(x)$ de (3.41), incluso si interpretamos x en la fórmula anterior como una variable *compleja*.

En general, si x_0 es un punto singular regular de la ecuación (3.36) definiremos p_0 y q_0 mediante

$$\boxed{p_0 = p(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0) a_1(x)], \quad q_0 = q(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0)^2 a_0(x)]}. \quad (3.45)$$

Se define también el **polinomio indicial** de la ecuación (3.36) mediante

$$\boxed{F(r) = r(r - 1) + p_0 r + q_0}, \quad (3.46)$$

con p_0 y q_0 dados por la fórmula anterior.

El siguiente teorema, debido a G. Frobenius (1874), es de gran importancia práctica, ya que describe con gran precisión el comportamiento de las soluciones de la ecuación lineal homogénea (3.36) en las proximidades de un punto singular regular x_0 . Por sencillez, supondremos que $x_0 = 0$ (lo que siempre puede conseguirse con el cambio de variable independiente $t = x - x_0$), y por tanto escribiremos la ecuación (3.36) en la forma

$$\boxed{x^2 u'' + x p(x) u' + q(x) u = 0}, \quad (3.47)$$

con

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i x^i, \quad |x| < R. \quad (3.48)$$

Teorema de Frobenius. Sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio indicial (3.46) de (3.47), numeradas de forma que

$$\operatorname{Re} r_1 \geq \operatorname{Re} r_2. \quad (3.49)$$

Entonces se tiene:

i) Si $r_1 \neq r_2$ y $r_1 - r_2 \notin \mathbf{N}$, la ecuación (3.47) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$u_i(x) = |x|^{r_i} v_i(x), \quad i = 1, 2, \quad (3.50)$$

con v_i analítica en 0, y $v_i(0) = 1$.

ii) Si $r_1 = r_2 \equiv r$, (3.47) admite un sistema fundamental de soluciones

$$u_1(x) = |x|^r v_1(x), \quad u_2(x) = u_1(x) \log |x| + |x|^r v_2(x), \quad (3.51)$$

con v_i analítica en 0, $v_1(0) = 1$ y $v_2(0) = 0$.

iii) Si $r_1 - r_2 \equiv n \in \mathbf{N}$, (3.47) posee el sistema fundamental de soluciones

$$u_1(x) = |x|^{r_1} v_1(x), \quad u_2(x) = (\operatorname{sig} x)^n c u_1(x) \log |x| + |x|^{r_2} v_2(x), \quad (3.52)$$

con v_i analítica en 0, $v_i(0) = 1$ y $c \in \mathbf{R}$ constante (posiblemente nula).

En todos los casos, el radio de convergencia de la serie de Maclaurin de v_i ($i = 1, 2$) es mayor o igual que R .

Nótese que en el caso i) las raíces pueden ser complejas, es decir $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. En tal caso es conveniente reemplazar las soluciones complejas (3.50) por el sistema fundamental de soluciones reales

$$\begin{aligned} & |x|^\alpha [w_1(x) \cos(\beta \log |x|) + x w_2(x) \operatorname{sen}(\beta \log |x|)], \\ & |x|^\alpha [w_1(x) \operatorname{sen}(\beta \log |x|) - x w_2(x) \cos(\beta \log |x|)], \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde de nuevo w_i es (real) y analítica con radio de convergencia al menos R en 0, y $w_1(0) = 1$.

Demostración. Nos limitaremos a dar a continuación una justificación heurística del teorema de Frobenius, evitando entrar en detalles técnicos (como, por ejemplo, la verificación de la convergencia de las series que utilizaremos). La idea de la prueba es ensayar una solución del tipo

$$u(x) = |x|^r \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \quad \text{con } c_0 \neq 0 \quad (3.54)$$

e intentar calcular el exponente r y los coeficientes c_i sustituyendo (3.54) en la ecuación (3.47). Para fijar ideas, supondremos en lo que sigue que $x > 0$. Sustituyendo entonces (3.54) en (3.47) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)(i+r-1) c_i x^{i+r} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} (i+r) c_i x^{i+r} \right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+r} \right) \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \left[(i+r)(i+r-1) c_i + \sum_{k=0}^i ((k+r)p_{i-k} + q_{i-k}) c_k \right] x^{i+r} = 0. \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de las potencias de x se deduce la relación de recurrencia

$$(i+r)(i+r-1) c_i + \sum_{k=0}^i [(k+r)p_{i-k} + q_{i-k}] c_k = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.55)$$

Haciendo $i = 0$ se obtiene la ecuación

$$[r(r-1) + p_0 r + q_0] c_0 = F(r) c_0 = 0,$$

de donde se sigue que

$$\boxed{F(r) = 0}. \quad (3.56)$$

La ecuación (3.56) implica que r sólo puede ser igual a una de las dos raíces $r_{1,2}$ del polinomio indicial. Si $i = 1, 2, \dots$ reescribimos (3.55) como

$$[(i+r)(i+r-1) + (i+r)p_0 + q_0] c_i = - \sum_{k=0}^{i-1} [(k+r)p_{i-k} + q_{i-k}] c_k, \quad i = 1, 2, \dots$$

Teniendo en cuenta la definición del polinomio indicial (3.46) queda finalmente

$$\boxed{F(r+i) c_i = - \sum_{k=0}^{i-1} [(k+r)p_{i-k} + q_{i-k}] c_k, \quad i = 1, 2, \dots}. \quad (3.57)$$

Si $r = r_1$, es fácil ver que la ecuación anterior determina todos los coeficientes c_i con $i = 1, 2, \dots$ en términos de c_0 . En efecto, la condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que c_i se pueda despejar de (3.57) en términos de c_0, \dots, c_{i-1} para todo $i = 1, 2, \dots$. A su vez, esto es equivalente a que

$$F(r_1 + i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Si esto no se cumpliera para algún $i = 1, 2, \dots$ entonces F tendría la raíz $r_2 = r_1 + i$ con $\text{Re } r_2 = \text{Re } r_1 + i > \text{Re } r_1$, en contra de la definición (3.49) de r_1 . Esto demuestra que la ecuación (3.47) *siempre* posee una solución no trivial de la forma

$$u_1(x) = x^{r_1} v_1(x) \quad (x > 0) \quad (3.58)$$

con

$$v_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i,$$

donde los coeficientes c_i se determinan en función de c_0 mediante la relación de recurrencia (3.57). Se demuestra que la serie de potencias que define a v_1 tiene radio de convergencia mayor o igual que R , y que por tanto v_1 es analítica en 0. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c_0 = 1$, es decir $v(0) = 1$. Si $r_1 - r_2 \notin \mathbf{N}$, se cumple también la condición

$$F(r_2 + i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Por tanto en este caso la ecuación (3.47) posee también una solución de la forma

$$u_2(x) = x^{r_2} v_2(x) \quad (x > 0)$$

con v_2 analítica en 0 y $v_2(0) = 1$. Si $r_2 \neq r_1$ es obvio que esta solución es linealmente independiente de la anterior, ya que el cociente de ambas soluciones no es constante (es de la forma $x^{r_2-r_1}$ por una función analítica que vale 1 en el origen). Con esto queda por tanto probado el primer apartado.

Supongamos a continuación que

$$r_1 - r_2 = n \quad \text{con } n = 0, 1, \dots$$

Utilizando la solución (3.58) podemos construir una segunda solución linealmente independiente de la ecuación aplicando la fórmula (2.49), es decir

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x \frac{t^{-2r_1}}{v_1^2(t)} e^{-\int^t a_1(s) ds} dt. \quad (3.59)$$

Al ser el origen un punto singular regular de la ecuación (3.47) se tiene

$$\int^t a_1(s) ds = \int^t \frac{p(s)}{s} ds = p_0 \log t + \varphi(t)$$

siendo

$$\varphi(t) = \int^t \sum_{i=1}^{\infty} p_i s^{i-1} ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i} t^i$$

una función analítica en el origen con $\varphi(0) = 0$. Sustituyendo en la fórmula (3.59) se obtiene

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x t^{-p_0-2r_1} \frac{e^{-\varphi(t)}}{v_1^2(t)} dt \equiv u_1(x) \int^x t^{-p_0-2r_1} \psi(t) dt, \quad (3.60)$$

con

$$\psi(t) = \frac{e^{-\varphi(t)}}{v_1^2(t)} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$$

analítica en el origen (cociente de dos funciones analíticas con denominador no nulo en 0) y

$$b_0 = \psi(0) = e^{-\varphi(0)} = 1 \neq 0.$$

De la definición (3.46) del polinomio indicial $F(r)$ se sigue que

$$r_1 + r_2 = 1 - p_0 \implies -p_0 - 2r_1 = r_2 - r_1 - 1 = -n - 1.$$

De (3.60) se deduce por tanto que

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x) \int^x t^{-n-1} \psi(t) dt = u_1(x) \int^x \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{i-n-1} dt \\ &= b_n u_1(x) \log x + u_1(x) \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{b_i}{i-n} x^{i-n} \equiv b_n u_1(x) \log x + x^{r_2} w(x), \end{aligned} \quad (3.61)$$

con

$$w(x) = v_1(x) \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{b_i}{i-n} x^i$$

una función analítica en el origen, y

$$w(0) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ -\frac{b_0}{n} = -\frac{1}{n} \neq 0, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Esto demuestra los dos últimos apartados del teorema de Frobenius, ya que si $n = 0$ el coeficiente del término $u_1(x) \log x$ es $b_0 \neq 0$. *Q.E.D.*

Igual que en un punto regular, los coeficientes de las funciones analíticas v_i que aparecen en el teorema de Frobenius se obtienen sustituyendo en la ecuación diferencial (3.47) las expresiones (3.50)–(3.52). Sin embargo, si las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero aparece la dificultad adicional de la posible presencia de un término logarítmico, que es *segura* si la ecuación indicial tiene una raíz doble.

Si $\boxed{r_1 - r_2 = n \in \mathbf{N}}$, lo primero es determinar si aparece o no un término logarítmico en la segunda solución $u_2(x)$. Para ello lo más eficiente es empezar asumiendo que dicho término no aparece, y buscar por tanto una solución del tipo

$$x^{r_2} \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (x > 0) \quad (3.62)$$

con $c_0 \neq 0$. Como $F(r_2 + i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$, la relación de recurrencia (3.57) determina los coeficientes c_1, \dots, c_{n-1} en función de c_0 . Para $i = n$, sin embargo, $F(r_2 + n) = F(r_1) = 0$, y por tanto la relación de recurrencia se reduce a la ecuación

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}] c_k = 0}. \quad (3.63)$$

Si los coeficientes c_0, \dots, c_{n-1} calculados precedentemente no verifican la ecuación anterior, hemos llegado a una contradicción, y por tanto ha de haber un término logarítmico en la segunda solución (es decir, $c \neq 0$ en (3.52)). Por el contrario, si se cumple (3.63) la relación de recurrencia permite calcular c_i con $i > n$, ya que $F(r_2 + i) \neq 0$ para $i > n$. Nótese que el coeficiente c_n es arbitrario; pero esto es lógico, ya que c_n multiplica a $x^{r_2+n} = x^{r_1}$, y el coeficiente de este término se puede asignar a voluntad añadiendo

un múltiplo adecuado de la primera solución (3.58). Por tanto, si se cumple la condición (3.63) hay una segunda solución del tipo (3.62), es decir sin término logarítmico. Esto prueba que (3.63) es la condición necesaria y suficiente para que no haya término logarítmico en la segunda solución de (3.47).

Supongamos a continuación que $r_1 = r_2 \equiv r$, por lo que la presencia del término logarítmico está garantizada. Para calcular la segunda solución en este caso, sean $c_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots$) los coeficientes determinados por la relación de recurrencia

$$F(s+i)c_i(s) = -\sum_{k=0}^{i-1} [(k+s)p_{i-k} + q_{i-k}]c_k(s), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.64)$$

junto con la condición $c_0 = 1$. Nótese que esta relación de recurrencia determina los coeficientes $c_i(s)$ si $r - s \notin \mathbf{N}$, ya que F sólo se anula en r ; en particular, podemos tomar $|s - r| < 1$. Como s no tiene por qué ser una raíz del polinomio indicial, la función

$$u(x, s) = x^s \sum_{i=0}^{\infty} c_i(s) x^i \quad (x > 0)$$

no es solución de la ecuación (3.47). En efecto, teniendo en cuenta la forma en que se obtuvo la relación de recurrencia (3.57) es fácil ver que

$$L[u(x, s)] \equiv x^2 u'' + xp(x)u' + q(x)u = F(s)x^s.$$

Derivando esta ecuación respecto de s y haciendo $s = r$ se obtiene:

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=r} L[u(x, s)] = L \left[\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=r} u(x, s) \right] = F'(r)x^r + F(r)x^r \log x = 0,$$

ya que r es por hipótesis una raíz doble de F . Por lo tanto, la función

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=r} u(x, s) = u(x, r) \log x + x^r \sum_{i=0}^{\infty} c'_i(r) x^i \equiv \boxed{u_1(x) \log x + x^r \sum_{i=0}^{\infty} c'_i(r) x^i}$$

es solución de la ecuación lineal homogénea (3.47).

3.2.1 La ecuación de Bessel

La ecuación

$$\boxed{x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0}, \quad x > 0, \quad (3.65)$$

donde $\nu \geq 0$ es un parámetro real, recibe el nombre de **ecuación de Bessel**. El origen es un punto singular regular de esta ecuación, ya que es de la forma (3.47) con

$$p(x) = 1, \quad q(x) = x^2 - \nu^2 \quad (3.66)$$

funciones analíticas en 0 (polinomios). En este caso

$$p_0 = 1, \quad q_0 = -\nu^2, \quad (3.67)$$

y por tanto el polinomio indicial es

$$F(r) = r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2. \quad (3.68)$$

Las raíces del polinomio indicial son en este caso reales:

$$r_1 = \nu, \quad r_2 = -\nu \quad (3.69)$$

(recuérdese que r_1 siempre designa a la raíz de parte real mayor), siendo su diferencia

$$r_1 - r_2 = 2\nu. \quad (3.70)$$

Busquemos, en primer lugar, la solución del tipo (3.54), que en este caso será de la forma

$$u_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+\nu} \quad (x > 0).$$

Sustituyendo en la ecuación de Bessel se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} [(i+\nu)(i+\nu-1) + (i+\nu) - \nu^2] c_i x^{i+\nu} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+\nu+2} \\ = (1+2\nu)c_1 x^{\nu+1} + \sum_{i=2}^{\infty} [i(i+2\nu)c_i + c_{i-2}] x^{i+\nu} = 0. \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de las potencias de x obtenemos la ecuación

$$c_1 = 0 \quad (3.71)$$

junto con la relación de recurrencia

$$\boxed{i(i+2\nu)c_i = -c_{i-2}, \quad i = 2, 3, \dots}. \quad (3.72)$$

Como (3.72) relaciona el coeficiente c_i con c_{i-2} , los coeficientes pares (impares) son proporcionales a c_0 (c_1), de donde se deduce que

$$\boxed{c_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots}. \quad (3.73)$$

Llamando

$$c_{2k} = b_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

la relación de recurrencia (3.72) se transforma en

$$\boxed{4k(k+\nu)b_k = -b_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots}. \quad (3.74)$$

Como el coeficiente de b_k no se anula para ningún $k > 0$ (ya que $\nu \geq 0$), esta relación de recurrencia determina todos los coeficientes b_k con $k = 1, 2, \dots$ en términos de b_0 . En efecto, de (3.74) se obtiene fácilmente

$$\boxed{b_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (\nu+k)(\nu+k-1) \cdots (\nu+1)} b_0, \quad k = 1, 2, \dots}. \quad (3.75)$$

Tomando $b_0 = 2^{-\nu}$ obtenemos la siguiente solución de la ecuación de Bessel:

$$u_1(x; \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\nu+n) \cdots (\nu+2)(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (3.76)$$

Por el teorema de Frobenius, la serie que define esta función es convergente para todo $x \in \mathbf{R}$, ya que los coeficientes p y q son polinomios. (Esto también se puede comprobar directamente en este caso utilizando el criterio del cociente.)

Para simplificar los coeficientes en la fórmula anterior utilizaremos la **función gamma de Euler**, definida por

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt}. \quad (3.77)$$

El argumento z en esta fórmula es complejo, y la integral converge absolutamente (y, por tanto, $\Gamma(z)$ está bien definida) si $\operatorname{Re} z > 0$. Integrando por partes se prueba fácilmente la relación funcional fundamental satisfecha por la función Γ :

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)}. \quad (3.78)$$

Como

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

de la relación funcional se deduce inmediatamente que

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \quad n = 0, 1, \dots$$

Por tanto la función Γ es una generalización del factorial. La función Γ se extiende fácilmente al semiplano izquierdo utilizando la relación funcional (3.78). Por ejemplo, si $-1 < \operatorname{Re} z < 0$ entonces se define

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

De esta forma se obtiene una función analítica en todo el plano complejo, excepto en los puntos $z = 0, -1, -2, \dots$, donde se prueba que Γ tiene polos simples (es decir, diverge como $(z+k)^{-1}$ cuando $z \rightarrow -k$, con $k = 0, 1, \dots$). Por último, se demuestra que la función Γ no tiene ceros en el plano complejo. Por tanto, la función $1/\Gamma$ es *entera* (analítica en todo el plano complejo), y se anula sólo en los enteros negativos y en el origen.

Utilizando la relación funcional (3.78) repetidamente se obtiene

$$\Gamma(\nu+n+1) = (\nu+n) \cdots (\nu+2)(\nu+1)\Gamma(\nu+1).$$

Multiplicando la solución $u_1(x; \nu)$ por la constante no nula (ya que $\nu \geq 0$) $1/\Gamma(\nu+1)$ se llega a la solución

$$\boxed{J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}, \quad (3.79)$$

que se denomina **función de Bessel de primera especie y orden ν** . Si

$$\boxed{2\nu \neq 0, 1, \dots}, \quad (3.80)$$

por el teorema de Frobenius la segunda solución de la ecuación de Bessel es

$$\boxed{J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}}. \quad (3.81)$$

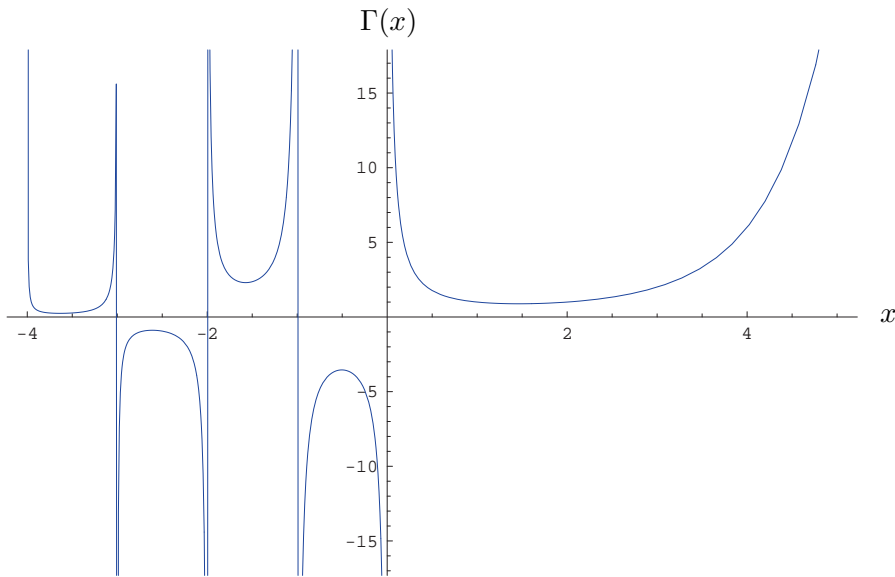


Figura 3.1: Gráfica de la función $\Gamma(x)$.

Por tanto, si $2\nu \neq 0, 1, \dots$ la solución general de la ecuación de Bessel está dada por

$$u(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Nótese que $J_0(0) = 1$, mientras que para $\nu > 0$ la función $J_\nu(x)$ se anula en el origen:

$$J_\nu(0) = 0, \quad \nu > 0.$$

Sin embargo, si $\nu \geq 0$ J_ν sólo es analítica en $x = 0$ si $\nu = 0, 1, \dots$, ya que x^ν sólo es analítica en el origen para estos valores de ν . Además, si $\nu \neq 1, 2, \dots$ entonces $1/\Gamma(1 - \nu) \neq 0$, y por tanto $J_{-\nu}(x)$ diverge cuando $x \rightarrow 0$ si $\nu \neq 0, 1, \dots$:

$$J_{-\nu}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2^\nu}{\Gamma(1 - \nu)} x^{-\nu} \quad (\nu \neq 0, 1, \dots). \quad (3.82)$$

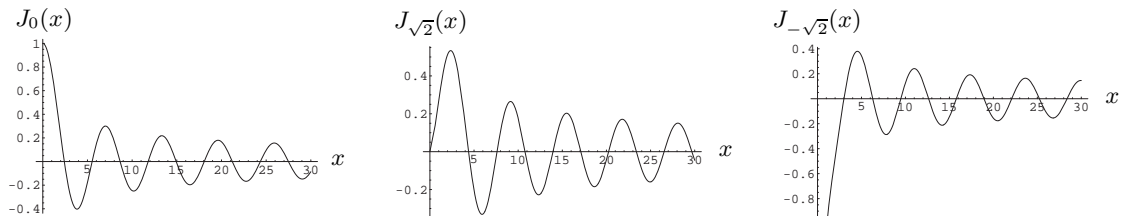


Figura 3.2: Gráfica de las funciones J_0 y $J_{\pm\sqrt{2}}$.

Si

$$2\nu = 0, 1, \dots,$$

es necesario calcular la segunda solución linealmente independiente $u_2(x)$ de la ecuación de Bessel. En particular, si $2\nu = 1, 2, \dots$ debemos determinar si aparece o no un término

logarítmico (que debe aparecer forzosamente para $\nu = 0$). Si

$$\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

(es decir, si ν es semientero), no hay término logarítmico. Esto se puede ver estudiando la relación de recurrencia para la segunda raíz ($-\nu$) de la ecuación indicial, o más fácilmente observando que en este caso $J_{-\nu}$ sigue siendo solución de la ecuación de Bessel (ya que dicha ecuación no cambia si se sustituye ν por $-\nu$), y no es proporcional a $J_\nu(x)$. En efecto, ya hemos visto que J_ν se anula en el origen para $\nu > 0$, mientras que, al ser $1/\Gamma(1-\nu) \neq 0$ para $\nu = 1/2, 3/2, \dots$, la solución $J_{-\nu}$ diverge en 0 como $x^{-\nu}$ (véase la ec. (3.82)). De hecho, se puede probar que si $m \in \mathbf{Z}$ entonces

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = A_m \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cos x + B_m \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \operatorname{sen} x, \quad (3.83)$$

con A_m y B_m polinomios. Por ejemplo,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (3.84)$$

Por el contrario, si

$$\nu = 1, 2, \dots$$

entonces la segunda solución contiene un término logarítmico. Una indicación de este hecho es que si $\nu \in \mathbf{N}$ la función $J_{-\nu}$ es proporcional a J_ν . En efecto, en este caso

$$\frac{1}{\Gamma(n-\nu+1)} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \nu-1.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(x) &= \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\nu}}{(k+\nu)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1) k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu} = (-1)^\nu J_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Para ver con más detalle que en este caso ($\nu \in \mathbf{N}$) hay un término logarítmico, nótese que la relación de recurrencia para la hipotética solución

$$u_2(x) = x^{-\nu} \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

es simplemente (3.71) y (3.72) con ν reemplazado por $-\nu$, es decir

$$i(i-2\nu)c_i = -c_{i-2}, \quad i = 2, 3, \dots$$

De nuevo, todos los coeficientes impares son cero, y los coeficientes pares $b_k = c_{2k}$ se determinan por

$$4k(k-\nu)b_k = -b_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Esta relación determina $b_1, \dots, b_{\nu-1}$ en términos de b_0 , siendo todos estos coeficientes no nulos si $b_0 \neq 0$. Sin embargo, en este caso la relación que debería determinar b_ν se reduce a

$$0 = b_{\nu-1},$$

que es contradictoria, ya que $b_{\nu-1} \neq 0$ si $b_0 \neq 0$.

Calculemos a continuación la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel para $\nu = 0$. De acuerdo con el teorema de Frobenius, escribimos

$$u_2(x) = J_0(x) \log x + v_2(x) \equiv J_0(x) \log x + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$$

(nótese que podemos tomar $c_0 = 0$) y sustituimos esta expresión en la ecuación de Bessel para $\nu = 0$, obteniendo

$$(x J_0'' + J_0' + x J_0) \log x + 2 J_0' + x v_2'' + v_2' + x v_2 = 0,$$

o bien, ya que J_0 es solución de la ecuación de Bessel para $\nu = 0$,

$$\boxed{x v_2'' + v_2' + x v_2 + 2 J_0' = 0}. \quad (3.85)$$

Nótese que en esta expresión no aparece ya ningún término logarítmico, lo que ocurre también en el caso general. Sustituyendo el desarrollo en serie de potencias de v_2 en esta última ecuación multiplicada por x se obtiene fácilmente

$$\sum_{i=0}^{\infty} [i(i-1) + i] c_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+2} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} = 0,$$

es decir

$$c_1 x + \sum_{i=2}^{\infty} (i^2 c_i + c_{i-2}) x^i + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 0. \quad (3.86)$$

De esta relación se deduce en primer lugar que $c_1 = 0$. Como la última serie no contiene más que potencias pares, la relación de recurrencia para las potencias impares

$$(2k+1)^2 c_{2k+1} + c_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

implica que todos los coeficientes impares son nulos:

$$c_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.87)$$

Definiendo $b_n = c_{2n}$ e igualando a cero el coeficiente de x^{2n} en (3.86) se obtiene la relación de recurrencia para los coeficientes pares:

$$\boxed{-n^2 b_n = \frac{1}{4} b_{n-1} + \frac{(-1)^n n}{4^n n!^2}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.88)$$

Multiplicando ambos miembros de esta relación por $(-4)^n (n-1)!^2$ y llamando $\beta_k = -(-4)^k k!^2 b_k$ se obtiene

$$\beta_n = \beta_{n-1} + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La solución de esta relación de recurrencia es inmediata:

$$\beta_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 + \beta_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Al ser $\beta_0 = -b_0 = -c_0 = 0$ se tiene finalmente

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n n!^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Hemos probado por tanto que la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden 0 está dada por

$$\boxed{N_0(x) = J_0(x) \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}}. \quad (3.89)$$

La función N_0 se denomina *función de Neumann* de orden cero. Nótese que la función N_0 , a diferencia de la otra solución J_0 , no es analítica en el origen, donde se comporta como $\log x$:

$$N_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \log x.$$

En la práctica, en lugar de la función de Neumann N_0 se suele escoger como segunda solución linealmente independiente la combinación lineal de J_0 y N_0 dada por

$$\boxed{Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [N_0(x) - (\log 2 - \gamma)J_0(x)]},$$

donde

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) \approx 0,577216$$

es la llamada *constante de Euler-Mascheroni*. La función Y_0 (que también diverge logarítmicamente en el origen) se suele denominar *función de Bessel de segunda especie* de orden 0. La solución general de la ecuación de Bessel de orden 0 es por tanto

$$\boxed{u(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)},$$

con C_1 y C_2 constantes reales.

Para $\nu \equiv m = 1, 2, \dots$, un cálculo parecido al anterior pero algo más complicado demuestra que una segunda solución de la ecuación de Bessel de orden m linealmente independiente de J_m está dada por la función de Neumann de orden m

$$\begin{aligned} N_m(x) = J_m(x) \log x - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n-m} \\ - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+m} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+m} \end{aligned} \quad (3.90)$$

(donde se sobreentiende que el sumatorio $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ desaparece si $n = 0$). De nuevo, es más habitual usar como segunda solución de la ecuación de Bessel de orden m la función de Bessel de segunda especie y orden m definida por

$$\boxed{Y_m(x) = \frac{2}{\pi} [N_m(x) - (\log 2 - \gamma)J_m(x)]},$$

en términos de la cual la solución general de la ecuación de Bessel de orden $m = 0, 1, \dots$ está dada por

$$\boxed{u(x) = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x)}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Nota: Si se define

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}, \quad \nu \neq 0, 1, \dots,$$

entonces J_ν e Y_ν forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación de Bessel de orden ν también para $\nu \neq 0, 1, \dots$. Se demuestra que

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} Y_\nu(x), \quad m = 0, 1, \dots$$

El comportamiento asintótico (para $x \rightarrow \infty$) de las funciones de Bessel de primera y segunda especie está dado por la fórmula

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_\nu(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

En particular, las funciones de Bessel de primera y segunda especie tienen infinitos ceros en el eje real positivo, y presentan un comportamiento oscilatorio amortiguado para $x \rightarrow \infty$.

Las funciones de Bessel satisfacen ciertas relaciones de recurrencia, que se pueden deducir de las dos identidades

$$(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1} \tag{3.91}$$

$$(x^{-\nu} J_\nu)' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}. \tag{3.92}$$

Para probar la primera de estas identidades basta utilizar el desarrollo en serie (3.79) de J_ν , que proporciona

$$\begin{aligned} (x^\nu J_\nu)' &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^\nu}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^\nu (n + \nu)}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2\nu-1} \\ &= x^\nu J_{\nu-1}. \end{aligned}$$

La identidad (3.92) se prueba de forma semejante. Las funciones de Bessel de segunda especie Y_ν satisfacen también las identidades (3.91)–(3.92), aunque aquí no demostraremos este resultado. Sumando y restando las identidades (3.91)–(3.92) multiplicadas por $x^{-\nu}$ y x^ν , respectivamente, se obtienen las siguientes relaciones entre funciones de Bessel de distintos índices y sus derivadas:

$$J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_\nu \tag{3.93}$$

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu. \tag{3.94}$$

La segunda de estas identidades se puede utilizar para calcular de forma recursiva las funciones de Bessel de índice $\nu + k$ ($k = 1, 2, \dots$) a partir de J_ν y $J_{\nu-1}$. Por ejemplo, las funciones de Bessel de índice entero positivo se pueden expresar en términos de J_0 y J_1 . Del mismo modo, la expresión (3.83) para las funciones de Bessel de orden semientero se deduce fácilmente de la relación (3.94) y la ecuación (3.84). Nótese, por último, que las funciones de Bessel de segunda especie también satisfacen las relaciones (3.93)–(3.94), ya que éstas son consecuencia de (3.91)–(3.92).

3.2.2 El punto del infinito

Supongamos que los coeficientes de la ecuación lineal homogénea (3.36) están definidos para $|x| > R$. Para estudiar el comportamiento de las soluciones de esta ecuación en el **punto del infinito** o, con mayor propiedad, para $|x| \rightarrow \infty$, efectuamos en la ecuación el cambio de variable

$$t = \frac{1}{x}$$

y estudiamos el comportamiento de la ecuación resultante para

$$y(t) = u(x) \equiv u(1/t)$$

para $t \rightarrow 0$. Como $u(x) = y(1/x)$ se tiene

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2} y'(1/x), \quad u''(x) = \frac{1}{x^4} y''(1/x) + \frac{2}{x^3} y'(1/x),$$

sustituyendo en la ecuación diferencial (3.36) se obtiene la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$\boxed{y'' + A_1(t) y' + A_0(t) y = 0}, \quad (3.95)$$

donde los coeficientes $A_i(t)$ están dados por

$$\boxed{A_1(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a_1(1/t), \quad A_0(t) = \frac{1}{t^4} a_0(1/t)}. \quad (3.96)$$

Definición 3.13. Diremos que el punto del infinito es regular (resp. singular regular) para la ecuación original (3.36) si el origen es un punto regular (resp. singular regular) para la ecuación (3.95)

Supongamos, por ejemplo, que el punto del infinito es un punto regular para la ecuación (3.36). Esto significa que las funciones $A_i(t)$ ($i = 0, 1$) son analíticas en el origen con series de Maclaurin convergentes para $|t| < r$, y por tanto (teorema de Fuchs) toda solución $y(t)$ de (3.95) admite el desarrollo

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i, \quad |t| < r.$$

Por consiguiente, cualquier solución $u(x) = y(1/x)$ de la ecuación original (3.36) admite un desarrollo en serie en potencias *negativas* de x

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{x^i}, \quad |x| > \frac{1}{r}. \quad (3.97)$$

Análogamente, el punto del infinito será un punto singular regular para la ecuación (3.36) si no es un punto regular, pero las funciones $t A_1(t)$ y $t^2 A_0(t)$ son analíticas en $t = 0$, es decir si

$$\boxed{\frac{1}{t} a_1(1/t), \quad \frac{1}{t^2} a_0(1/t)} \quad (3.98)$$

son analíticas en el origen.

Ejemplo 3.14. Consideremos la **ecuación de Legendre**

$$\boxed{(1-x^2)u'' - 2xu' + \alpha(\alpha+1)u = 0}, \quad (3.99)$$

donde $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ es un parámetro real. En este caso

$$a_1(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \quad a_0(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2},$$

y por tanto los coeficientes A_i están dados por

$$A_1(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{2t}{t^2-1}, \quad A_0(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2(t^2-1)}.$$

El coeficiente A_0 es divergente en $t=0$ si $\alpha \neq 0$, por lo que el punto del infinito no es regular para la ecuación de Legendre si $\alpha \neq 0$. Sin embargo, las funciones

$$p(t) \equiv t A_1(t) = \frac{2t^2}{t^2-1}, \quad q(t) \equiv t^2 A_0(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2-1}$$

son analíticas en $t=0$, siendo sus series de Maclaurin convergentes para $|t| < 1$ (distancia a la singularidad más próxima en el plano complejo). Por tanto, el origen es un punto singular regular para la ecuación de Legendre para $\alpha \neq 0$. (Claramente, el origen es un punto regular de (3.99) si $\alpha = 0$.) Para estudiar el comportamiento de las soluciones de esta ecuación para $|x| \rightarrow \infty$, estudiamos la ecuación (3.95), que en este caso se escribe

$$t^2(t^2-1)y'' + 2t^3y' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \quad (3.100)$$

en $t=0$. Para esta ecuación,

$$p_0 = 0, \quad q_0 = -\alpha(\alpha+1),$$

y por tanto el polinomio indicial es

$$F(r) = r(r-1) - \alpha(\alpha+1) = (r+\alpha)(r-\alpha-1).$$

Las raíces de la ecuación indicial son por tanto

$$r_1 = \alpha+1, \quad r_2 = -\alpha.$$

Nótese que la numeración de las raíces es la correcta, ya que

$$r_1 - r_2 = 2\alpha + 1 \geq 0.$$

Por el teorema de Frobenius, si $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ y $2\alpha \neq -1, 0, 1, \dots$ la ecuación de Legendre (3.99) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$u_1(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^k}, \quad u_2(x) = |x|^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{x^k}, \quad (3.101)$$

con $c_0 = d_0 = 1$, siendo las series anteriores convergentes para $|x| > 1$. Análogamente, si $\alpha = -\frac{1}{2}$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación de Legendre es de la forma

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^k}, \quad u_2(x) = u_1(x) \log |x| + \frac{1}{\sqrt{|x|}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{x^k}, \quad (3.102)$$

con $c_0 = 1$, siendo de nuevo ambas series convergentes para $|x| > 1$.

Si $\alpha = 0$, el punto $t = 0$ es regular para la ecuación (3.100), por lo que dicha ecuación posee una sistema fundamental de soluciones analíticas en $(-1, 1)$. Por tanto las soluciones de la ecuación de Legendre para $\alpha = 0$ admiten un desarrollo de la forma (3.97) para $|x| > 1$.

Nota. De hecho, la ecuación de Legendre para $\alpha = 0$ es una ecuación lineal de primer orden en u' , y por tanto se integra fácilmente. Su solución general es

$$u(x) = C_1 \log \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C_2,$$

con C_1, C_2 constantes arbitrarias.

Ejercicio. Probar que si $\alpha = 1, 2, \dots$ la ecuación de Legendre tiene dos soluciones linealmente independientes de la forma (3.101), mientras que para $\alpha = 1/2, 3/2, \dots$ hay una base de soluciones de la forma

$$u_1(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^k}, \quad u_2(x) = c u_1(x) \log |x| + |x|^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{x^k},$$

con $c_0 = d_0 = 1$ y $c \neq 0$.

Solución.

Sea $2\alpha + 1 = n + 1$ con $n = 1, 2, \dots$, de modo que las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = \frac{n}{2} + 1$ y $r_2 = -\frac{n}{2}$. El teorema de Frobenius garantiza entonces la existencia de una solución de la forma

$$y_1(t) = t^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i,$$

donde hemos supuesto, por sencillez, que $t > 0$. Debemos ahora determinar si la ecuación (3.100) posee una solución de la forma

$$y_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i t^{i-\frac{n}{2}}$$

con $d_0 \neq 0$. Sustituyendo en la ecuación diferencial (3.100) se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned} t^2(t^2-1) \sum_{i=0}^{\infty} d_i \left(i - \frac{n}{2}\right) \left(i - \frac{n}{2} - 1\right) t^{i-\frac{n}{2}-2} + 2 \sum_{i=0}^{\infty} d_i \left(i - \frac{n}{2}\right) t^{i-\frac{n}{2}+2} + \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) \sum_{i=0}^{\infty} d_i t^{i-\frac{n}{2}} \\ = n d_1 t^{1-\frac{n}{2}} + \sum_{i=2}^{\infty} \left[i(n-i+1) d_i + \left(i - \frac{n}{2} - 1\right) \left(i - \frac{n}{2} - 2\right) d_{i-2} \right] t^{i-\frac{n}{2}} = 0. \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene la condición

$$n d_1 = 0 \tag{3.103}$$

junto con la relación de recurrencia

$$i(n-i+1) d_i = -\left(i - \frac{n}{2} - 1\right) \left(i - \frac{n}{2} - 2\right) d_{i-2} \quad i = 2, 3, \dots \tag{3.104}$$

Si $n = 2m$ es un entero positivo *par* la relación de recurrencia tiene solución. En efecto, si $n = 2m$ con $m = 1, 2, \dots$ entonces todos los coeficientes pares están determinados por

la relación de recurrencia en función de d_0 , ya que $2m + 1 - i$ no se anula para ningún entero par i . Ahora $d_1 = 0$, y por tanto la relación de recurrencia implica que

$$d_3 = \cdots = d_{2m-1} = 0.$$

Haciendo $i = 2m + 1$ en la relación de recurrencia se obtiene

$$0 \cdot d_{2m+1} = 0,$$

lo cual implica que d_{2m+1} no está determinado. (Esto es razonable, ya que si añadimos a $y_2(t)$ un múltiplo cualquiera de $y_1(t)$ seguimos teniendo una solución.) Sin embargo, dado que $2m + 1 - i$ no se anula para $i = 2m + 3, 2m + 5, \dots$, todos los coeficientes impares a partir de d_{2m+1} están determinados por éste (en particular, se anulan si tomamos $d_{2m+1} = 0$).

Veamos ahora que ocurre si $n = 2m - 1$ con $m = 1, 2, \dots$. En este caso todos los coeficientes impares son nulos, ya que $d_1 = 0$ y $2m - i$ no es cero para i impar. Como $2m - i$ tampoco se anula para $i = 2, \dots, 2m - 2$, los coeficientes pares d_2, \dots, d_{2m-2} están determinados por la relación de recurrencia en función de d_0 . Ninguno de dichos coeficientes se puede anular si $d_0 \neq 0$, ya que el factor $(i - m - \frac{1}{2})(i - m - \frac{3}{2})$ no se anula para ningún entero i . Sin embargo, la relación de recurrencia para $i = 2m$ proporciona la ecuación

$$0 = - \left(m - \frac{1}{2} \right) \left(m - \frac{3}{2} \right) d_{2m-2},$$

que es contradictoria. Por tanto, la segunda solución contiene en este caso un término logarítmico. \square

Capítulo 4

Sistemas dinámicos en el plano

4.1 Resultados generales

Un **sistema dinámico** en \mathbf{R}^n es un sistema **autónomo** de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}. \quad (4.1)$$

Nótese que la función vectorial $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ no depende del **tiempo** (variable independiente) t . La notación que utilizaremos en este capítulo es la siguiente:

$$\boxed{x = (x_1, \dots, x_n), \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}}.$$

Nótese que un sistema arbitrario (es decir, no necesariamente autónomo)

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \quad (4.2)$$

puede convertirse fácilmente en un sistema dinámico. En efecto, si $x = (t, y)$ entonces $\dot{x} = f(x)$, siendo

$$f(x) = (1, g(x)).$$

Recíprocamente, las soluciones de este sistema con la condición inicial $t(0) = 0$ son de la forma $(t, y(t))$, con $y(t)$ solución de (4.2).

Si la función f es de clase C^1 en un abierto $U \subset \mathbf{R}^n$ entonces f , considerada como función de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ independiente de la variable t , es localmente lipschitziana en $\mathbf{R} \times U$ respecto de la variable x . Por tanto, dado cualquier dato inicial $x_0 \in U$ localmente hay una única solución $x(t; t_0, x_0)$ del sistema dinámico satisfaciendo dicho dato inicial en el instante $t = t_0$:

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0.$$

Si $t_0 = 0$, escribiremos normalmente $x(t; x_0)$ en lugar de $x(t; 0, x_0)$.

Históricamente, el primer ejemplo de sistema dinámico es el que describe el movimiento de un sistema clásico *aislado* de N partículas. En efecto, si las coordenadas espaciales de la i -ésima partícula las denotamos por $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3})$ entonces las ecuaciones de Newton del sistema son de la forma

$$\ddot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_N, \dot{X}_1, \dots, \dot{X}_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

siendo $F_i = (F_1, F_2, F_3)$ la fuerza por unidad de masa que actúa sobre la i -ésima partícula. Introduciendo la velocidad $P_i = \dot{X}_i$ y llamando

$$x = (X_1, \dots, X_N, P_1, \dots, P_N) \in \mathbf{R}^{6N},$$

las ecuaciones de Newton (4.3) se convierten en el sistema dinámico (4.1) con $f : \mathbf{R}^{6N} \rightarrow \mathbf{R}^{6N}$ dada por

$$f(x) = (x_{3N+1}, \dots, x_{6N}, F_1(x), \dots, F_N(x)).$$

Una **trayectoria** de un sistema dinámico es la *gráfica* $(t, x(t))$ de cualquier solución $x(t)$ ($t \in I$, siendo $I \subset \mathbf{R}$ un intervalo). Nótese por tanto que las trayectorias son curvas en $\mathbf{R} \times U \subset \mathbf{R}^{n+1}$, parametrizadas además de una forma especial (es decir, utilizando la primera coordenada como parámetro de la curva). Una **órbita** del sistema dinámico (4.1) es una curva $\gamma \subset U \subset \mathbf{R}^n$ (considerada como *conjunto de puntos*) que se puede parametrizar con una solución $x(t)$ del sistema (4.1), es decir tal que

$$\boxed{\gamma = \{x(t) : t \in I\}}, \quad (4.4)$$

para alguna solución $x(t)$ del sistema. Por lo tanto, la proyección de una trayectoria $(t, x(t)) \in \mathbf{R} \times U$ sobre $U \subset \mathbf{R}^n$ es una órbita, y recíprocamente toda órbita se puede parametrizar de modo que sea la proyección sobre U de una trayectoria. Se suele llamar **espacio de fases** del sistema dinámico n -dimensional (4.1) al abierto $U \subset \mathbf{R}^n$ en que f está definida (y es de clase C^1), mientras que al cilindro $\mathbf{R} \times U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ se le denomina espacio de fases ampliado. Llamaremos también **mapa de fases** del sistema dinámico (4.1) al conjunto de todas sus órbitas.

Ejemplo 4.1. Consideremos el sistema dinámico plano (es decir, $n = 2$)

$$\boxed{\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1}. \quad (4.5)$$

Este es un sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes $\dot{x} = Ax$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es por tanto

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & \sen t \\ -\sen t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha \cos t + \beta \sen t, -\alpha \sen t + \beta \cos t),$$

con $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Las trayectorias del sistema son por tanto las *hélices*

$$t \mapsto (t, \alpha \cos t + \beta \sen t, -\alpha \sen t + \beta \cos t) \in \mathbf{R}^3, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Nótese que las trayectorias son curvas en \mathbf{R}^3 . Las órbitas del sistema son las proyecciones de las hélices anteriores sobre las dos últimas coordenadas, es decir las curvas *planas* parametrizadas por

$$t \mapsto (\alpha \cos t + \beta \sen t, -\alpha \sen t + \beta \cos t).$$

Las ecuaciones paramétricas de las órbitas son por tanto

$$x_1 = \alpha \cos t + \beta \sen t, \quad x_2 = -\alpha \sen t + \beta \cos t.$$

Eliminando el parámetro t obtenemos la ecuación implícita de las órbitas

$$x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Se trata, por tanto, de circunferencias de centro el origen y radio $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

La propiedad fundamental de un sistema autónomo (en el que la función f no depende explícitamente del tiempo t) es la siguiente:

Proposición 4.2. Si $x(t)$ es una solución de (4.1) y $c \in \mathbf{R}$ entonces $x(t+c)$ sigue siendo solución de (4.1).

Demostración. Si $y(t) = x(t+c)$ entonces

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t+c) = f(x(t+c)) = f(y(t)).$$

Q.E.D.

Por el teorema de unicidad, si $f \in C^1(U)$ dos trayectorias del sistema no se pueden cortar, ya que en caso contrario las soluciones correspondientes a dichas trayectorias tendrían ambas el mismo dato inicial (el punto de corte). Este resultado es cierto también para sistemas no autónomos. Sin embargo, los sistemas autónomos satisfacen una condición más fuerte:

Proposición 4.3. Las órbitas del sistema dinámico (4.1) no se cortan.

Demostración. Supongamos, en efecto, que dos órbitas distintas (localmente) γ_1 y γ_2 se cortaran en el punto $x_0 \in U$. Sean $x^1(t)$ y $x^2(t)$ dos soluciones del sistema correspondientes a dichas órbitas. entonces existirán dos tiempos t_1 y t_2 tales que

$$x^1(t_1) = x^2(t_2) = x_0. \quad (4.6)$$

Por el resultado anterior, las funciones $y^1(t) = x^1(t+t_1)$ e $y^2(t) = x^2(t+t_2)$ son ambas solución del sistema, y por (4.6) satisfacen la condición inicial

$$y^1(0) = y^2(0) = x_0.$$

Por el teorema de unicidad, $y^1(t) = y^2(t)$ en un entorno de $t = 0$, y por tanto las funciones x^1 y x^2 parametrizan la misma curva en un entorno de x_0 (pues $x^1(t) = x^2(t+t_2-t_1)$) en un entorno de $t = t_1$. *Q.E.D.*

De la demostración anterior también se sigue que si γ es una órbita de (4.1) y $x(t)$ es una solución del sistema que parametriza γ , entonces las únicas soluciones del sistema que parametrizan a la órbita γ son de la forma $x(t+c)$ con $c \in \mathbf{R}$ constante. En otras palabras, *la parametrización de cualquier órbita de un sistema dinámico está determinada salvo por una traslación temporal.* (En lo anterior se sobreentiende que nos referimos a parametrizaciones de las órbitas con soluciones del sistema.) En particular, el *sentido de recorrido* (**orientación**) de las órbitas está bien determinado, ya que $x(t)$ y $x(t+c)$ ambas determinan la misma orientación.

Geoméricamente, el sistema dinámico (4.1) admite la siguiente interpretación sencilla. La función $f : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ que define el sistema es un **campo de vectores** en $U \subset \mathbf{R}^n$, ya que a cada punto x de U le asigna un vector $f(x) \in \mathbf{R}^n$ (piénsese, por ejemplo, en el caso $n = 3$). Si γ es una órbita del sistema y x_0 es un punto cualquiera de γ , el vector $f(x_0)$ es *tangente a γ en x_0* , y su *sentido* coincide con la *orientación* de γ . En efecto, si $x(t)$ es una solución de (4.1) que parametriza a γ entonces $x_0 = x(t_0)$ para algún t_0 , y por tanto (al ser $x(t)$ solución del sistema) $\dot{x}(t_0) = f(x(t_0)) = f(x_0)$.

Las órbitas *cerradas* de un sistema autónomo (de clase C^1) han de ser necesariamente curvas cerradas *simples* (sin autointersecciones). En efecto, si una órbita cerrada del

sistema (4.1) se autointersecara en un punto x_0 entonces por dicho punto pasarían en realidad *dos* órbitas distintas del sistema.

Proposición 4.4. Una órbita del sistema (4.1) es cerrada si y sólo si las soluciones del sistema que la parametrizan son funciones periódicas.

Demostración. Nótese que la condición del enunciado tiene sentido, ya que acabamos de ver que las soluciones que parametrizan una órbita difieren en una traslación en el tiempo. Si $x(t)$ es una solución de (4.1) de período $T > 0$, la órbita γ que parametriza es una curva cerrada, ya que obviamente

$$\gamma = \{x(t) : t_0 \leq t < t_0 + T\}$$

y $x(t_0) = x(t_0 + T)$. Recíprocamente, supongamos que γ es una órbita cerrada del sistema, y sea $x(t)$ una solución del sistema que parametrize γ . Si $x(t)$ está definida en $t = a$, por ser la curva γ cerrada existe un mínimo valor de $b > a$ tal que $x(a) = x(b)$. Entonces $x(t)$ y $x(t + b - a)$ son dos soluciones del sistema que verifican la misma condición inicial en $t = a$. Por el teorema de unicidad, $x(t) = x(t + b - a)$ para todo t , y por tanto la solución x tiene período $b - a$. *Q.E.D.*

Por definición, el **período** de una órbita cerrada del sistema (4.1) es el (menor) período de cualquier solución del sistema que parametrize dicha curva.

Ejemplo 4.5. Las curvas del sistema dinámico (4.5) se pueden escribir como sigue:

$$x(t) = r(\cos(t - t_0), -\operatorname{sen}(t - t_0))$$

siendo $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y

$$\alpha = r \cos t_0, \quad \beta = r \operatorname{sen} t_0.$$

Otra parametrización de la misma órbita es $x(t) = r(\cos t, -\operatorname{sen} t)$. Las órbitas son por tanto circunferencias centradas en el origen y orientadas en sentido *horario*. En este caso, todas las órbitas del sistema son cerradas y tienen el mismo período (2π). En general, sin embargo, dos órbitas cerradas distintas de un sistema dinámico tienen distinto período.

Es posible encontrar la ecuación cartesiana (o implícita) de las órbitas de un sistema sin hallar antes sus soluciones. Para ello parametrizamos la órbita γ utilizando como parámetro una de las coordenadas, por ejemplo la primera. Por el teorema de la función inversa, esto podremos hacerlo localmente en un entorno de cualquier punto en que $\dot{x}_1 \neq 0$, es decir en que $f_1(x) \neq 0$. La órbita vendrá por tanto descrita localmente con una parametrización de la forma $x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1))$. Para determinar las funciones $x_i(x_1)$ ($2 \leq i \leq n$), obsérvese que

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\dot{x}_i}{\dot{x}_1} = \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

La ecuación diferencial de las órbitas en esta parametrización es por tanto el siguiente sistema *no autónomo* de orden $n - 1$:

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (4.7)$$

Obsérvese que esta parametrización sólo tiene sentido en puntos en que $f_1(x) \neq 0$. Por ejemplo, en el caso de un sistema plano, que normalmente escribiremos

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}} \quad (4.8)$$

las ecuaciones de las órbitas son

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad \text{si } f(x, y) \neq 0} \quad (4.9)$$

o

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad \text{si } g(x, y) \neq 0}. \quad (4.10)$$

Por ejemplo, para el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

estudiado anteriormente, la ecuación de las órbitas tomando a x como variable independiente es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0,$$

que es de variables separadas y se integra fácilmente:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0 \in \mathbf{R}.$$

Como ya vimos anteriormente, las órbitas son circunferencias centradas en el origen.

Los únicos puntos del espacio de fases en que no es posible parametrizar las órbitas tomando como parámetro alguna de las coordenadas son los puntos en que *todas* las funciones f_i se anulan. Estos puntos, de importancia fundamental para entender el comportamiento cualitativo del sistema dinámico correspondiente, reciben el nombre de puntos críticos o equilibrios del sistema:

Definición 4.6. Un punto $x_0 \in \mathbf{R}^n$ es un **punto crítico** o **equilibrio** del sistema (4.1) si $\boxed{f(x_0) = 0}$.

Si x_0 es un punto crítico del sistema (4.1), dicho sistema posee obviamente la solución *constante* $x(t) = x_0$, para todo $t \in \mathbf{R}$. Esta es la razón por la cual a los puntos críticos de un sistema dinámico se les llama también equilibrios. Visto de otra forma, un punto crítico es una órbita del sistema dinámico (4.1) que se reduce a un punto. Por la Proposición 4.3, ninguna órbita del sistema puede contener a un punto crítico x_0 . Obsérvese, sin embargo, que una órbita $x(t)$ puede “entrar” en el equilibrio (si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$) o “salir” de él (si $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$).

En un sistema dinámico, los equilibrios son los puntos más interesantes. En efecto, si $x_0 \in \mathbf{R}^n$ *no* es un equilibrio ($f(x_0) \neq 0$) se puede probar que es posible realizar un cambio de variables local $y = Y(x)$ de forma que en la variable y el sistema dinámico (4.1) se escriba

$$y_1' = 1, \quad y_2' = \dots = y_n' = 0.$$

En las nuevas coordenadas y_1, \dots, y_n , las órbitas del sistema en las proximidades del punto $y_0 = Y(x_0)$ son simplemente rectas paralelas al eje y_1 .

Definición 4.7. Sea x_0 un punto crítico del sistema dinámico (4.1).

- i) x_0 es un punto crítico **aislado** si el sistema no tiene ningún punto crítico en el entorno perforado $0 < \|x - x_0\| < \epsilon$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.
- ii) x_0 es un punto crítico **elemental** (*simple, no degenerado*) si $\boxed{\det Df(x_0) \neq 0}$.
- iii) x_0 es un punto crítico **hiperbólico** si todos los autovalores de $Df(x_0)$ tienen parte real distinta de cero.

Proposición 4.8. x_0 punto crítico hiperbólico $\implies x_0$ punto crítico elemental $\implies x_0$ punto crítico aislado.

Demostración. La primera implicación es trivial, ya que si $\det Df(x_0) = 0$ algún autovalor de $Df(x_0)$ es igual a cero, y por tanto x_0 no es un punto crítico hiperbólico. En cuanto a la segunda, por el teorema de la función inversa existe un entorno $V = B_\epsilon(x_0)$ de x_0 en que f es invertible. Por tanto, si $x \in V$ y $f(x) = 0 = f(x_0)$ entonces $x = x_0$. *Q.E.D.*

Ejemplo 4.9. Estudiemos cómo son los puntos críticos del sistema dinámico *lineal*

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \tag{4.11}$$

en términos de la matriz A . En primer lugar, x_0 es un punto crítico de (4.11) si y sólo si $Ax_0 = 0$. Por tanto, 0 es *siempre* un punto crítico de (4.11), y es el *único* punto crítico si y sólo si la matriz A es no degenerada ($\det A \neq 0$). El origen es un punto crítico *aislado* si y sólo si $\det A \neq 0$. En efecto, si $\det A \neq 0$ entonces 0 es el único punto crítico, y si $\det A = 0$ entonces las soluciones de $Ax_0 = 0$ forman un subespacio lineal (en *núcleo* de la matriz A) que contiene a 0.

Como $f(x) = Ax$, se tiene que $Df(x_0) = A$ para todo x_0 . Por tanto, x_0 es un punto crítico elemental de (4.11) si y sólo si $\det A \neq 0$. En otras palabras, si $\det A \neq 0$ el único punto crítico es 0, que es aislado y elemental, y si $\det A = 0$ entonces hay infinitos puntos críticos, que forman un subespacio lineal y son no aislados (y, por tanto, no elementales). Por último, si $\det A \neq 0$ el origen es un punto crítico hiperbólico si y sólo si todos los autovalores de A tienen parte real no nula.

La importancia de los sistemas dinámicos lineales estriba en que un sistema dinámico arbitrario se puede aproximar por un sistema lineal apropiado en las proximidades de cualquier equilibrio x_0 . En efecto, por definición de derivada

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \epsilon(x) = Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \epsilon(x),$$

siendo $\|\epsilon(x)\|$ muy pequeño frente a $\|x - x_0\|$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\epsilon(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Es razonable por tanto pensar que el sistema dinámico (4.1) se pueda “aproximar” (en un sentido que precisaremos a continuación) en las proximidades del equilibrio x_0 por el sistema lineal

$$\boxed{\dot{y} = Df(x_0) \cdot y}, \tag{4.12}$$

siendo $y = x - x_0$ la **desviación del equilibrio**. Diremos que (4.12) es la **aproximación lineal** de (4.1) en el punto crítico x_0 . El mapa de fases de (4.1) en un entorno de

x_0 y el de su aproximación lineal (4.12) en un entorno del origen deberían ser cualitativamente semejantes. En general, sin embargo, esto sólo es cierto si el punto crítico x_0 es hiperbólico¹. Por ejemplo, si x_0 es un punto crítico hiperbólico de (4.1) su estabilidad puede determinarse estudiando la estabilidad de la aproximación lineal en x_0 :

Teorema 4.10. *Si x_0 es un punto crítico hiperbólico del sistema dinámico (4.1), entonces x_0 tiene el mismo tipo de estabilidad para (4.1) que la aproximación lineal de (4.1) en x_0 .*

En otras palabras, x_0 es *asintóticamente estable* si todos los autovalores de $Df(x_0)$ tienen parte real *negativa*, e *inestable* si algún autovalor de $Df(x_0)$ tiene parte real *positiva*.

4.2 Sistemas dinámicos lineales en \mathbb{R}^2

Consideremos el sistema dinámico lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Llamaremos

$$\tau = \operatorname{tr} A \equiv a + d, \quad d = \det A \equiv ad - bc. \quad (4.14)$$

Supondremos que la matriz A es no degenerada, es decir $d \neq 0$, y por tanto el origen es un punto crítico elemental del sistema lineal (4.13). El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \tau \lambda + d, \quad (4.15)$$

con discriminante

$$\Delta = \tau^2 - 4d. \quad (4.16)$$

Sea $X = (x, y)$, y efectuemos un cambio de variables dependientes real $X = PZ$, con $\det P \neq 0$. Entonces

$$\dot{X} = P\dot{Z} = AX \implies \dot{Z} = P^{-1}AX = (P^{-1}AP)Z$$

y por tanto $Z(t)$ es solución del sistema lineal

$$\dot{Z} = (P^{-1}AP)Z. \quad (4.17)$$

Si los autovalores de la matriz A son ambos reales, se puede escoger P de modo que sus columnas de P formen una base de Jordan de A , en cuyo caso

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \epsilon & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

siendo $\lambda_1 \leq \lambda_2$ los dos autovalores de A , y $\epsilon \in \{0, 1\}$, con $\epsilon = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ o si A es proporcional a la identidad. Nótese que los mapas de fases de (4.13) y (4.17) son

¹Intuitivamente, esto se debe a que si el punto crítico es hiperbólico una pequeña perturbación del sistema lo transformará en un punto crítico hiperbólico. La hiperbolicidad de un punto crítico es por tanto *genérica*.

linealmente equivalentes, ya que se pasa de uno al otro mediante el cambio de variable lineal $X = PZ$. Obsérvese también que

$$\boxed{\tau = \lambda_1 + \lambda_2, \quad d = \lambda_1 \lambda_2}. \quad (4.19)$$

Se pueden dar los siguientes casos:

I) Los autovalores de A son *reales*, es decir

$$\boxed{\tau^2 - 4d \geq 0}. \quad (4.20)$$

I.a) $\boxed{d < 0}$

Nótese que $d < 0 \implies \tau^2 - 4d > 0$. En este caso los dos autovalores tienen signos *opuestos*, es decir

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

Si $Z = (z_1, z_2)$, la solución general del sistema en Z es

$$\boxed{z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}}, \quad (4.21)$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. La ecuación cartesiana de las órbitas se deduce fácilmente de la anterior:

$$\boxed{z_2 = c |z_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}, \quad c \in \mathbf{R}, \quad (4.22)$$

junto con $z_1 = 0$ (en realidad, se trata de las dos órbitas $\{z_1 = 0, z_2 > 0\}$ y $\{z_1 = 0, z_2 < 0\}$). Nótese que las dos soluciones

$$Z(t) = \pm(1, 0)e^{\lambda_1 t}$$

parametrizan el eje z_1 (menos el origen) y “entran” en el punto crítico (el origen), al ser λ_1 negativo, mientras que las soluciones

$$Z(t) = \pm(0, 1)e^{\lambda_2 t}$$

parametrizan el eje z_2 y “salen” del origen ($\lambda_2 > 0$). Si efectuamos la transformación lineal $X = PZ$ para pasar a las variables originales $X = (x, y)$, el mapa de fases es semejante. En particular, los ejes z_1 y z_2 se transforman en dos rectas, dirigidas en la dirección de los dos autovectores linealmente independientes de la matriz A . En este caso se dice que el origen es un **punto de silla** del sistema (4.13).

I.b) $\boxed{d > 0}$

Nótese que las desigualdades $d > 0$ y $\tau^2 - 4d \geq 0$ implican que $\tau \neq 0$. En este caso los dos autovalores tienen el *mismo* signo, igual al signo de τ . Es conveniente distinguir los siguientes subcasos:

I.b.1) $\boxed{\tau^2 - 4d > 0, \quad d > 0}$

Los dos autovalores son distintos, y del mismo signo. La solución del sistema y la ecuación de las órbitas todavía están dados por (4.21) y (4.22), respectivamente. Sin embargo, al ser los dos autovalores del mismo signo, todas las soluciones tienden al origen para $t \rightarrow \infty$ si $\tau < 0$, y por tanto $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, o para $t \rightarrow -\infty$ si $\tau > 0$ y $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Nótese además que si $\tau > 0$ y $c_1 \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{z}_2(t)}{\dot{z}_1(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0,$$

Por tanto, si $\tau > 0$ todas las órbitas menos la recta $z_1 = 0$ salen del origen con pendiente cero. Análogamente, si $\tau < 0$ y $c_2 \neq 0$ todas las órbitas menos $z_2 = 0$ entran en el origen tangentes al eje z_2 .

En las coordenadas originales $X = (x, y)$, todas las órbitas entran o salen del origen según sea $\tau < 0$ ó $\tau > 0$. Dichas órbitas entran o salen del origen tangentes a la recta paralela al autovector correspondiente al menor autovalor en valor absoluto, excepto la recta paralela al otro autovector. Diremos que el origen es un **nodo estable** si $\tau < 0$, y un **nodo inestable** si $\tau > 0$.

I.b.2) $\boxed{\tau^2 - 4d = 0 \quad (\Rightarrow d > 0), \quad A = \lambda \mathbf{1}}$

Las soluciones son las rectas $X = v e^{\lambda t}$, con $v \in \mathbf{R}^2$ y $\lambda = \tau/2$. De nuevo, si $\tau > 0$ las órbitas salen del origen, y entran en el origen si $\tau < 0$. Se dice en este caso que el origen es un **nodo propio** (*estable* si $\tau < 0$, *inestable* si $\tau > 0$).

I.b.3) $\boxed{\tau^2 - 4d = 0 \quad (\Rightarrow d > 0), \quad A \neq \lambda \mathbf{1}}$

En este caso la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\tau}{2}.$$

Nótese que en este caso la matriz A tiene un sólo autovector linealmente independiente, que está dado por la segunda columna de P . La solución del sistema (4.17) es ahora

$$\boxed{z_1 = c_1 e^{\lambda t}, \quad z_2 = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t}} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

La ecuación de las órbitas es

$$\boxed{z_2 = z_1 \left(\frac{1}{\lambda} \log |z_1| + c \right)}, \quad c \in \mathbf{R},$$

junto con $z_1 = 0$. De nuevo, todas las órbitas entran en el origen (resp. salen del origen) si $\tau < 0$ (resp. $\tau > 0$). Además, si $c_1 \neq 0$

$$\frac{\dot{z}_2(t)}{\dot{z}_1(t)} = \frac{\lambda c_1 t + (c_1 + \lambda c_2)}{\lambda c_1} = t + \left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{1}{\lambda} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \pm \infty} \pm \infty,$$

por lo que todas las órbitas entran o salen del origen tangentes al eje z_2 . En las coordenadas de partida x , las órbitas entran o salen del origen (según sea $\tau < 0$ ó $\tau > 0$) tangentes a la recta paralela al autovector de la matriz A . Se dirá que el origen es un **nodo de una tangente** (*estable* si $\tau < 0$, *inestable* si $\tau > 0$).

II) $\boxed{\tau^2 - 4d < 0}$

En este caso hay dos autovalores complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\beta > 0$. Existe por tanto un vector $v \in \mathbf{C}^2$ tal que

$$A v = (\alpha + i\beta)v.$$

Tomando la parte real e imaginaria de esta igualdad compleja obtenemos las dos igualdades reales

$$A \cdot \operatorname{Re} v = \alpha \operatorname{Re} v - \beta \operatorname{Im} v, \quad A \cdot \operatorname{Im} v = \alpha \operatorname{Im} v + \beta \operatorname{Re} v.$$

Por tanto, si $P = (\operatorname{Re} v \quad \operatorname{Im} v)$ se tiene

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Como la traza y el determinante son invariantes bajo transformaciones lineales se tiene

$$\boxed{\tau = 2\alpha, \quad d = \alpha^2 + \beta^2}. \quad (4.23)$$

Efectuando el cambio $X = PZ$ obtenemos el sistema en Z

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha z_1 + \beta z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\beta z_1 + \alpha z_2. \end{aligned}} \quad (4.24)$$

Pasando a coordenadas polares

$$z_1 = r \cos \theta, \quad z_2 = r \operatorname{sen} \theta$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} r^2 = z_1^2 + z_2^2 &\implies r \dot{r} = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 = \alpha r^2 \\ \dot{z}_1 = \alpha z_1 + \beta z_2 = \dot{r} \cos \theta - (r \operatorname{sen} \theta) \dot{\theta} &= \alpha z_1 - z_2 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = -\beta. \end{aligned}$$

El sistema en coordenadas polares es

$$\boxed{\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = -\beta}, \quad (4.25)$$

con solución general

$$\boxed{r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \theta_0 - \beta t}; \quad r_0, \theta_0 \in \mathbf{R}. \quad (4.26)$$

La ecuación de las órbitas es por tanto

$$\boxed{r = r_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\theta - \theta_0)}}. \quad (4.27)$$

Se trata de una familia de *espirales logarítmicas*, si $\alpha \neq 0$ (es decir, $\tau \neq 0$), o circunferencias centradas en el origen, si $\alpha = 0$ ($\tau = 0$). En el plano (x, y) , las órbitas siguen siendo espirales para $\tau \neq 0$, y son *elipses* centradas en el origen para $\tau = 0$. En el primer caso ($\tau \neq 0$) se dice que el origen es un **foco**, *estable* para $\tau < 0$ e *inestable* para $\tau > 0$, mientras que si $\tau = 0$ el origen es un **centro**. Si $\tau > 0$, las espirales tienden al origen para $t \rightarrow -\infty$, mientras que si $\tau < 0$ esto ocurre para $t \rightarrow \infty$. El sentido de giro alrededor del origen de las espirales ó las circunferencias se determina fácilmente observando cuál es la dirección del vector velocidad AX cuando la órbita cruza uno de los ejes. Por ejemplo, la componente x del vector velocidad para $x = 0$ es $f(0, y) = by$. Por tanto, el sentido de giro es horario (antihorario) si $b > 0$ ($b < 0$). Del mismo modo, como $g(x, 0) = cx$ el sentido de giro es horario si $c < 0$, y antihorario si $c > 0$. Nótese que

$$\tau^2 - 4d = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc < 0 \implies bc < 0.$$

En el plano de los parámetros (τ, d) , el conjunto $\tau^2 - 4d = 0$ representa una parábola. El tipo de punto crítico que el sistema lineal (4.13) tiene en el origen (punto de silla, nodo, foco o centro) está determinado por la posición del punto (τ, d) en el espacio de parámetros en relación con esta parábola y con los ejes coordenados (fig. 4.1).

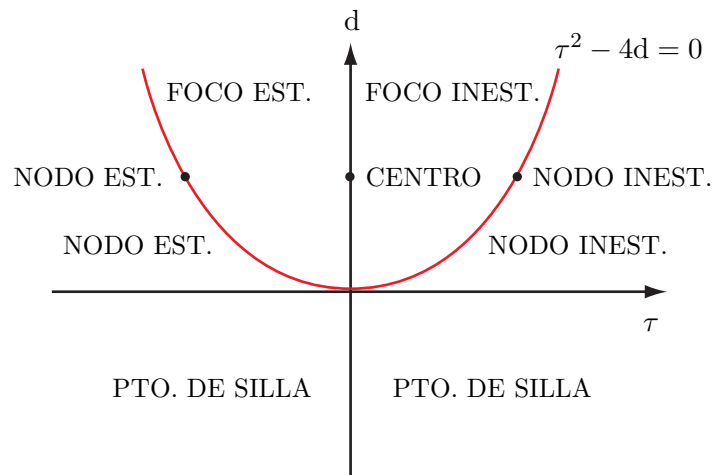


Figura 4.1: Tipos de puntos críticos del sistema lineal (4.13).

4.3 Sistemas dinámicos no lineales en \mathbf{R}^2

Consideremos a continuación el sistema dinámico plano

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (4.28)$$

donde las funciones f y g se supondrán como mínimo de clase C^1 en un abierto $U \subset \mathbf{R}^2$, y supongamos que (x_0, y_0) es un punto crítico de (4.28). La aproximación lineal del sistema (4.28) en el punto crítico (x_0, y_0) , es el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{X} = aX + bY \\ \dot{Y} = cX + dY, \end{cases} \quad (4.29)$$

siendo $(X, Y) = (x - x_0, y - y_0)$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = D(f, g)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

El siguiente teorema relaciona el comportamiento del sistema no lineal (4.28) en las proximidades de un punto crítico *elemental* (x_0, y_0) con el de su aproximación lineal (4.29) en un entorno del origen. Dicho teorema afirma esencialmente que si f y g son suficientemente regulares en (x_0, y_0) , y dicho punto crítico es *hiperbólico*, entonces el sistema original (4.28) y su aproximación lineal (4.29) tienen el mismo tipo de punto crítico en (x_0, y_0) y en el origen, respectivamente.

Teorema 4.11. Sea (x_0, y_0) un punto crítico elemental del sistema (4.28), es decir

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0, \quad \det D(f, g)(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces se verifica:

- i) Si $(f, g) \in C^1$ y la aproximación lineal (4.29) tiene un **foco** o un **punto de silla** en el origen, entonces el sistema (4.28) tiene resp. un **foco** del mismo tipo (es decir, estable o inestable) o un **punto de silla** en (x_0, y_0) .
- ii) Si $(f, g) \in C^2$ y la aproximación lineal (4.29) tiene un **nodo** en el origen, entonces el sistema (4.28) tiene un **nodo** del mismo tipo (estable o inestable, de una tangente) en (x_0, y_0) .
- iii) Si f y g son analíticas en (x_0, y_0) y la aproximación lineal (4.29) tiene un **centro** en el origen, entonces el sistema (4.28) puede tener un **centro** o un **foco** en (x_0, y_0) .

Nota. Si la aproximación lineal tiene un nodo en el origen y (f, g) sólo es de clase C^1 , el sistema no lineal (4.28) puede tener un *foco* en (x_0, y_0) . Por ejemplo, esto es lo que ocurre para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \frac{y}{\log r} \\ \dot{y} = -y + \frac{x}{\log r} \end{cases}$$

en el origen. Análogamente, si la aproximación lineal tiene un centro en el origen y (f, g) es de clase C^k (con $1 \leq k < \infty$), el sistema no lineal (4.28) puede tener un *centro-foco* en el origen. Considérese, por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x r^{k+1} \operatorname{sen}(1/r) \\ \dot{y} = x + y r^{k+1} \operatorname{sen}(1/r) \end{cases}$$

en el origen.

Según el teorema anterior, si la aproximación lineal (4.29) tiene un *centro* en el origen el sistema original puede tener en dicho punto un centro o un foco (aún cuando las funciones f y g sean analíticas en el punto crítico). Para determinar en este caso qué tipo de punto crítico tiene el sistema (4.28) en (x_0, y_0) se pueden usar muchas veces consideraciones elementales de *simetría*. En efecto, si probamos que el mapa de fases del sistema (4.28) en un entorno de (x_0, y_0) es *simétrico respecto de alguna recta que pase por dicho punto* entonces (x_0, y_0) ha de ser forzosamente un *centro*, ya que una curva de tipo espiral no es simétrica respecto de ninguna recta.

La simetría más fácil de caracterizar es la simetría respecto de los ejes coordenados. Por ejemplo, determinemos una condición suficiente para que las órbitas sean simétricas respecto del eje x , suponiendo que $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ y que el origen es un centro de la aproximación lineal en este punto. En primer lugar, para que el campo de vectores (f, g) sea continuo en el eje x las órbitas deben cortar dicho eje con tangente vertical, es decir

$$f(x, 0) = 0 \tag{4.31}$$

para $|x - x_0|$ suficientemente pequeño. En segundo lugar, la simetría respecto del eje horizontal implica que si $(x, y(x))$ es una órbita entonces $(x, -y(x))$ también lo es. Esto

significa que si la función $y(x)$ es solución de

$$y' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

también lo será la función $-y(x)$. Imponiendo esta condición se obtiene

$$\frac{d}{dx}(-y(x)) = -y'(x) = -\frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))} = \frac{g(x, -y(x))}{f(x, -y(x))}$$

para todo x . Esto se cumplirá si

$$\frac{g(x, -y)}{f(x, -y)} = -\frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Por tanto, una condición suficiente para que las órbitas de (4.28) sean simétricas respecto del eje horizontal es

$$\boxed{\frac{g(x, -y)}{f(x, -y)} = -\frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad f(x, 0) = 0.} \quad (4.32)$$

En particular, ambas condiciones se cumplirán si

$$\boxed{f(x, -y) = -f(x, y), \quad g(x, -y) = g(x, y),} \quad (4.33)$$

es decir si f es impar en y y g es par en dicha variable. Análogamente, las órbitas de (4.28) son simétricas respecto del eje y si

$$\boxed{\frac{g(-x, y)}{f(-x, y)} = -\frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad g(0, y) = 0} \quad (4.34)$$

o, en particular, si

$$\boxed{f(-x, y) = f(x, y), \quad g(-x, y) = -g(x, y).} \quad (4.35)$$

Ejemplo 4.12. Consideremos el sistema

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3. \end{aligned}} \quad (4.36)$$

En este ejemplo, las funciones

$$f(x, y) = y, \quad g(x, y) = x - x^3$$

son analíticas en todo \mathbf{R}^2 . Los puntos críticos del sistema son las soluciones de las ecuaciones

$$y = x - x^3 = 0,$$

es decir

$$\boxed{(0, 0), \quad (1, 0), \quad (-1, 0).} \quad (4.37)$$

La matriz jacobiana de (f, g) es

$$D(f, g)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de esta matriz, que es igual a $3x^2 - 1$, no se anula en ninguno de los puntos críticos, todos ellos son *elementales*. En el origen, la aproximación lineal de (4.36) es

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Al ser $\det A = -1 < 0$, el origen es un *punto de silla* de la aproximación lineal (4.38), y por tanto del sistema original (4.36). Para estudiar el mapa de fases de dicho sistema en las proximidades del origen, hacemos lo propio con el mapa de fases de la aproximación lineal (4.38). Los autovalores de la matriz A son las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

es decir $\lambda = \pm 1$. Los autovectores (X, Y) correspondientes al autovalor $\lambda = 1$ son las soluciones de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se trata, por tanto, de la recta $Y = X$. Análogamente se prueba que los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda = -1$ están sobre la recta $Y = -X$. El mapa de fases del sistema lineal (4.38) tiene por tanto el aspecto de la figura 4.2. Volviendo al sistema original (4.36) en el origen, las dos rectas $Y = \pm X$ se transforman en dos curvas llamadas **separatrices**, que salen o entran del origen con pendiente respectivamente igual a 1 o -1 (figura 4.3).

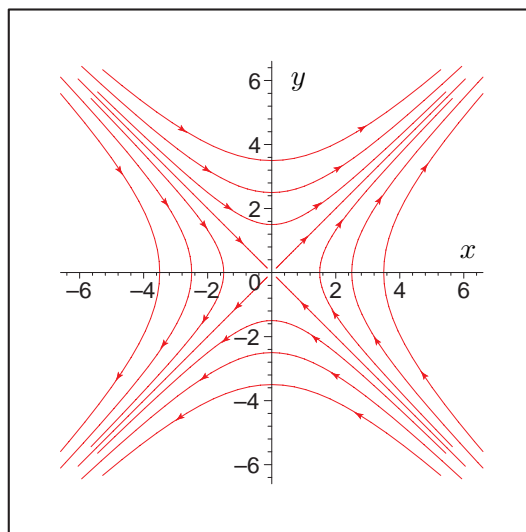


Figura 4.2: Mapa de fases del sistema lineal (4.38).

En los dos puntos críticos $\pm(1, 0)$, la matriz de la aproximación lineal es igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de autovalores de esta matriz es $\lambda^2 + 2 = 0$, por lo que el origen es un *centro* de la aproximación lineal de (4.36) tanto en $(1, 0)$ como en $(-1, 0)$. Al ser las funciones f y g analíticas, el sistema (4.36) puede tener un centro o un foco en $\pm(1, 0)$. Pero en

este caso el mapa de fases es simétrico respecto del eje horizontal, ya que $f(x, y) = y$ es impar en y , y $g(x, y) = x - x^3$ es par en dicha variable (al ser independiente de y). Como ambos puntos críticos $\pm(1, 0)$ están sobre el eje horizontal, dichos puntos son *centros* del sistema (4.36).

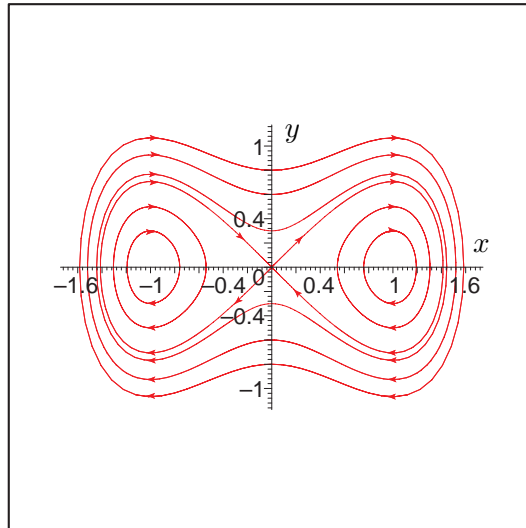


Figura 4.3: Mapa de fases del sistema (4.36).

El mapa de fases del sistema (4.36) tiene el aspecto de la figura 4.3. Esto se puede ver fácilmente, por ejemplo, teniendo en cuenta que $\dot{x} = y$ es siempre positivo en el semiplano superior y negativo en el inferior. Por tanto, en el semiplano superior las órbitas se recorren hacia la derecha, mientras que en el inferior el sentido de recorrido es hacia la izquierda. Por otra parte, $\dot{y} = x(1+x)(1-x)$ es negativa para $x > 1$, positiva para $0 < x < 1$, negativa para $-1 < x < 0$, y positiva para $x < -1$. Por ejemplo, la separatriz con pendiente 1 en el origen “se mueve” hacia la derecha y hacia arriba para $0 < x < 1$. Al llegar a $x = 1$ el signo de \dot{y} cambia, por lo que el movimiento es hacia abajo y hacia la derecha hasta que esta órbita corta el eje x . Al pasar al semiplano inferior $\dot{x} = y < 0$, y el movimiento es hacia la izquierda y hacia abajo (ya que $x > 1$) hasta llegar a $x = 1$, en que de nuevo \dot{y} se hace positiva. Entre este punto y el origen (al que esta órbita llega como la segunda separatriz, pues de otra forma cortarían a otra órbita) el movimiento es hacia la izquierda y hacia arriba.

En este ejemplo, podemos hacer afirmaciones más precisas sobre las órbitas resolviendo su ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^3}{y},$$

que es exacta y se integra fácilmente:

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = c_1, \quad c_1 \in \mathbf{R},$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{(x^2 - 1)^2 + 2y^2 = c, \quad c \geq 0}. \quad (4.39)$$

De esta ecuación se deduce que el mapa de fases es simétrico respecto de ambos ejes, y todas las órbitas son acotadas y cerradas. (La simetría respecto del eje y del mapa de fases se podría haber deducido sin necesidad de hallar la ecuación de las órbitas, ya que

g es impar y f par en x , resp.) Los puntos críticos, por ejemplo, se obtienen para $c = 0$. Las separatrices son las dos órbitas que “pasan” por el origen (en realidad, tienden al origen para $t \rightarrow \pm\infty$). Sustituyendo por tanto $x = y = 0$ en la ecuación anterior se obtiene $c = 1$, por lo que las separatrices son las curvas

$$(x^2 - 1)^2 + 2y^2 = 1 \iff y = \pm x \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.$$