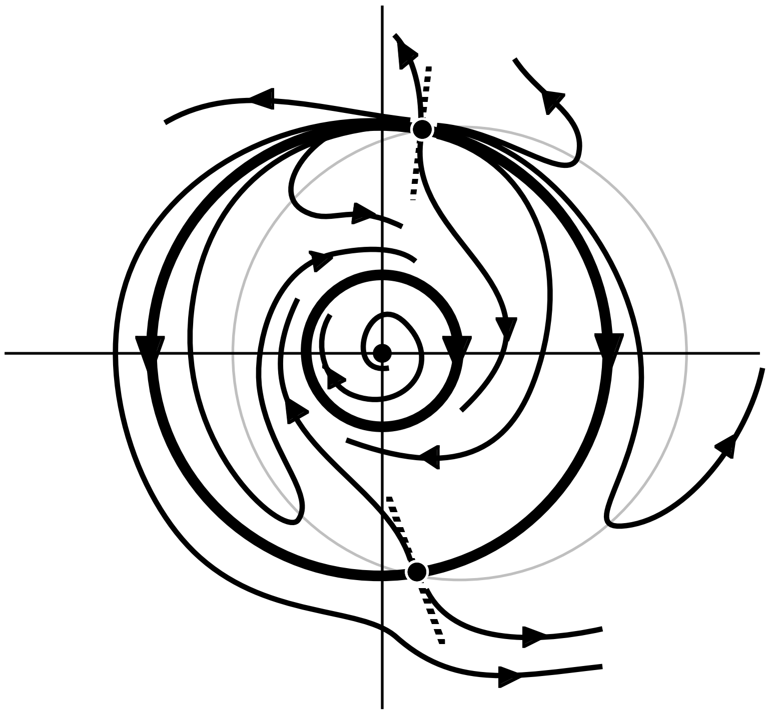
# apuntes de ecuaciones diferenciales ordinarias



**Pepe Aranda**
**Métodos Matemáticos**
**Físicas Complutense**
**pparanda@fis.ucm.es**

# Indice

# Bibliografía


BD **Boyce-Di Prima.** ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA . (Limusa)

R **Ross.** ECUACIONES DIFERENCIALES. (Reverté)

Br **Braun**. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. (Interamericana)

P **Plaat.** ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. (Reverté)

S **Simmons.** ECUACIONES DIFERENCIALES (con aplicaciones y notas históricas). (McGraw-Hill)

E **Elsgoltz.** ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. (Mir)

G **Guzmán.** ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. TEORIA DE ESTABILIDAD Y CONTROL. (Alhambra)


Las secciones 1.1 y 1.2 se pueden encontrar en cualquiera de los siete libros.

Para ampliar el cálculo numérico (1.3) está muy bien el capítulo 8 del BD; véanse también R y Br.

Hay resultados de existencia y unicidad (1.4) en todos los libros, aunque las demostraciones no suelen citar los espacios de Banach; la muy larga demostración del Teor 6 está en G.

Las ideas sobre prolongabilidad de 1.5 sólo suelen ser tratadas con rigor en libros más abstractos y difíciles de leer (como el G); algo se dice sobre el tema en R y P.

De dependencia continua (1.6) hablan R, E y G.

La teoría de estabilidad es propia de libros más avanzados y se suele tratar en el marco más general de los sistemas de ecuaciones; en 1.7 se dan un par de versiones para ecuaciones de primer orden de teoremas de G; los demás libros se suelen limitar a hablar de estabilidad de soluciones constantes de sistemas autónomos (en los apuntes en el capítulo 4); algunos de ellos tratan también la estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes (2.3 en los apuntes).

La sección 1.8 sigue, en general, al P.

Los cinco primeros libros incluyen bastantes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a los problemas reales; tal vez las más curiosas se encuentren en el Br.

Los teoremas generales de 2.1 se puede estudiar en G.

Todos los libros, excepto G, empiezan estudiando directamente las ecuaciones lineales y se ocupan después de los sistemas, lo que tal vez resulte más pedagógico (los apuntes, para ahorrar tiempo, lo hacen al revés); además suelen incluir repasos, más o menos detallados, de la teoría de matrices (véase, por ejemplo, el BD).

La transformada de Laplace (2.4) se utiliza en BD, Br, R y S, especialmente en los dos primeros.

Para ecuaciones con coeficientes periódicos (2.5), ver P.

La solución por medio de series (capítulo 3), tanto en torno a puntos regulares como en torno a singulares regulares, se puede consultar en BD, Br, R y S; el último incluye un estudio sobre las propiedades de diferentes funciones especiales.

Los sistemas autónomos (capítulo 4) se tratan con detalle y rigor en P (incluyendo la complicada demostración del Teor 1 de 4.2), aunque también son recomendables las diferentes formas de estudiarlos de BD, Br y R; se puede profundizar en las funciones de Lyapunov en E y G; se puede leer el estudio de los ciclos límite, no incluido en los apuntes, de alguno de los otros cinco libros.

Hay un capítulo dedicado a la historia de las ecuaciones diferenciales en G, una pequeña sección en BD y diversos apuntes históricos en S.

BD, R, Br y S estudian además los problemas de contorno y el método de separación de variables para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden; las de primer orden, lineales y no lineales, se tratan en E; otro tema relacionado con las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones, se ve en E y S.

# Introducción

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que aparecen una función incógnita y alguna de sus derivadas. Si la función es de una variable la ecuación se llama **ordinaria**. Si es de varias variables, la ecuación es en **derivadas parciales**. Ejemplos de ecuaciones ordinarias son:

[1] $y'(t) = -ky(t)$ [ecuación que rige la desintegración radiactiva]

[2] $y'(t) = by(t)\,[\,M - y(t)\,]$ [describe la evolución de una población animal]

[3] $x''(t) + a\,\mathrm{sen}[x(t)] = 0$ [ecuación del péndulo]

[4] $x''(t) + px'(t) + qx(t) = f(t)$ [oscilaciones forzadas de un sistema muelle-masa]

[5] $x^{iv}(t) - cx(t) = 0$ [ecuación de las vibraciones de una viga]

(k, b, m, a , p, q y c son constantes positivas que se determinan experimentalmente)

Y son ecuaciones en derivadas parciales, por ejemplo:

[6] $\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$ , con $u=u(x,t)$ [ecuación del calor]

[7] $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$ , con $u=u(x,t)$ [ecuación de ondas]

[8] $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , con $u=u(x,y)$ [ecuación de Laplace]

Se llama **orden** de una ecuación al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella. Así, [1] y [2] son de primer orden, [3], [4] y las tres en derivadas parciales son de segundo orden, y la ecuación [5] es de cuarto orden.

**Solución** de una ecuación diferencial es una función, tantas veces derivable como sea el orden de la ecuación, que al ser sustituida en ésta la convierte en una identidad. Por ejemplo, $y(t) = e^{-kt}$ es solución de [1] pues $y'(t)= -ke^{-kt} =-ky(t)$ . Más aún, toda función de la forma $y(t) = Ce^{-kt}$ para cualquier constante C es también solución. A esta expresión, que recoge todas las soluciones de la ecuación, se le llama **solución general**. Para precisar una **solución particular** de una ecuación será necesario imponer además alguna **condición inicial**. Para la ecuación [1] de primer orden basta imponer el valor de la solución en un instante dado: por ejemplo, $y(0)=7$ nos determina $y(t)=7e^{-kt}$ (para una ecuación órdinaria de orden n la solución general contendrá n constantes arbitrarias y será necesario imponer n datos iniciales). Al conjunto de una ecuación y unos datos iniciales se le llama **problema de valores iniciales**.

Aunque nuestro principal deseo a la vista de cualquier ecuación diferencial que nos pueda aparecer sería calcular su solución general, esto será posible sólo en contadas ocasiones (será más difícil cuanto mayor sea su orden y más aún si es en derivadas parciales). Parte de la teoría de ecuaciones diferenciales se dedica a describir estos escasos métodos de resolución. Pero otra parte importante se dedica a obtener información sobre las soluciones de una ecuación sin necesidad de resolverla: existencia, unicidad, dependencia continua de los datos iniciales y de los parámetros que puedan aparecer, comportamiento asintótico, valores aproximados de las soluciones (más precisos con ayuda de ordenadores),...

Esta parte de los apuntes trata las ecuaciones diferenciales ordinarias. El primer capítulo está dedicado a las de primer orden. Comienza describiendo los métodos elementales de integración, para pasar pronto al resto de su teoría: dibujo aproximado, cálculo numérico, teoremas de existencia y unicidad (si la ecuación no es regular puede que no exista ninguna solución o que haya más de una satisfaciendo un dato inicial dado), prolongabilidad (¿cuál es el máximo intervalo en el que está definida cada solución?), dependencia continua, estabilidad (¿se parecen las soluciones con datos iniciales próximos cuando t tiende a $\infty$?), propiedades de las ecuaciones autónomas (aquellas en las que no aparece la t explícitamente en su expresión). Acaba utilizando parte de la teoría para estudiar unos ejemplos concretos.

El segundo capítulo trata de los sistemas de ecuaciones y de las ecuaciones de orden superior a 1 para los que más información se puede obtener y para los que en más ocasiones se puede calcular su solución: los lineales. Primero se da la generalización de las propiedades vistas de las ecuaciones de primer orden a esta situación más complicada. Luego se tratan, para ir fijando ideas, los sistemas de dos ecuaciones y las ecuaciones de orden 2. Se pasa después a dimensión n y se introduce la técnica de resolución mediante transformadas de Laplace, para acabar estudiando la existencia de soluciones periódicas.

El capítulo tercero describe cómo resolver mediante series de potencias las ecuaciones lineales de segundo orden (único método posible en bastantes ocasiones), primero en torno a los llamados puntos regulares y después en torno a los singulares regulares. Se aplica entonces el método anterior a dos ecuaciones particulares de interés físico: la de Legendre y la de Bessel.

El cuarto capítulo está destinado a obtener los dibujos de las proyecciones sobre un plano de las soluciones de los sistemas y ecuaciones autónomos de segundo orden (los llamados mapas de fase), ya que tales sistemas y ecuaciones casi nunca se pueden resolver y sin embargo aparecen en muchas ocasiones en ejemplos físicos. Empieza por las propiedades generales, luego clasifica los mapas de fases en las cercanías de los puntos proyección de las soluciones constantes, trata el caso particular de las ecuaciones, se centra a continuación en un tipo concreto de sistemas: los exactos, analiza casos dudosos de la clasificación citada y acaba analizando la estabilidad mediante las llamadas funciones de Lyapunov.

# 1. Ecuaciones de primer orden

Este primer capítulo está dedicado a las ecuaciones de primer orden con la variable despejada, es decir, a las ecuaciones [e] $y'(t)=f(t,y(t))$ , o como usualmente se escriben, [e] $y'=f(t,y)$ (utilizaremos la notación $y(t)$, frente a las más usuales $y(x)$ o $x(t)$, pues la y siempre es variable dependiente y la t es variable independiente).

Ante cualquier ecuación diferencial lo primero que intentamos es resolverla. Pero esto se consigue sólo en contadas ocasiones, incluso si es de primer orden, la más sencilla que se puede considerar. En la sección 1.1 hallaremos la solución los escasos tipos de ecuaciones resolubles (separables, lineales, exactas y otras que se pueden reducir a ellas).

Dedicaremos el resto del capítulo a obtener información sobre las soluciones de [e] sin necesidad de resolverla. Así en la sección 1.2 veremos como dibujarlas aproximadamente a partir del llamado campo de direcciones, conjunto de segmentos con pendiente proporcionada por la $f(t,y)$.

En la sección 1.3, mediante diversos métodos numéricos programables (Euler, Euler modificado y Runge-Kutta), será mucho mayor la precisión en el cálculo aproximado de la solución que satisface un determinado dato inicial, es decir, la solución del problema de valores iniciales:

$$\boxed{[P] \quad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}}$$

En la sección 1.4 veremos los teoremas de existencia y unicidad: si la f es lo bastante regular en un entorno del punto $(t_o,y_o)$ existirá una única solución $y(t)$ de [P], definida al menos en un pequeño intervalo que contiene a $t_o$. Más complicado será determinar si el máximo intervalo en que dicha solución está definida es finito o infinito. A ello está dedicada la sección 1.5.

La sección 1.6 nos asegura que si la f es regular la solución de [P] se parecerá en intervalos finitos a la de los problemas obtenidos variando ligeramente los datos iniciales o los posibles parámetros que pueden aparecer en la ecuación. Si el intervalo es infinito no siempre las soluciones con datos iniciales próximos son parecidas para valores grandes de t . Al estudio de cuándo sucede esto (es decir, de cuándo la solución es estable) está dedicada la sección 1.7. Trataremos en especial las ecuaciones lineales y las obtenidas perturbándolas ligeramente.

La sección 1.8 se dedica a las ecuaciones autónomas (generalizadas en el capítulo 4) sobre las que es fácil conseguir mucha información sin resolverlas.

Por último, en la sección 1.9 aplicaremos parte de la teoría vista al estudio de diferentes ecuaciones que pueden describir la evolución de la población de una especie animal.

## 1.1 Métodos elementales de resolución

**Ecuaciones separables.**

Son ecuaciones que se pueden escribir en la forma [s] $\boxed{y' = \frac{p(t)}{q(y)}}$ .

Entonces $\int q(y)\,dy = \int p(t)\,dt + C$ y si podemos encontrar P y Q primitivas de p y q:

$$Q(y) = P(t) + C \,.$$

Si pudiésemos despejar y de la última ecuación obtendríamos explícitamente la solución general; en caso contrario se diría que la solución viene dada implícitamente. Para determinar la constante arbitraria C que aparece en la solución general necesitamos imponer una condición inicial.

**Ej 1.** $\boxed{y' = ty^3}$ $\to \int y^{-3}\,dy = \int t\,dt + C \;\to\; -\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}t^2 + C \;\to\; y = \pm[C^* - t^2]^{-1/2}$

que es la solución general (hemos llamado $C^*=-2C$ ; a partir de ahora, como se hace normalmente por comodidad en la escritura, no cambiaremos el nombre de las constantes arbitrarias que nos vayan apareciendo: todas ellas serán C).

Hallemos diferentes soluciones particulares que satisfacen distintos datos iniciales (por ahora, mientras no tengamos el teorema de existencia y unicidad, no nos preocuparemos de si las funciones obtenidas son la únicas que los satisfacen):

$$y(0)=1 \;\to\; 1 = \pm[C^*]^{-1/2} \;\to\; C^* = 1 \;\to\; y = [1-t^2]^{-1/2}$$

pues, evidentemente, sólo nos sirve el signo + de la raíz ( $y(0)=-1 \to y = -[1-t^2]^{-1/2}$ )

$$y(0)=0 \;\to\; 0 = \pm[C^*]^{-1/2} \quad \text{que no se satisface para ningún } C^* .$$

Sin embargo, es claro que $y\equiv 0$ satisface la ecuación y cumple esa condición inicial. No es raro que en el proceso de cálculo desaparezca alguna solución particular.

Hay ecuaciones que no son de la forma [s] , pero que se convierten en ecuaciones separables haciendo un cambio de variable. Los dos tipos principales son:

Ecuaciones **homogéneas:** $\boxed{y' = f(y/t)}$ .

Se convierten en separables mediante el cambio $z = \frac{y}{t}$ , pues

$$y = tz \;\to\; y' = tz' + z = f(z) \;\to\; \frac{z'}{f(z)-z} = \frac{1}{t} \;\to\; \int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln|t| + C$$

**Ej 2.** $\boxed{t^2y' = ty+3y^2}$ $\to y'=y/t+3(y/t)^2 \;\to\; tz'+z=z+3z^2 \;\to\; z^{-1}=C-3\ln|t| \;\to\; y = \frac{t}{C-3\ln|t|}$

Ecuaciones del tipo: $\boxed{y' = f(at+by)}$ , con a y b constantes.

Se hace $z = at+by$ y se tiene: $z' = a+by' = a+bf(z) \;\to\; \int \frac{dz}{a+bf(z)} = t + C$

**Ej 3.** $\boxed{y' = (y+2t)^{-2}-1}$ $z=y+2t \;\to\; z'=z^{-2}+1 \;\to\; \int \frac{z^2dz}{1+z^2} = z - \text{arc tag}\, z = t+C \;\to$

$y - \text{arc tag}\,(y+2t) = C - t$ , expresión de la que no se puede despejar la y.

**Ecuaciones lineales.**

Son de la forma [l] $\boxed{y' = a(t)y + f(t)}$ .

Si $f(t)\equiv 0$ la ecuación se dice **homogénea**: $y' = a(t)y$ , que ya sabemos resolver:

$$\ln|y| = \int a(t)\,dt + C \;\to\; |y| = e^C e^{\int a(t)dt} \;\to\; \boxed{y = C\, e^{\int a(t)dt}}$$

(al sustituir $e^C$ por C hemos incluido las soluciones positivas y negativas provenientes del valor absoluto y además la solución $y\equiv 0$ que nos habíamos comido al dividir por y).

Para [l], ecuación **no homogénea**, hallamos su solución sustituyendo la C de la solución general de la homogénea por una función C(t) (método de variación de las constantes aplicable a situaciones más generales). Llevando nuestra conjetura a [l] :

$$y = C(t)\, e^{\int a(t)dt} \;\to\; C' e^{\int a} + a\,C\,e^{\int a} = a\,C\,e^{\int a} + f \;\to\; C(t) = \int C'(t)dt = \int e^{-\int a(t)dt} f(t)dt + C$$

Por tanto, la solución **general** de [l] es: $\boxed{y = Ce^{\int a(t)dt} + e^{\int a(t)dt}\int e^{-\int a(t)dt} f(t)dt}$

(observemos que la solución general de una ecuación lineal resulta ser la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea)

Se comprueba inmediatamente que la solución **particular** que satisface $y(t_o)=y_o$ es:

$$\boxed{y = y_o\, e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} + e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \int_{t_o}^{t} e^{-\int_{t_o}^{s} a(u)du} f(s)\,ds}$$

Si $a(t)\equiv a$ se le llama a [l] ecuación lineal con **coeficientes constantes** y su solución general adopta la forma: $\boxed{y = Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at} f(t)dt}$

**Ej 4.** $\boxed{y' = -\frac{y}{t} + e^t \text{ con } y(1)=1}$ $\;\to\; y = 1.e^{-\ln t} + e^{-\ln t}\int_1^t e^{\ln s} e^s\, ds = \frac{1}{t} + e^t - \frac{e^t}{t}$

Hay otras ecuaciones que se pueden reducir a lineales:

Ecuación de **Bernouilli**: $\boxed{y' = a(t)y + f(t)y^p}$ , $p\neq 1$. O sea, $y^{-p}y' = a(t)y^{1-p} + f(t)$ .

Haciendo $z = y^{1-p}$ se convierte en $z' = (1-p)a(t)z + (1-p)f(t)$ que es lineal.

Ecuación de **Ricatti**: $\boxed{y' = a(t)y + b(t)y^2 + f(t)}$

Se puede resolver si se conoce una solución particular $y_p$ de la ecuación (en general es imposible). En ese caso, el cambio $u = y - y_p$ la convierte en una de Bernouilli con $p=2$: $u' = [a(t)+2b(t)y_p(t)]u + b(t)u^2$ , que con $z = u^{-1}$ se convierte en lineal.

**Ej 5.** $\boxed{(1+t^3)y'+2ty^2+t^2y+1 = 0}$ Tanteando obtenemos la solución particular $y = -t$ .

Haciendo $u = y+t$ y $z = u^{-1}$ se llega a la lineal $z' = -\frac{3t^2}{1+t^3}z + \frac{2t}{1+t^3}$ .

Resolviéndola y deshaciendo los cambios obtenemos la solución general: $y = \frac{1-Ct}{C+t^2}$ .

**Ecuaciones exactas.**

Consideremos una ecuación escrita en la forma: [e] $\boxed{M(t,y) + N(t,y)\, y' = 0}$ .

[e] se dice **exacta** si existe una función de dos variables $U(t,y)$ tal que $U_t = M$ y $U_y = N$ .

En ese caso la solución general de [e] es $\boxed{U(t,y) = C}$ , pues cualquier función derivable y(t) definida implícitamente por esta expresión satisface la ecuación:

$$0 = \frac{d}{dt} U(t,y(t)) = U_t + U_y\, y' = M + N\, y'$$

Dicho de otra forma, [e] es exacta si existe una función potencial U para el campo vectorial (M,N). Para que tal U exista se sabe que es necesario que $M_y \equiv N_t$ (y que es suficiente si $M_y$ y $N_t$ son continuas en un abierto simplemente conexo). Una vez que comprobemos que U existe se puede calcular como en el ejemplo siguiente.

**Ej 6.** $\boxed{y' = -\frac{3t^2+6ty^2}{6t^2y+4y^3}}$ , o sea, $(3t^2+6ty^2) + (6t^2y+4y^3)\, y' = 0$ . Es exacta: $M_y = 12ty = N_t$ .

La U debe cumplir : $\left\{ \begin{array}{l} U_t = 3t^2+6ty^2 \rightarrow U = t^3+3t^2y^2+g(y) \\ U_y = 6t^2y+4y^3 \rightarrow U = 3t^2y^2+y^4+h(t) \end{array} \right\} \rightarrow U = t^3+3t^2y^2+y^4$

Y la solución general en forma implícita es $t^3+3t^2y^2+y^4 = C$

Aunque [e] no sea exacta podríamos intentar encontrar una función $f(t,y)$, **factor integrante** de [e] , tal que $fM+fNy'=0$ sí lo sea. Debería entonces cumplirse:

$$[fM]_y \equiv [fN]_t \text{ , es decir, } \quad [*]\ \ N f_t - M f_y = \left[M_y - N_t\right] f$$

ecuación en derivadas parciales bastante más complicada que la inicial. Encontrar la f es, pues, un problema irresoluble en general, pero posible en ciertos casos especiales. Por ejemplo, si $\mathbf{[M_y - N_t]/N}$ resulta ser una función que sólo depende de t , [e] admite un factor integrante $\mathbf{f(t)}$ que sólo depende de la variable t , pues [*] pasa a ser una ecuación ordinaria (lineal homogénea) que sabemos resolver :

$$f'(t) = \frac{M_y - N_t}{N} f(t) \quad \rightarrow \quad f(t) = e^{\int [M_y - N_t]/N} \quad \text{(eligiendo C=1).}$$

**Ej 7.** $\boxed{(t - t^2y)\, y' - y = 0}$ $M = -y$ , $N = t - t^2y$ , $M_y - N_t = 2ty - 2 \not\equiv 0$ . No es exacta.

Sin embargo, $\frac{M_y - N_t}{N} = -\frac{2}{t} \rightarrow f(t) = e^{-2\ln t} = \frac{1}{t^2} \rightarrow \left(\frac{1}{t} - y\right) y' - \frac{y}{t^2} = 0$ es exacta .

Siguiendo como en el ejemplo anterior se tiene la solución general: $\frac{y}{t} - \frac{1}{2} y^2 = C$ .

## 1.2 Dibujo aproximado de soluciones

Consideremos la ecuación [e] $\boxed{y' = f(t,y)}$ .

Cada una de sus soluciones es una función y(t) cuya gráfica tiene en cada uno de sus puntos (t,y(t)) la pendiente asignada por la conocida función f(t,y) . Supongamos que a cada punto (t,y) del plano le asociamos un segmento de pendiente f(t,y) (a este conjunto de segmentos se le llama **campo de direcciones** de [e]). Las soluciones de [e] serán entonces **curvas tangentes en cada punto a los segmentos del campo de direcciones**. Para dibujar este campo de forma organizada conviene considerar las **isoclinas**, curvas en que la pendiente asignada por f es constante: f(t,y) = K . Otras ideas útiles para el dibujo aproximado las iremos viendo en los ejemplos.

**Ej 1.** Dibujemos aproximadamente las soluciones de $\boxed{y' = \frac{2t-y}{t-y}}$

Trazamos algunas isoclinas $\frac{2t-y}{t-y} = K \to y = \frac{2-K}{1-K}t$ (rectas que pasan por el origen), para diferentes valores de K y sobre cada una de ellas dibujamos algunos segmentos de pendiente K:

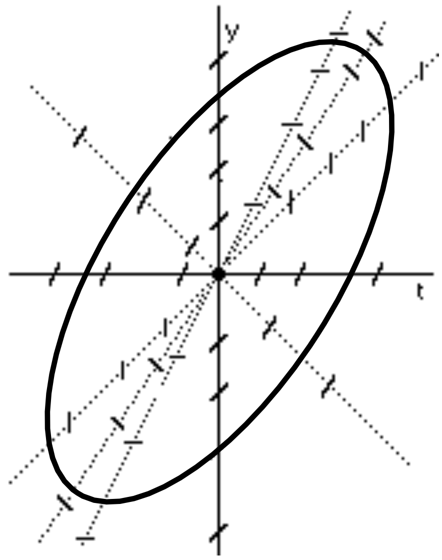
K=0 $\to$ y = 2t (segmentos horizontales: posibles máximos y mínimos de las soluciones)

K=1 $\to$ t = 0 ; K= –1 $\to$ $y = \frac{3}{2}t$ ; ...

Una vez que sabemos que las isoclinas son rectas y=mt (es trivial ver que esto sucede en toda ecuación homogénea) es más cómodo dibujar la recta de pendiente m que uno quiera y trazar sobre ella segmentos de pendiente K= f(t,mt) = (2–m)/(1–m) :

m=0 $\to$ K= 2 ; m=1 $\to$ K= $\infty$ ; m=–1 $\to$ K = $\frac{3}{2}$

Las curvas tangentes a estos segmentos parecen ser cerradas (o tal vez espirales poco abiertas).




Podemos resolver la ecuación y comprobar (el ejemplo es poco práctico). Hay dos formas de hacerlo: mirándola como ecuación homogénea o como exacta:

$$y' = \frac{2-(y/t)}{1-(y/t)} \quad ó \quad (2t-y) + (y-t)\,y' = 0 \ .$$

Por los dos caminos se llega a $y^2-2ty+2t^2=C$ con lo que las soluciones son elipses.

Con más propiedad, cada una de ellas define de hecho dos soluciones en $(-\sqrt{C},\sqrt{C})$:

$y = t+\sqrt{C-t^2}$ , $y = t-\sqrt{C-t^2}$ funciones definidas en $[-\sqrt{C},\sqrt{C}]$ no derivables en $t=\pm\sqrt{C}$

.

Ampliando el concepto de solución, llamaremos **curva integral** de [e] a una curva tangente en cada punto a su campo de direcciones, aunque no esté descrita por una única función y(t) o tenga tangente vertical en algún punto (como las elipses de antes).

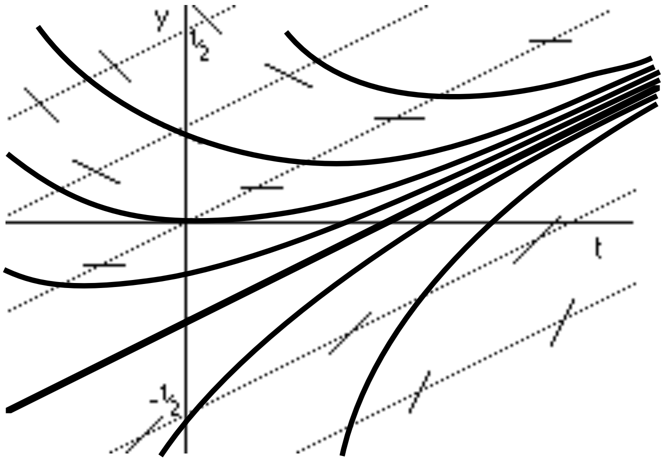
De otra forma, una curva integral de [e] será aquella formada por soluciones y(t) o por soluciones t(y) de la ecuación obtenida mirando t como función de y: [e*] $\boxed{\frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(t,y)}}$

Recordando que la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función (si ambas derivadas son no nulas) es claro que [e] y [e*] tienen las mismas curvas integrales, aunque tal vez haya soluciones de una que no lo sean de la otra (las elipses del ejemplo están descritas por funciones derivables t(y) cerca de la isoclina y=t de pendiente $\infty$; cerca de y=2t no se puede poner la t como función derivable de y)

**Ej 2.** $\boxed{y' = t - 2y}$ $= K \rightarrow y = \frac{1}{2}(t-K)$ isoclinas (rectas de pendiente 1/2).

Dibujamos las de K= –1, –1/2, 0, 1/2, 1 y 3/2 (que cortan respectivamente t=0 en y = 1/2, 1/4, 0, –1/4, –1/2 y –3/4).
Si K=1/2, la recta y los segmentos trazados sobre ella tienen la misma pendiente y por tanto la isoclina es solución de la ecuación (por ser tangente al campo de direcciones).

Podemos, también en este caso, resolver la ecuación (que es lineal) y comprobar. Bastará sumar la solución general de la homogénea a la particular ya encontrada:



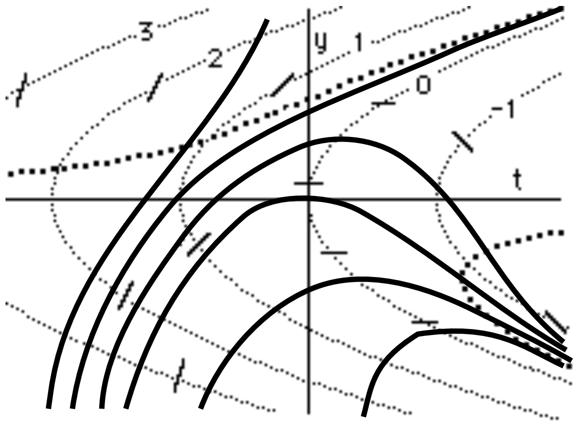

$$y = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2t}$$ (a lo mismo llegaríamos con la fórmula: $y = Ce^{-2t} + e^{-2t}\int te^{2t}$ ).

**Ej 3.** $\boxed{y' = y^2 - t}$ $= K \rightarrow$ las isoclinas son las parábolas $t = y^2 - K$ .

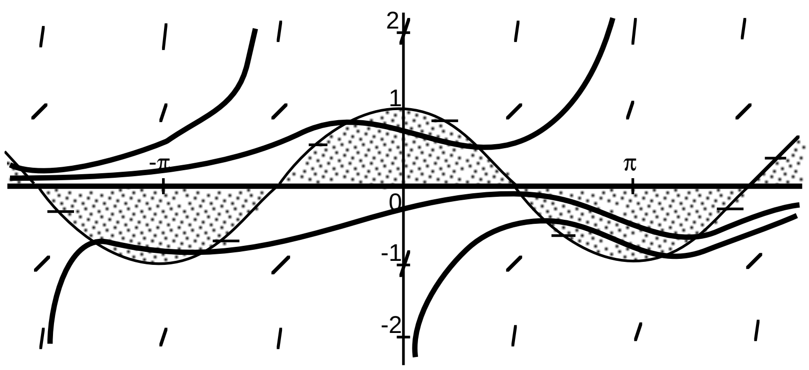
Dibujamos alguna de ellas. La de K=0 nos da máximos de las soluciones (como y'>0 si $t<y^2$ e y'<0 si $t>y^2$ las soluciones crecen a su izquierda y decrecen a su derecha) .
La curva de puntos de inflexión (a puntos en la figura) la encontramos hallando y'':

$$y'' = 2yy'-1 = 2y^3-2ty-1 = 0 \rightarrow t = y^2 - \frac{1}{2y}$$

Con esos datos se pueden dibujar ya las soluciones aproximadas (y esta ecuación no era resoluble elementalmente).




**Ej 4.** $\boxed{y' = y^2 - (\cos t)\, y}$ Las isoclinas son complicadas, salvo la de K=0 que nos da la solución y=0 y la curva y=cos t. Es fácil ver que y'<0 en las regiones punteadas (e y'>0 fuera).




Haciendo y''=0 se obtiene una curva poco tratable e y=0 (las rectas solución aparecen entre los puntos de inflexión al ser y''=0 en ellas).
Siempre podemos pintar de uno en uno varios segmentos tras calcular su f(t,y). Con los datos obtenidos podemos esquematizar las soluciones.
(La ecuación es de Bernouilli; su solución es $y = e^{-\text{sent}}\left(C - \int e^{-\text{sent}}\, dt\right)^{-1}$ , pero al ser la primitiva no calculable nos ayuda poco para el dibujo).

## 1.3 Métodos numéricos

Ya hemos visto los escasos tipos de ecuaciones de primer orden resolubles y hemos comprobado que las técnicas de dibujo aproximado fallan si la expresión de la ecuación no es especialmente sencilla. Pero aunque la f(t,y) sea complicada siempre podremos acudir a los métodos numéricos (iterativos y fácilmente programables), una pequeña parte de los cuales se presenta en esta sección.

Queremos calcular aproximadamante la solución del problema de valores iniciales:

$$[P] \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

(suponemos la f suficientemente regular de forma que los teoremas de la próxima sección nos aseguran que dicho problema [P] tiene una única solución y(t) cerca de $t_0$)

En los tres métodos que vamos a describir iremos hallando valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ cercanos a los de la solución y(t) en una serie de puntos $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ separados entre sí una distancia (paso) h, es decir, $t_1 = t_0+h$ , $t_2 = t_0+2h$ ,…, $t_k = t_0+kh$ , …

El más sencillo (y menos preciso) de los métodos el de **Euler**, que consiste en aproximar la solución desconocida por su tangente conocida. Es decir, si h es pequeño es de esperar que el valor de la solución $y(t_0+h)=y(t_1)$ sea próxima al valor de la recta tangente en ese mismo punto: $y_0+hf(t_0,y_0)$, que llamamos $y_1$. Puesto que $(t_1,y_1)$ se parece al desconocido $(t_1,y(t_1))$ podemos aproximar $y(t_2)$ por el $y_2$ que obtendremos de $(t_1,y_1)$ de la misma forma que obtuvimos el $y_1$ a partir del $(t_0,y_0)$ inicial. Prosiguiendo así vamos obteniendo los $y_k$ aproximados (más inexactos según nos alejamos de $t_0$) dados por:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k,y_k)}$$

Es previsible que se mejore la aproximación si tomamos

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[\, f(t_k,y_k) + f(\,t_k+h\,,\, y_k+hf(t_k,y_k))\,\right]}$$ (método de **Euler modificado**)

es decir, si en cada paso elegimos, en lugar de la pendiente en un extremo, el valor medio de las pendientes correspondientes a dos puntos: el de partida y el previsto por la poligonal de Euler.

El tecer método, muy utilizado y bastante más exacto, es el de **Runge-Kutta**, que exige un mayor número de operaciones (aunque a un ordenador no le llevará mucho más tiempo realizarlas) y que en cada paso toma el promedio ponderado de cuatro pendientes, cuyo significado geométrico ya no es fácil de intuir:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[\, f_{k1}+2f_{k2}+2f_{k3}+f_{k4} \,\right]}$$

donde $f_{k1}= f(t_k\,,\,y_k)$ , $f_{k2}= f(t_k+\frac{h}{2}\,,\,y_k+\frac{h}{2}f_{k1})$ , $f_{k3}= f(t_k+\frac{h}{2}\,,\,y_k+\frac{h}{2}f_{k2})$ , $f_{k4}= f(t_k+h\,,\,y_k+h\,f_{k3})$

Se puede demostrar que el error local (cometido en cada paso) para cada uno de los métodos citados es proporcional, respectivamente, a $h^2$, $h^3$ y $h^5$, mientras que el error acumulado en sucesivas iteraciones es de orden h, $h^2$ y $h^4$. Como era de esperar los resultados mejoran al tomar h más pequeño (pero sólo hasta un límite ya que el error de redondeo que posee toda calculadora u ordenador hace que si disminuimos demasiado el paso h, aparte de incrementarse de tiempo de cálculo, puede aumentar el error).

**Ej 1 .** $\boxed{y'=y^2-t}$ Hallemos numéricamente entre –1 y 3 la solución con $y(-1)=0$ .

El dibujo aproximado de la sección anterior no nos aclara si se trata de una de las soluciones que se van a infinito o de una de las que cruzan la isoclina de máximos. Comenzamos con el paso h=0.1. Los $y_k$ obtenidos por los tres métodos están en la siguiente tabla (sólo hemos escrito los correspondientes a los t enteros para t ≥0):

| t | Euler | Euler-mod | Runge-Kutta |
|---|---|---|---|
| –1 | 0 | 0 | 0 |
| –0.9 | 0.1 | 0.0955 | 0.0953100738 |
| –0.8 | 0.191 | 0.1826934847 | 0.1823176520 |
| –0.7 | 0.2746481 | 0.2629009594 | 0.2623378481 |
| –0.6 | 0.3521912579 | 0.3371304370 | 0.3363726607 |
| –0.5 | 0.4245951261 | 0.4061567380 | 0.4051902841 |
| –0.4 | 0.4926232282 | 0.4705749490 | 0.4693783604 |
| –0.3 | 0.5568909927 | 0.5308364662 | 0.5293796824 |
| –0.2 | 0.6179037505 | 0.5872727793 | 0.5855155255 |
| –0.1 | 0.6760842550 | 0.6401101498 | 0.6379997588 |
| 0 | 0.7317932469 | 0.6894770720 | 0.6869456018 |
| 1 | 1.214197534 | 0.9357162982 | 0.9176486326 |
| 2 | 1.988550160 | –0.1256257297 | –0.1884460868 |
| 3 | 272.5279419 | –1.528819223 | –1.541258296 |

Aunque inicialmente los números son similares, los errores acumulados del método de Euler nos dan para t positivos unos valores de la solución ya totalmente diferentes a los reales, que serán más parecidos a los hallados por otros métodos más exactos (convendrá, siempre que se pueda, hacerse una idea de las soluciones que se están tratando antes de meterse con el cálculo numérico para estar avisados sobre las posibles anomalías). Repitiendo los cálculos con pasos más pequeños se obtiene si:

| | t | Euler | Euler-mod | Runge-Kutta |
|---|---|---|---|---|
| h=0.05: | 0 | 0.7100063518 | 0.6875612633 | 0.6869451577 |
| | 3 | –1.361623743 | –1.538408604 | –1.541275123 |
| h=0.01: | 0 | 0.6916677024 | 0.6869692560 | 0.6869451313 |
| | 3 | –1.526589427 | –1.541165493 | –1.541276176 |

**Ej 2.** $\boxed{y'=t-2y}$ En la sección anterior hallamos su solución general: $y=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-2t}$ .

Vamos a resolverla numéricamente con y(0)=1 para comparar con los valores exactos (para ese dato inicial es C=5/4). Para h=0.1 listamos todos los resultados parciales:

| t | Euler | Euler-mod | Runge-Kutta | exacto |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.1 | 0.8 | 0.825 | 0.8234166667 | 0.8234134413 |
| 0.2 | 0.65 | 0.6905 | 0.6879053389 | 0.6879000575 |
| 0.3 | 0.54 | 0.58921 | 0.5860210311 | 0.5860145451 |
| 0.4 | 0.462 | 0.5151522 | 0.5116682856 | 0.5116612051 |
| 0.5 | 0.4096 | 0.463424804 | 0.4598565477 | 0.4598493015 |
| 0.6 | 0.37768 | 0.4300083393 | 0.4264998841 | 0.4264927649 |
| 0.7 | 0.362144 | 0.4116068382 | 0.4082530051 | 0.4082462049 |
| 0.8 | 0.3597152 | 0.4055176073 | 0.4023770104 | 0.4023706475 |
| 0.9 | 0.36777216 | 0.4095244380 | 0.4066294710 | 0.4066236103 |
| 1 | 0.384217728 | 0.4218100392 | 0.4191744355 | 0.4191691040 |

Comparamos ahora el resultado para t=1 con diferentes pasos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **h=0.1** | 0.3842177280 | 0.4218100392 | 0.4191744355 | 0.4191691040 |
| **h=0.05** | 0.4019708182 | 0.4197780719 | 0.4191694105 | 0.4191691040 |
| **h=0.01** | 0.4157744449 | 0.4191920025 | 0.4191691045 | 0.4191691040 |
| **h=0.001** | 0.4188306531 | 0.4191693299 | 0.4191691040 | 0.4191691040 |
| **h=0.0001** | 0.4191352691 | 0.4191691063 | 0.4191691040 | 0.4191691040 |

(obsérvese por ejemplo como el Runge-Kutta con h=0.1 da un valor más exacto que el Euler con h=0.0001 [ y son 40 frente a 10000 evaluaciones de la función f(t,y) ] )

## 1.4 Existencia y unicidad

Consideremos el problema de valores iniciales $[P] \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$

Supondremos la f definida en un determinado subconjunto $D \subset \mathbf{R}^2$ y que $(t_o,y_o) \in D$.

Precisamos con detalle la definición dada de solución: una **solución** de [P] es una función $y(t)$ **derivable en un intervalo** $I \ni t_o$ tal que $y(t_o)=y_o$ y tal que para todo $t \in I$ se cumple que $(t,y(t)) \in D$ e $y'(t) = f(t,y(t))$ .

Nuestro objetivo es precisar en qué condiciones existe una única solución de [P].

Sea $E = \{y:I \to \mathbf{R} \,/\, y \text{ continua}\}$ . Dada una $y \in E$ la función Ty definida por:

$$\boxed{Ty(t) = y_o + \int_{t_o}^{t} f(s,y(s))\, ds}$$

será también continua si f es continua. Hemos definido así un operador $T:E \to E$ que será importante en la demostración de los teoremas de existencia y unicidad.

**Teor 1.** y es solución de [P] $\Leftrightarrow$ y es punto fijo de T (es decir, si Ty=y )

El teorema fundamental del asegura que y es solución de [P] si y sólo si satisface la ecuación integral $y(t) = y_o + \int_{t_o}^{t} f(s,y(s))\, ds$ de donde se sigue el resultado.

En la teoría de análisis funcional hay resultados de existencia y unicidad para puntos fijos de operadores, como el siguiente **teorema de la aplicación contractiva:**

**Teor 2.** Sea E un espacio de Banach (normado y completo) y sea $T:E \to E$ un operador tal que para todo $y,y^* \in E$ se tiene $\| Ty - Ty^* \| \le a \| y - y^* \|$ , $0 \le a < 1$. Entonces existe un único punto fijo para T.

A partir de cualquier $y_0$ de E definimos la sucesión: $y_1=Ty_0$ , $y_2=Ty_1$ , … , $y_{n+1}=Ty_n$ , …

Probamos que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy:

$$\| y_n - y_{n+1} \| = \| Ty_{n-1} - Ty_n \| \le a \| y_{n-1} - y_n \| \le a^2 \| y_{n-2} - y_{n-1} \| \le \dots \to \| y_n - y_{n+1} \| \le a^n \| y_0 - y_1 \|$$

$$\to \| y_n - y_{n+k} \| = \| y_n - y_{n+1} + y_{n+1} - \dots - y_{n+k-1} + y_{n+k-1} - y_{n+k} \| \le \| y_n - y_{n+1} \| + \dots + \| y_{n+k-1} - y_{n+k} \| \le$$

$$\le \left[ a^n + a^{n+1} + \dots + a^{n+k-1} \right] \| y_0 - y_1 \| = \frac{a^n - a^{n+k}}{1-a} \| y_0 - y_1 \| \le \frac{a^n}{1-a} \| y_0 - y_1 \| < \varepsilon$$

para cualquier $\varepsilon$ dado, si n es suficientemente grande.

Como E es completo $\{y_n\}$ converge a un elemento y de E. Veamos que y es punto fijo:

$$T(y) = T(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} T(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = y$$

pues T es continua ($\| Ty - Ty^* \|$ es lo pequeño que queramos si $\| y - y^* \|$ es pequeño).

Nos falta ver que y es el único punto fijo. Si y* también satisface que Ty* = y* entonces

$$\| y - y^* \| = \| Ty - Ty^* \| \le a \| y - y^* \| \to y^* = y$$

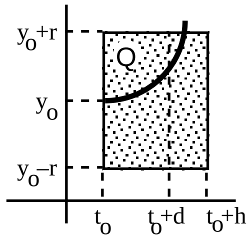
En el enunciado del primer teorema de existencia y unicidad que daremos aparece el término que definimos a continuación:

Diremos que una $f(t,y)$ es **lipschitziana respecto de la y** en $D\subset\mathbf{R}^2$ si existe un $L$ (constante de Lipschitz) tal que $|f(t,y)-f(t,y^*)| < L\,|y-y^*|$ para todo $(t,y), (t,y^*)\in D$.

**Teor 3.** Sea f continua y lipschitziana respecto de la y en

$$Q = [t_o,t_o+h] \times [y_o-r,y_o+r]$$

Entonces [P] posee solución única definida al menos en el intervalo $I=[t_o,t_o+d]$ donde $d=\text{mín}\left\{h, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\right\}$, siendo $M$ el máximo de $|f(t,y)|$ en $Q$ y $L$ la constante de Lipschitz.




(observemos que el teorema asegura que existe solución única definida al menos en un intervalo (lo que se llama solución **local**) y que este intervalo podría ser pequeño (aún menor que el $[t_o,t_o+h]$ en el que es continua la f ); en la próxima sección ya nos preocuparemos de cuál es el intervalo máximo de definición de las soluciones)

Utilicemos el teorema de la aplicación contractiva para el operador $T{:}E\to E$ definido para el teorema 1, con $E=\{y: I\equiv[t_o,t_o+d]\to\mathbf{R} \,/\, y \text{ continua}\}$. Se supone conocido que este conjunto es un espacio de Banach con la norma del supremo: $\|y\| = \text{máx}\,\{|y(t)| : t\in I\}$.

Probemos primero que T es contractiva: sean $y,y^*\in E$ entonces:

$$|(Ty-Ty^*)(t)| \le \int_{t_o}^{t} |f(s,y(s))-f(s,y^*(s))|\,ds \le L\int_{t_o}^{t} |y(s)-y^*(s)|\,ds \le L\int_{t_o}^{t} \|y-y^*\|\,ds \le$$
$$\le Ld\|y-y^*\| \le \tfrac{1}{2}\|y-y^*\| \quad \forall t\in I \qquad \to \qquad \|Ty-Ty^*\| \le \tfrac{1}{2}\|y-y^*\|$$

Como la f sólo la suponemos continua en Q, dada una $y\in E$ en principio Ty podría no ser continua. Pero si la gráfica de y se mueve en $[t_o,t_o+d] \times [y_o-r,y_o+r]$ sí podemos asegurar que lo es pues entonces $f(t,y(t))$ es continua y Ty, primitiva de continua, también lo será. Además esta Ty tiene también su gráfica contenida en ese mismo rectángulo, pues para todo $t\in I$ se tiene que $(t,Ty(t))\in Q$ ya que:

$$|Ty(t)-y_o| \le \int_{t_o}^{t} |f(s,y(s))|\,ds \le M\int_{t_o}^{t} ds \le M(t-t_o) \le Md \le r \quad \text{si } t\in I$$

Según esto, son continuas las funciones de la sucesión $\{y_n\}$ obtenida aplicando el operador T indefinidamente a la función constante $y_o(t)\equiv y_o$, es decir, la sucesión:

$$y_o(t)=y_o \ , \quad y_1(t) = y_o+\int_{t_o}^{t} f(s,y_o)\,ds \ , \quad y_2(t) = y_o+\int_{t_o}^{t} f(s,y_1(s))\,ds \ , \ \ldots$$

(llamadas **aproximaciones sucesivas de Picard**)

Esta $\{y_n\}$, según la demostración del teorema 2, converge hacia el único punto fijo de T en E que por el teorema 1 resulta ser la solución única de [P].

(hemos enunciado y demostrado el teorema a la derecha de $t_o$, pero igual se podría haber demostrado a la izquierda, sustituyendo los intervalos $[t_o,t_o+h]$ y $[t_o,t_o+d]$ por los intevalos $[t_o,t_o-h]$ y $[t_o,t_o-d]$ )

Observemos que además de demostrar el teorema hemos obtenido una forma de hallar funciones próximas a la solución de [P]. Si estamos en las hipótesis del teorema, las aproximaciones de Picard convergen uniformemente en I (lo hacen en norma) hacia la solución única. [En la práctica las cosas no serán tan fáciles, pues nos pueden salir primitivas no elementales o complicadas de calcular; además, a diferencia de los métodos de 1.3, éste no es programable].

La hipótesis de lipschitzianidad del teorema 3 se puede sustituir por otra más fuerte (pero mucho más fácil de comprobar) basándonos en:

**Teor 4.** $\boxed{\text{f y } f_y \text{ continuas en } Q\subset\mathbf{R}^2 \text{ compacto } \Rightarrow \text{ f lipschitziana respecto de la y en Q}}$

Sean $(t,y),(t,y^*)\in Q$. Aplicando el teorema del valor medio a f vista sólo como función de la segunda variable y se tiene que: $f(t,y)-f(t,y^*) = f_y(t,c)\,[y-y^*]$ para algún $c\in(y,y^*)$.

Como $|f_y|$ es continua en el compacto Q alcanza en él su valor máximo L y por tanto:

$$|f(t,y)-f(t,y^*)| = |f_y(t,c)|\,|y-y^*| \leq L\,|y-y^*|$$

La implicación contraria no es cierta (aunque casi todas las funciones lipschitzianas que aparezcan en la práctica tengan derivada continua) :

$f(t,y)=|y|$ es lipschitziana en todo $\mathbf{R}^2$ pues $\big|\,|y|-|y^*|\,\big|\leq|y-y^*|\quad\forall(t,y),(t,y^*)\in\mathbf{R}^2$
(L=1 o cualquier real > 1) , y sin embargo para ella no existe $f_y$ cuando y=0 .

Podemos pues escribir el siguiente teorema de existencia y unicidad (sólo algo más débil que el anterior) que será el que aplicaremos normalmente y cuyas hipótesis serán, en la mayoría de los casos, comprobables a simple vista:

**Teor 5.** Si f y $f_y$ son continuas en un entorno de $(t_o,y_o)$ el problema [P] posee solución única definida al menos en un intevalo que contiene a $t_o$

(no nos molestaremos en precisar el d que nos da el teorema 3, pues la solución y(t) estará usualmente definida en un intervalo mayor que el $[t_o-d,t_o+d]$ ).

Por último, si a f se le exige sólo la continuidad se puede demostrar (aunque el camino sea mucho más largo) que hay solución aunque puede fallar la unicidad:

**Teor 6.** Si f es continua en un entorno de $(t_o,y_o)$ posee [P] al menos una solución definida en un entorno de $t_o$

**Ej 1.** El problema $\boxed{\begin{matrix} y'=\operatorname{sen}(t-\ln[y^2+e^t]) \\ y(t_o)=y_o\end{matrix}}$ tiene solución única local para todo $t_o$ y todo $y_o$ pues f y $f_y$ son continuas en un entorno de $(t_o,y_o)$ (son continuas en todo $\mathbf{R}^2$ ) .

**Ej 2.** Sea $\boxed{\begin{matrix} y'=y^2-t \\ y(-1)=0\end{matrix}}$ f y $f_y$ continuas en un entorno de $(-1,0)\to$ solución única.

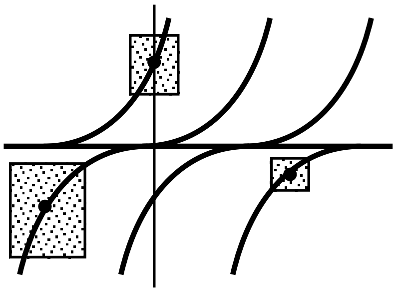
Hallemos las dos primeras aproximaciones de Picard (ahora las integrales son sencillas):

$$y_0(t)=0 \;\to\; y_1(t)=0+\int_{-1}^{t}(-s)\,ds=\tfrac{1}{2}[1-t^2] \;\to$$
$$y_2(t)=\int_{-1}^{t}\left(\tfrac{1}{2}[1-t^2]^2-s\right)ds=\frac{19}{30}+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{20}$$

Los valores de $y_1$ e $y_2$ para diferentes t están a la derecha. Comparando con los números obtenidos en la sección 1.3 se ve que las aproximaciones no son malas para t cercano a −1 aunque no tienen nada que ver con la realidad para valores grandes de t . Pero este método nos ha dado expresiones analíticas aproximadas de la solución.

| t | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| –1 | 0 | 0 |
| –0.9 | 0.095 | 0.09530883333 |
| –0.8 | 0.18 | 0.1822826667 |
| –0.7 | 0.255 | 0.2620965 |
| –0.6 | 0.32 | 0.3354453333 |
| –0.5 | 0.375 | 0.4026041667 |
| –0.4 | 0.42 | 0.463488 |
| –0.3 | 0.455 | 0.5177118333 |
| –0.2 | 0.48 | 0.5646506667 |
| –0.1 | 0.495 | 0.6034995 |
| 0 | 0.5 | 0.6333333333 |
| 1 | 0 | 0.2666666667 |
| 2 | –1.5 | –0.6 |
| 3 | –4 | 4.533333333 |

**Ej 3.** $\boxed{\begin{matrix} y' = 3y^{2/3} \\ y(t_o) = y_o \end{matrix}}$ Como $f(t,y)=3y^{2/3}$ es continua en todo $\mathbf{R}^2$ existe solución $\forall(t_o,y_o)$.



Además $f_y(t,y)=2y^{-1/3}$ es continua en $\mathbf{R}^2$–{y=0} y por tanto la solución es única si $y_o\neq 0$.
Si $y_o=0$ , como $f_y$ no está definida (y ni siquiera, como se puede comprobar, es f lipschitziana en un entorno) puede fallar la unicidad (los teoremas son sólo condiciones suficientes). De hecho podemos resolver y comprobar que tanto $y=0$ como $y=(t-t_o)^3$ son soluciones de la ecuación satisfaciendo $y(t_o)=0$ (a las soluciones formadas por puntos en los que falla la unicidad (como la y=0 del ejemplo) se les llama soluciones singulares y no suelen estar recogidas por las expresiones de las soluciones generales).

Los teoremas anteriores hablan de existencia y unicidad de soluciones. Deduzcamos de ellos resultados para **curvas integrales** que eran soluciones tanto de la ecuación

[e] $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ , como de la ecuación equivalente [e*] $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(t,y)}$ .

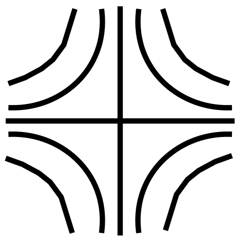
Si por un punto pasa una única solución y(t) de [e] evidentemente pasará también una única curva integral. Pero por un punto $(t_o,y_o)$ tal que en un entorno suyo f o $f_y$ no sean continuas pero tal que 1/f y $\partial(1/f)/\partial t$ sí lo sean pasará una única solución t(y) de [e*] y, por tanto, una única curva integral (que probablemente no será solución de [e]).

**Ej 4.** $\boxed{\frac{dy}{dt} = (t^2+y^2)^{-1}}$ cuya equivalente es $\frac{dt}{dy} = t^2+y^2$ (ni una ni otra son resolubles)

El teorema de existencia y unicidad nos asegura que hay una única solución y(t) de la ecuación dada satisfaciendo $y(t_o)=y_o$ para todo $(t_o,y_o)\neq(0,0)$. Por (0,0), al no tener problemas de unicidad la equivalente, pasa una única curva integral (como la solución t(y) que pasa por dicho punto es creciente y tiene pendiente t'(0)=0 esta curva integral será de hecho también una función y(t) pero con derivada $\infty$ en t=0).

**Ej 5.** Sean [e] $\boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{y^3}{t^3}}$ y su equivalente [e*] $\frac{dt}{dy} = -\frac{t^3}{y^3}$ .

El teorema de existencia y unicidad nos asegura que hay una única solución y(t) de [e] con $y(t_o)=y_o$ para todo $t_o\neq 0$ y todo $y_o$. Con dicho teorema no podemos precisar si hay ninguna, una, varias o infinitas soluciones satisfaciendo $y(0)=y_o$.
Por otra parte [e*] posee una única solución t(y) que cumple $t(y_o)=t_o$ si $y_o\neq 0$ . Por tanto, por cada punto del plano, salvo tal vez por el origen, pasa una única curva integral.
Por (0,0) pasan al menos dos curvas: y=0 y t=0 (soluciones a ojo de [e] y de [e*]). Para ver si pasan más tenemos que dibujarlas aproximadamente o intentar resolverla.
Con unas pocas isoclinas se obtiene el siguiente dibujo:



En este caso podemos hallar las soluciones: $t^{-2}+y^{-2}=C$ (que no son fáciles de pintar) y podríamos dar la expresión de la solución única que pasa por $(t_o,y_o)$ (determinando la C y despejando la y).
Por un punto $(0,y_o)$ con $y_o\neq 0$ pasa la única curva integral t=0 (y ninguna solución pues está claro que t=0 no es solución de [e] ).
Por (0,0) pasan sólo las dos curvas integrales vistas: y=0 y t=0 , de las cuales sólo la primera es solución de [e]. A pesar de no ser ni continua la f en ese punto hay solución única con y(0)=0 (hablando con rigor, no podemos decir que y=0 sea solución en t=0 pues ahí la $f(t,y)=-y^3/t^3$ de nuestra ecuación no está definida, pero podríamos definir f(0,t)=0 ).

## 1.5 Prolongabilidad

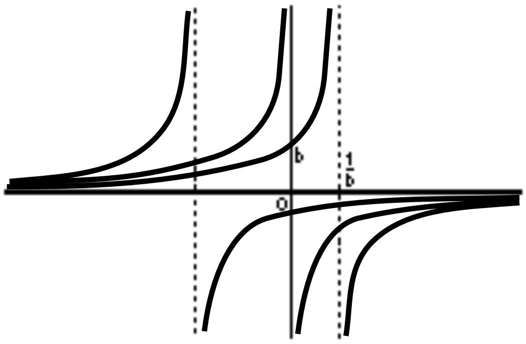
Seguimos tratando el problema de valores iniciales $\boxed{[P] \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}}$

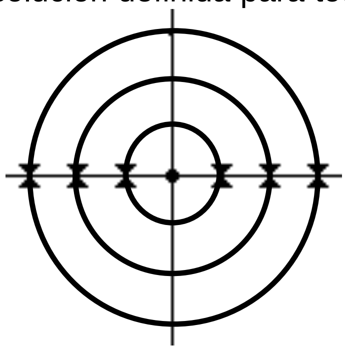
Supongamos que la f y la $f_y$ son continuas en $D\subset\mathbf{R}^2$ y que $(t_o,y_o)$ es un punto interior de D. Sabemos que entonces existe una única solución y(t) que está definida al menos en un intervalo $[t_o-d,t_o+d]$ . Pero, ¿hasta dónde se puede prolongar esta solución?, es decir, ¿cuál es el máximo intervalo I en el que está definida? En particular, nos interesa saber si y(t) es prolongable hacia la derecha hasta $+\infty$ y si lo es hacia la izquierda hasta $-\infty$ (con otras palabras, si está definida en $[t_o,\infty)$ y si lo está en $(-\infty,t_o]$ ).

Aunque D sea todo $\mathbf{R}^2$ esto puede no suceder como muestra el sencillo ejemplo

$\begin{cases} y'= y^2 \\ y(0)=b \end{cases}$ cuya solución es $y=\dfrac{b}{1-bt}$

y que si b>0, sólo puede prolongarse (hacia la derecha) al intervalo $[0,1/b)$ (la expresión de la y tiene sentido para todo $t\neq b$, pero para $t>1/b$ describe otra solución diferente) y que si $b<0$ no alcanza $-\infty$ , pues antes se encuentra la asíntota $t=1/b<0$. Sólo para b=0 se obtiene una solución definida para todo t : la y=0 .



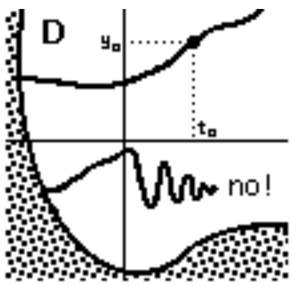
Otra forma en que la solución pasa a estar definida sólo en un intervalo finito viene ilustrada por la ecuación

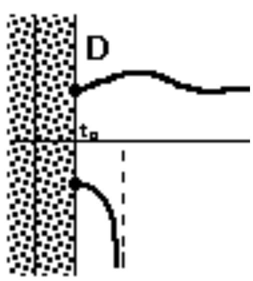
$y'=-\dfrac{t}{y}$ , de curvas integrales: $t^2+y^2=C$ .

Esta ecuación presenta problemas de existencia y unicidad sobre la recta y=0 que es precisamente donde va a morir cada una de las semicircunferencias solución. (Obsérvese de paso que por el origen, único punto en que fallan los teoremas de existencia y unicidad tanto para la ecuación dada como la equivalente no pasa ninguna curva integral).

Nuestro objetivo es obtener información sobre la prolongabilidad de las soluciones cuando, como es usual, no se pueda resolver la ecuación. Aceptaremos para ello dos teoremas (intuitivamente claros) sin entrar en detalles técnicos de demostraciones.

**Teor 1.** En las hipótesis citadas arriba la gráfica de la solución y(t) de [P] no se para en el interior de D.
En particular, si D es el semiplano $\{t\geq t_o\}$ o bien existe un $t_1>t_o$ tal que $|y(t)|\to\infty$ cuando $t\to t_1$ o bien y(t) está definida en todo $[t_o,\infty)$ .



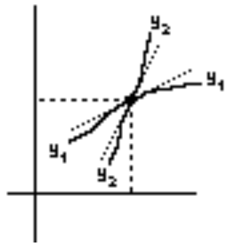




(evidentemente se tiene un resultado enteramente análogo para la izquierda de $t_o$)

La gráfica no se puede parar en un punto interior ya que, por el teorema de existencia y unicidad, existiría una solución local partiendo de dicho punto.
Podríamos escribir el teorema con otras palabras: la gráfica de las soluciones tienden hacia la frontera de D, entendiendo que si D es no acotado "el infinito" pertenece a dicha frontera.

Para distinguir entre las posibilidades que ofrece el teorema anterior es útil comparar las soluciones de un problema [P] complicado con las de otros fáciles de resolver:

**Teor 2.** Sean $\begin{cases} y' = f_1(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$ y $\begin{cases} y' = f_2(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$ con $f_i$ y $(f_i)_y$ continuas en $D \ni (t_o,y_o)$ y cuyas soluciones respectivas $y_1$ e $y_2$ están definidas en un intervalo común $I \ni t_o$.
Si $f_1 \le f_2$ en D entonces: $y_1(t) \le y_2(t)$ para $t \ge t_o$, $t \in I$.
$y_1(t) \ge y_2(t)$ para $t \le t_o$, $t \in I$.



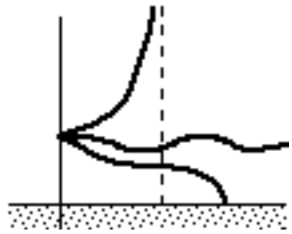

La idea del teorema es clara: si la pendiente de $y_1$ es más pequeña que la de $y_2$, la propia solución $y_1$ es más pequeña a la derecha y mayor a la izquierda que $y_2$.

**Ej 1.** $\begin{cases} y' = 2t - \operatorname{sen} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ La ecuación no es resoluble. f y $f_y$ son continuas en $\mathbf{R}^2$.

Consideremos los dos sencillos problemas: $\begin{cases} y' = 2t-1 \\ y(0)=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} y' = 2t+1 \\ y(0)=1 \end{cases}$.

El teorema 2 asegura que la solución única del problema inicial está comprendida entre las de los dos últimos (que son $y = t^2-t+1$ e $y = t^2+t+1$) y por tanto no puede irse a infinito en tiempo finito. Por el teorema 1, está definida para todo t real.

**Ej 2.** $\begin{cases} y' = y^2 + t^2\sqrt{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ f y $f_y$ son continuas en $\{y>0\}$.



El teorema 1 da tres posibilidades para $t \ge 0$: que la solución muera en y=0, que esté definida en $[0,\infty)$ o que tenga una asíntota. Como está por encima de $y=1/(1-t)$, solución de $y'=y^2$ con $y(0)=1$, el teorema 2 asegura que "explota" antes de t=1.

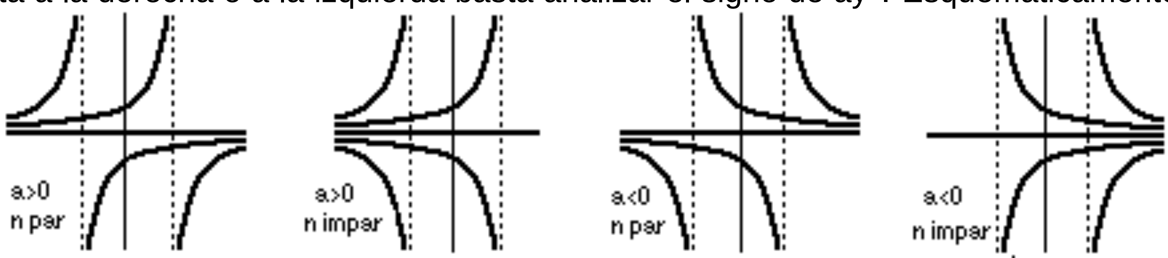
Veamos dos tipos de problemas clásicos para comparar. Primero el lineal:

$$[Pl] \begin{cases} y' = a(t)y + f(t) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$ (su solución la conocemos desde la sección 1.1)

Supongamos que a y f son continuas en un intervalo $I \ni t_o$ (el I puede ser finito o infinito, cerrado o abierto). Como tanto el segundo miembro de la ecuación como su derivada con respecto a y son continuas en un entorno del punto, [Pl] tiene solución única. Además, como esta solución viene dada por exponenciales e integrales de las funciones a y f, se tiene que **la solución de** [Pl] **está definida para todo** t **de** I.

$\begin{cases} y' = ay^n,\ a \ne 0,\ n = 2,3,\ldots \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$ tiene por solución $y = \dfrac{y_o}{[1-a(n-1)y_o^{n-1}(t-t_o)]^{1/(n-1)}}$ ,

cuyo denominador se anula (si $y_o \ne 0$) en $t_1 = t_o + [a(n-1)y_o^{n-1}]^{-1}$. Luego (salvo $y \equiv 0$) **todas las soluciones de la ecuación tienen una asíntota**. Para saber si la asíntota está a la derecha o a la izquierda basta analizar el signo de $ay^n$. Esquemáticamente:



## 1.6 Dependencia continua

El estudio de un sistema físico nos puede conducir a un problema

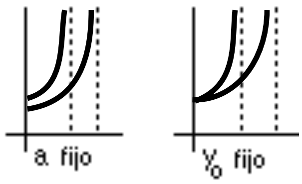
$$[P] \quad \begin{cases} y' = f(t,y,a) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

donde la f depende de t y de un parámetro a. En la determinación experimental del parámetro exístirán errores de medición. No sería útil nuestra ecuación para describir el sistema real si a valores del parámetro parecidos no correspondiesen soluciones semejantes, es decir, si la solución no fuese una función continua de a.

De la misma forma, tampoco será exacta la determinación del dato inicial. Si $y_o$ es el verdadero dato inicial y nosotros hemos estimado $y_o^*$ , ¿serán cercanas las soluciones correspondientes a ambos datos iniciales?

El teorema de esta sección (que admitiremos sin demostrar), nos asegurará que **si la f es regular existirá siempre dependencia continua de parámetros y datos iniciales**. Pero antes de enunciarlo estudiemos un ejemplo sencillo.

**Ej 1.** Sea $\begin{cases} y' = ay^2 \\ y(0)=y_o \end{cases}$ Su solución es $y = \frac{y_o}{1-ay_ot}$ .




Consideremos un a y un $y_o$ dados y supongamos que ambos, por ejemplo, son positivos. Ocupándonos sólo de la solución para $t \geq 0$ observamos que está definida hasta $t_1 = a^{-1}y_o^{-1}$. Para valores del parámetro y del dato inicial próximos la solución tendrá un intervalo de definición distinto pero similar. En un intervalo en el que todas estas soluciones próximas esten definidas (es decir, en el que el denominador de las soluciones no se anule) está claro que la expresión obtenida de la solución, que podemos mirar como una función de las variables t , $y_o$ y a , depende de las tres de forma continua.

Consideremos ya el problema general [P]. Llamemos $y(t,y_o,a)$ a su solución (ya que dependerá del valor del parámetro y del dato inicial además de depender de la variable independiente). Sean a e $y_o$ dados y supongamos que f y $f_y$ son funciones continuas de sus tres variables en un entorno de $(t_o,y_o,a)$. Sabemos que entonces $y(t,y_o,a)$ está definida al menos en un intervalo $I = [t_o,t_o+d]$ . En estas condiciones se tiene:

**Teor 1.** Si $|y_o-y_o^*|$ y $|a-a^*|$ son suficientemente pequeños entonces $y(t,y_o^*,a^*)$ está también definida en ese mismo intervalo I y además cuando $y_o^* \to y_o$ y $a^* \to a$ , se tiene que $y(t,y_o^*,a^*) \to y(t,y_o,a)$ para todo t de I .

**Ej 2.** $\begin{cases} y' = at^{-1}y-1 \\ y(1)=0 \end{cases}$ Como la $f(t,y,a)$ es continua para todo a en un entorno de (1,0,a) , existe dependencia continua del parámetro a .

Comprobémoslo resolviendo la ecuación. Como es lineal y sus coeficientes son continuos en $\{t>0\}$ sabemos que la solución va a estar definida en todo $(0,\infty)$ para cualquier a , con lo que no nos preocuparemos del intervalo I del teorema.

La solución es $$y = t^a \int_1^t t^{-a}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-a}(t-t^a) & \text{si } a\neq 1 \\ t^a \ln t & \text{si } a=1 \end{cases}$$

Que, aunque no lo parezca en a=1, es función continua de a (hallando por L'Hôpital el límite cuando $a \to 1$ de la expresión de arriba se obtiene la expresión de abajo).

## 1.7 Estabilidad

En la sección anterior vimos que el problema $[P]\ \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$

con f y $f_y$ continuas en un entorno de $(t_o,y_o)$ dependía continuamente de los datos iniciales. Se tenía que si la solución y(t) de [P] estaba definida en $[t_o,t_o+d]$, las soluciones y*(t) correspondientes a datos iniciales $y_o^*$ cercanos estaban también definidas en todo ese intervalo y se parecían en él a la solución de [P] pues constituían una función continua de $y_o$. Lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $|y_o-y_o^*|<\delta$ entonces $|y(t)-y^*(t)|<\varepsilon$ para todo $t\in[t_o,t_o+d]$.

Supongamos ahora que la solución de [P] está definida para todo $t\geq t_o$. ¿Se parecerán a ella en todo el intervalo infinito $[t_o,\infty)$ las soluciones y*(t) de datos inciales similares? Ya hemos visto ejemplos en que esto no sucede. Por ejemplo, la solución de $y'=y^2$ que satisface y(0)=0 (la solución constante y=0 ) está definida para todo $t\geq 0$ y sin embargo la correspondiente a un dato inicial $y(0)=y_o^*$ (que como vimos es $y=y_o^*/[1-t\,y_o^*]$ ) ni siquiera está definida hasta $\infty$ cuando $y_o^*>0$, puesto que tiene una asíntota en $t=1/y_o^*$.

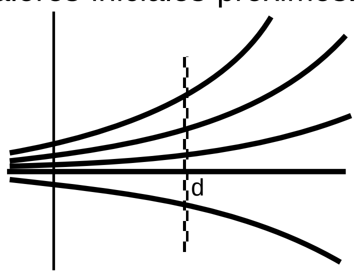
Incluso aunque todas las soluciones estén definidas en $[t_o,\infty)$ pueden ser para t grande muy diferentes entre sí, a pesar de que (por la dependencia continua) en todo intervalo finito se parezcan las soluciones que satisfacen valores iniciales próximos. Por ejemplo, las soluciones de los problemas:

$\begin{cases} y' = y \\ y(0)=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y' = y \\ y(0)=y_o^* \end{cases}$, que son $y\equiv 0$ e $y^*=e^t y_o^*$,

en cualquier intervalo finito [0,d] satisfacen

$|y^*-y|=e^t|y_o^*|\leq e^d|y_o^*|<\varepsilon$ si $|y_o^*-0|<e^{-d}\varepsilon$ $\forall t\in[0,d]$

pero difieren entre sí tanto como queramos para valores de t suficientemente grandes.

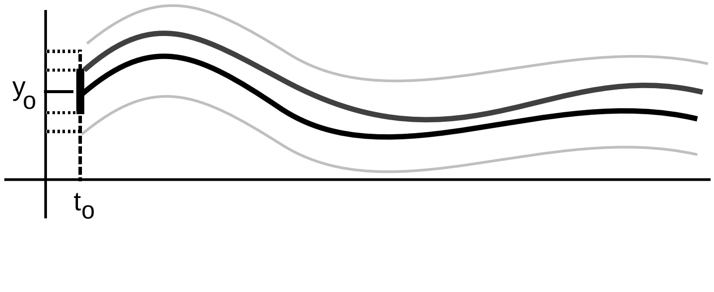



Llamaremos **estables** a aquellas soluciones definidas hasta infinito para las que sí sucede que modificando ligeramente los datos iniciales se obtienen soluciones próximas para todo valor de $t\geq t_o$ . Definiéndolo con rigor:

> Supongamos que [P] tiene solución única y(t) definida en $[t_o,\infty)$ . Decimos que y(t) es **estable** si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que toda solución y*(t) con $|y(t)-y^*(t)|<\delta$ satisface:
>
> **1]** y*(t) existe y esta definida en $[t_o,\infty)$
>
> **2]** $|y(t)-y^*(t)|<\varepsilon$ para todo $t\geq t_o$
>
> Decimos que y(t) es **asintóticamente estable** si además y*(t) satisface:
>
> **3]** $|y(t)-y^*(t)|\to 0$ cuando $t\to\infty$
>
> Una solución que no es estable se dice **inestable**.

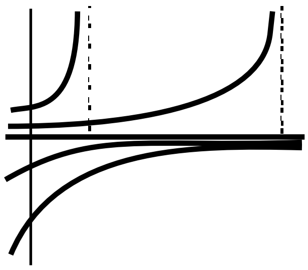
(a veces se dice que la estabilidad definida es "a la derecha" para distinguirla de la estabilidad "a la izquierda" que se define análogamente para el intervalo $(-\infty,t_o]$ )

Gráficamente, que y(t) es estable significa que para cualquier banda de altura $2\varepsilon$ en torno a ella existe un segmento de altura $2\delta$ en torno a $y_o$ tal que las soluciones que parten de él permanecen para todo $t\geq t_o$ dentro de la banda.



Para las ecuaciones de primer orden que estamos tratando se puede demostrar que
**1]** y **3]** $\Rightarrow$ **2]** (esto no es cierto para sistemas y ecuaciones de mayor orden) ;
así pues, para ver que la solución de una ecuación de primer orden es asintóticamente estable basta comprobar que toda solución que parte cerca de ella llega hasta $\infty$ y que la diferencia entre las dos soluciones tiende a 0 en el infinito, con lo que podemos evitar las acotaciones de **2]** que son siempre mucho más complicadas.

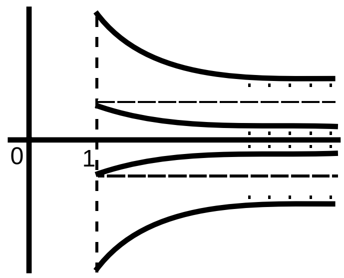
**Ej 1.** Analicemos la estabilidad de las soluciones de la conocida ecuación $\boxed{\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=y_o \end{cases}}$



Como las soluciones con $y_o>0$ no llegan hasta $\infty$ no tiene sentido para ellas hablar de estabilidad. La solución y=0 es claramente inestable pues las que parten cerca de ella por arriba ni siquiera están definidas para todo $t\geq 0$ (las que parten por debajo sí se parecen a y=0, pero esto debe suceder para toda solución que parta cerca). Cualquier solución con $y_o<0$ (definida hasta $\infty$) es asintóticamente estable: si $|y_o-y_o^*|$ es lo suficientemente pequeño la solución y* también llega hasta $\infty$ y la diferencia $|y-y^*| = \left| \frac{y_o}{1-ty_o} - \frac{y_o^*}{1-ty_o^*} \right| \to 0$ cuando $t\to\infty$ .

**Ej 2.** $\boxed{\begin{cases} y'=-y^3/t^3 \\ y(1)=0 \end{cases}}$ (en la sección 1.4 la dibujamos y la resolvimos: $t^{-2}+y^{-2}=C$ )

La solución cuya estabilidad analizamos es la y=0 .
La que satisface y(1)=b resulta ser $y_b= bt\left[b^2(t^2-1)+t^2\right]^{-1/2}$
Para todo b esta solución está definida para $t\geq 1$, pero cuando $t\to\infty$ no tiende a 0 sino a $b\left[b^2+1\right]^{-1/2}$ .
Por tanto y=0 no es asintóticamente estable.
Estable simplemente sí lo es: dado cualquier $\varepsilon$ tomando $\delta=\varepsilon$ se tiene que si $|b|<\delta$ es $|y_b|\leq|b|<\varepsilon$ para todo $t\geq 1$ .




(la estabilidad se puede probar sin conocer la expresión de $y_b$: como las soluciones decrecen en el primer cuadrante y crecen en el cuarto, a partir de t=1 se mueven entre las rectas y=0 e y=b, luego todas estan definidas hasta $\infty$ y es estable y=0).

El estudio de la estabilidad es, en general, complicado. Como se pueden resolver muy pocas ecuaciones normalmente no será posible acudir a las soluciones. En otros casos muy particulares se podrán obtener conclusiones estudiando la propia ecuación. Veamos resultados en ese sentido para **ecuaciones lineales**:

Sea $\boxed{[P] \begin{cases} y' = a(t)y+f(t) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}}$ , con a y f continuas en $[t_o,\infty)$.

Como sabemos, para cualquier $y_o$ , [P] tiene solución única definida para todo $t\geq t_o$, cuya expresión conocemos. La diferencia entre dos soluciones cualesquiera es entonces:

$$|y(t)-y^*(t)| = |y(t_o)-y^*(t_o)|\, e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \qquad \text{y por tanto:}$$

**Teor 1.**

> La solución de [P] es estable si y sólo si $e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds}$ está acotada.
>
> Es asintóticamente estable si y solo si $e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds}\to 0$ cuando $t\to\infty$ .

(observemos que **la estabilidad no depende de** $y_o$ **ni de** f(t) [ni del $t_o$ si los coeficientes son continuos a partir de ese punto]. Para una lineal tiene pues sentido hablar de la **estabilidad de la ecuación** pues o todas las soluciones son estables, o todas son asintóticamente estables, o todas son inestables. Esto era esperable pues las soluciones de una lineal son suma de una solución particular más la general de la homogénea y es ésta la que nos dice si todas las soluciones se acercan o no a una dada. De hecho tenemos que **una ecuación lineal es estable [asintóticamente estable] si y sólo si lo es la solución** y=0 **de la homogénea**).

**Ej 3.** $\boxed{y' = -\frac{y}{t} + \cos(\ln t)}$ La solución que satisface cualquier dato inicial $y(t_o)=y_o$ con $t_o>0$ es asintóticamente estable pues $e^{-\int dt/t} = \frac{1}{t} \to 0$ cuando $t \to \infty$

(si $t_o<0$ las soluciones $y=C/t + y_p$ sólo llegan hasta t=0; el teorema se ha enunciado para el caso en que los coeficientes son continuos a partir de $t_o$ ).

**Ej 4.** $\boxed{y' = ay + f(t)}$ es asintóticamente estable, estable simplemente o inestable según sea, respectivamente, a<0, a=0 o a>0

(pues $e^{at}$ tiende a 0, está acotada o no está acotada en cada uno de los tres casos).

El siguiente teorema que veremos (y que no demostraremos) permite analizar la estabilidad de y=0 para una ecuación no lineal que, en general, ya no será resoluble.

Consideremos [n] $\boxed{y' = a(t)y + h(t,y)}$ con h(t,0)=0 (así pues y=0 es solución).

Suponemos h y $h_y$ continuas al menos en una banda $[t_o,\infty)\times[-r,r]$ (para tener unicidad). Parece razonable que si la parte no lineal h(t,y) es "pequeña" la estabilidad de y=0 coincida con la estabilidad de la solución y=0 de la lineal [l] $y' = a(t)y$ . En efecto:

**Teor 2.** Supongamos que a(t) es constante o periódica y continua y que h(t,y)=o(|y|) uniformemente en $t \geq t_o$, es decir, que para $t \geq t_o$ se tiene

$|h(t,y)| \leq H(y)$ con $H(y)=o(|y|)$ cuando $y \to 0$ $\left[ H(y)/|y| \to 0 \text{ cuando } y \to 0 \right]$ .

En esas condiciones:

si [l] es asintóticamente estable entonces y=0 es solución asintóticamente estable de [n] a la derecha de $t_o$

si [l] es inestable entonces y=0 es inestable como solución de [n]

-

(intentemos hacer intuitivas las hipótesis: se obtendría la ecuación [n] al desarrollar por Taylor una ecuación no lineal y'=f(t,y) en torno a y=0, englobando en h(t,y) los términos de orden mayor que 1 que son o(|y|); para conseguir que la parte no lineal no varíe la estabilidad de la parte lineal hay que exigir tres cosas: que [l] tenga una tendencia fuerte a acercarse o alejarse de y=0, que la parte dependiente de t de h(t,y) se pueda acotar para que no sea demasiado grande y que a(t) no sea demasiado pequeña (en concreto se pide que a(t) sea constante o periódica porque el mayor interés de este teorema se da en los sistemas de ecuaciones (a los que se generaliza casi literalmente) y para ellos sólo se puede hablar de la estabilidad de la parte lineal en esos dos casos )).

**Ej 5.** $\boxed{y' = 4\cos^2 t\, y + \operatorname{sen} t\, y^2 - y^5}$ (ecuación no resoluble)

Como $e^{4\int \cos^2 t\, dt} = e^{2t+\operatorname{sen}2t}$ no está acotada en $+\infty$ la lineal $y' = 4\cos^2 t\, y$ es inestable.

Como $4\cos^2 t$ es continua y periódica y además $|h(t,y)| = |\operatorname{sen} t\, y^2 - y^5| \leq |y|^2 + |y|^5 = o(|y|)$ su inestabilidad la hereda la solución y=0 de la no lineal.

**Ej 6.** Veamos la importancia de que la h(t,y) sea o(|y|) uniformemente en t . Para ello consideramos para $t\geq 0$ las tres siguientes ecuaciones resolubles (de Bernouilli):

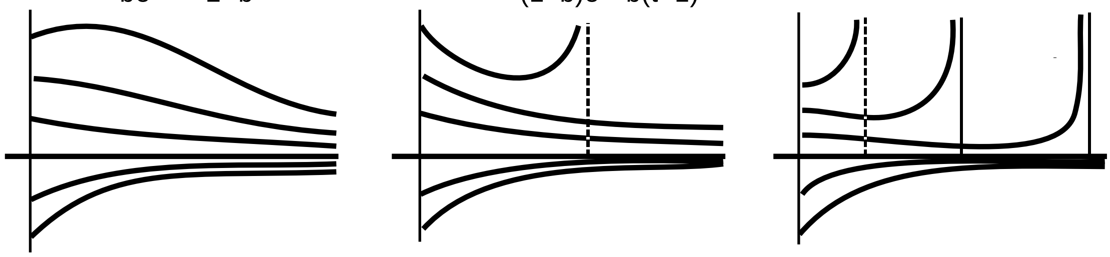
[1] $\boxed{y' = -y + e^{-t}y^2}$ [2] $\boxed{y' = -y + t\,y^2}$ [3] $\boxed{y' = -y + e^{t}y^2}$

La parte lineal es en los tres casos $y' = -y$ , asintóticamente estable. La no lineal es también en los tres casos o(|y|) , pero sólo se puede acotar para $t\geq 0$ en el primero:

$$|e^{-t}y^2| \leq |y|^2 = o(|y|) \,.$$

Sólo podemos deducir, aplicando el teorema, que la solución y=0 de la no lineal es asintóticamente estable a la derecha de t=0 para la ecuación [1].
Comprobemos esto y veamos lo que sucede para [2] y [3] hallando la solución $y_b$ que satisface $y(0)=b$. Se obtiene, respectivamente:

$$y_b = \frac{2be^{-t}}{be^{-2t}+2-b} \qquad y_b = \frac{b}{(1-b)e^{t}+b(t+1)} \qquad y_b = \frac{be^{-t}}{1-bt}$$

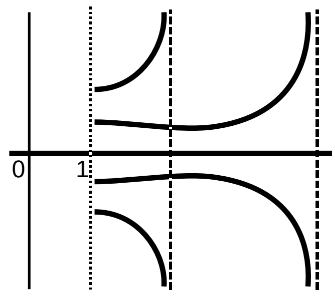


Como se observa, las tres expresiones tienden a 0 cuando $t\to\infty$. Además debe $y_b$ estar definida en $[0,\infty)$ para b próximo a 0. Analizando los denominadores se ve que esto sucede para [1] y [2] pero no para [3] (tiene asíntota en t=1/b). Por tanto y=0 es estable asintóticamente como solución de [1] y [2] e inestable como solución de [3].

**Ej 7.** $\boxed{y' = -\frac{y}{2t} + y^3}$ La lineal es asintóticamente estable ( pues $e^{-\int dt/2t} = t^{-1/2} \to 0$ ) pero no es constante ni periódica. Por tanto no podemos aplicar el teorema, a pesar de que la parte no lineal es o(|y|) y no depende de t . De hecho, imponiendo el dato inicial $y(1)=b$ (a partir de 1 no hay problemas de unicidad) se obtiene la solución:

$$y_b = \frac{b}{\sqrt{t}\sqrt{1-2b^2\ln t}}$$ que tiene una asíntota en $t=e^{1/2b^2}$ si $b\neq 0$ .

Así pues, y=0 es inestable a partir de t=1 en la no lineal.




**Ej 8.** $\boxed{y' = y^2 - (\cos t)y}$ Ahora tampoco podemos aplicar el teorema al ser la lineal simplemente estable (puesto que $e^{-\int \cos t\, dt} = e^{-\operatorname{sen} t}$ está acotada pero no tiende a 0). En la sección 1.2 hallamos su solución general: $y = e^{-\operatorname{sen} t}\left(C - \int e^{-\operatorname{sen} t}dt\right)^{-1}$ e hicimos un dibujo aproximado de sus soluciones que sugiere la inestabilidad de y=0. Para hallar la solución que satisface el dato inicial $y(0)=b$ debemos precisar la primitiva de la que hablamos para lo que fijamos los límites de integración. Entonces:

$$y_b = \frac{e^{-\operatorname{sen} t}}{\frac{1}{b} - \int_0^t e^{-\operatorname{sen} s}ds}$$

cuyo denominador se anula para todo b>0 al ser la integral una función continua que toma todos los valores reales positivos (es divergente si $t=\infty$). Confirmamos pues que y=0 es inestable.

## 1.8 Ecuaciones autónomas

Son ecuaciones en las que la variable independiente no aparece explícitamente

[a] $\boxed{y' = f(y)}$

Suponemos f' continua en **R** con lo que hay solución única para cualquier condición inicial. [a] es de variables separables. Sin embargo muchas de las características importantes de las soluciones se deducen fácilmente del estudio de la propia f :

**Teor 1.** $\boxed{y(t) \text{ solución de [a]} \Rightarrow y(t+C) \text{ es también solución de [a]}}$

Sea $z(t) = y(t+C)$ ; entonces $z'(t) = y'(t+C) = f(y(t+C)) = f(z(t))$

**Teor 2.** $\boxed{\text{Si } a\in \mathbf{R} \text{ es tal que } f(a)=0 \Rightarrow y(t)\equiv a \text{ es solución de [a]}}$

$y'(t) = 0 = f(a) = f(y(t))$

(a estas soluciones constantes se les llama también **soluciones de equilibrio**)

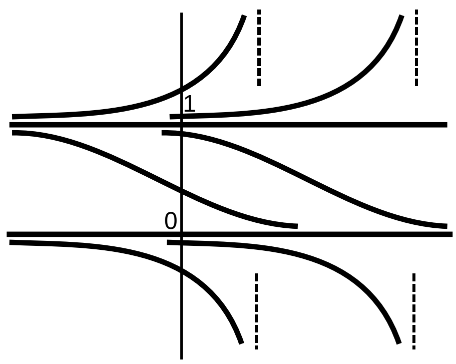
**Teor 3.** Cada solución de [a] o es constante, o es estrictamente creciente, o es estrictamente decreciente

Sea y solución. Si existe un $t_o$ para el que $y'(t_o)=0$ entonces $f(y(t_o))=0$ y por el teorema 2 $y(t)\equiv y(t_o)$ es solución, única que pasa por ese punto. Ninguna solución puede tener ni máximos ni mínimos a no ser que sea constante.

**Teor 4.** Toda solución acotada a la derecha de un $t_o$ tiende hacia una solución de equilibrio cuando $t\to\infty$ [ si lo está a la izquierda lo hace cuando $t\to-\infty$ ]

Si y(t) es constante, ya está. Sea y(t) monótona y acotada para $t\geq t_o$ (por los teoremas de prolongabilidad y(t) está definida en $[t_o,\infty)$ ). Un resultado elemental de análisis asegura que y(t) tiende hacia un límite a cuando $t\to\infty$. Probemos que f(a)=0. Como f es continua $y'(t)=f(y(t))$ también tiene límite si $t\to\infty$ y ese límite es f(a). Aplicando el teorema del valor medio a la y(t) en $[t, t+1]$ tenemos que existe un $c\in(t, t+1)$ tal que $y'(c) = y(t+1) - y(t)$ . Por tanto: $f(a) = \lim_{c\to\infty} y'(c) = \lim_{t\to\infty} [y(t+1)-y(t)] = a - a = 0$ . [Análogo a la izquierda].

**Ej 1.** $\boxed{y' = y^3 - y^2}$ Como $y^2(y-1)=0 \to y=0$ , $y=1$, estas son las soluciones constantes.




Como $y^2(y-1)>0$ si $y>1$ e $y^2(y-1)<0$ si $y<0$ o $y\in(0,1)$ sabemos qué soluciones crecen o decrecen y las soluciones de equilibrio a que tienden (sin llegar a tocarlas). Las soluciones que están por encima de y=1 llegan hasta $\infty$ pues si estuviesen acotadas deberían tender hacia una solución constante (la teoría vista no dice si en tiempo finito o infinito, pero como $y^3-y^2\geq y^3/2$ si $y\geq 2$ y esas soluciones superan y=2 de hecho explotan). Tampoco están acotadas las de $y<0$ (y también explotan pues $y^3-y^2\leq y^3$). Sabiendo además que las trasladadas a derecha e izquierda de una solución lo son también completamos el dibujo. (Podríamos además pintar alguna isoclina (son rectas y=K); no es útil para el dibujo la poco manejable solución general $\int(y^3-y^2)^{-1}dy=t+C$ ).

Aunque en general el estudio de la **estabilidad** sea complicado, en una ecuación autónoma, gracias a los teoremas vistos, pasa a ser trivial. En el ejemplo anterior es inmediato ver que y=0 es inestable (las soluciones cercanas de abajo se van a $-\infty$; no se necesita siquiera ver su prolongabilidad), que y=1 también lo es (las de arriba se van a $+\infty$ y las de abajo a y=0) y que cualquier solución entre 0 y 1 es asintóticamente estable (las soluciones cercanas están también definidas para todo valor de t y la diferencia entre ellas tiende a 0 cuando $t\to\infty$ pues todas ellas tienden a la misma solución de equilibrio). Damos un criterio de estabilidad de soluciones de equilibrio que, aunque aquí no nos diga nada nuevo, es la versión sencilla del que veremos en el capítulo 4 cuando estudiemos los sistemas de dos ecuaciones autónomas:

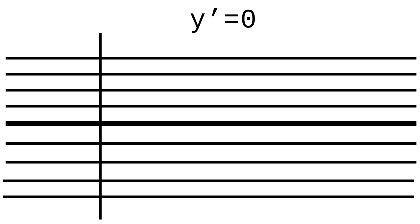
**Teor 5.** Sea $f(a)=0$ . Si $f'(a)<0$ , $y(t)\equiv a$ es asintóticamente estable.
Si $f'(a)>0$ , $y(t)\equiv a$ es inestable.

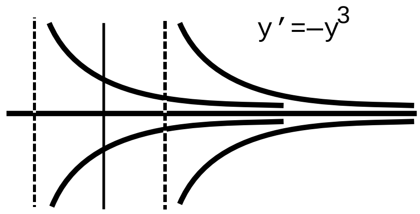
Si $f'(a)<0$, f decrece en a, luego f(y), para y cerca de a, pasa de ser positivo a negativo al aumentar y; las soluciones pasan de ser crecientes a ser decrecientes, lo que unido al teorema 4 nos da la estabilidad asintótica. Si $f'(a)>0$ pasan de ser decrecientes a ser crecientes; las primeras se van a $-\infty$ o hacia otra solución constante y las segundas a $\infty$ o hacia otra constante; hay inestabilidad.

Este teorema es un caso particular del teorema de la o(|y|) que vimos en estabilidad. En efecto, si desarrollamos por Taylor la f(y) en torno a y=a tenemos:

$$y' = f'(a)(y-a) + o(|y-a|) \quad , \text{ es decir , } \quad z' = f'(a)z + o(|z|) \quad , \text{ si } \; z=y-a \; ,$$

y el signo de f'(a) nos da la estabilidad de la parte lineal, heredada por la no lineal. Como ocurría allí no se puede afirmar nada sobre la no lineal si la lineal es simplemente estable, lo que aquí se traduce en que $f'(a)=0$. En ese caso, la solución constante puede ser inestable, como la y=0 del ejemplo 1, o estable o asintóticamente estable como sucede con la solución y=0 de los ejemplos siguientes:



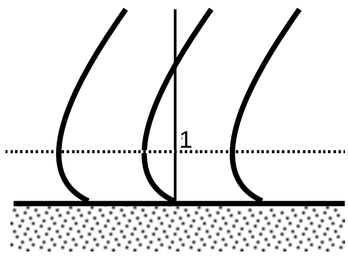




Por último, observemos que si la f(y) no es tan regular como exigimos al principio, de forma que no haya existencia y unicidad en todo el plano, también pueden fallar algunas de las propiedades de la ecuación [a] que se han basado en ese hecho:

**Ej 2.** $\boxed{y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{y-1}}$ Ecuación definida sólo si $y\geq 0$, con solución única en y>1 e $y\in(0,1)$.

y=0 es la única solución de equilibrio. Las soluciones son crecientes en y>1 y decrecientes en $y\in(0,1)$. Por cada punto de y=1 pasa una única curva integral de pendiente vertical. Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$t = \int \frac{y-1}{2\sqrt{y}}\,dy + C = \frac{\sqrt{y}}{3}(y-3) + C \quad \text{, que completa el dibujo.}$$



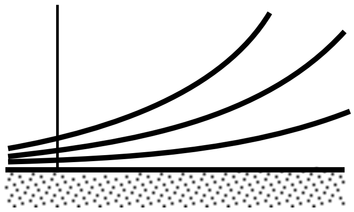

Obsérvese que hay soluciones que no son estrictamente monótonas ( en parte decrecen y en parte son constantes ) y soluciones acotadas a la izquierda que mueren en y=1 y que por tanto no tienden hacia ninguna solución de equilibrio.

## 1.9 Unos ejemplos de bichos

Estudiemos, para repasar diferentes técnicas vistas en este capítulo, unas cuantas ecuaciones que describen diferentes modelos de crecimiento de una población animal.

El modelo más sencillo viene de suponer que la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al número de animales existentes, es decir,

[1] $\boxed{y' = ay}$ , $a>0$ ,

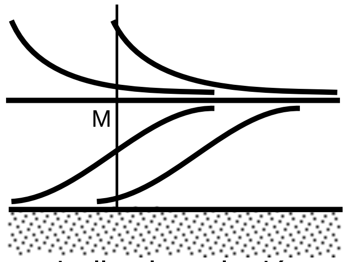


donde $y(t)$ representa la población existente en el instante $t$ . La solución de [1] que satisface $y(t_o)=y_o$ es, como sabemos,

$y=y_o e^{a(t-t_o)}$ (las dibujamos sólo donde tienen sentido: $y\geq 0$)

En el primer modelo está implícita la suposición de que hay alimentos y espacio vital ilimitados. Si suponemos que hay una población máxima M que admite el ecosistema, nos describe mejor la evolución de la población la llamada **ecuación logística**:

[2] $\boxed{y' = by(M-y)}$ , $b,M>0$ ,




ecuación autónoma cuyas soluciones son fáciles de pintar. Se obtiene una solución de equilibrio $y=M$ asintóticamente estable hacia la que tienden todas las demás soluciones con sentido físico, independientemente de los datos iniciales: pasado el tiempo habrá en el ecosistema una población M.

Para conocer la población en un instante t cualquiera habrá que hallar la solución que satisface $y(t_o)=y_o$ de esta ecuación separable (o de Bernouilli) . Resulta ser:

$$y = My_o\left[y_o+(M-y_o)e^{-bM(t-t_o)}\right]^{-1}$$

función que tiene el comportamiento asintótico previsto con las técnicas de autónomas.

Imaginémos ahora que [2] describe la población de truchas en un estanque y que un pescador i] pesca truchas a un ritmo proporcional al número de truchas existente

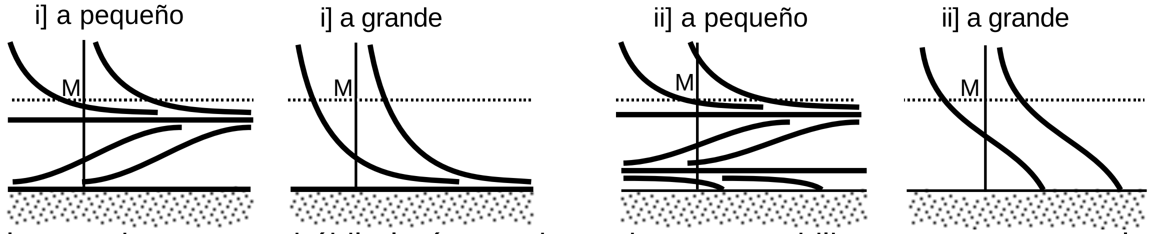
ii] pesca truchas a ritmo constante (independientemente de las que haya).

Comprobemos que las técnicas de ecuaciones autónomas nos permiten predecir con facilidad el número de truchas que quedarán en el estanque para grandes valores de t . Las ecuaciones que rigen la evolución de y en ambos casos son:

[2i] $\boxed{y' = by(M-y)-ay}$ y [2ii] $\boxed{y' = by(M-y)-a}$

Las soluciones de equilibrio son para : [2i] $y=0$ e $y=M-\frac{a}{b}$ ; [2ii] $y=\frac{M}{2}\pm\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{a}{b}}$

Si a es grande (pescador muy hábil) la segunda solución constante de [2i] pasa a ser negativa y las dos de [2ii] se convierten en complejas. Viendo el signo de y' se tiene:



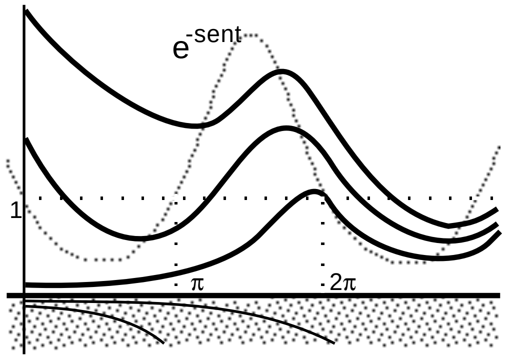

Si el pescador es poco hábil el número de truchas se estabiliza en torno a un valor algo inferior a M (salvo en el caso ii] si inicialmente son muy pocas). Si el pescador es hábil las truchas siempre se extinguen (en tiempo finito en el caso ii] ).

En todos los ejemplos anteriores hemos supuesto que la capacidad de reproducción y el tope logístico son constantes en el tiempo. Si esto no es así, las ecuaciones dejarán de ser autónomas y su análisis se complicará. Por ejemplo, analicemos la ecuación:

$$[3] \quad \boxed{y' = y\,(1 - e^{\operatorname{sen} t}\, y)}$$

que puede describir, en unidades adecuadas, la población de truchas en un estanque con un tope logístico $e^{-\operatorname{sen} t}$ que depende periódicamente del tiempo ($y'<0$ si $y>e^{-\operatorname{sen} t}$). Cuando $y<e^{-\operatorname{sen} t}$ es $y'>0$ con lo que las soluciones con $y(0)=y_o>0$ se alejan de la solución $y=0$ . Esto no basta para que dicha solución sea inestable (sí bastaría para una ecuación autónoma), pero podemos asegurarlo gracias al teorema de la o. Un dibujo aproximado sugiere la existencia de una solución periódica estable. En efecto, la solución con $y(0)=y_o$ de [3] es $y=y_o e^t[1+y_o\int_o^t e^{s+\operatorname{sen} s}ds]^{-1}$. Si $y_o=[e^{2\pi}-1][\int_o^{2\pi} e^{s+\operatorname{sen} s}ds]^{-1}$ ($y_o \sim 1.514863232$, hallando numéricamente la integral) esta solución cumple $y(0)=y(2\pi)$ y se puede ver que $y(t)=y(t+2\pi)$ para todo t ; además, cuando $t\to\infty$ :

$$|y-y^*|=|y_o-y_o^*|e^t[1+y_o\int_o^t e^{s+\operatorname{sen} s}]^{-1}[1+y_o^*\int_o^t e^{s+\operatorname{sen} s}]^{-1}\to 0$$




(pues $e^{t/2}/[...]\to 0$ como se comprueba por L'Hôpital) lo que demuestra la estabilidad asintótica de todas las soluciones con $y_o>0$ . En particular todas ellas se parecerán para grandes valores de t a la solución periódica, y por tanto, la población de truchas, para cualquier dato inicial, oscilará en la práctica periódicamente cuando pase el tiempo.

Imaginemos ahora la presencia del pescador del tipo i] de antes y analicemos:

$$[4] \quad \boxed{y' = y\,(1 - e^{\operatorname{sen} t}\, y) - a y} \;=\; (1-a)\,y - e^{\operatorname{sen} t} y^2$$

Nos ocupamos sólo de si las truchas se extinguen o no. Cuando a<1 el teorema de la o nos asegura que y=0 es inestable y por tanto el número de truchas nunca va a tender a 0 (es de esperar, puesto que [4] es del mismo tipo que [3], que la población tienda a oscilar periódicamente con unos valores menores que los del caso a=0). Si a>1, y=0 es asintóticamente estable y si a=1 el teorema no decide. Pero si $a\geq 1$ como para $y\geq 0$ se tiene $y'\leq -e^{-1}y^2$ y todas las soluciones positivas de esta ecuación autónoma tienden a 0, deducimos que toda solución positiva de [4] también tiende a 0 cuando t tiende a ∞. Por tanto, si $a\geq 1$ las truchas se extinguen independientemente de su número inicial.

Mucho más difícil es analizar la ecuación para el pescador de tipo ii]

$$[5] \quad \boxed{y' = y\,(1 - e^{\operatorname{sen} t}\, y) - a}$$

ya que ni es resoluble, ni tiene y=0 como solución, ni, por tanto, podemos utilizar el teorema de la o. Podemos compararla para $y\geq 0$ con dos ecuaciones autónomas ya que:

$$y-ey^2-a \leq y(1-e^{\operatorname{sen} t}y)-a \leq y-e^{-1}y^2-a$$

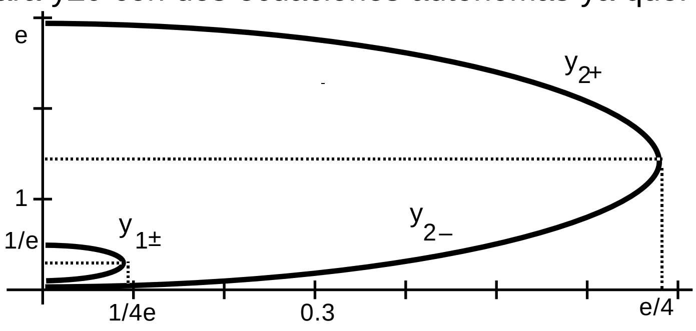
Las soluciones constantes son:

$$y_{1\pm}\equiv \frac{1}{2}\left(e^{-1}\pm\sqrt{e^{-2}-4ae^{-1}}\right)$$

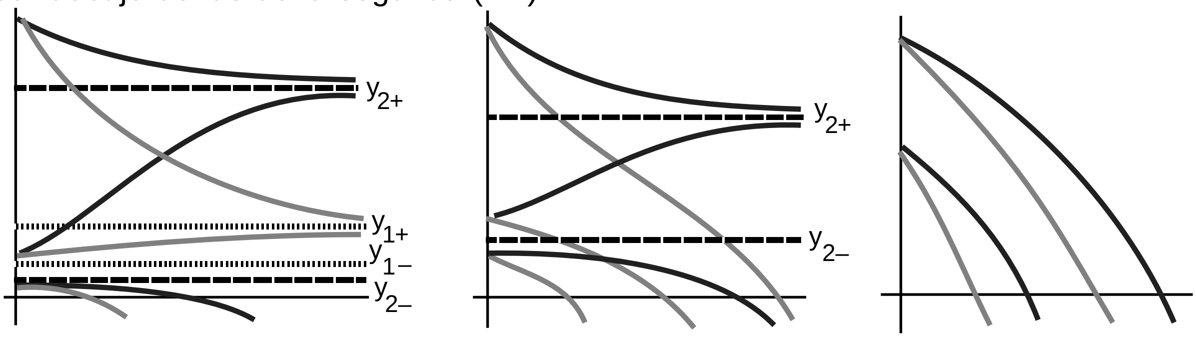
si $a\leq 1/4e$ para $y'=y-ey^2-a$ ;

$$y_{2\pm}\equiv \frac{1}{2}\left(e\pm\sqrt{e^{2}-4ae}\right)$$

si $a\leq e/4$ para $y'=y-e^{-1}y^2-a$



Las soluciones de la ecuación [5] están por encima de las de la primera autónoma (·····) y por debajo de las de la segunda (----):




a<1/4e~0.092 1/4e<a<e/4~0.68 e/4<a

por tanto, si $y_o$ es el número inicial de truchas se tiene que:
a<1/4e : si $y_o<y_{2-}$ se extinguen; si $y_o>y_{1-}$ sobreviven; si $y_{2-}<y_o<y_{1-}$ no sabemos.
1/4e<a<e/4 : si $y_o<y_{2-}$ se extinguen; si $y_o>y_{2-}$ no sabemos.
e/4<a : las truchas se extinguen cualquiera que sea su número inicial.

Para ver lo que sucede en los casos dudosos no tenemos más remedio que acudir al cálculo numérico. Comencemos, para comprobar la precisión del método, calculando la solución periódica del caso **a=0**. Utilizamos Runge-Kutta con tres pasos diferentes (se dan a partir de ahora sólo algunos de los valores obtenidos):

| t | h=0.1 | h=0.01 | h=0.001 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.514863232 | 1.514863232 | 1.514863232 |
| π/2 | .5292285154 | .5290160410 | .5290160228 |
| π | .5669103179 | .5668774805 | .5668774773 |
| 3π/2 | 1.331444611 | 1.331425946 | 1.331425944 |
| 2π | 1.514406280 | 1.514863204 | 1.514863232 |

Trabajaremos en lo que sigue con **h=0.01**. En primer lugar para **a=0.1** fijo ($y_{2-}$~0.104) hallamos la solución para diferentes datos iniciales:

| t | y | y | y | y | y |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1.301667826 | 1 | 0.1283 | 0.1282 |
| 2π | 1.310847675 | 1.301667826 | 1.296362276 | 0.1348894133 | 0.1273076391 |
| 4π | 1.301787393 | 1.301667826 | 1.301597876 | 0.4845145287 | 0.05508435478 |
| 6π | 1.301669395 | 1.301667826 | 1.301666908 | 1.267376485 | –INFINIT0 |

parece haber un valor inicial entre 0.1282 y 0.1283 tal que las soluciones que parten por arriba se acercan todas asintóticamente a una solución periódica y las de abajo se van a menos infinito (ese valor corresponderá a otra solución periódica, pero inestable).

Ahora fijemos el dato inicial **$y_o$=3** y variemos el valor del parámetro a:

| t | a=0 | a=0.1 | a=0.15 | a=0.16 | a=0.18 | a=0.19 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2π | 1.516264948 | 1.310847675 | 1.111625295 | 1.052526301 | 0.8971167254 | 0.7909316344 |
| 4π | 1.514865819 | 1.301787393 | 1.075311341 | 1.000301043 | 0.7677866540 | 0.5507503099 |
| 6π | 1.514863209 | 1.301669395 | 1.073072269 | 0.9952784520 | 0.7229482684 | 0.2422755917 |
| 8π | 1.514863204 | 1.301667847 | 1.072928094 | 0.9947594238 | 0.7012005576 | –INFINIT0 |
| 10π | 1.514863204 | 1.301667826 | 1.072918785 | 0.9947054010 | 0.6889590560 | |

vuelve a aparecer en los cinco primeros casos una solución periódica (más pequeña cuanto mayor es a ; para a=0.18 el valor de y(2nπ) tiende a estabilizarse en torno a 0.6666 pero mucho más lentamente). Para a=0.19 , la solución que parte de $y_o$=3 (y por tanto al menos las que parten más abajo) se va a –∞ .

# 2. Sistemas y ecuaciones lineales

Si ya se podían resolver muy pocas ecuaciones de primer orden, menos aún se pueden resolver sistemas de tales ecuaciones o ecuaciones de orden mayor que uno. Salvo escasas excepciones, sólo en el caso lineal se puede caracterizar la estructura de las soluciones y sólo si los coeficientes son constantes se pueden hallar explícitamente tales soluciones mediante métodos elementales.

En la sección 2.1 enunciaremos las propiedades básicas (similares a las de ecuaciones de primer orden) de los sistemas de n ecuaciones (lineales o no) y de las ecuaciones de orden n, que se pueden considerar como un caso particular de sistemas. No daremos las demostraciones (bastaría casi sustituir en las del caso n=1 los valores absolutos por normas). Como en la solución general de un sistema o de una ecuación de orden n aparecen n constantes arbitrarias (así lo sugieren los ejemplos más sencillos de sistema: x'=0, y'=0, y de ecuación: x"=0) el problema de valores iniciales consistirá en hallar la solución que satisfaga n condiciones iniciales. Será fácil ver cuando este problema tiene solución única local. También daremos un resultado de prolongabilidad y la definición de estabilidad.

No generalizaremos, sin embargo, dos secciones importantes del capítulo anterior: el dibujo aproximado y los métodos numéricos. En el primer caso, porque no se puede: las soluciones de un sistema son curvas en un espacio de dimensión mayor que dos (en el capítulo 4, para sistemas autónomos de segundo orden, sí nos preocuparemos del dibujo de las proyecciones de las soluciones sobre el plano t=0). Los métodos numéricos sí son fáciles, pero tan parecidos al caso n=1 que no merece la pena estudiarlos de nuevo.

La sección 2.2 se centra ya en el caso lineal y, para ir fijando ideas, en el más sencillo n=2. Tendremos una fórmula (de variación de las constantes) para las soluciones de un sistema no homogéneo si conocemos lo que se llama una matriz fundamental (formada por soluciones del sistema homogéneo). Esta matriz sabremos calcularla (utilizando resultados de álgebra) si los coeficientes son constantes. De lo anterior deduciremos resultados para ecuaciones de segundo orden. Hallar la solución será especialmente sencillo para coeficientes constantes. Si son variables, veremos los pocos casos en que aún se pueden resolver.

En la sección 2.3 , y ya sin demostraciones, veremos los resultados para un n general. Las cosas se complican para los sistemas. Pero si los coeficientes son constantes sigue siendo fácil resolver ecuaciones homogéneas. Para resolver algunas no homogéneas tendremos el método de coeficientes indeterminados. Analizaremos también la estabilidad, que se podrá precisar fácilmente para sistemas de cualquier orden con coeficientes constantes.

La sección 2.4 introduce una técnica totalmente diferente, y tal vez más rápida, para hallar soluciones particulares de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes: la transformada de Laplace. Esta técnica es especialmente interesante cuando los términos no homogéneos son discontinuos.

La última sección, la 2.5, muestra como obtener información sobre el número de soluciones periódicas de ecuaciones lineales de primero y segundo orden con coeficientes periódicos, sin necesidad de resolverlas.

## 2.1 Propiedades generales de sistemas y ecuaciones

Sea el **sistema de n ecuaciones de primer orden** [S] $\boxed{\begin{array}{l} x_1' = f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{array}}$

cuyas soluciones son conjuntos de $n$ funciones $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ derivables y definidas en un intervalo común $I$ que convierten cada ecuación de [S] en una identidad.

Llamaremos [P] al problema de valores iniciales formado por [S] y las n condiciones

$$\boxed{x_1(t_o)=x_{1o}\ ,\ \ldots\ ,\ x_n(t_o)=x_{no}}$$

O escrito en notación vectorial: [P] $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}'=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x}_o \end{cases}}$ , con $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_o=\begin{pmatrix} x_{1o} \\ \vdots \\ x_{no} \end{pmatrix}$.

Cada solución de [S] será entonces una función vectorial $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ de $I$ en $\mathbf{R}^n$.

Consideramos en $\mathbf{R}^n$ la norma ecuclídea $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ , y llamaremos bola de centro $\mathbf{a}$ y radio $r$ al conjunto $B(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n: \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$ .

Los teoremas de existencia y unicidad y prolongabilidad para sistemas son muy parecidos a los de ecuaciones de primer orden:

**Teor 1.**

> Sean $f_i$ y $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ , $i,k=1,\ldots,n$ continuas en $[t_o-h,t_o+h]\mathrm{x}B(\mathbf{x}_o,r)$ .
> Entonces [P] tiene solución única definida al menos en un entorno de $t_o$

(y si sólo las $f_i$ son continuas existe solución, aunque podría no ser única)

**Teor 2.**

> Si $f_i$ y $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ son continuas en $[t_o,\infty)\mathrm{x}\mathbf{R}^n$ o bien existe $t_1$ tal que $\|\mathbf{x}(t)\|\to\infty$ cuando $t\to t_1$ o bien la solución $\mathbf{x}(t)$ de [P] está definida para todo $t \geq t_o$ .

(y si son continuas en un conjunto $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ las soluciones llegan hasta la frontera de D)

También existe dependencia continua de parámetros y datos iniciales, aunque no enunciamos los teoremas y pasamos directamente a la definición de estabilidad, que es como la de primer orden, sustituyendo valores absolutos por normas:

> Una solución $\mathbf{x}(t)$ definida en $[t_o,\infty)$ es **estable** si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que toda solución $\mathbf{x}^*(t)$ con $\|\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)\|<\delta$ existe, está definida en $[t_o,\infty)$ y verifica $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|<\varepsilon$ para todo $t\geq t_o$ . Si además $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\to 0$ cuando $t\to\infty$, se dice que $\mathbf{x}(t)$ es **asintóticamente estable**.

(pero para un sistema puede ocurrir que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\to 0$ cuando $t\to\infty$ y sin embargo que no consigamos hacer que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|$ sea menor que cualquier $\varepsilon$ prefijado)

Consideremos ahora la **ecuación de orden n** : [E] $\boxed{x^{(n)} = g\left(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)}\right)}$
cuyas soluciones son funciones x(t) derivables n veces en un intervalo I que llevadas a [E] la convierten en una identidad. Llamamos [PE] al problema consistente en encontrar la solución de [E] que satisface las n condiciones iniciales

$$\boxed{x(t_o)=x_o\ ,\ x'(t_o)=x_o'\ ,\ \ldots\ ,\ x^{(n-1)}(t_o)=x_o^{(n-1)}}$$

**Toda ecuación de orden n se puede convertir en un sistema**. Basta hacer

$$x=x_1\ ,\ x'=x_2\ ,\ldots,\ x^{(n-1)}=x_n \ \to\ [SE]\ \boxed{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n' = g(t,x_1,\ldots,x_n) \end{array}}$$

y está claro que x es solución de [E] si y sólo si $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ es solución de [SE] .

Si además **x** satisface $\mathbf{x}(t_o)=\begin{pmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_o^{(n-1)} \end{pmatrix}$ entonces x es solución del problema [PE] .

Los teoremas 1 y 2 se pueden, pues, aplicar también a las ecuaciones de orden n. Veamos la forma particular que adopta el teorema de existencia y unicidad.

**Teor 3.** Sean g , $\frac{\partial g}{\partial x}$ , ..., $\frac{\partial g}{\partial x^{(n-1)}}$ continuas en un entorno de $\left(t_o,x_o,x_o',\ldots,x_o^{(n-1)}\right)$ . Entonces [PE] tiene solución única definida al menos en un entorno de $t_o$ .

Por último, se dice que x(t) **es solución estable o asintóticamente estable de** [E] **si lo es la solución x**(t) **del sistema equivalente** (y por lo tanto se han de parecer tanto x(t) y x*(t) como las n–1 primeras derivadas de de las dos soluciones).

**Ej 1.** $\boxed{\begin{array}{l} x'=3tx^{1/3}+\ln y \\ y'=xy-t^3 \end{array}}$ Posee solución con $x(t_o)=x_o$, $y(t_o)=y_o$ si $y_o>0$ . Es única si $x_o\neq 0$.

No sabemos, ni sabremos, hallar su solución general, ni ver que soluciones están definidas para todo t , ni estudiar su estabilidad (aunque se podrían hallar los valores aproximados para unos datos iniciales concretos por métodos numéricos).

Es trivial comprobar que una solución del sistema es $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} t^3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(la única que satisface x(1)=y(1)=1 , aunque tal vez haya más con x(0)=0, y(0)=1 ).

**Ej 2.** $\boxed{t^2x''-2tx'+2x=0}$ Posee solución única con $x(t_o)=a$, $x'(t_o)=b$ si $t_o\neq 0$ .

En la próxima sección veremos que su solución general es $x=c_1t+c_2t^2$ .

La única solución que satisface x(1)=a , x'(1)=b es $x=(2a-b)t+(b-a)t^2$ (que, como debía, es función continua de los datos iniciales). Las infinitas soluciones $x=c_2t^2$ satisfacen x(0)=0, x'(0)=0 , pero no hay ninguna satisfaciendo x(0)=1, x'(0)=0 .

La solución con x(1)=1, x'(1)=1 ( x=t ) es inestable pues para el sistema equivalente

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=-2t^{-2}x+2t^{-1}y \end{cases} \text{ es inestable } \mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ya que } \left\| \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (2a-b)t+(b-a)t^2 \\ (2a-b)+2(b-a)t \end{pmatrix} \right\| \to \infty$$

para a y b tan cercanos como queramos a 1 .

## 2.2 Sistemas de dos ecuaciones lineales y ecuaciones lineales de segundo orden

Sea el sistema $\boxed{\begin{array}{l} x'= a(t)x+b(t)y+f(t) \\ y'= c(t)x+d(t)y+g(t) \end{array}}$

o en forma vectorial [S] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ , donde $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\mathbf{f}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Suponemos que a,b,c,d,f,g son funciones de **R** en **R** continuas en un intervalo $I \ni t_o$ . Por la sección anterior sabemos que existe una única solución de [S] que satisface cualquier par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$ , $y(t_o)=y_o$ . Como ocurría en las lineales de primer orden se puede probar que esta solución única está definida para todo $t\in \mathbf{I}$.

Consideremos primero el **sistema homogéneo** [H] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}}$ .

A una matriz $\boxed{\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}}$ cuyas columnas $\mathbf{x_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x_2}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son soluciones de [H] y tal que el determinante $|\mathbf{W}(t_o)|\neq 0$ la llamaremos **matriz fundamental** de [H].

El siguiente teorema nos asegura que conocida una matriz fundamental **W**(t) el sistema [H] está resuelto (aunque no nos dice como calcularla).

**Teor 1.**

**i]** El conjunto V de soluciones de [H] es un espacio vectorial de dimensión 2
**ii]** Una matriz fundamental **W**(t) es no singular para todo $t\in I$.
**iii]** El conjunto $\{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\}$ constituye una base de V y por tanto la solución general de [H] es:

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{x_1} + c_2\,\mathbf{x_2} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}\ , \quad \text{con } \mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ arbitrario.}$$

**i]** Es inmediato comprobar que cualquier combinación lineal de soluciones de [H] es también solución. Veamos además que son base de V las dos soluciones $\mathbf{e_1}(t)$ y $\mathbf{e_2}(t)$ de [H] cuyos valores iniciales son, respectivamente, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

son linealmente independientes: $c_1\mathbf{e_1}(t)+c_2\mathbf{e_2}(t)\equiv\mathbf{0} \Rightarrow c_1\mathbf{e_1}(t_o)+c_2\mathbf{e_2}(t_o)=\mathbf{0} \Rightarrow c_1=c_2=0$.

cualquier solución $\mathbf{x}(t) =\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ se puede escribir como combinación lineal de ellas:

$\mathbf{z}(t)=x(t_o)\mathbf{e_1}(t)+y(t_o)\mathbf{e_2}(t)$ es solución con $\mathbf{z}(t_o)=\mathbf{x}(t_o)$. Por unicidad es $\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{z}(t)\ \forall t\in I$.

**ii]** Si fuera $|\mathbf{W}(s)|=0$ para algun $s\in I$ existirían $b_1$ , $b_2$ no los dos nulos tales que $b_1\mathbf{x_1}(s) + b_2\mathbf{x_2}(s) = \mathbf{0}$ . Entonces $\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{x_1}(t) + b_2\mathbf{x_2}(t)$ sería solución con $\mathbf{x}(s)=\mathbf{0}$ . De nuevo por unicidad $\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{0}$ y por tanto $|\mathbf{W}(t)|$ sería 0 para todo t de I.

**iii]** Sean $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ soluciones cualesquiera. Si $|\mathbf{W}(t_o)|\neq 0$ , dichas soluciones son independientes: $c_1\mathbf{x_1}(t)+c_2\mathbf{x_2}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{W}(t_o)\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow c_1=c_2=0$.

Conocida una **W**(t) podríamos calcular la solución de [H] con $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\mathbf{W}(t_o)\mathbf{c}=\mathbf{x_o}$ que tiene solución única.

Consideremos ahora el **sistema no homogéneo** [S]:

**Teor 2.**

**i]** Si $\mathbf{x_p}$ es cualquier solución de [S] y $\mathbf{W}(t)$ es una matriz fundamental de [H], la solución general de [S] viene dada por $\mathbf{x} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x_p}$.

**ii]** Una solución particular de [S] es $\mathbf{x_p} = \mathbf{W}(t) \int \mathbf{W}^{-1}(t)\, \mathbf{f}(t)\, dt$

**iii]** Si $\mathbf{W_c}(t)$ satisface $\mathbf{W_c}(t_o)=\mathbf{I}$ (matriz fundamental canónica en $t_o$) la solución de [S] que satisface $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es

$$\mathbf{x} = \mathbf{W_c}(t)\mathbf{x_o} + \mathbf{W_c}(t) \int_{t_o}^{t} \mathbf{W_c}^{-1}(s)\, \mathbf{f}(s)ds \quad \left[\begin{array}{c}\textbf{fórmula de variación}\\ \textbf{de las constantes}\end{array}\right]$$

**i]** Sea $\mathbf{x}$ cualquier solución de [S]. Entonces $[\mathbf{x}-\mathbf{x_p}]' = \mathbf{Ax}+\mathbf{f}-\mathbf{Ax_p}-\mathbf{f} = \mathbf{A}[\mathbf{x}-\mathbf{x_p}]$ . Por tanto $\mathbf{x}-\mathbf{x_p} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}$ para algún $\mathbf{c}$, pues satisface [H]. Toda solución se puede escribir así.

**ii]** $\mathbf{x_p}' = \mathbf{W}' \int \mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}dt + \mathbf{W}\,\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{Ax_p}+ \mathbf{f}$ pues $\mathbf{W}' =\mathbf{AW}$ por ser solución cada columna.

**iii]** Por i] y ii] es solución de [S]. Además $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{W_c}(t_o)\mathbf{x_o} = \mathbf{I}\,\mathbf{x_o} = \mathbf{x_o}$ .

Observemos que si conocemos cualquier matriz fundamental podemos calcular la canónica : $\mathbf{W_c}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_o)$ , pues el producto de $\mathbf{W}(t)$ por una matriz constante sigue siendo fundamental (sus columnas son combinaciones lineales de soluciones y por tanto son soluciones) y evidentemente es la matriz unidad $\mathbf{I}$ en $t=t_o$.

Conocida una $\mathbf{W}(t)$ podemos resolver, pues, tanto el sistema homogéneo como el no homogéneo. Sin embargo sólo tendremos un método de cálculo de tal matriz fundamental para el caso de **coeficientes constantes** que tratamos ahora:

Sean [C] $\boxed{\mathbf{x}'= \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ y [Ch] $\boxed{\mathbf{x}'= \mathbf{A}\mathbf{x}}$ , con $\mathbf{A}$ matriz constante.

[Recordemos que la exponencial de una matriz $\mathbf{B}$ se define $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{1}{2!}\mathbf{B}^2+ \dots$ , que para toda matriz $\mathbf{B}$ es convergente (sus elementos son series numéricas convergentes), que es no singular, que la inversa de $e^{\mathbf{B}}$ es $e^{-\mathbf{B}}$ y que $e^{\mathbf{B+C}}=e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}}$ si $\mathbf{BC}=\mathbf{CB}$]

**Teor 3.** $\mathbf{W_c}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_o)}$ es la matriz fundamental canónica en $t_o$ de [Ch]

En efecto, $$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

donde hemos utilizado que la serie converge uniformemente y hemos tomado $t_o=0$ por comodidad. Es, pues, $e^{\mathbf{A}(t-t_o)}$ matriz fundamental ya que entonces cada una de sus columnas satisface también [Ch]. Además $e^{\mathbf{A}(t_o-t_o)}= \mathbf{I}$ , con lo que es la canónica.

El problema de resolver el sistema [C] se reduce, pues, al cálculo de la exponencial de una matriz. Tal exponencial es fácilmente calculable a partir de la matriz $\mathbf{J}$ de Jordan asociada a la matriz dada. Aunque en general no lo sea, es fácil escribir la forma de Jordan de $\mathbf{A}$ para el caso n=2 que estamos tratando (ver libros de álgebra):

**Teor 4.** Sean $\lambda_1$, $\lambda_2$ los autovalores de **A** [las raices de $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$ ].
Entonces existe una matriz no singular **P** tal que $\mathbf{A}=\mathbf{PJP}^{-1}$ donde:
**i]** Si $\lambda_1\neq\lambda_2$ y $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$ son vectores propios asociados a ellos [ $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v_i}=\mathbf{0}$ ],
$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{v_1} & \mathbf{v_2}\end{pmatrix}$ , matriz cuyas columnas son $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ .
**ii]** Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ y sólo existe un vector propio **v** linealmente independiente asociado, $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{w} & \mathbf{v}\end{pmatrix}$, siendo **w** cualquier vector con $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}$.
**iii]** Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ y existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a $\lambda$ , **A** es ya diagonal.

La $e^{\mathbf{A}t}$ está relacionada con la $e^{\mathbf{J}t}$ de la misma forma que la **A** lo estaba con la **J**:

$$e^{\mathbf{A}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{PJ}^k\mathbf{P}^{-1}t^k}{k!}=\mathbf{P}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{J}^k t^k}{k!}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\text{ , pues }\mathbf{A}^k=(\mathbf{PJP}^{-1})...(\mathbf{PJP}^{-1})=\mathbf{PJ}^k\mathbf{P}^{-1}$$

y la $e^{\mathbf{J}t}$ se calcula facilmente:

$$\text{si }\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\text{ , } e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1 t & 0\\ 0 & \lambda_2 t\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\lambda_1^2t^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2t^2\end{pmatrix}+\dots=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

$$\text{si }\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{D}+\mathbf{N}\text{ , } e^{\mathbf{J}t}=e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{N}t}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ t & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}e^{\lambda t}$$

De lo dicho para coeficientes constantes y de la fórmula de variación de las constantes obtenemos la siguiente expresión para la solución de [C] que satisface $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$:

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}(t-t_o)}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x_o}+\mathbf{P}\int_{t_o}^{t}e^{\mathbf{J}(t-s)}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{f}(s)\,ds}$$

donde todas las matrices que aparecen son calculables. Observemos que los $\lambda$ pueden ser complejos, así como las matrices **P** y $e^{\mathbf{J}t}$, pero si **A** es real han de ser reales la matriz fundamental $e^{\mathbf{A}t}$ y la solución **x**.

**Ej 1.** Resolvamos $\boxed{\begin{matrix}x'=2x+y\\ y'=3x+4y+e^t\end{matrix}}$ con $\boxed{x(0)=0,\ y(0)=1}$, o sea, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

[Sabemos que dicha solución es única y que está definida para todo t de **R**]

$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-6\lambda+5=0$ tiene por solución $\lambda=5$ y $\lambda=1$ . Por tanto $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$

$(\mathbf{A}-5\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ , $(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ . Así que

$$\mathbf{x}(t)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{5(t-s)} & 0\\ 0 & e^{t-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ e^s\end{pmatrix}ds=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}e^{5t}-e^t\\ 3e^{5t}+e^t\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int_0^t e^{5t-4s}ds\\ -\int_0^t e^t ds\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}5e^{5t}-5e^t-4te^t\\ 15e^{5t}+e^t+4te^t\end{pmatrix}$$

Deduzcamos de todo lo anterior resultados para **ecuaciones lineales** que, como vimos en la sección 2.1, se pueden considerar como un caso particular de sistemas.

Consideremos [e] $\boxed{x''+a(t)x'+b(t)x=f(t)}$ , con a, b y f continuas en I.

Sabemos que entonces existe solución única definida en todo el intervalo I para cada par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$ , $x'(t_o)=x_o'$ si $t_o\in$ **I.** Haciendo x'=y obtenemos el sistema

$\begin{cases} x'=y \\ y'=-b(t)x-a(t)y+f(t) \end{cases}$ cuyas soluciones serán funciones vectoriales $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ .

Este sistema está resuelto conociendo una matriz fundamental, para lo que basta conocer dos soluciones $x_1$ y $x_2$ de la ecuación homogéna asociada a [e] (pues la fila inferior de la matriz estará formada por las derivadas de $x_1$ y $x_2$ ) tales que el llamado determinante **wronskiano** de $x_1$ y $x_2$ $\boxed{|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}}$ sea no nulo en algún s de I.

La solución general de [e] será entonces la primera fila de $\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{W}(t)\int\mathbf{W}^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}dt$ .

Como $\mathbf{W}^{-1}(t)=\frac{1}{|\mathbf{W}|(t)}\begin{pmatrix} x_2'(t) & -x_2(t) \\ -x_1'(t) & x_1(t) \end{pmatrix}$ , unas pocas operaciones nos llevan a:

**Teor 5.** **i]** Si $x_1$ y $x_2$ son dos soluciones de la ecuación homogéna cuyo determinante wronskiano es no nulo para algún s de I y $x_p$ es cualquier solución particular de [e], la solución general de [e] es $x=c_1x_1+c_2x_2+x_p$

**ii]** Una solución particular de [e] es $x_p=x_2\int\frac{x_1 f}{|\mathbf{W}|}dt-x_1\int\frac{x_2 f}{|\mathbf{W}|}dt$

[**fórmula de variación de las constantes**]

El cálculo de las dos soluciones en términos de funciones elementales se podrá realizar si los coeficientes son constantes y en pocos casos más (en el capítulo siguiente se verá como resolver cualquier solución de la forma [e] por medio de series).

Resolvamos la **ecuación con coeficientes constantes** [c] $\boxed{x''+ax'+bx=f(t)}$

Llamemos [ch] a la **ecuación homogénea** ($f\equiv 0$).

La matriz del sistema asociado es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, de ecuación característica $\boxed{\lambda^2+a\lambda+b=0}$

(se llega a esta ecuación probando en [ch] soluciones del tipo $e^{\lambda t}$, método más clásico).

Como los elementos del vector real $\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}$, solución general del sistema homogéneo, están formados por combinaciones lineales arbitrarias de los elementos de la matriz $e^{\mathbf{J}t}$, la solución general de [ch] es:

Si $\lambda_1\neq\lambda_2$ reales , $x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$
Si $\lambda$ doble (real) , $x=(c_1+c_2t)e^{\lambda t}$
Si $\lambda=p\pm qi$ , $x=(c_1\cos qt+c_2\operatorname{sen} qt)e^{pt}$

pues $e^{\mathbf{J}t}$ es, en cada caso, $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}e^{\lambda t}$ , $\begin{pmatrix} e^{pt}(\cos qt+i\operatorname{sen} qt) & 0 \\ 0 & e^{pt}(\cos qt-i\operatorname{sen} qt) \end{pmatrix}$

Para la búsqueda de la solución particular de la no homogénea disponemos siempre de la fórmula de variación de las constantes, pero en muchas ocasiones será preferible el método de los coeficientes indeterminados que describiremos en la próxima sección.

**Ej 2.** Resolvemos $\boxed{x''-2x'+x = 6te^t \text{ con } x(1)=x'(1)=0}$

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ tiene la raiz doble $\lambda=1$, luego la solución de la homogénea es $x=(c_1+c_2t)e^t$

Como $|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix}=e^{2t}$, $x_p = 6te^t\int\frac{e^t\,te^t}{e^{2t}}dt - 6e^t\int\frac{te^t\,te^t}{e^{2t}}dt = t^3e^t$

la solución general de la no homogénea es $x=(c_1+c_2t)e^t+t^3e^t$ .

Imponiendo las condiciones iniciales: $\left.\begin{array}{l} x(1)=[c_1+c_2+1]e=0 \\ x'(1)=[c_1+2c_2+4]e=0 \end{array}\right\} \to x=(2-3t+t^3)e^t$ .

Aunque sea un mal camino, repasemos las matrices resolviendo el sistema equivalente

$\left\{\begin{array}{l} x'=y \\ y'=-x+2y+6te^t \end{array}\right.$ , o sea, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 6te^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Como $\lambda=1$ doble $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}e^t$

(nunca la matriz de un sistema proveniente de una ecuación puede ser diagonal).

El único (salvo producto por un escalar) vector **v** asociado al $\lambda=1$ doble es $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Escogemos **w** tal que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{w}=\mathbf{v}$, por ejemplo $\mathbf{w}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

y por tanto $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\int_1^t e^{t-s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6se^s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} t^3-3t+2 \\ t^3+3t^2-3t+1 \end{pmatrix}e^t$

cuya $x$ es la de antes y cuya $y$ es la derivada de la $x$ .

Aunque no es práctico pasar de ecuaciones a sistemas sí lo es, en cambio, convertir un sistema dado en una ecuación , sobre todo si los autovalores son complejos:

**Ej 3.** $\boxed{\begin{array}{ll} x'=x+2y & x(0)=1 \\ y'=-2x+y & y(0)=1 \end{array}} \to \lambda=1\pm 2i \to e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} e^t[\cos 2t+i\,\mathrm{sen}\,2t] & 0 \\ 0 & e^t[\cos 2t-i\,\mathrm{sen}\,2t] \end{pmatrix}$

y es pesado calcular $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t[\cos 2t+\mathrm{sen}\,2t] \\ e^t[\cos 2t-\mathrm{sen}\,2t] \end{pmatrix}$

Sin embargo, derivando la primera ecuación: $x''=x'+2y'$ .

Sustituyendo la y' de la segunda: $x''=x'-4x+2y$ .

Sustituyendo ahora la y despejada de la primera ecuación:

$x''=x'-4x+x'-x \to x''-2x'+5x=0$ de solución general $x=(c_1\cos 2t+c_2\,\mathrm{sen}\,2t)\,e^t$

Imponiendo los datos iniciales: $x(0)=1$, $x'(0)=x(0)+2y(0)=3$ obtenemos el primer elemento x del vector solución; que sustituido junto con su derivada $x'$ en la primera ecuación nos proporciona el $y$ de la solución.

Consideremos otros tres casos, ahora con **coeficientes variables**, de ecuaciones lineales de segundo orden [e] que son resolubles por métodos elementales.

**Ecuaciones de Euler**: [u] $\boxed{t^2x''+ atx'+ bx = h(t)}$ , $t>0$

Haciendo el cambio de variable independiente $t=e^s$ : $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dx}{ds}$ , $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\left[\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\right]$ ,

la ecuación [u] se convierte en la ecuación lineal con coeficientes constantes

$\frac{d^2x}{ds^2}+(a-1)\frac{dx}{ds}+bx=h(e^s)$ de ecuación característica $\boxed{\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0}$ .

Como conocemos las soluciones de la ecuación homogénea para esta segunda ecuación, deshaciendo el cambio ( $s=\ln t$ ), tenemos que la solución general de una ecuación de Euler **homogénea** es:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ reales} \ , \ x = c_1t^{\lambda_1} + c_2t^{\lambda_2} \\ \text{Si } \lambda \text{ doble (real)} \ , \ x = (c_1+c_2\ln t)\, t^{\lambda} \\ \text{Si } \lambda=p\pm qi \ , \ x = [\, c_1\cos(q\ln t)+c_2\,\text{sen}(q\ln t)\,]\, t^p \end{array}}$$

(observemos que la "ecuación característica" de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma $t^\lambda$).

Para hallar la solución particular de la no homogénea dispondremos siempre de la fórmula de variación de las constantes con $f(t)=h(t)/t^2$ (y para la ecuación en s del método de coeficientes indeterminados que veremos, si $h(e^s)$ es del tipo adecuado).

**Ej 4.** Hallemos la solución general de $\boxed{t^2x''+tx'-x=t}$

La "ecuación característica" es $\lambda^2+(1-1)\lambda-1=0 \ \rightarrow \ \lambda=\pm1$ ,

con lo que la homogénea tiene por solución general $x=c_1t+c_2t^{-1}$
(válida en este caso para todo $t\neq0$) .

Como $|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2}\end{vmatrix}=-2t^{-1}$ y $f(t)=t^{-1} \ \longrightarrow \ x_p=t^{-1}\int\frac{t\,t^{-1}}{-2t^{-1}}dt-t\int\frac{t^{-1}t^{-1}}{-2t^{-1}}dt=\frac{t}{2}\ln t-\frac{t}{4}$

$\longrightarrow$ la solución general de la no homogénea es $x = c_1t + c_2\,t^{-1}+\frac{t}{2}\ln t$
(hemos englobado el segundo término de la solución particular en $c_1t$ )

Si en la ecuación [e] es **b(t)≡0** : $\boxed{x''+a(t)x'=f(t)}$ ,

el cambio $x'=y$ convierte dicha ecuación en una lineal de primer orden en $y$ , resoluble con la fórmula del capítulo 1.

(Observemos que el cambio anterior reduce también una ecuación **no lineal** en la que no aparece la x en una de primer orden, tal vez resoluble: $x''=g(t,x') \rightarrow y'=g(t,y)$ . Este es unos de los pocos casos de ecuaciones no lineales que se pueden resolver)

**Ej 5.** Calculemos la solución general de $\boxed{t x''-2x' = t \cos t}$

$x'=y \;\to\; y' = \frac{2y}{t} + \cos t \;\to\; y = c_2 t^2 + t^2 \int t^{-2}\cos t\, dt \;\to\; x = c_1 + c_2 t^3 + \int \left[t^2 \int t^{-2} \cos t\, dt\right] dt$
integrales que no son calculables elementalmente.

La ecuación es también de Euler (con $a=-2$, $b=0$ y $h(t)=t^2\cos t$ ) y se podría resolver como el ejemplo 4: $\lambda^2-3\lambda=0 \;\to\; \lambda=0, \lambda=3 \;\to\; x = c_1 + c_2 t^3$ , solución de la homogénea.
$|\mathbf{W}|(t) = 3t^2 \to\; x = c_1 + c_2 t^3 + t^3 \int \frac{\cos t}{3t^2} dt - \int \frac{t \cos t}{3} dt$ , que debe coincidir con la de antes.

**Si conocemos una solución $x_1$ de la ecuación homogénea** $x''+a(t)x'+b(t)x=0$, **el cambio** $\boxed{x = x_1 \int u\, dt}$ **lleva la ecuación** [e] **a una lineal de primer orden en** u.
(no son, por tanto, necesarias las dos soluciones que exigía el teorema 5; el problema es que en pocas ocasiones podremos encontrar esa solución: a veces a simple vista, a veces tanteando, a veces nos aparecerá cuando estemos resolviéndola por series)

En efecto, llevando $x$ , $x' = x_1' \int u dt + x_1 u$ y $x'' = x_1'' \int u dt + 2x_1' u + x_1 u'$ a [e] obtenemos:

$$x_1 u' + (2x_1'+ax_1)u + (x_1''+ax_1'+bx_1)\int u dt = f(t) \;\to\; u' = -\left(2x_1'\, x_1^{-1}+a\right)u + f(t)\, x_1^{-1}$$

pues $x_1$ satisface la homogénea. El conocimiento de la $x_1$ nos permite calcular también una segunda solución $x_2$ de la homogénea, pues integrando la ecuación en u con f(t)=0:

$$u = e^{-\int a\,dt}\, x_1^{-2} \;\to\; \boxed{x_2 = x_1 \int e^{-\int a\,dt}\, x_1^{-2}\, dt}$$

**Ej 6.** Resolvamos $\boxed{t^3 x'' - t x' + x = 1}$

Evidentemente $x_1 = t$ es solución de la homogénea. Para resolver la ecuación dada podemos ahora seguir dos caminos diferentes:

1) Efectuar explícitamente el cambio $x = t \int u$ , $x' = \int u + tu$ , $x'' = 2u + tu'$ , convirtiendola en la lineal de primer orden no homogénea $t^4 u' + (2t^3-t^2)u = 1 \;\to\; u' = (t^{-2}-2t^{-1})u + t^{-4}$ .
Resolver esta lineal: $u = c_2 t^{-2} e^{-1/t} + t^{-2} e^{-1/t} \int t^{-2} e^{1/t} dt = c_2 t^{-2} e^{-1/t} - t^{-2}$
Deshacer el cambio: $y = t\,( c_1 + c_2 \int t^{-2} e^{-1/t} dt - \int t^{-2} dt ) = c_1 t + c_2 t e^{-1/t} + 1$

2) Calcular una segunda solución de la homogénea por la fórmula deducida antes:

$$x_2 = t \int e^{-\int -t^{-2} dt}\, t^{-2} dt = t\, e^{-1/t}$$

y calcular una solución particular de la no homogénea por variación de constantes

$$|\mathbf{W}|(t) = e^{-1/t} \;\to\; x_p = t\, e^{-1/t} \int t^{-2} e^{1/t} dt - t \int t^{-2} dt = t + 1$$

(aunque todo el trabajo con la no homogénea ha sido absolutamente inútil porque la $x_p = 1$ se veía también a simple vista)

## 2.3 Sistemas y ecuaciones lineales de orden n. Estabilidad.

Veamos, sin demostración, los resultados esenciales, análogos a los del caso n=2, para el sistema general de n ecuaciones lineales:

[S] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}$ , con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{f}$ continuas en I .

Existe entonces solución única definida en todo I satisfaciendo $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x_o}$ si $t_o \in \mathbf{I}$.

Se llama matriz fundamental a una $\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ cuyas n columnas son soluciones de la homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ y tal que $|\mathbf{W}(t_o)| \neq 0$ .

**Teor 1.** La solución general de [S] es $\mathbf{x} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} + \mathbf{W}(t)\int \mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$

De nuevo conocida una matriz fundamental el sistema está resuelto, aunque su cálculo se complica, incluso en el caso de coeficientes constantes:

Sea [C] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}$ , con $\mathbf{A}$ matriz constante .

**Teor 2.** La solución de [C] con $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x_o}$ es $\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}(t-t_o)}\,\mathbf{x_o} + \int_{t_o}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\,\mathbf{f}(s)\,ds$

Pero ahora no es fácil el cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$, pues en general las matrices **J** y **P** son difíciles de calcular (ni siquiera, normalmente, podremos hallar de forma exacta los autovalores de **A**). Veamos, simplemente, el caso sencillo en que **J** resulta ser diagonal:

**Teor 3.** Si hay n vectores propios $\mathbf{v_1},...,\mathbf{v_n}$ linealmente independientes (asociados a $\lambda_1,...,\lambda_n$) , entonces $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$ con $\mathbf{P} = \left(\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_n}\right)$

(esto sucederá, desde luego, si los $\lambda_i$ son raices simples de la ecuación característica, pero también puede ocurrir aunque haya autovalores múltiples; si hay menos de n vectores propios la **J** no será diagonal y aparecerán términos de la forma $t^n$ en la matriz exponencial; como siempre, dicha matriz será real, aunque los $\lambda_i$ puedan ser complejos)

En la próxima sección, gracias a la transformada de Laplace, podremos resolver estos sistemas, incuidos los de **J** no diagonal, sin usar matrices.

**Ej 1.** Hallemos la solución general de $\boxed{\begin{array}{l} x'=x+2y \\ y'=2x+2y+2z \\ z'=2y+3z \end{array}}$ o sea, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&2\\0&2&3\end{pmatrix}\mathbf{x}$.

Los autovalores y los vectores propios asociados son

$\lambda=-1\to \mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\lambda=2\to \mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\lambda=5\to \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ y, por tanto, $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$

Para el cálculo de la solución general no es necesario el cálculo de la $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{x}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{5t}\end{pmatrix}\mathbf{c}^*=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+c_3e^{5t}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Sea ahora [e] $\boxed{x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t)}$ con $a_i$, f continuas en I.

Tiene solución única definida en I satisfaciendo $x(t_o)=x_o,\ldots,x^{(n-1)}(t_o)=x_o^{(n-1)}$, si $t_o\in\mathbf{I}$ .

**Teor 4.** Si $x_1,\ldots,x_n$ son n soluciones de la homogénea tales que su wronskiano $|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix}x_1&\ldots&x_n\\ \vdots&&\vdots\\ x_1^{(n-1)}&\ldots&x_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$ es no nulo para algún $s\in\mathbf{I}$ y $x_p$ es solución de [e], la solución general de [e] es $x=c_1x_1+\ldots+c_nx_n+x_p$

Si los coeficientes son constantes: [c] $\boxed{L[x]\equiv x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)}$ , para resolver la homogénea basta hallar las raíces de una ecuación de autovalores :

**Teor 5.** Supongamos que $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$ tiene m raíces reales $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ de multiplicidades $r_1,\ldots,r_m$ y 2k raíces complejas $p_1\pm iq_1,\ldots,p_k\pm iq_k$ de multiplicidades $s_1,\ldots,s_k$ $[\,r_1+\ldots+r_m+2(s_1+\ldots+s_k)=n\,]$. Entonces

$e^{\lambda_1 t},\ldots,t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t},\ldots\ldots,e^{\lambda_m t},\ldots,t^{r_m-1}e^{\lambda_m t},\ldots\ldots,$

$e^{p_1t}\cos q_1t,\ e^{p_1t}\operatorname{sen} q_1t,\ldots,t^{s_1-1}e^{p_1t}\cos q_1t,\ t^{s_1-1}e^{p_1t}\operatorname{sen} q_1t,\ldots\ldots,$

$e^{p_kt}\cos q_kt,\ e^{p_kt}\operatorname{sen} q_kt,\ldots,t^{s_k-1}e^{p_kt}\cos q_kt,\ t^{s_k-1}e^{p_kt}\operatorname{sen} q_kt$

son n soluciones linealmente independientes de L[x]=0

**Ej 2.** $\boxed{x^{v}-4x''+3x'=0}$ tiene por ecuación característica $\lambda^5-4\lambda^2+3\lambda=0$ ,

cuyas raíces son $\lambda=0$, $\lambda=1$ doble y $\lambda=-1\pm i\sqrt{2}$ , con lo que su solución general es

$$x=c_1+(c_2+c_3t)\,e^t+(c_4\cos\sqrt{2}t+c_5\operatorname{sen}\sqrt{2}t)\,e^{-t}$$

Para resolver la no homogénea no disponemos ahora de una fórmula sencilla para el cálculo de la $x_p$ a partir de las soluciones de la homogénea (aunque como último recurso podríamos resolver el sistema equivalente mediante matrices). Pero si la f(t) está formada por sumas y productos de polinomios, exponenciales, senos y cosenos podemos acudir al **método de los coeficientes indeterminados** descrito en el siguiente teorema:

**Teor 6.**

> **i]** Si $f(t) = e^{\lambda t}p_m(t)$ , con $p_m$ polinomio de grado m, y $\lambda$ no es autovalor de [ch] existe una solución particular de [c] de la forma $x_p= e^{\lambda t}P_m(t)$ , donde $P_m$ es otro polinomio de grado m cuyos coeficientes se determinan llevando $x_p$ a [c]. Si $\lambda$ es autovalor de multiplicidad r existe $x_p= t^r e^{\lambda t}P_m(t)$
>
> **ii]** Si $f(t) = e^{pt}[p_j(t)\cos qt + q_k(t)\operatorname{sen} qt]$ con $p_j$ y $q_k$ polinomios de grados j y k, y $p\pm iq$ no es autovalor de [ch] existe solución particular de [c] de la forma $x_p= e^{pt}[P_m(t)\cos qt + Q_m(t)\operatorname{sen} qt]$ donde $P_m$ y $Q_m$ son polinomios de grado $m=\text{máx}\{j,k\}$, cuyos coeficientes se determinan llevando $x_p$ a [c]. Si $p\pm iq$ es autovalor de multiplicidad s existe $x_p= t^s e^{pt}[P_m(t)\cos qt + Q_m(t)\operatorname{sen} qt]$
>
> **iii]** Si $f(t) = f_1(t)+..+f_n(t)$ y $L[x_i] = f_i(t)$ entonces $L[x_1+..+x_n] = f(t)$

**Ej 3.** Hallemos, por este método, las soluciones particulares de los ejemplos 2 y 4 de la sección anterior ya calculadas con la fórmula de variación de las constantes:

$\boxed{x''-2x'+x=6te^t}$ Como $\lambda=1$ es autovalor doble de la homogénea hay solución de la forma $x_p=t^2e^t[At+B] \to x'_p=e^t[At^3+(B+3A)t^2+2Bt] \to x''_p=e^t[At^3+(B+6A)t^2+(4B+6A)t+2B]$ Llevándolas a la ecuación tenemos $[6At+2B]e^t=6te^t \to B=0,\ A=1 \to x_p=t^3e^t$

$\boxed{t^2x''+tx'-x=t}$ Teníamos que $\lambda=\pm1$ . Como no tiene coeficientes constantes no podemos aplicar directamente el método de coeficientes indeterminados. Pero como sabemos que al hacer $t=e^s$ la ecuación se convierte en $x''-x=e^s \to$ existe para esta ecuación $x_p=Ase^s \to$ existe $x_p=At\ln t$ para la ecuación en t $\to x_p= \frac{t}{2}\ln t$ ya calculada.

**Ej 4.** Calculemos soluciones particulares de $\boxed{x''+x = f(t)}$ para diferentes f(t).

Sus autovalores son $\lambda=\pm i$ (su solución general es, pues, $x=c_1\cos t+c_1\operatorname{sen} t+x_p$)

Si $\boxed{f(t) = e^t\cos t}$ existe $x_p=e^t(A\cos t+B\operatorname{sen} t) \to (A+2B)\cos t+(B-2A)\operatorname{sen} t = \cos t \to$ $A=\frac{1}{5}$ , $B=\frac{2}{5} \to x_p= e^t(\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\operatorname{sen} t)$

Si $\boxed{f(t) = \cos^2 t}$ aparentemente no podemos utilizar coeficientes indeterminados, pero como $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \to$ existe $x_p= A+B\cos 2t+C\operatorname{sen} 2t \to x_p= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2t$

Si $\boxed{f(t) = (\cos t)^{-1}}$ tenemos que acudir a la fórmula de variación de las constantes: $|\mathbf{W}(t)|=1 \to x_p= \operatorname{sen} t\int\cos t\,(\cos t)^{-1}dt - \cos t\int\operatorname{sen} t\,(\cos t)^{-1}dt = t\operatorname{sen} t+ \cos t\ln(\cos t)$

**Ej 5.** Resolvamos $\boxed{x^{iv}+4x'''+8x''+8x'+4x=4t \text{ con } x(0)=-1, x'(0)=0, x''(0)=0, x'''(0)=2}$

Como $\lambda=0$ no es autovalor existe $x_p=At+B \to x_p= t-2$ ; lo difícil es calcular los autovalores que, de hecho, son $\lambda=-1\pm i$ dobles, por lo que la solución general es $x= (c_1+c_2t)e^{-t}\cos t + (c_3+c_4t)e^{-t}\operatorname{sen} t + t-2$ ; imponiendo ahora los datos iniciales y resolviendo el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas obtenemos $x= e^{-t}\cos t + t-2$ .

Tratemos ahora la **estabilidad** de las soluciones del sistema [S]. Suponemos que **A** y **f** son continuas en $I=[t_o,\infty)$ con lo que todas las soluciones de [S] están definidas para todo $t \geq t_o$ . Si **W**(t) es cualquier matriz fundamental y **x**(t), **x***(t) son dos soluciones

$$\| \mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t) \| = \| \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_o)[\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)] \| \leq K \| \mathbf{W}(t) \| \| \mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o) \|$$

(sean cualesquiera las normas utilizadas, pues todas son equivalentes; por ejemplo, tomando como norma de W(t) la suma de los valores absolutos de sus elementos ).

Por tanto, a semejanza de los que ocurría en las lineales de primer orden, se puede hablar de la estabilidad del sistema [S] pues, como se ve, todas sus soluciones tienen la misma estabilidad: serán **estables**, **asintóticamente estables** o **inestables** dependiendo de que, respectivamente, la norma de una **W**(t) **esté acotada**, **tienda a 0 cuando** $t\to\infty$ o **no esté acotada** . También se tiene como allí que la estabilidad no depende de **f**(t) y que, por tanto, cualquier solución tiene la estabilidad que tenga la solución trivial $\mathbf{x}\equiv\mathbf{0}$ como solución de la homogénea.

Para el caso de **coeficientes constantes** se tiene entonces el siguiente resultado:

**Teor 7.**

> Si todos los autovalores de **A** tienen parte real negativa, el sistema [C] es asintóticamente estable
>
> Si todos los autovalores de **A** tienen parte real menor o igual que 0 y para cada $\lambda$ de multiplicidad m con Re $\lambda=0$ existen m vectores propios linealmente independientes, el sistema [C] es estable
>
> En los demás casos, [C] es inestable

[los elementos de $\mathbf{W}(t)=e^{\mathbf{A}t}$ son exponenciales $e^{\lambda t}$ tal vez multiplicadas (si la **J** no es diagonal) por polinomios en t ; si Re $\lambda<0$ cada uno de estos elementos, y por tanto la norma de la matriz fundamental, tiende a 0 cuando $t\to\infty$ ; si hay $\lambda$ con Re $\lambda=0$ y la **J** es diagonal hay términos que son constantes, senos o cosenos y permanecen acotados; si hay algún $\lambda$ con Re $\lambda>0$ o si los términos provenientes de $\lambda$ con Re $\lambda=0$ están multiplicados por polinomios la norma de la matriz no está acotada]

Así pues, la parte real de los autovalores nos informa sobre la estabilidad de un sistema (y por tanto de una ecuación) de coeficientes constantes. Pero el problema es que si n>2 los autovalores normalmente no son calculables (sin acudir a métodos numéricos). Sin embargo, el siguiente teorema (criterio de Routh-Hurwitz) nos precisa, sin necesidad de determinar los autovalores, cuando hay estabilidad asintótica.

**Teor 8.**

> Sea $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n$ .
>
> **i]** Si algún $a_i\leq 0$, existen raíces de $P(\lambda)$ con parte real mayor o igual que 0
>
> **ii]** Consideremos la matriz nxn : $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$
>
> Entonces todos los ceros de $P(\lambda)$ tienen parte real negativa si y sólo si son positivos los n determinantes $|a_1|$ , $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$ , $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$ , ..., $|\mathbf{B}|$

**Ej 6.** Aunque no hubiésemos sabido hallar los autovalores del ejemplo 5 podríamos determinar su estabilidad. Se tenía $\lambda^4+4\lambda^3+8\lambda^3+8\lambda+4=0$ . Construimos:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&1&0&0\\8&8&4&1\\0&4&8&8\\0&0&0&4\end{pmatrix}. \text{ Como } \quad 4\,,\ \begin{vmatrix}4&1\\8&8\end{vmatrix}=24\,,\ \begin{vmatrix}4&1&0\\8&8&4\\0&4&8\end{vmatrix}=128\,,\ |\mathbf{B}|=512$$

son todos positivos la ecuación es asintóticamente estable.

**Ej 7.** La ecuación $\boxed{x^{vi}+5x^{v}+6x^{iv}+7x'''+2x'+3x=0}$ no es asintóticamente estable (aunque no podamos saber si es estable a secas o inestable) porque en su ecuación característica es 0 el coeficiente de $\lambda^2$.

**Ej 8.** $\boxed{x^{vi}+5x^{v}+6x^{iv}+7x'''+2x''=0}$ tampoco es asintóticamente estable. Pero como $\lambda=0$ es autovalor doble la solución es de la forma $c_1+c_2t+c_3x_3+c_4x_4+c_5x_5+c_6x_6$ y la ecuación es inestable pues no está acotada la matriz fundamental formada por esas 6 soluciones y sus 5 primeras derivadas (para las ecuaciones siempre es fácil, sin calcular vectores propios, ver lo que ocurre si hay $\lambda$ con Re $\lambda=0$)

**Ej 9.** $\boxed{x'''+2x''+4x'+8x=\text{sen}(t-7)}$ , de ecuación característica $\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+8=0$ , no es asintóticamente estable pues $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\8&4&2\\0&0&8\end{pmatrix}\ \rightarrow\ 2\,,\ \begin{vmatrix}2&1\\8&4\end{vmatrix}=0\,,\ |\mathbf{B}|=0$

En este caso podemos hallar los autovalores: $\lambda=\pm 2i$ , $\lambda=-2$ y comprobar que la ecuación es estable, aunque no asintóticamente (los de Re $\lambda=0$ son simples)

**Ej 10.** $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}0&0&1\\-3&-1&-2\\0&1&0\end{pmatrix}\mathbf{x}}$ tiene por ecuación característica $\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+3=0$ . No es asintóticamente estable pues $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\ \rightarrow\ 1>0$ , pero $\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}<0\,,\ |\mathbf{B}|<0$

No hay forma fácil de calcular los autovalores. Veamos si los hay con Re$\lambda=0$: $\lambda=\pm qi$ . Debe ser $iq(2-q^2)+(3-q^2)=0$. Como esto no es posible para ningún q y sabemos que debe haber $\lambda$ con Re $\lambda\geq 0$ $\rightarrow$ existen $\lambda$ con Re $\lambda>0$ $\rightarrow$ es inestable.

**Ej 11.** $\boxed{t^3x''-tx'+x=1}$ (ejemplo 6 de 2.2)

Es lineal, pero no tiene coeficientes constantes. Pero como vimos que la solución de la homogénea era $x=c_1t+c_2te^{-1/t}$, una matriz fundamental es $\begin{pmatrix}t & te^{-1/t}\\1 & (1+t^{-1})e^{-1/t}\end{pmatrix}$ cuya norma es, evidentemente, no acotada. La ecuación es inestable.

## 2.4 Transformada de Laplace

Sea f(t) una función continua a trozos en $[0,\infty)$. Se llama **transformada de Laplace** de f a la función Lf = F definida por

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt} \quad \text{para todo } s \text{ tal que la integral converge.}$$

Enunciamos, con pocas precisiones teóricas y sin demostraciones (la mayoría son simples ejercicios de integración), algunas de sus propiedades.

El operador $L: f \longrightarrow F$ es claramente lineal. Dada una F(s) puede que no exista una f(t) tal que L[f] = F , pero si existe hay una única f que es continua. Podemos, pues, definir el operador $L^{-1}: F \longrightarrow f$ . A $L^{-1}[F] = f$ le llamaremos **transformada inversa** de Laplace de F. Está claro que también $L^{-1}$ es lineal.

Lo básico para resolver ecuaciones es el hecho de que la L transforma las derivadas de una x(t) en una expresión en la que no aparecen las derivadas de X(s) :

**Teor 1.**
$$\boxed{L\left[x^{(n)}(t)\right] = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)}$$

Necesitaremos también conocer la transformadas de las siguientes funciones:

**Teor 2.**
$$\boxed{L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \;\; ; \;\; L[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \;\; ; \;\; L[\operatorname{sen} at] = \frac{a}{s^2+a^2} \;\; ; \;\; L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

Y las siguientes reglas para calcular otras transformadas a partir de ellas:

**Teor 3.**
$$\boxed{L\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a) \;\; , \;\; L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)}$$

La transformada de un producto no es el producto de las transformadas. Pero se tiene:

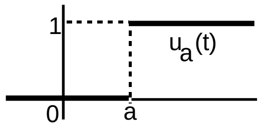
**Teor 4.**

Se llama **convolución** de f y g a la función $f*g\,(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du$ .

Se tiene que $f*g = g*f$ y que $L[f*g] = L[f]L[g]$

Especial interés posee la L para resolver ecuaciones en las que aparecen funciones discontinuas, como la **función paso** $u_a(t)$ , definida como

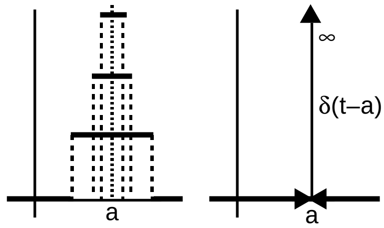
$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<a \\ 1 & \text{si } t\geq a \end{cases}$$




o la "función" **delta** $\delta(t-a)$, cuya definición rigurosa exigiría acudir a la teoría de distribuciones, pero con la que no es difícil trabajar formalmente.

La $\delta(t-a)$ se puede definir intuitivamente como el "límite" cuando $n$ tiende a $\infty$ de

$$f_n(t) = \begin{cases} n \text{ si } t\in[a-1/2n, a+1/2n] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$




Este objeto matemático tiene las propiedades:

$$\delta(t-a) = 0 \text{ si } t\neq a\,; \qquad \frac{d}{dt}u_a(t) = \delta(t-a)\ ;$$

$$\int_b^c f(t)\,\delta(t-a)\,dt = \begin{cases} f(a) \text{ si } a\in[b,c] \\ 0 \text{ si } a\notin[b,c] \end{cases}$$

De estas definiciones se deduce fácilmente:

**Teor 5.** $\boxed{\text{Si } a>0:\ L[u_a(t)] = \frac{1}{s}e^{-as}\ ,\ L[\delta(t-a)] = e^{-as}}$

Por último necesitaremos:

**Teor 6.** $\boxed{L[u_a(t)\,f(t-a)] = e^{-as}F(s)\ ,\ a>0}$

Con estos resultados es posible resolver un gran número de ecuaciones y sistemas lineales con **coeficientes constantes** (aquellos en que el término no homogéneo esté escrito a base de polinomios, exponenciales, senos y cosenos; es decir, los mismos en que se puede aplicar coeficientes indeterminados). Aplicando el operador L convertiremos el problema diferencial en otro algebraico. Resuelto éste se tratará simplemente de calcular alguna transformada inversa.

**Ej 1.** $\boxed{x^{iv}+4x'''+8x''+8x'+4x=4t \text{ con } x(0)=-1, x'(0)=0, x''(0)=0, x'''(0)=2}$ (ejemplo 5 de 2.3)

Aplicando L a ambos miembros y utilizando su linealidad tenemos:

$$L[x^{iv}]+4L[x''']+8L[x'']+8L[x']+4L[x] = s^4X+s^3-2+4s^3X+4s^2+8s^2X+8s+8sX+8+4X = \frac{4}{s^2} = L[4t]$$

Despejando, $X = \dfrac{-s^5-4s^4-8s^3-6s^2+4}{s^2[s^4+4s^3+8s^2+8s+4]}$ .

Ahora **para calcular la** $L^{-1}[X]$ **descompondremos en fracciones simples**. Necesitamos calcular las raíces del denominador (y para ello debemos poder resolver la ecuación característica de la ecuación, que en general, como en este ejemplo, será un factor de dicho denominador). La descomposición es:

$$\frac{-s^5-4s^4-8s^3-6s^2+4}{s^2[s^2+2s+2]^2} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+2}+\frac{Es+F}{[s^2+2s+2]^2} = \frac{-2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

una vez resuelto el largo sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Para la única $L^{-1}$ no inmediata, completamos el cuadrado del denominador y utilizamos el teorema 3

$$L^{-1}\Big[\frac{s+1}{s^2+2s+2}\Big] = L^{-1}\Big[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\Big] = e^{-t}L^{-1}\Big[\frac{s}{s^2+1}\Big] = e^{-t}\cos t$$

Por la linealidad de $L^{-1}$ tenemos por fin: $x = L^{-1}[X] = -2 + t + e^{-t}\cos t$

[con la L hemos calculado la solución del problema directamente, ahorrándonos el proceso de cálculo de la solución general, de una particular y la determinación de las constantes arbitrarias a partir de los datos iniciales; a cambio, hemos tenido que sufrir la descomposición en fracciones simples]

**Ej 2.** $\boxed{\begin{array}{ll} x'=2y-2e^{2t} & x(0)=0 \\ y'=-2x+4y-2 & y(0)=1 \end{array}}$ $\to$ $\begin{array}{l} sX=2Y-\frac{2}{s-2} \\ sY-1=-2X+4Y-\frac{2}{s} \end{array}$ $\to$ $Y=\frac{s}{2}X+\frac{1}{s-2}$ $\to$ $X=\frac{8}{(s-2)^3 s}$

Descomponiendo $\frac{8}{(s-2)^3 s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{(s-2)^3}$ se obtiene A=–1, B=1, C=–2, D=4 .

Por tanto $x=-1+e^{2t}-2te^{2t}+2t^2e^{2t}$ , puesto que $L^{-1}[\frac{1}{(s-a)^k}]=e^{at}L^{-1}[\frac{1}{s^k}]=e^{at}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$

Podríamos calcular x mediante una convolución pues X es el producto de dos transformadas conocidas:

$$L^{-1}[X]=4\,L^{-1}[\tfrac{1}{s}]\,L^{-1}[\tfrac{2}{(s-2)^3}]=4\,[1*t^2e^{2t}]=4\int_0^t u^2e^{2u}\,du$$

[normalmente este segundo camino no es viable y será preferible, aunque lo sea, la descomposición en fracciones simples; deberemos acudir a la convolución para invertir fracciones simples cuyos denominadores sean polinomios de segundo orden, sin raíces reales, elevados a un exponente]

Una vez calculada la x podemos calcular la y a partir de : $y=e^{2t}+\frac{x'}{2}=e^{2t}+2t^2e^{2t}$ .

También podríamos (aunque usualmente es más largo) hallar la Y y calcular su transformada inversa. En nuestro caso: $Y=\frac{1}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^3}$ y se llega a lo mismo.

**Ej 3.** $\boxed{x'''+x=f(t)=\begin{cases} 6t \text{ si } 0\le t<1 \\ 0 \text{ si } 1\le t \end{cases} \quad \text{con } x(0)=-1\,,x'(0)=3\,,x''(0)=-6}$

Para calcular la $L[f(t)]=6\,L[t-t\,u_1(t)]$ podemos aplicar el teorema 3 o el 6:

$L[tu_1]=-\frac{d}{ds}[Lu_1]=-\frac{d}{ds}[\frac{e^{-s}}{s}]=e^{-s}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}]$ ó $L[(t-1)u_1+u_1]=e^{-s}L[t]+[Lu_1]=e^{-s}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}]$

y por tanto $s^3X+s^2-3s+6+s^2X+s-3=\frac{6}{s^2}-6e^{-s}\frac{s+1}{s^2}$ $\to$ $X=\frac{-s^4+2s^3-3s^2+6}{(s+1)s^4}-e^{-s}\frac{6}{s^4}$

La descomposición del primer sumando es $-\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}-\frac{6}{s^3}+\frac{6}{s^4}$ .

Para invertir el segundo, del teorema 6 se tiene $L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)\,f(t-a)$, con lo que:

$$L^{-1}[\tfrac{6}{s^4}]=t^3\to L^{-1}[e^{-s}\tfrac{6}{s^4}]=u_1(t)\,(t-1)^3$$

Así pues, $x=-1+3t-3t^2+t^3-u_1(t)\,(t-1)^3=\begin{cases}(t-1)^3 & \text{si } t\le 1\\ 0 & \text{si } t\ge 1\end{cases}$ .

Resolvamos el problema de otra forma totalmente diferente. Hallamos la solución general $x_1$ para $t\le 1$ [f(t)=6t] y $x_2$ para $t\ge 1$ [f(t)=0] y utilizamos el hecho de que como f es una función integrable la solución va a tener dos (pero no tres) derivadas continuas en t=1 (resolver una ecuación de tercer orden viene a equivaler a integrar tres veces; no será pues, estrictamente hablado, solución en t=1).

En el primer intervalo $x_p=At^2+Bt^3$ $\to$ $x_p=t^3-3t^2$ $\to$ $x_1=c_1+c_2t+c_3e^{-t}+t^3-3t^2$

Imponiendo los datos iniciales en 0 se obtiene $c_1=-1,c_2=3,c_3=0$ $\to$ $x_1=(t-1)^3$ , $t\le 1$.

La solución general a partir de $t=1$ es $x_2=c_1+c_2t+c_3e^{-t}$ .

No tiene sentido aplicarle los datos iniciales en 0. Pero por ser de clase 2 los valores de x, x' y x" a la derecha de t=1 han de coincidir con los que da $x_1$ a la izquierda.

Imponemos pues a $x_2$ que $x_2(1)=x_1(1)=0$ , $x_2'(1)=x_1'(1)=0$ ,$x_2''(1)=x_1''(1)=0$ $\to$ $x_2\equiv 0$ , si $t\ge 1$ .

**Ej 4.** $\boxed{\begin{array}{ll} x'=-x+e^{-1}\delta(t-1) & x(0)=0 \\ y'=x-y & y(0)=1 \end{array}}$ $\to$ $\begin{array}{l} sX=-X+e^{-1}e^{-s} \\ sY-1=X-Y \end{array}$ $\to$ $\begin{array}{l} X=e^{-1}\frac{e^{-s}}{s+1} \\ Y=\frac{1}{s+1}+e^{-1}\frac{e^{-s}}{(s+1)^2} \end{array}$

$$L^{-1}\Big[\frac{1}{s+1}\Big]=e^{-t}\ ,\ L^{-1}\Big[\frac{1}{(s+1)^2}\Big]=te^{-t}\ \to\ L^{-1}\Big[\frac{e^{-s}}{s+1}\Big]=u_1(t)e^{-t+1}\ ,\ L^{-1}\Big[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\Big]=u_1(t)(t-1)e^{-t+1}$$

$$\to\quad x=u_1(t)\,e^{-t}=\begin{cases}0 & \text{si } t\le 1\\ e^{-t} & \text{si } t\ge 1\end{cases}\quad,\quad y=e^{-t}+u_1(t)(t-1)e^{-t}=\begin{cases}e^{-t} & \text{si } t\le 1\\ te^{-t} & \text{si } t\ge 1\end{cases}$$

(observemos que la x ha salido discontinua en t=1 como debía ocurrir para que su derivada pudiera ser una $\delta$ ; rigurosamente no es pues solución en ese punto).

Resolvamos el problema por otros caminos. Como la matriz del sistema ya está en forma de Jordan

$$\mathbf{x}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int_0^t e^{s-t}\begin{pmatrix}1&0\\t-s&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-1}\delta(s-1)\\0\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}0\\e^{-t}\end{pmatrix}+e^{-1}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{s-t}\\(t-s)e^{s-t}\end{pmatrix}\delta(s-1)\,ds$$

la integral es **0** si $t<1$ y $\begin{pmatrix}e^{1-t}\\(t-1)e^{1-t}\end{pmatrix}$ si $t\ge 1$, por tanto: $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\e^{-t}\end{pmatrix}$ si $t<1$ , $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}e^{-t}\\te^{-t}\end{pmatrix}$ si $t\ge 1$ .

Más formas de resolverlo sin transformadas. La primera ecuación sólo contiene x. Podríamos haberla resuelto directamente de una de las dos siguientes formas:

Como la solución es $x=c_1e^{-t}$ tanto para $t<1$ como para $t>1$ y la x debe tener en $t=1$ un salto de altura $e^{-1}$ para que al derivarla aparezca la $e^{-1}\delta(t-1)$:

$x(0)=0\ \to\ x\equiv 0$ si $t<1\to x(1^-)=0\ \to x(1^+)=e^{-1}\to\ x=e^{-t}$ si $t>1$

Aplicando la fórmula de variación de las constantes para ecuaciones de primer orden (la cosa funciona, aunque la demostramos para funciones continuas):

$$x=e^{-t}\int_0^t e^{-s}e^{-1}\,\delta(s-1)\,ds=\begin{cases}0 & \text{si } t<1\\ e^{-t}e^{1}e^{-1}=e^{-t} & \text{si } t\ge 1\end{cases}$$

Llevando esta x a la segunda ecuación: $y'=-y+u_1(t)\,e^{-t}$ que podemos resolver:

$y=c_1e^{-t}$ si $t<1$ con $y(0)=1\ \to\ y=e^{-t}$ si $t<1\ \to\ y(1^-)=e^{-1}$

$y_p=Ate^{-t}\to y_p=te^{-t}\to\ y=c_1e^{-t}+te^{-t}$ si $t\ge 1$ con $y(1^+)=e^{-1}$ (y continua) $\to\ y=te^{-t}$ si $t\ge 1$

O bien: $y=e^{-t}+e^{-t}\int_0^t e^se^{-s}u_1(s)\,ds=\begin{cases}e^{-t} & \text{si } t<1\\ e^{-t}+e^{-t}\int_0^t 1\,ds=te^{-t} & \text{si } t\ge 1\end{cases}$

## 2.5 Soluciones periódicas de ecuaciones lineales

Consideremos el sistema [S] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ con **A** y **f** continuas y de periodo T [ es decir, $\mathbf{A}(t+T)=\mathbf{A}(t)$ ; $\mathbf{f}(t+T)=\mathbf{f}(t)$ ] (sus soluciones son únicas y están definidas para todo t ).

**Teor 1.** $\boxed{\mathbf{x}(t) \text{ , solución de [S] , es de periodo T} \Leftrightarrow \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(T)}$

La $\Rightarrow$ es trivial. La otra implicación no es cierta, evidentemente, para funciones cualesquiera, pero esa condición es suficiente para las soluciones del sistema [S]:
Sea $\mathbf{x}(t)$ solución de [S] con $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(T)$ .Entonces $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(t+T)$ es también solución [ pues $\mathbf{z}'(t)=\mathbf{x}'(t+T)=\mathbf{A}(t+T)\mathbf{x}(t+T)+\mathbf{f}(t+T)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t+T)+\mathbf{f}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t)+\mathbf{f}(t)$ ] y satisface $\mathbf{z}(0)=\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0)$ . Por unicidad, $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{x}(t)$ para todo T.

**Teor 2.** El sistema homogéneo tiene como única solución T-periódica la trivial $\mathbf{x}\equiv 0$ $\Leftrightarrow$ el sistema [S] tiene una única solución T-periódica

Sea $\mathbf{x}(t)=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x}_\mathbf{p}(t)$ la solución general de [S]. Por el teorema 1, $\mathbf{x}(t)$ es T-periódica si y sólo si $[\mathbf{W}(0)-\mathbf{W}(T)]\mathbf{c}=\mathbf{x}_\mathbf{p}(T)-\mathbf{x}_\mathbf{p}(0)$ . Este sistema algebraico tiene solución única si y sólo si el sistema homogéneo $[\mathbf{W}(0)-\mathbf{W}(T)]\mathbf{c}=\mathbf{0}$ tiene sólo la solución $\mathbf{c}=\mathbf{0}$ y esto equivale a que el sistema homogéneo tenga sólo $\mathbf{x}\equiv 0$ como solución T-periódica.

Si el sistema homogéneo tiene otras soluciones periódicas la situación se complica. Para precisar lo que ocurre es necesario conocer las soluciones del homogéneo, lo que en general no se puede. Nos limitamos a considerar dos casos particulares:

Sean [1] $\boxed{x'=a(t)x}$ y [2] $\boxed{x'=a(t)x+f(t)}$ , con a y f continuas y de periodo T.

**Teor 3.**

**i]** [1] tiene como **única** solución T-periódica la trivial $\Leftrightarrow \int_0^T a(t)dt \neq 0$

**ii]** Si [1] tiene **todas** sus soluciones T-periódicas $\left[\int_0^T a(t)dt = 0\right] \Rightarrow$

**a]** Si $\int_0^T e^{-\int_0^s a(u)du} f(s)ds=0$ **todas** las soluciones de [2] son T-periódicas

**b]** Si la integral no es 0, **ninguna** solucion de [2] es T-periódica

**i]** $x(t) = Ce^{\int_0^t a}$ es T-periódica para todo c $\Leftrightarrow x(T)=x(0) \Leftrightarrow \int_0^T a(t)dt = 0$
Si esta última integral no es 0 la única solución periódica se tiene para c=0 .

**ii]** x(t) solución de [2] es T-periódica $\Leftrightarrow x(T)=x(0) \Leftrightarrow x(0)[1-e^{\int_0^T a}] = e^{\int_0^T a}\int_0^T e^{-\int_0^s a} f ds$ ,
de donde se sigue inmediatamente el resultado del teorema.

**Ej 1.** $\boxed{x'=e^{\cos t}x+\operatorname{sen}^3 t}$ Como $\int_0^{2\pi} e^{\cos t}dt \neq 0$ la ecuación homogénea tiene sólo la solución periódica trivial y la no homogénea tiene una única solución $2\pi$-periódica.

**Ej 2.** $\boxed{x'=ax+f(t)\ ,\ f(t+T)=f(t)}$ Si $a\neq 0$ tiene una única solución T-periódica.
Si a=0, la homogénea tiene todas T-periódicas ($x\equiv c$) y la no homogénea $x'=f(t)$ tiene todas sus soluciones T-periódicas si $\int_0^T f(t)dt=0$ o ninguna en caso contrario.
(La primitiva de una función periódica es periódica si y sólo si su promedio es 0)

Consideremos ahora [c] $\boxed{x''+ax'+bx=f(t)}$ con f continua y T-periódica.

Sabemos por la sección 2.2 que la homogénea [ch] tiene soluciones periódicas no tiviales si y sólo si existen autovalores de la forma $\lambda=\pm qi$ :

Si a=0 y b>0 ( $\lambda=\pm\sqrt{b}\,i$ ) la solución general es $x=c_1\cos\sqrt{b}\,t+c_2\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,t$ , y todas las soluciones son periódicas de periodo mínimo $2\pi/\sqrt{b}$ (no tienen que ser de periodo T).

Si b=0 (al menos un $\lambda=0$) la solución es $x=c_1+c_2x_2$ con $x_2$ no periódica, y existen soluciones de cualquier periodo (aunque no todas sean periódicas).

El teorema 2 asegura que [c] tiene una **única** solución T-periódica cuando [ch] tiene como **única** solución T-periódica la trivial. Además:

**Teor 4.**

**i]** Si a=0 , b>0 y $T=2\pi n/\sqrt{b}$ para algún $n\in\mathbf{N}$ (**todas** las soluciones de [ch] son T-periódicas) entonces:

**a]** Si $\int_0^T f(t)\cos\sqrt{b}\,t\,dt=\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,t\,dt=0$ , **toda** solucion de [c] es T-periódica

**b]** Si alguna de las integrales no es 0, **ninguna** solución de [c] es T-periódica

**ii]** Si b=0 (**infinitas** soluciones de [ch], no todas, son T-periódicas) entonces

**a]** Si $\int_0^T f(t)\,dt=0$ existen **infinitas** soluciones T-periódicas de [c] (no todas)

**b]** Si la integral no es 0, **ninguna** solución de [c] es T-periódica

**i]** La fórmula de variación de las constantes nos da la solución general de [c] :

$$x=c_1\cos\sqrt{b}\,t+c_2\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,t+\frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,t\int_0^t f(s)\cos\sqrt{b}\,s\,ds-\frac{1}{\sqrt{b}}\cos\sqrt{b}\,t\int_0^t f(s)\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,s\,ds$$

Entonces, $x(T)-x(0)=-\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^T f(s)\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,s\,ds$ y $x'(T)-x'(0)=\int_0^T f(s)\cos\sqrt{b}\,s\,ds$

El teorema 1 asegura que si las dos integrales son 0 cualquier x es T-periódica. Si alguna no es 0, no hay soluciones T-periódicas.

**ii]** En este caso, si $a\neq 0$ : $x=c_1+c_2e^{-at}+\frac{1}{a}\int_0^t f(s)\,ds-\frac{1}{a}e^{-at}\int_0^t f(s)\,e^{as}\,ds$ . Debe ser:

$$x(T)-x(0)=c_2\left[e^{-aT}-1\right]+\frac{1}{a}\int_0^T f(s)\,ds-\frac{1}{a}e^{-aT}\int_0^T f(s)\,e^{as}\,ds=0$$

$$x'(T)-x'(0)=-ac_2\left[e^{-aT}-1\right]+e^{-aT}\int_0^T f(s)\,e^{as}\,ds=0$$

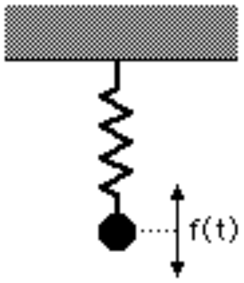
Para que exista $c_2$ satisfaciendo ambas igualdades es necesario y suficiente que $\int_0^T f=0$.

Si también a=0 : $x=c_1+c_2t+t\int_0^t f(s)\,ds-\int_0^t s\,f(s)\,ds$ . Ahora debe cumplirse:

$$x(T)-x(0)=c_2T+T\int_0^T f(s)\,ds-\int_0^T s\,f(s)\,ds=0 \quad\text{y}\quad x'(T)-x'(0)=\int_0^T f(s)\,ds=0$$

De nuevo existe $c_2$ que satisface el sistema (cualquiera que sea $c_1$) si y solo si $\int_0^T f=0$.

**Ej 3.** Si **b>0** y **a≥0** le ecuación [c] puede describir un sistema muelle-masa con rozamiento (si a>0) proporcional a la velocidad, sometido a una fuerza externa de periodo T. El x representa entonces la separación de la masa de la posición de equilibrio. ¿En qué condiciones es el movimiento de la masa de periodo T?




Si **a>0**, los autovalores tienen parte real menor que 0, con lo que la ecuación no homogénea tiene una única solución T-periódica. Como hay estabilidad asintótica todas las soluciones se acercarán a la periódica, con lo que, en la práctica, se verá al cabo del tiempo oscilar a la masa con el periodo de la fuerza externa (de hecho, matemáticamente, el movimiento no es periódico, pues, salvo que los datos iniciales me proporcionen la única solución periódica, existen otros términos conteniendo exponenciales decrecientes).

Si **a=0** (no hay rozamiento), la situación puede ser más complicada. Supongamos por comodidad que b=1 [ la ecuación es [d] $x''+x=f(t)$ y $x=c_1\cos t+c_2 \operatorname{sen} t+x_p$ es su solución ] e impongamos fuerzas externas periódicas de diferentes tipos:

$f(t)=\operatorname{sen}^5(\pi t)$ . Su periodo mínimo es 2. Como la homogénea no tiene soluciones de ese periodo (salvo $x\equiv 0$) hay una única solución 2-periódica de [d]. Sólo para aquellos datos iniciales que nos den $c_1=c_2=0$ obtendremos esa solución de periodo 2. Las demás soluciones serán sumas de funciones de diferentes periodos y no serán periódicas (ni siquiera asintóticamente).

$f(t)=\cos t$ . De periodo mínimo $2\pi$. Como las soluciones de la homogénea son todas de ese mismo periodo es necesario evaluar las integrales:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t \, dt = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = 0$$

con lo que [d] no tiene soluciones $2\pi$-periódicas. Podemos, en este caso, hallar una $y_p$ por coeficientes indeterminados: $x_p= t \operatorname{sen} t /2$ , y comprobar que todas las soluciones oscilan con creciente amplitud (resonancia).

$f(t)=e^{\operatorname{sen} t}$ . Periodo mínimo $2\pi$. Ahora hay que ver si son 0 las integrales:

$$\int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t \, dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen} t} \cos t \, dt = 0$$

La segunda se calcula fácilmente: es 0. La otra no tiene primitiva elemental. Sin embargo analizando la gráfica del integrando (o numéricamente) es fácil ver que no se anula. No hay por tanto soluciones $2\pi$-periódicas (ni de otro periodo porque la segunda integral es no nula en cualquier intervalo $[0,2k\pi]$). Y en este caso no podríamos hallar explícitamente la solución (si lo intentásemos por variación de constantes nos encontraríamos la integral de antes).

$f(t)=\operatorname{sen}^2 t$ . Periodo mínimo $\pi$. Hay una única solución de [d] de periodo $\pi$ porque la homogénea no tiene soluciones no triviales de ese periodo. Como

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \, dt = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t \, dt = 0$$

todas son $2\pi$-periódicas, aunque para afirmarlo no era preciso evaluar esas integrales: si $y_p$ es de periodo $\pi$ todas las $c_1\cos t+c_2 \operatorname{sen} t+x_p$ son de periodo $2\pi$ pues $y_p$ también lo es (de modo similar se probaría que si $T/2\pi=m/n$ es racional, pero no entero, existen infinitas soluciones de [d] de periodo nT)

$f(t)=\operatorname{sen}(2t)$ si $t\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$ , $k\in \mathbf{Z}$ y 0 en el resto. Tiene periodo mínimo $2\pi$. Como

$$\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} t \, dt = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t \, dt = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2t \cos t \, dt = 0$$

la masa se mueve periódicamente para cualquier posición y velocidad iniciales a pesar de aplicarle una fuerza del mismo periodo que el libre del muelle.

# 3. Soluciones por medio de series

En el capítulo anterior vimos las escasas formas de resolver elementalmente la ecuación con coeficientes variables [e] $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ . Este capítulo trata una forma general de atacarla: suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para determinar sus coeficientes.

Si a y b son analíticas siempre se podrán encontrar dos soluciones linealmente independientes en forma de serie por este camino (sección 3.1): llevando la serie a la ecuación conseguiremos expresar todos sus coeficientes $c_k$ en función de los dos primeros $c_0$ y $c_1$ , que serán las dos constantes arbitrarias que aparecen en la solución de cualquier ecuación de segundo orden. Un teorema, que aceptaremos sin demostración, nos asegurará que las series solución son convergentes al menos en el intervalo en que a y b lo eran.

Si a y b no son analíticas, pero "poco", también se pueden utilizar series para resolver [e] de una forma sólo algo más complicada (es el método de Frobenius de la sección 3.2). Calcularemos primero una solución $x_1$ que será siempre de la forma $t^r\sum$ y posteriormente otra $x_2$ linealmente independiente, que unas veces será del mismo tipo y otras contendrá además un término incluyendo el $\ln t$ . De nuevo un teorema no demostrado garantizará la convergencia de las series que vayan apareciendo.

Los cálculos de los coeficientes de las series son sencillos (aunque algo pesados). El problema básico de la utilización de series para la resolución de ecuaciones es la dificultad de obtener información sobre las soluciones obtenidas (y más cuando, en ocasiones, no podremos hallar siquiera su término general). Sin embargo ecuaciones del tipo [e] surgen a menudo en problemas físicos y las series son el único instrumento para resolverlas. Por eso existen libros enteros (los de funciones especiales de la física) dedicados a estudiar las propiedades de las series solución de algunas de estas ecuaciones (las de Legendre, Bessel, Hermite, Laguerre, Tchebycheff, ...) . Una mínima muestra de tales estudios son las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de Legendre y Bessel que se tratan, respectivamente, en las secciones 3.3 y 3.4 .

## 3.1 Puntos regulares

Sea la ecuación [e] $\boxed{x'' + a(t)x' + b(t)x = 0}$

Se dice que $t=t_o$ **es un punto regular de** [e] **si** a **y** b **son analíticas en** $t=t_o$ . En caso contrario se dice que $t=t_o$ es **punto singular** de [e] .

[Recordemos que una función f(t) es analítica en un punto $t_o$ si se puede escribir como una serie de potencias en un entorno de dicho punto. Para que lo sea, debe tener f infinitas derivadas en $t_o$ , su serie de Taylor en $t_o$ ha de tener un radio R de convergencia mayor que 0 y además ha de coincidir f(t) con la serie en $|t-t_o|<R$ . Se sabe también que la mayoría de las funciones elementales son analíticas, y se suponen conocidos los desarrollos de $e^t$ , sen t , cos t , log(1+t), $(1+t)^\alpha$, … en torno a t=0 ].

Supongamos que t=0 es regular y llamemos R al menor de los dos radios de convergencia de a y b . Para $|t|<R$ se podrá entonces escribir:

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \,, \quad b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

Si los coeficientes son analíticos, se puede esperar que cualquier solución de [e] también lo sea. De hecho se tiene el siguiente teorema que no demostramos:

**Teor 1.**

> Si t=0 es regular, la solución general de [e] es $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 x_1 + c_1 x_2$
>
> donde $c_0$ , $c_1$ son arbitrarios y $x_1$ , $x_2$ son soluciones de [e] que admiten desarrollos en serie convergentes, al menos, en el intervalo (-R,R). Además, los coeficientes $c_k$ (para $k\geq 2$) , se pueden determinar de forma única en función de $c_0$ y $c_1$ llevando la serie de x a la ecuación [e] (con los coeficientes a(t) y b(t) desarrollados).

[este último desarrollo, desde luego, no será necesario si a y b son polinomios].

Obtendremos entonces las soluciones en la forma $x_1=1+\Sigma$ , $x_2= t+\Sigma$ , donde estas series contendrán potencias de t mayores o iguales que 2. Las $x_1$ y $x_2$ así definidas serán soluciones de la ecuación satisfaciendo $x_1(0)=1$, $x_1'(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_2'(0)=1$, con lo que su wronskiano en 0 es no nulo y son linealmente independientes .

Si lo que queremos es la solución particular de [e] que satisface $x(0)=x_o$ , $x'(0)=x_o'$ (que por ser a y b analiticas existe y es única) dada la forma de las series de $x_1$ y $x_2$ se tiene inmediatamente que debe ser $c_0=x_o$ , $c_1=x_o'$ .

Para estudiar las soluciones de [e] en un entorno de otro $t_o$ que sea regular, el cambio de variable $s = t-t_o$ nos conduce a una ecuación en s para la que s=0 es regular. Aplicando lo anterior para hallar su solución obtenemos

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \ , \quad \text{es decir} \ , \quad x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_o)^k \ .$$

En la práctica operaremos como en los ejemplos siguientes:

**Ej 1.** $\boxed{(1+t^2)x''+2tx'-2x = 0}$ , es decir, $x'' + \frac{2t}{1+t^2}x' - \frac{2}{1+t^2}x = 0$

Las funciones $a(t) = 2t/(1+t^2)$ y $b(t) = -2/(1+t^2)$ son analíticas en para $|t|<1$.

[si P y Q son polinomios y $Q(0)\neq 0$, entonces P/Q, simplificados los factores comunes, admite un desarrollo cuyo R es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de Q más próxima; en el ejemplo el denominador se anula en $\pm i$ que distan 1 del origen].

Existen, pues, soluciones que son series convergentes al menos en (–1,1). Como las series de potencias se pueden derivar término a término dentro de su intervalo de convergencia se tiene si $|t|<1$:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0+c_1 t + c_2 t^2+\ldots \to\ x'=\sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} = c_1+2c_2 t +\ldots \to\ x''=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} = 2c_2+\ldots$$

Llevamos estas series a la ecuación inicial (lo que es mucho más práctico que desarollar a y b) e intentamos escribir los $c_k$ en funcion de $c_0$ y $c_1$.

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k t^{k-2} + k(k-1)c_k t^k] + \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k t^k = 0 \ .$$

Para que ocurra esto es necesario que el coeficiente de cada potencia de t se anule (hay que tener cuidado con los primeros términos porque no todas las series empiezan a aportar términos para el mismo k):

$$t^0 : 2.1.c_2 - 2.c_0 = 0 \ \to\ c_2 = c_0$$
$$t^1 : 3.2.c_3 + [2-2]c_1 = 0 \ \to\ c_3 = 0$$
……………………………………………………
$$t^{k-2} : k(k-1)c_k + [(k-2)(k-3)+2(k-2)-2]c_{k-2} = 0$$

De esta última expresión deducimos la **regla de recurrencia** que nos proporciona el $c_k$ en función de los anteriores ya conocidos (en este ejemplo, exclusivamente en función de $c_{k-2}$); factorizaremos los polinomios que aparezcan calculando sus raíces:

$$c_k = -\frac{k(k-3)}{k(k-1)}c_{k-2} = -\frac{k-3}{k-1}c_{k-2} \ ,\ k=2,3,\ldots$$

Haciendo uso de esta regla calculamos algunos coeficientes más para facilitar la búsqueda de la expresión del término general:

$$c_4 = -\frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}c_0 \ ,\quad c_6 = -\frac{3}{5}c_4 = \frac{1}{5}c_0 \ ,\ \ldots \to\ c_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}c_0 \ ,\ k=1,2,\ldots$$

$c_5 = 0$ por estar en función de $c_3$ que se anulaba. Análogamente $c_7 = c_9 = \ldots = 0$

Por tanto la solución general es (sobre $c_0$ y $c_1$ no hay ninguna condición; quedan indeterminados como aseguraba el teorema):

$$x= c_0x_1+c_1x_2 = c_0\,[1+ t^2 - \frac{1}{3}t^4+\frac{1}{5}t^6+\ldots] + c_1 t = c_0\,[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{2k}}{2k-1}] + c_1 t$$

El teorema predecía que las series solución convergerían al menos en (–1,1). Esto es lo que sucede. La serie de $x_1$ (como se puede ver por el criterio del cociente) tiene R=1. La "serie" de $x_2$ (truncada a partir de su segundo término) converge para todo t.

[Esta ecuación se podía haber resuelto sin usar series. Era fácil darse cuenta de que $x_2$= t era una solución, y podríamos haber calculado la $x_1$ siguiendo la sección 2.2:

$$x_1 = t\int t^{-2}e^{-\int\frac{2t}{1+t^2}}dt = t\int t^{-2}(1+t^2)^{-1}dt = -1 - \arctan t$$

cuyo desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido por anteriormente].

Hemos tenido mucha suerte en el ejemplo 1 encontrando una regla de recurrencia tan sencilla y pudiendo expresar el término general. Esto no sucede siempre como nos muestra el segundo ejemplo:

**Ej 2.** $\boxed{x''+(t-2)x=0\ ,\ x(0)=2,\ x'(0)=1}$

Ahora a(t)=0 y b(t)=t–2 son analíticas en todo R, así como sus soluciones $x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ .

Llevando x y sus derivadas a la ecuación:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} [\, c_k t^{k+1} - 2c_k t^k \,] = 0 \ .$$

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de t :

$$t^0 : 2.1.c_2 - 2.c_0 = 0 \ \to\ c_2 = c_0$$

$$t^1 : 3.2.c_3 + c_0 - 2.c_1 = 0 \ \to\ c_3 = -\tfrac{1}{6}c_0 + \tfrac{1}{3}c_1$$

..........................................................................

$$t^{k-2} : k(k-1)c_k + c_{k-3} - 2c_{k-2} = 0 \ \to\ c_k = -\frac{1}{k(k-1)}c_{k-3} + \frac{2}{k(k-1)}c_{k-2}\ ,\ \ k=3,4,\ldots$$

regla de recurrencia de tres términos que suele traer muchos más problemas que las de dos.

Escribimos un par de términos más en función de $c_0$ y $c_1$ :

$$c_4 = -\tfrac{1}{12}c_1 + \tfrac{2}{12}c_2 = \tfrac{1}{6}c_0 - \tfrac{1}{12}c_1$$

$$c_5 = -\tfrac{1}{20}c_2 + \tfrac{2}{20}c_3 = -\tfrac{1}{15}c_0 + \tfrac{1}{30}c_1$$

No hay forma de encontrar la expresión del término general, aunque paso a paso podemos ir calculando el número de términos que queramos.

La solución general es entonces:

$$x = c_0\,[\,1+t^2-\tfrac{1}{6}t^3+\tfrac{1}{6}t^4-\tfrac{1}{15}t^5+\ldots\,] \ +\ c_1\,[\,t+\tfrac{1}{3}t^3-\tfrac{1}{12}t^4+\tfrac{1}{30}t^5+\ldots\,]$$

Y la solución particular $x = 2 + t + 2t^2 + \tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{1}{10}t^5 + \ldots$ , serie convergente para todo t .

## 3.2 Puntos singulares regulares

Supondremos en esta sección que $t=t_o$ es un punto singular de [e] $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ , es decir, que o $a(t)$ o $b(t)$ o las dos no son analíticas en $t=t_o$, con lo que no es aplicable el método de la sección anterior. Sin embargo, interesa en muchas ocasiones conocer el comportamiento de las soluciones de [e] precisamente en las proximidades de sus puntos singulares. En general se podrá decir poco sobre este comportamiento, salvo para un tipo particular de puntos sólo debilmente singulares: los singulares regulares.

$t_o$ **es punto singular regular de** [e] **si** $(t-t_o)a(t)$ **y** $(t-t_o)^2b(t)$ **son analíticas en** $t_o$.

**Ej 1.** $\boxed{t(t-1)^2x''-tx'+(t-1)x=0}$ , es decir, $x''-\frac{1}{(t-1)^2}x'+\frac{1}{t(t-1)}x=0$ .

$t=0$ y $t=1$ son puntos singulares de la ecuación (los demás son regulares).

Como además $-t/(t-1)^2$ y $t/(t-1)$ son analíticas en $t=0$, este punto es singular regular.

Como $-1/(t-1)$ no es analítica en 1 (aunque $(t-1)/t$ sí lo sea), el punto $t=1$ es singular no regular.

Supondremos a partir de ahora que el punto singular regular de [e] que estudiamos es $t=0$. Sabemos que no supone ninguna pérdida de generalidad ya que en el caso de que queramos estudiar las soluciones cerca de un $t_o\neq 0$ el cambio $s=t-t_o$ nos traslada el problema al estudio de las soluciones cerca de 0 de la ecuación en s.

Multiplicando [e] por $t^2$ y llamando $a^*(t)=ta(t)$ y $b^*(t)=t^2b(t)$ obtenemos:

$$\text{[e*]} \quad \boxed{t^2x''+t\,a^*(t)\,x'+b^*(t)\,x=0}$$

Se trata, por tanto, de resolver [e*] en un entorno de $t=0$ suponiendo que $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son analíticas en dicho punto, es decir, que admiten desarrollo en serie

$$a^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a^*_k t^k\,, \quad b^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}b^*_k t^k$$

válido en $|t|<R$ (mínimo de los dos radios de convergencia).

Para hallar las soluciones de [e*] se utiliza el llamado **método de Frobenius**, que detallaremos en el teorema de esta sección. Aunque no lo demostraremos, intentamos con las siguientes consideraciones hacer creíbles sus hipótesis y conclusiones.

La ecuación de la forma [e*] más sencilla es la conocida ecuación de Euler (para ella la $a^*(t)$ y la $b^*(t)$ son "series" que se reducen a su primer término). Viendo sus soluciones está claro que no existen, en general, soluciones analíticas de [e*]. Pero ya que existen soluciones de la ecuación de Euler de la forma $t^r$ se podría pensar que existen para [e*] soluciones en forma de serie que comiencen por términos $t^r$.

Probemos por tanto en [e*] la solución $x=t^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k=c_0\,t^r+c_1\,t^{r+1}+c_2\,t^{r+2}+\dots$

Debe ser entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kt^{k+r}+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a^*_kt^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kt^{k+r}\Big)+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}b^*_kt^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+r}\Big)=0$$

El coeficiente que acompaña a la potencia de menor orden ( $t^r$ ) debe ser cero:

$$\big[\,r(r-1)+a^*_0\,r+b^*_0\,\big]\,c_0=0$$

Si la serie ha de empezar por términos de exponente r, debe ser $c_0 \neq 0$ . Por tanto, las raíces del polinomio $\boxed{q(r) = r(r-1)+a^*_0 r + b^*_0}$ , llamado **polinomio indicial** de [e*] son los únicos valores de r para los que pueden existir soluciones de la forma $t^r \Sigma$ .

Lo anterior es coherente con lo conocido sobre ecuaciones de Euler. Para ellas, si el polinomio tenía dos raíces distintas $r_1$ y $r_2$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación eran $t^{r_1}$ y $t^{r_2}$ . Si la raiz era doble, sin embargo, sólo existía una solución de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el ln t ; por tanto, también es de esperar que en la solución general de [e*] aparezcan logaritmos.

Pero en la ecuación [e*] pueden aparecer otros problemas que no se presentan en el caso particular de Euler. Igualando a 0 el coeficiente que acompaña a $t^{r+k}$:

$$[(r+k)(r+k-1)+(r+k)a^*_0 + b^*_0]\, c_k + [(r+k-1)a^*_1+b^*_1]\, c_{k-1} + \dots = 0$$

donde los puntos representan términos que incluyen $c_{k-2}, c_{k-3}$ , … De esta expresión podemos despejar el $c_k$ en función de los anteriores ya calculados siempre que el corchete que le acompaña, que es el polinomio indicial evaluado en r+k: q(r+k) , no se anule. Si $r_1$ es la mayor de las dos raices $q(r_1+k)\neq 0$ para todo k. Pero si $r_2$ es la menor, y la diferencia $r_1-r_2$ es un entero positivo n, el $q(r_2+k)=0$ si k=n, y, salvo que los demás sumandos también se anulen (con lo que $c_n$ quedaría indeterminado), no hay forma de anular el coeficiente de $t^{r_2+n}$ y no existirán soluciones $t^{r_2}\,\Sigma$ .

Enunciamos ya el teorema (aunque se podría considerar el caso de raíces complejas del polinomio indicial, nos limitamos, por sencillez, a los casos reales):

**Teor 1.** Supongamos que el polinomio indicial de [e*]: $q(r) = r(r-1)+a^*_0 r + b^*_0$ tiene dos raíces reales $r_1$ y $r_2$ con $r_1 \geq r_2$ .

Entonces siempre existe una solución $x_1$ de [e*] de la forma

$$x_1 = t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \,,\ c_0 \neq 0$$

La segunda solución $x_2$ linealmente independiente es, según los casos:

**a]** Si $r_1-r_2$ no es cero ni entero positivo: $x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \,,\ b_0 \neq 0$

**b]** Si $r_1=r_2$ , $x_2 = t^{r_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1 \ln t$

**c]** Si $r_1-r_2=n$ entero positivo, $x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + a\, x_1 \ln t \,,\ b_0 \neq 0 \,,\ a \in \mathbf{R}$

Todas las soluciones están definidas al menos para 0<t<R y los coeficientes $c_k$ , $b_k$ y la constante a se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

Se comprueba sin dificultad que a partir de las soluciones anteriores obtenemos otras válidas para $-R<t<0$ sin más que sustituir ln t por ln|t| y las expresiones de la forma $t^r$ que preceden a las series por $|t|^r$ .

En el caso **c]** la constante a puede perfectamente ser 0 (como en las ecuaciones de Euler), con lo que, a pesar de todo, hay dos soluciones independientes $t^r\,\Sigma$ .

**Ej 2.** $\boxed{2tx''+x'+tx=0}$ , o sea, $t^2x''+t\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}t^2x=0$ .

$t=0$ es singular regular, puesto que $a^*(t)=\frac{1}{2}$ y $b^*(t)=\frac{1}{2}t^2$ son analíticas (en todo **R**)

Como $a^*_0=a^*(0)$ y $b^*_0=b^*(0)$ , el polinomio indicial es $r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=r(r-\frac{1}{2})$ y por tanto $r_1=1/2$ y $r_2=0$ , con $r_1-r_2$ no entero. Las dos soluciones independientes son

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+1/2},\ c_0\neq 0 \quad y \quad x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_k t^k,\ b_0\neq 0\ ,\ \text{ series convergentes para todo } t\ .$$

Llevando la primera de ellas a la ecuación inicial:

$$\sum_{k=0}^{\infty}2\big(k+\tfrac{1}{2}\big)\big(k-\tfrac{1}{2}\big)c_k t^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}\big(k+\tfrac{1}{2}\big)c_k t^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+3/2}=0$$

(obsérverse que ahora todas las series comienzan por $k=0$ ya que, a diferencia de los puntos regulares, no se anulan los primeros términos al derivar).

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de $t$ :

$t^{-1/2}$ : $[2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]\,c_0=0.c_0=0$ y $c_0$ queda indeterminado como debía

$t^{1/2}$ : $[2(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})+\frac{3}{2}]\,c_1=0 \ \rightarrow\ c_1=0$

.............................................................

$t^{k-1/2}$ : $[2(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+(k+\frac{1}{2})]\,c_k+c_{k-2}=0 \ \rightarrow\ c_k=-\frac{1}{k(2k+1)}\,c_{k-2}$ , $k=2,3,\ldots$

Por tanto: $c_3=c_5=\ldots=0$ , $c_2=-\frac{1}{2.5}c_0$ , $c_4=-\frac{1}{4.9}c_2=\frac{1}{2.4.5.9}c_0$ , …

Luego la primera solución es (eligiendo $c_0=1$):

$$x_1=t^{1/2}\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2.4...2m.5.9...(4m+1)}t^{2m}\Big]$$

Para la segunda raiz del polinomio indicial:

$$\sum_{k=2}^{\infty}2k(k-1)\,b_k t^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}k\,b_k t^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}b_k t^{k+1}=0 \ \rightarrow$$

$t^0$ : $b_1=0$

$t^1$ : $[4+2]\,b_2+b_0=0 \ \rightarrow\ b_2=-\frac{1}{6}b_0$

.............................................................

$t^{k-1}$ : $[2k(k-1)+k]\,b_k+b_{k-2}=0 \ \rightarrow\ b_k=-\frac{1}{k(2k-1)}\,b_{k-2}$ , $k=2,3,\ldots$ $\rightarrow$

$b_3=b_5=\ldots=0$ , $b_4=-\frac{1}{4.7}b_2=\frac{1}{2.4.3.7}b_0$ , …

Y la segunda solución: $x_2=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2.4...2m.3.7...(4m-1)}t^{2m}$

Aplicando el criterio del cociente se comprueba que, como debían, las dos series convergen para todo $t$ . La $x_2$ es solución válida para todo $t$ , pero la $x_1$ sólo para $t>0$ (en $t=0$ no tiene siquiera primera derivada). Una $x_1$ válida para $t\neq 0$ es $x_1=|t|^{1/2}[1+\Sigma]$ .

Más complicadas son las cuentas para los otros dos casos del teorema:

**Ej 3.** $\boxed{t^2x''+2t^2x'-2x = 0}$ t=0 es singular regular, $a^*(t)=2t$ y $b^*(t)=-2$ analíticas en **R** .

El polinomio indicial $r(r-1)+0.r-2$ tiene por raíces $r_1=2$ y $r_2=-1$ . Así pues:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2},\ c_0\neq 0 \ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\,c_k t^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)\,c_k t^{k+3} - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k t^{k+2} = 0$$

$$\to \quad c_0 \text{ indeterminado },\quad c_k = -\frac{2(k+1)}{k(k+3)}\,c_{k-1}\ ,\ k=1,2,\dots \ \to$$

$$c_1 = -c_0\ ,\ c_2 = \frac{3}{5}c_0\ ,\ c_3 = -\frac{4}{15}c_0\ ,\ \dots\ ,\ c_k = (-1)^k\frac{2(k+1)}{k(k+3)}\,\frac{2k}{(k-1)(k+2)}\,\frac{2(k-1)}{(k-2)(k+1)}\cdots c_0 = \frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}\,6c_0$$

Por tanto, eligiendo $c_0=1/6$ , $x_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}t^{k+2} \ \to\ x_1' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)(k+2)}{(k+3)!}t^{k+1}$

La segunda solución es $x_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1} + a x_1 \ln t\ ,\ b_0\neq 0 \ \to$

$$x_2' = \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)b_k t^{k-2} + \frac{a}{t}x_1 + a x_1'\ln t\ ,\quad x_2'' = \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)b_k t^{k-3} - \frac{a}{t^2}x_1 + \frac{2a}{t}x_1' + a x_1''\ln t \ \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k-1)(k-2)\,b_k t^{k-1} + 2(k-1)\,b_k t^k - 2b_k t^{k-1}\right] + a\left[(-1+2t)x_1 + 2tx_1'\right] + a\ln t\left[t^2x_1''+2t^2x_1'-2x_1\right] = 0$$

El último corchete es 0 por ser $x_1$ solución (lo que acompaña al logaritmo siempre se anula). Utilizando las series de $x_1$ y $x_1'$ escritas arriba y agrupando potencias de t :

$$-2b_0 - 2b_1 - 2b_2\,t + \left[2b_3+2b_2-2b_3-\frac{a}{6}+\frac{2a}{3}\right]t^2 + \dots = 0 \ \to\ b_1=-b_0\ ,\ b_2=0\ ,\ a=0$$

$b_0$ y $b_3$ quedan indeterminados ($b_3$ está asociado a potencias $t^2$, comienzo de la serie de $x_1$). Elegimos $b_0=1$ y $b_3=0$ (para no volver a calcular $x_1$). Como en la regla de recurrencia cada $b_k$ depende del $b_{k-1}$: $b_4=b_5=\dots=0$ . Por tanto: $x_2 = \frac{1}{t}(1-t)$ .

**Ej 4.** $\boxed{t^2x''+2t^2x'+(t^2+\frac{1}{4})x = 0}$ t=0 singular regular; $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=t^2+\frac{1}{4}$ analíticas en **R**.

El polinomio indicial tiene $r=\frac{1}{2}$ como raiz doble $\to$ $x_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1/2} \ \to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2 c_k t^{k+1/2} + (2k+1)\,c_k t^{k+3/2} + c_k t^{k+5/2}\right] = 0 \to c_1 = -c_0\ ,\ c_k = -\frac{2k-1}{k^2}\,c_{k-1} - \frac{1}{k^2}\,c_{k-2},\ k=2,3,\dots$$

$$\to\ c_2 = \frac{1}{2}c_0\ ,\ c_3 = -\frac{1}{6}c_0\ ,\ \dots\ ,\ c_k = (-1)^k\frac{1}{k!}c_0 \ \to\ x_1 = t^{1/2}e^{-t}$$

La otra solución necesariamente contiene un logaritmo:

$$[x_2 = t^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1\ln t \ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k^2+2k+1)\,b_k t^{k+3/2} + (2k+3)\,b_k t^{k+5/2} + b_k t^{k+7/2}\right] = 0$$

$$\to\ b_0 = b_1 = b_2 = \dots = 0 \ \to\ x_2 = t^{1/2}e^{-t}\ln t$$

(la forma de las soluciones sugiere, para comprobar el resultado, hacer $y = e^t x$ ; se obtiene $t^2y''+\frac{1}{4}y = 0$ , ecuación de Euler de solución $y = c_1 t^{1/2} + c_2 t^{1/2}\ln t$ )

## 3.3 Ecuación de Legendre

Es la ecuación [L] $\boxed{(1-t^2)x''-2tx'+p(p+1)x = 0}$

Resolvámosla primero en torno a $t=0$ que es un punto regular. Como $a(t)=-2t/(1-t^2)$ y $b(t)=p(p+1)/(1-t^2)$ son analíticas en $|t|<1$ la ecuación tiene pues soluciones analíticas al menos en ese intervalo. Probamos pues:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad\to\quad \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k t^{k-2}-k(k-1)c_k t^k]-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_k t^k+\sum_{k=0}^{\infty}p(p+1)c_k t^k=0\ .$$

Que nos lleva a la regla de recurrencia $c_k=-\frac{(p-k+2)(p+k-1)}{k(k-1)}\,c_{k-2}$ , $k=2,3,\ldots$ Por tanto:

$$c_2=-\frac{p(p+1)}{2.1}c_0\ ,\ c_3=-\frac{(p-1)(p+2)}{3.2}c_1\ ,\ c_4=\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}c_0\ ,\ c_5=\frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}c_1\ ,\ldots$$

Así que la solución general de [L] es $x=c_0x_1+c_1x_2$ donde:

$$x_1=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p(p-2)\ldots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\ldots(p+2n-1)}{(2n)!}\,t^{2n}$$

$$x_2=t+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\ldots(p+2n)}{(2n+1)!}\,t^{2n+1}$$

Si p es un entero par positivo, $p=2m$ , $x_1$ se convierte en un polinomio de grado 2m:

$p=0\to x_1=1$ , $p=2\to x_1=1-3t^2$ , $p=4\to x_1=1-10t^2+\frac{35}{3}t^4$ , …

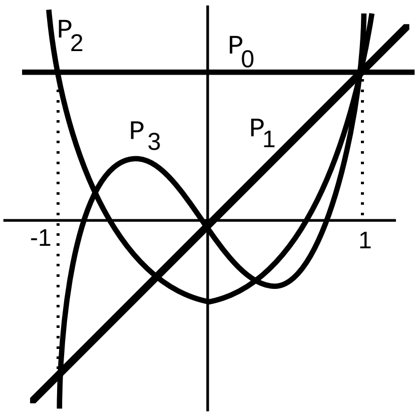
Si p es impar, $p=2m+1$, es $x_2$ quien se reduce a un polinomio de grado 2m+1:

$p=1\to x_2=t$ , $p=3\to x_2=t-\frac{5}{3}t^3$ , $p=5\to x_2=t-\frac{14}{3}t^3+\frac{21}{5}t^5$ , …

A la solución polinómica $P_n$ de la ecuación [L] con $p=n\in\mathbf{N}$ que satisface $P_n(1)=1$ se le llama **polinomio de Legendre de grado n** . Se tiene pues:

$$\boxed{P_0=1\ ,\ P_1=t\ ,\ P_2=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\ ,\ P_3=\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t\ ,\ P_4=\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8}\ ,\ P_5=\frac{63}{8}t^5-\frac{35}{4}t^3+\frac{15}{8}t\ ,\ldots}$$

Como $P_n(-t)=(-1)^nP_n(t)$ , los $P_{2m}$ tienen simetría par y los $P_{2m+1}$ impar. Observemos que los $P_{2m+1}$ y las derivadas de los $P_{2m}$ se anulan en 0 .




Se pueden probar además las siguientes propiedades de los $P_n$:

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\ ,\ \text{fórmula de Rodrigues.}$$

$P_n$ tiene n ceros reales, todos en $(-1,1)$ .

Los $P_n$ son ortogonales entre sí:

$$\int_{-1}^{1}P_nP_m\,dt=0\ ,\ \text{si } m\neq n\ ;\quad \int_{-1}^{1}P_n^2\,dt=\frac{2}{2n+1}$$

Para las aplicaciones de la ecuación [L] a las ecuaciones en derivadas parciales es necesario saber qué soluciones están acotadas en ±1. Para analizarlo vamos a resolver la ecuación en torno a t=1 . Para ello hacemos el cambio s=t–1, obteniendo

$$[L1] \quad s(s+2)x''+2(s+1)x'-p(p+1)x=0$$

Para ella s=0 es punto singular regular, con $a^*(s)=2(s+1)/(s+2)$ y $b^*(s)=-p(p+1)s/(s+2)$ analíticas para $|s|<2$. El polinomio indicial tiene como raiz r=0 doble para todo p. Por tanto dos soluciones linealmente independientes de [L1] son:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \qquad \text{y} \qquad x_2 = |s| \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k + x_1 \ln|s|$$

con $c_0=1$ y las series convergentes al menos para $|s|<2$ . Sin necesidad de calcular ningún coeficiente de las series podemos ya afirmar que la $x_1$ siempre está acotada en s=0 (t=1), mientras que la $x_2$ no lo está (tiende a $-\infty$ cuando $s\to 0$). Vamos a calcular $x_1$ y comprobar que si p=n obtenemos de nuevo los $P_n$ [ pues $x_1(1)=1$ ] . Debe ser:

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k s^k + 2k(k-1)c_k s^{k-1}] + \sum_{k=1}^{\infty} [2kc_k s^k + 2kc_k s^{k-1}] - \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)c_k s^k = 0 \ .$$

de donde obtenemos la regla de recurrencia $c_k = \frac{p(p+1)-k(k-1)}{2k^2} c_{k-1}$ , k=1,2,3,…

y la siguiente expresión para $x_1$:

$$x_1(s) = 1 + \frac{p(p+1)}{2} s + \frac{p(p+1)[p(p+1)-2.1]}{16} s^2 + \ldots + \frac{p(p+1)[p(p+1)-2.1]\ldots[p(p+1)-k(k-1)]}{2^n (n!)^2} s^n + \ldots$$

Si p=n la regla de recurrencia nos dice que el $c_{n+1}$ y todos lo siguientes se anulan.

En particular: $p=0 \to x_1 = 1$ ; $p=1 \to x_1 = 1+s = t$ ; $p=2 \to x_1 = 1+3s+ \frac{6[6-2]}{16} s^2 = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}$ ; …

[ se puede ver que si $p\neq n$ la $x_1$ no está acotada cuando $s \to -2$ ( $t \to -1$ ) con lo que las únicas, salvo constantes, soluciones de [L] que están acotadas a la vez en t=1 y t=–1 son los polinomios de Legendre ]

Las series solución de [L] hablan sólo de lo que ocurre para $t\in(-1,1)$ . Las de [L1] de $t\in(-1,3)$ . Para analizar lo que ocurre "en el infinito" realizamos en [L] el cambio s=1/t :

$$\frac{dx}{dt} = -s^2 \frac{dx}{ds} \ ; \ \frac{d^2x}{dt^2} = s^4 \frac{d^2x}{ds^2} + 2s^3 \frac{dx}{ds} \quad \to \quad [L\infty] \ \ s^2(s^2-1)x''+2s^3x'+p(p+1)x=0$$

s=0 es singular regular, con $a^*(s)=2s^2/(s^2-1)$ y $b^*(s)=p(p+1)/(s^2-1)$ analíticas en $|s|<1$. Las series solución de [L∞] serán convergentes al menos en ese intervalo y por tanto de ellas podemos extraer información sobre las soluciones de [L] para $|t|>1$. Por ejemplo, como el polinomio indicial de [L∞] es $r^2-r-p(p+1)$ (de raices $-p$ y $1+p$ ) y para todo p la mayor de ellas $r_1>0$ deducimos que siempre hay soluciones de [L] que $\to 0$ si $t\to\infty$.

( pues $x_1^\infty(s)= s^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \to 0$ si $s\to 0^+$ ; o sea $x_1^\infty(t)= t^{-r_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k} \to 0$ si $t\to\infty$ )

Resolvamos por series [L∞] en el caso más sencillo: p=0 (ahora s=0 es regular):

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \to c_k = \frac{k-2}{k} c_{k-2} \ , \ k=2,3,\ldots \to x = c_0 + c_1[s+ \tfrac{1}{3} s^3 + \tfrac{1}{5} s^5 + \ldots] = c_0 + c_1 [t^{-1} + \tfrac{1}{3} t^{-3} + \tfrac{1}{5} t^{-5} + \ldots]$$

serie (no de potencias) convergente si $|t|>1$ .

[No hubiésemos necesitado las series para p=0, pues [L] es resoluble: $(1-t^2)x''+2tx'=0$ $\to x'=c_1(1-t^2)^{-1} \to x=c_0+c_1 \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$ , válida para todo $t\neq 1$ ( y la segunda $\to 0$ si $t\to\infty$) ]

## 3.4 Ecuación de Bessel

Es la ecuación [B] $\boxed{t^2x''+tx'+(t^2-p^2)x=0}$ , $p\geq 0$

$t=0$ es punto singular regular de [B] con polinomio indicial $r^2-p^2$ de raíces $r_1=p$, $r_2=-p$.

Existe pues una solución de la forma $x_1=t^p\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$, $t>0$ , serie convergente en todo **R**.

Llevada a [B]: $\sum_{k=0}^{\infty}[k(2p+k)c_kt^{p+k}+c_kt^{p+k+2}]=0 \to c_1=0$ ; $c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}$ , $k=2,3,\dots$

Así que: $c_1=c_3=\dots=0$ ; $c_2=-\frac{c_0}{2^2(p+1)}$ ; $c_4=\frac{c_0}{2^4 2(p+1)(p+2)}$ ; …

Por tanto, $x_1=c_0t^p\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m}}{2^{2m}m!(p+1)\dots(p+m)}\right]$

Podemos dar una expresión más reducida de esta $x_1$ utilizando la función gamma:

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}ds \text{ si } s>0 \quad ; \quad \Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n)}{(s+n+1)\dots(s+1)s} \text{ si } -n<s<-n+1,\ n\in\mathbf{N}$$

que tiene las siguientes propiedades:

$$\Gamma(1)=1\ ;\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\ ;\quad \Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \to \Gamma(s+n)=(s+n+1)\dots(s+1)s\Gamma(s) \to \Gamma(n+1)=n!\ ,\ n\in\mathbf{N}$$

Eligiendo $c_0=1/[2^p\Gamma(p+1)]$ obtenemos entonces la siguiente solución de [B]:

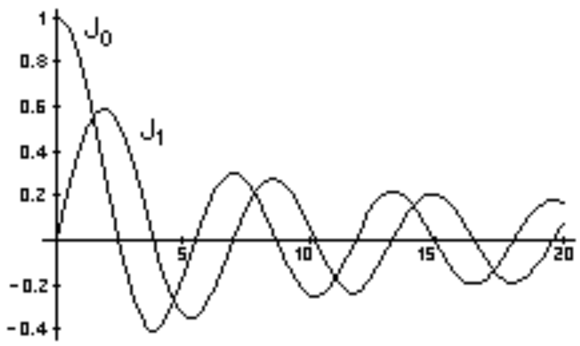
$$\boxed{J_p(t)=\left[\frac{t}{2}\right]^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\left[\frac{t}{2}\right]^{2m}}$$

**función de Bessel de primera especie y orden p**

Como se ve todas las $J_p$ están acotadas en $t=0$ a pesar de la singularidad.

En particular se tiene $J_0(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left[\frac{t}{2}\right]^{2m}$ ; $J_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(m+1)!}\left[\frac{t}{2}\right]^{2m+1}$

La gráfica de estas dos funciones es la siguiente:




Al igual que $J_0$ y $J_1$ todas las $J_p$ son funciones oscilatorias:

$J_p \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos[t-(2p+1)\frac{\pi}{4}]$ para t grande.

(las propiedades de las funciones de Bessel se tratan en los libros de "funciones especiales")

Cada $J_p$ tiene un número infinito de ceros en $(0,\infty)$ [que deben conocerse para resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales; los de $J_0$ son 2.4048, 5.5201, 8.6532, … y los de $J_1$ son 3.8317, 7.0156, 10.1735, … ].

Se trata ahora de encontrar una segunda solución linealmente independiente de [B]. El método de Frobenius asegura que si $r_1-r_2=2p$ no es cero o un entero positivo existe una $x_2$ de la forma:

$$x_2 = t^{-p}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \ , \ t>0$$

que nos lleva a los mismos cálculos de antes, cambiando $p$ por $-p$. Por tanto la función:

$$J_{-p}(t) = \left[\frac{t}{2}\right]^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-p+m+1)} \left[\frac{t}{2}\right]^{2m}$$

es una segunda solución linealmente independiente de $J_p$ si $2p \neq 0,1,2,\ldots$ (que no está, evidentemente, acotada en el origen)

Si $p$ no es entero, pero $2p$ sí lo es $\left(\mathbf{p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots}\right)$, se puede demostrar que $J_p$ y $J_{-p}$ siguen siendo lienealmente independientes (es el caso c] del teorema, pero es $a=0$ ).

Es fácil comprobar que $J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\operatorname{sen} t$ , $J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$

(en este caso la expresión asintotica vista para los $J_p$ es exacta).

Como además se puede probar la relación $J_{p-1} + J_{p+1} = \frac{2p}{t} J_p$ , que expresa unos $J_p$ en función de otros, resulta que todas las $J_{(2n+1)/2}$ , $n\in \mathbf{Z}$ son funciones elementales.

Si **p=0,1,2,…** tenemos que calcular las series del teorema de Frobenius.

Para p=0 la segunda solución es del tipo $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+1} + J_0(t)\ln t$ , $t>0$ .

Determinando los coeficientes se llega a:

$$x_2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right]\left[\frac{t}{2}\right]^{2m} + J_0(t)\ln t \equiv K_0(t) \ , \ t>0$$

**función de Bessel de segunda especie y orden 0.**

Si $p=n>0$ , $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-n} + a\,J_n(t)\ln t$ , $t>0$ . Se prueba en [B] y se obtiene:

$$x_2(t) \equiv K_n(t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}\right]^{-n}\left(\frac{1}{n!}\left[1+\ldots+\frac{1}{n}\right]\left[\frac{t}{2}\right]^{2n} + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left[\frac{t}{2}\right]^{2m}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}\right]^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m!\,(m-n)!}\left(\left[1+\ldots+\frac{1}{m}\right]+\left[1+\ldots+\frac{1}{m+n}\right]\right)\left[\frac{t}{2}\right]^{2m} + J_n(t)\ln t \ , \ t>0$$

**función de Bessel de segunda especie y orden n.**

De estas complicadas funciones resaltaremos el hecho de que (como se sabía desde que calculamos las raíces del polinomio indicial) las $K_n$ no están acotadas en $t=0$ .

# 4. Mapas de fases

Los sistemas de ecuaciones no lineales no se pueden resolver, salvo contadas excepciones. Pero si estos sistemas son autónomos y de dimensión 2 (para dimensiones mayores las cosas se complican notablemente) es posible obtener las principales propiedades de sus soluciones a partir de su dibujo o, con más precisión, del dibujo de las proyecciones (llamadas órbitas) de estas soluciones sobre el plano xy (o plano de fases). Este capítulo está dedicado a describir las diferentes técnicas destinadas a dibujar el conjunto de las órbitas de un sistema dado sobre el plano de fases (mapas de fases).

La sección 4.1 trata de las propiedades básicas de las soluciones y órbitas de estos sistemas autónomos. Se introduce la ecuación diferencial de las órbitas y el campo vectorial tangente a las órbitas.

Se llaman puntos críticos de un mapa de fases a las proyecciones de las soluciones constantes del sistema. La sección 4.2 clasifica estos puntos en diferentes tipos (nodos, puntos silla, focos, centros,...) de acuerdo con la forma de las órbitas a su alrededor. Esta forma será en casi todos los casos similar a la del sistema lineal obtenido despreciando los términos no lineales en el desarrollo de Taylor del sistema. Las únicas excepciones se darán, tal vez, si la aproximación lineal tiene autovalores imaginarios puros (centros) o si algún autovalor es cero (puntos no elementales).

La sección 4.3 describe las propiedades particulares que poseen los mapas de fases de los sistemas que provienen de ecuaciones autónomas de segundo orden.

Un tipo particular de sistemas que poseen varias propiedades adicionales que facilitan el dibujo de su mapa de fases son los exactos, tratados en la sección 4.4. Para ellos siempre se podrá hallar la expresión de sus órbitas y sus puntos críticos sólo podrán ser puntos silla o centros (lo que evita este caso dudoso).

En la sección 4.5 daremos algunas otras ideas sobre cómo atacar el problema de clasificar un punto crítico cuya aproximación lineal sea un centro (análisis de simetrías y utilización de coordenadas polares).

El análisis de los puntos no elementales es muy complicado. En la sección 4.6 vemos algunos ejemplos de mapas de fases con tales puntos que, al no tener teoría para clasificarlos, deberemos dibujar a traves de la ecuación de sus órbitas.

En la última sección, la 4.7, veremos un método (de interés en los casos dudosos) que a veces nos permite determinar la estabilidad de un punto crítico: la búsqueda de las llamadas funciones de Lyapunov.

## 4.1 Sistemas de dos ecuaciones autónomas

Sea el sistema [S] $\boxed{\begin{array}{l} x'= f(x,y) \\ y'= g(x,y) \end{array}}$ , es decir, $\mathbf{x}'= \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , con $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\mathbf{f}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ .

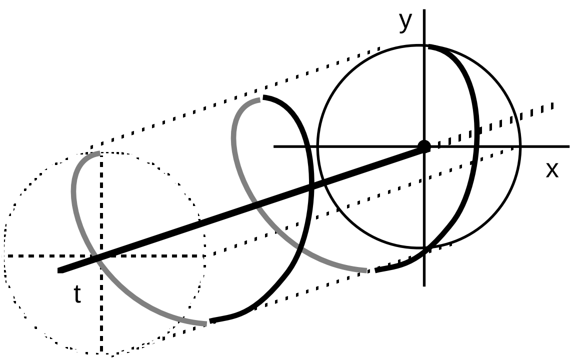
Suponemos que f y g y sus derivadas parciales son continuas en todo $\mathbf{R}^2$. Sabemos que entonces existe una única solución de [S] que satisface cualquier par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$ , $y(t_o)=y_o$ (es decir $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x}_o$). Los siguientes resultados, semejantes a los vistos para las ecuaciones autónomas de primer orden, se prueban fácilmente:

**Teor 1.** Si $f(x_o,y_o)=g(x_o,y_o)=0$ entonces $\mathbf{x}(t)\equiv\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$ es solución de [S]
( solución constante o de equilibrio de [S] )

Si $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución de [S] y $c\in\mathbf{R}$ entonces $\mathbf{x}(t+c)=\begin{pmatrix} x(t+c) \\ y(t+c) \end{pmatrix}$ es también solución de [S]

Cada solución $\mathbf{x}(t)$ de [S] es una curva en el espacio txy, pero también podemos mirarla como una curva en el plano xy (que llamaremos **plano de fases**) descrita paramétricamente en función de t . Esta segunda curva, a la que llamaremos **órbita** de la solución, es la proyección de la primera sobre el plano de fases. El objetivo de este capítulo es representar lo más aproximadamente posible el conjunto de órbitas de [S], es decir, el **mapa de fases** de [S]. Comencemos con un ejemplo:

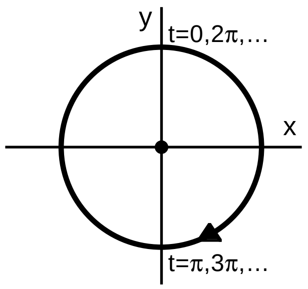
Sea $\left\{\begin{array}{l} x'=x \\ y'=-y \end{array}\right.$ (es decir, $x''+x=0$ )




La solución que cumple $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t)\equiv\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

y la que satisface $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$ .

Estas soluciones describen en el espacio la recta y la hélice del dibujo superior, y sus proyecciones sobre el plano xy son el punto y la circunferencia del inferior [a un punto del mapa de fases , proyección de una solución constante se le llama **punto crítico o punto singular**]. Obtenemos las mismas órbitas si dibujamos en cada caso la curva trazada, al aumentar el parámetro t , por el punto de coordenadas x=x(t), y=y(t). La flecha nos orienta la órbita, indicando el sentido en que se recorre.




Imponiendo ahora $\mathbf{x}(\pi)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tenemos $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t-\pi) \\ \cos(t-\pi) \end{pmatrix}$.

La órbita de esta solución (cuya gráfica en el espacio es una traslación paralela al eje t de la hélice anterior) es la misma circunferencia de antes, si bien sus puntos son alcanzados para otros valores de t . Esta situación se da en cualquier sistema autónomo (y no en un sistema cualquiera) y por eso tiene sentido dibujar su mapa de fases: si x=x(t), y=y(t) son las ecuaciones de una órbita, otra parametrización de la misma órbita es x=x(t+c), y=y(t+c) para cualquier c (aunque para un mismo t se obtengan valores de x e y diferentes). Dicho de otra forma: como las traslaciones de una solución hacia adelante y hacia atrás son también soluciones, las proyecciones de todas estas curvas del espacio son la misma órbita.

Como normalmente no conoceremos las soluciones del sistema [S] para dibujar su mapa de fases trataremos de buscar información a partir de las propias funciones f y g .

Intentemos primero hallar explícitamente las órbitas de [S]. Eliminando formalmente la variable t del sistema obtemos la **ecuación diferencial de las órbitas**:

[o] $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}}$ (pues $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}$ , si lo permite el teorema de la función inversa)

Las curvas integrales de esta ecuación de primer orden, tal vez resoluble por los métodos de la sección 1.1 y dibujables aproximadamente por los de la 1.2, serán las órbitas de [S] (recíprocamente: una ecuación como [o] se puede mirar como un sistema y usar las ideas de esta sección para trazar sus curvas integrales). Como se ha eliminado la t , si dibujamos las órbitas sólo a partir de [o] éstas carecerán en principio de sentido de recorrido, pero pronto veremos como orientarlas.

Una información parecida a la que nos proporciona el campo de direcciones de [o] se obtiene tratando el **campo vectorial v** que en cada punto del plano viene dado por

$\boxed{\mathbf{v}(x,y)=\begin{pmatrix} f(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix}}$ [que coincide con $\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}$, vector tangente a la órbita en el punto (x,y)]

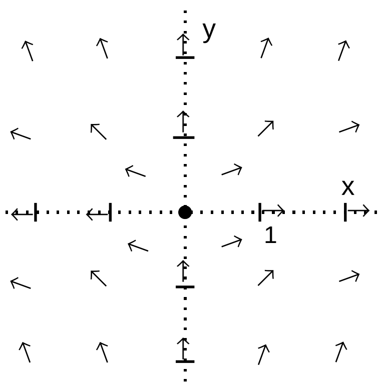
Por tanto, las órbitas de [S] serán curvas tangentes a (y recorridas en el sentido que indican) los vectores del campo **v** (como se ve, este campo sólo se anula en los puntos críticos). Generalmente usaremos el campo **v** para completar otras informaciones, pero aunque fallen todas las demás técnicas del capítulo siempre podremos dibujar algunos vectores de **v** y hacernos una idea del mapa de fases.

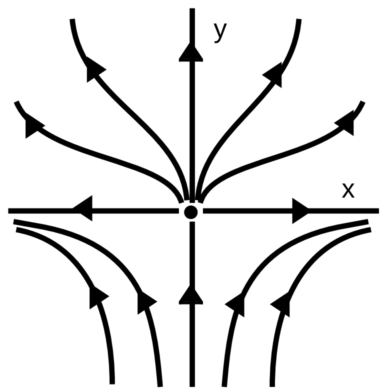
Repasemos lo visto con otro ejemplo (poco práctico por ser el sistema resoluble):

$\begin{cases} x'=x \\ y'=y^2 \end{cases}$ , $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x}$ , $\mathbf{v}(x,y)=\begin{pmatrix} x\\ y^2\end{pmatrix}$

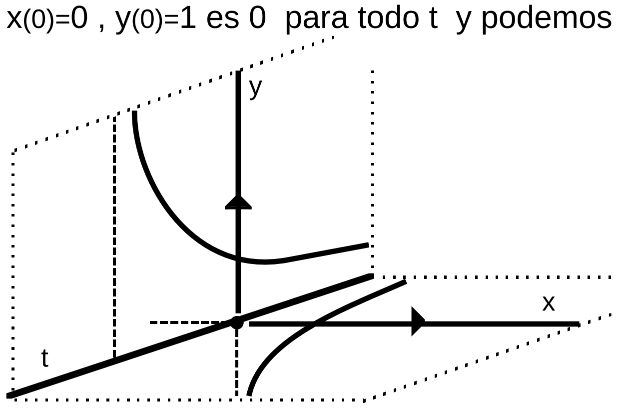
Su único punto crítico es el origen. Algunos vectores de **v** (pintados con el mismo módulo pues nos interesa su dirección y sentido) son los del dibujo de la izquierda. Podemos también resolver la ecuación [o] :

$y=[c-\ln|x|]^{-1}$ , o sea, $x=ce^{-1/y}$ .



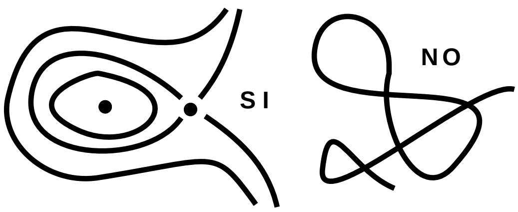




Con todo ello completamos el mapa de fases de la derecha. Cada órbita de dicho mapa nos da los valores que toman la x y la y de las soluciones de las que es proyección, pero no nos dice en qué instante t los toman. Por ejemplo, la x(t) de la solución con $x(0)=0$ , $y(0)=1$ es 0 para todo t y podemos afirmar que la $y(t)=29$ para un $t>0$ , pero sólo podemos hallar este t calculando $y(t)$ ($y(t)\to\infty$ pues si tendiese a un valor constante a se tendría, como en las autónomas de primer orden, que $x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv a$ sería solución de equilibrio, lo que es imposible por no existir más puntos críticos). Tampoco podemos saber si la $y(t)$ está definida para todo $t\geq 0$. Resolviendo se tiene $y(t)=1/(1-t)$, que explota en t=1 (sin embargo la solución $x(t)=e^t$ , $y(t)=0$ , con otra órbita recta similar a la anterior, está definida para todo valor de t).



Demostremos otras propiedades generales de las órbitas:

**Teor 2.** Por cada punto del plano de fases pasa una única orbita de [S].
Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.

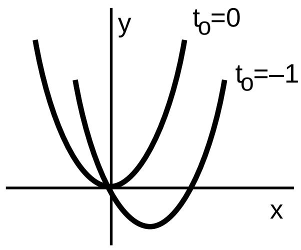



(las órbitas de un mapa de fases, que no pueden cruzarse unas a otras, ni consigo mismas, sólo pueden ser, por tanto, de tres tipos: puntos críticos, curvas cerradas simples y arcos simples (asociadas, en cada caso, a soluciones que son constantes, periódicas y no periódicas); más de una órbita puede confluir en un punto crítico, pero esto no viola la unicidad: estas órbitas corresponderán a soluciones que tienden a la solución constante cuando t tiende a + o $-\infty$ pero que no la alcanzan en tiempo finito (para dejar clara esta situación dibujaremos usualmente estas órbitas algo separadas de los puntos críticos, aunque no sea la proyección exacta)).

Dado un $\mathbf{x}_o$, sea $\mathbf{x}(t)$ la solución que verifica $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_o$. Si otra solución $\mathbf{x}^*(t)$ define una órbita que pasa por el mismo punto, debe ser $\mathbf{x}^*(t^*)=\mathbf{x}_o$ para algún t*. Como $\mathbf{x}^*(t+t^*)$ es también solución y toma en t=0 el mismo valor que $\mathbf{x}(t)$ se tiene, por unicidad, que $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*(t+t^*)$, o sea, $\mathbf{x}(t-t^*)=\mathbf{x}^*(t)$ para todo t, con lo que $\mathbf{x}^*(t)$ es trasladada de $\mathbf{x}(t)$ y las órbitas de las dos coinciden.

Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución no constante. Si su órbita se corta a sí misma ello significa que existe un primer $T>0$ en el que vuelve a ser $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0)$. Utilizando la unicidad en t=0 se tiene que para todo t es $\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{x}(t)$, con lo que la solución es T-periódica y su órbita se repite a partir cada T unidades de tiempo, formando una curva cerrada simple.

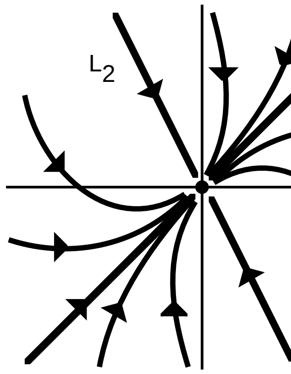
Hemos visto que la órbita de un sistema autónomo que pasa por un punto $\mathbf{x}_o$ del plano xy es independiente del $t_o$ en el que la solución $\mathbf{x}(t)$ de la que es proyección satisface $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x}_o$ (es decir, que la evolución del sistema es independiente del momento en que empecemos a contar el tiempo, como era de esperar al no depender f y g de t).
Si el sistema no es autónomo, esto no es cierto. Por ejemplo, para cada $t_o$ la solución de $\begin{cases} x'=1 \\ y'=2t \end{cases}$ con $\mathbf{x}(t_o)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}t-t_o\\t^2-t_o^2\end{pmatrix}$.
Cada una de estas soluciones (que no se cortan en el espacio) define paramétricamente una parábola distinta en el plano xy (todas ellas pasando por el origen). La "órbita" de una solución depende no sólo del $\mathbf{x}_o$ sino también del $t_o$.



## 4.2 Clasificación de puntos críticos.

La mejor información sobre un mapa de fases nos la proporciona el conocimiento de la forma de sus órbitas en las cercanías de un punto crítico. Analizamos primero los sistemas lineales (siempre resolubles) y después tratamos los no lineales. Sea, pues:

[L] $\boxed{\begin{array}{c} x'= ax+by \\ y'= cx+dy \end{array}}$ , o sea, $\mathbf{x}'= \mathbf{A}\mathbf{x}$ , con $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .



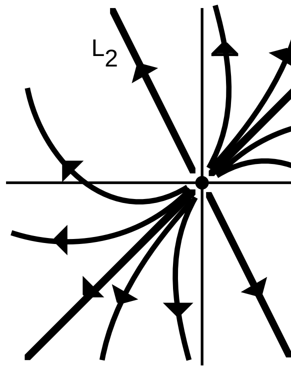
nodo estable
$\lambda_2<\lambda_1<0$

Supondremos que $|\mathbf{A}|\neq 0$ , con lo que el origen es el único punto crítico de [L] y $\lambda=0$ no es autovalor. Clasificamos dicho punto según los autovalores $\lambda_1$ y $\lambda_2$ de $\mathbf{A}$:

$\lambda_1$ y $\lambda_2$ **reales y distintos**. La solución general es:

$\mathbf{x}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}$ , $\mathbf{v_i}$ vector propio asociado a $\lambda_i$.

Llamemos $L_1$ y $L_2$ a las rectas que contienen a $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ . Cada $L_i$ está formada por tres órbitas (obtenidas haciendo la otra $c_i=0$): el punto crítico y dos semirrectas orientadas según sea el signo del $\lambda_i$.



nodo inestable
$\lambda_2>\lambda_1>0$

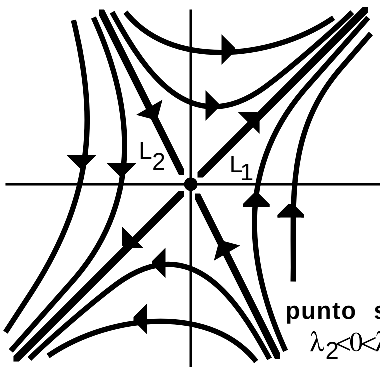
El vector unitario tangente a las órbitas [ $\mathbf{t}=\mathbf{x}'(t)/\|\mathbf{x}'(t)\|$ ] es:

$$\mathbf{t} = \frac{c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}}{\left[c_1^2\lambda_1^2e^{2\lambda_1 t}+c_2^2\lambda_2^2e^{2\lambda_2 t}+2c_1c_2\lambda_1\lambda_2e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}\right]^{1/2}}$$

Si $\lambda_2<\lambda_1<0$ , las soluciones tienden a $\mathbf{0}$ y el vector $\mathbf{t}$ tiende a $\mathbf{v_1}$ (si $c_1\neq 0$) cuando $t\to\infty$. Todas las órbitas (menos dos) entran en el origen con la pendiente dada por el vector propio asociado al autovalor más cercano a 0 y el punto crítico se denomina **nodo estable**.

Si $\lambda_2>\lambda_1>0$ , se tiene la misma situación cambiando $+\infty$ por $-\infty$ y el origen se llama **nodo inestable**.

Si $\lambda_2<0<\lambda_1$ , las órbitas sobre $L_2$ se aproximan al origen y se alejan sobre $L_1$. Las demás tienden asintóticamente a $L_1$ o $L_2$ según tienda t a + 0 $-\infty$ adoptando la forma hiperbólica del dibujo y tenemos un **punto silla**.

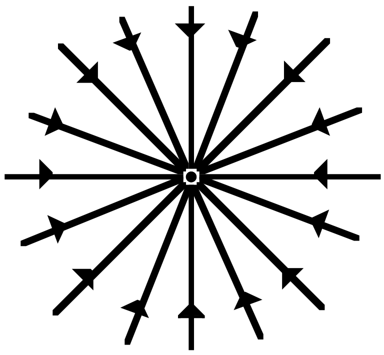


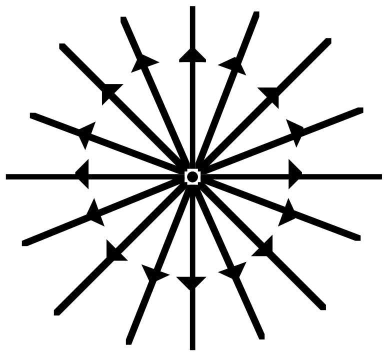
punto silla
$\lambda_2<0<\lambda_1$

$\lambda$ **doble**. Si $\mathbf{A}$ es diagonal la solución general es

$$\mathbf{x}(t)= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

con lo que si $\lambda<0$ ($\lambda>0$) para cada par de constantes nos acercamos (alejamos) al origen según una recta diferente y se dice entonces que dicho punto es un **nodo estelar estable** (**inestable**).

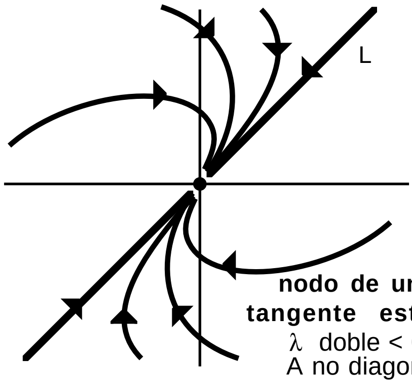

**nodo estelar estable**
$\lambda$ doble < 0, A diagonal


**nodo estelar inestable**
$\lambda$ doble > 0, A diagonal

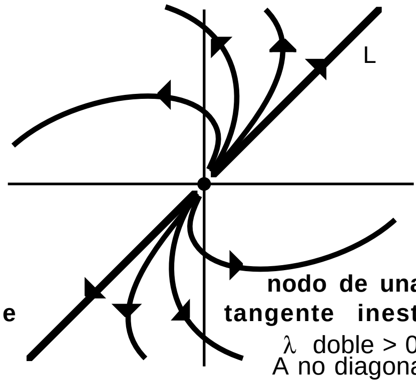
Si **A** no es diagonal la solución general es

$$\mathbf{x}(t)=[c_1\mathbf{w}+(c_1t+c_2)\mathbf{v}]e^{\lambda t}$$

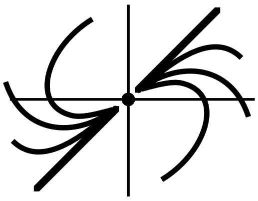
con **v** único vector propio asociado a $\lambda$. Si $c_1=0$ estamos sobre la recta L generada por **v**. Se puede ver, calculando el vector tangente unitario, que todas las demás órbitas son tangentes en el origen a L. Si $\lambda<0$ ($\lambda>0$) sobre cada órbita nos acercamos (alejamos) al punto crítico, que se llama **nodo de una tangente estable** (**inestable**). La forma de las órbitas en los dos casos podría ser también la del tercer dibujo (esto se precisa con facilidad acudiendo al campo **v** de la sección anterior).




**nodo de una tangente estable**
$\lambda$ doble < 0
A no diagonal




**nodo de una tangente inestable**
$\lambda$ doble > 0
A no diagonal



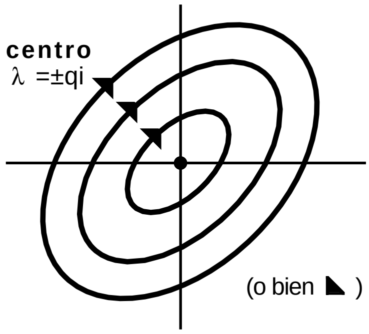
**Autovalores complejos** $\lambda=p\pm qi$ . La solución es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1\cos qt+c_2\,\mathrm{sen}\,qt \\ c_3\cos qt+c_4\,\mathrm{sen}\,qt \end{pmatrix} e^{pt}$$

donde las $c_i$ son constantes reales de las cuales sólo dos son arbitrarias.

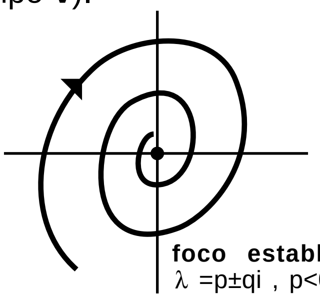
Si $p=0$, todas las soluciones son periódicas y las órbitas son curvas cerradas que rodean el origen, que se llama **centro** (el sentido de giro lo da el campo **v**).

**centro**
$\lambda = \pm qi$

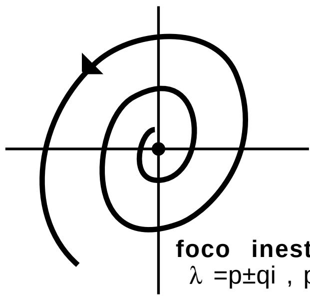



Si $p<0$ la exponencial decreciente obliga a las orbitas a cerrarse en espiral cuando $t\to\infty$ hacia el origen, que se llama **foco estable**.

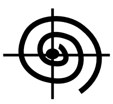
Si $p>0$ las espirales corresponden a soluciones que se alejan del punto crítico que es un **foco inestable**.



**foco estable**
$\lambda = p\pm qi$ , $p<0$



**foco inestable**
$\lambda = p\pm qi$ , $p>0$



La forma de las espirales podría ser también la del dibujo de la izquierda (como siempre lo precisaremos a la vista del campo **v**).

Consideremos ya el sistema no lineal [S] $\boxed{\begin{array}{c} x'= f(x,y) \\ y'= g(x,y) \end{array}}$ y sea $\mathbf{x_o}=\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$ punto crítico.

Desarrollando por Taylor la funciones f y g en torno a $\mathbf{x_o}$ y llevando después este punto al origen mediante el cambio $u=x-x_o$ , $v=y-y_o$ (o lo que es equivalente, haciendo primero el cambio y desarrollando luego en torno a $u=v=0$) se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} u' = f_x(x_o,y_o)u + f_y(x_o,y_o)v + R_f(u,v) \\ v' = g_x(x_o,y_o)u + g_y(x_o,y_o)v + R_g(u,v) \end{array}\right. \quad \text{con } R_f , R_g = o(\sqrt{u^2+v^2}) \text{ si } u,v\to 0$$

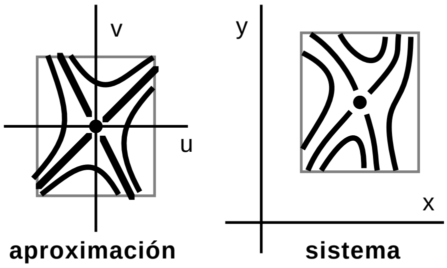
Como $R_f$ y $R_g$ son pequeños es de esperar que (cerca del origen) sean similares las órbitas de este sistema y las de la aproximación lineal obtenida ignorando los términos no lineales. El siguiente teorema nos precisará que esto es cierto si el sistema lineal es de cualquiera de los tipos clasificados anteriormente, salvo en el caso de los centros.

Llamemos [A] al sistema **u'**=**Au**, con $\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} f_x(x_o,y_o) & f_y(x_o,y_o) \\ g_x(x_o,y_o) & g_y(x_o,y_o) \end{pmatrix}$.

Suponemos que $|\mathbf{A}|\neq 0$. Diremos entonces que $\mathbf{x}_o$ es **punto crítico elemental** de [S]. Del teorema de la función implícita se deduce entonces que $\mathbf{x}_o$ es aislado, es decir, que existe un entorno de $\mathbf{x}_o$ en el no hay más puntos críticos (un punto con $|\mathbf{A}|=0$ puede no ser aislado y si lo es no se parece al origen, no aislado, de la aproximación lineal).

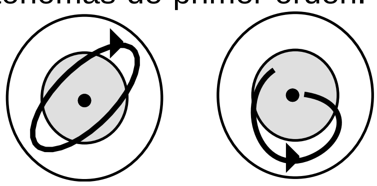
**Teor 1.** Si el origen es un nodo, un punto silla o un foco de [A] entonces $\mathbf{x}_o$ es un punto crítico del mismo tipo de [S], con el mismo caracter de estabilidad. Si el origen es un nodo estelar o de una tangente de [A] y las funciones f y g tiene derivadas parciales de segundo orden continuas entonces $\mathbf{x}_o$ es un nodo del mismo tipo (y la misma estabilidad) del sistema no lineal [S]. Las órbitas rectas que en los nodos y puntos sillas de [A] llegan o salen del orígen se deforman, en general, en curvas de [S] que llegan o salen de $\mathbf{x}_o$, pero manteniendo la tangencia dada por los vectores propios. Si el origen es un centro de la aproximación lineal y las funciones f y g son analíticas entonces $\mathbf{x}_o$ es o un centro, o un foco estable o un foco inestable en el sistema no lineal.

La demostración del teorema es complicada y no la damos. No es extraño que sean los centros los únicos puntos críticos que no se conservan pues los pequeños términos no lineales pueden hacer que las órbitas dejen de cerrarse sobre sí mismas. De otra forma: una pequeña perturbación puede apartar los autovalores del eje imaginario. Por la misma razón podría pensarse que también puede separar dos autovalores iguales, pero si f y g son regulares esto no sucede (si no lo son puede cambiar el nodo en uno de otro tipo o en un foco). Así pues, analizando sistemas lineales podemos, casi siempre, conocer la forma de las órbitas en un entorno de cada punto crítico (fuera de ese entorno las órbitas pueden ser totalmente diferentes de las del lineal), lo que constituye el paso principal hacia la búsqueda del mapa de fases global de [S]. En muchos problemas físicos, además, lo que se busca es precisamente el comportamiento de las soluciones cerca de las soluciones de equilibrio.



**aproximación lineal** **sistema no lineal**

Es fácil extraer de este teorema conclusiones sobre la **estabilidad** de las soluciones de equilibrio, semejantes a las vistas para las ecuaciones autónomas de primer orden. El significado geométrico sobre el plano de fases de esta estabildad es claro: $\mathbf{x}_o$ es estable si las órbitas que parten suficientemente cerca no se salen de cualquier círculo de radio prefijado. Es asintóticamente estable si además las órbitas tienden a $\mathbf{x}_o$ cuando $t\to\infty$.

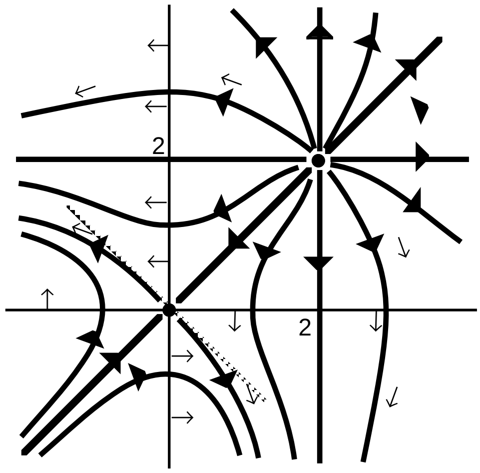


**Teor 2.** Si los autovalores de **A** tienen parte real negativa $\mathbf{x}_o$ es una solución de equilibrio asintóticamente estable de [S]. Si alguno de los autovalores tiene parte real positiva $\mathbf{x}_o$ es inestable.

(como siempre nos queda la duda de lo que sucede para autovalores con $\text{Re}\lambda=0$)

La inestabilidad de algunas soluciones no constantes también es clara a la vista de un mapa de fases: si las órbitas se alejan, también lo hacen las soluciones de las que son proyección. Pero la estabilidad no se puede ver: órbitas próximas pueden corresponder a soluciones muy diferentes (por ejemplo las órbitas de un sistema lineal con un punto silla se pegan entre sí y sin embargo todas las soluciones son inestables).

**Ej 1.** $\boxed{\begin{array}{l} x'=y(x-2) \\ y'=x(y-2) \end{array}}$ Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$




La aproximación lineal $\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x\text{-}2 \\ y\text{-}2 & x \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es:

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \to \lambda=\pm 2$ , con vectores propios: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ .

El sistema no lineal tiene un punto silla en el origen.
En $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \lambda=2$ doble y es un nodo estelar.

Completamos esta información local con el campo **v** (la ecuación diferencial de la órbitas es separable, pero proporciona una expresión poco manejable).
Los vectores del campo son verticales cuando x'=0, es decir si y=0 o si x=2 (esto garantiza que la recta x=2 es un órbita (más exactamente: está formada por tres órbitas). Son horizontales si y'=0 $\to$ x=0, y=2 (que también es tangente al campo y es órbita).

Dibujamos además algunos vectores del campo:

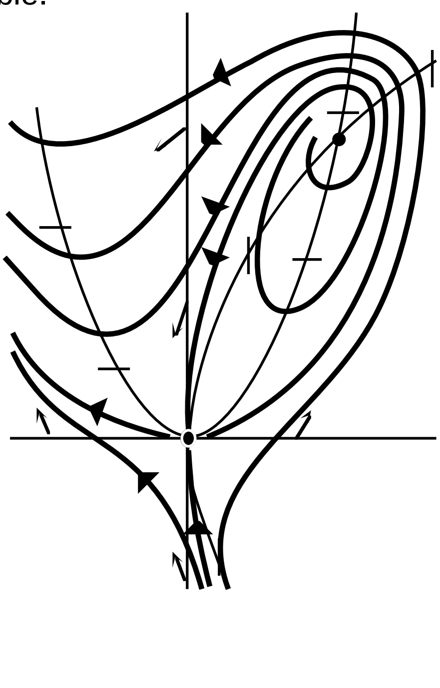
$\mathbf{v}(x,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(0,y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(x,x) = \begin{pmatrix} x(x-2) \\ x(x-2) \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(-1,3) = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(3,-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}$ ,

$\mathbf{v}(-1,1) = \mathbf{v}(1,3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(1,-1) = \mathbf{v}(3,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(3,4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(4,3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

(se observa una simetría respecto a y=x que podíamos haber visto en el sistema; esta bisectriz está formada por órbitas porque los vectores sobre ella [$\mathbf{v}(x,x)$] tienen su misma dirección; excepcionalmente, la órbita recta estable del punto silla del sistema lineal se ha conservado, aunque la inestable se ha deformado).

Con toda esta información tenemos que el mapa de fases es más o menos el del dibujo. No sabemos resolver el sistema, pero tenemos a la vista propiedades esenciales de las soluciones. Citemos algunas de ellas: que las dos soluciones constantes son inestables estaba claro desde que calculamos los autovalores de las aproximaciones lineales; el segmento que une los puntos críticos corresponde a una solución definida para todo t (pues está acotada); esta solución es inestable, pues mientras ella tiende a **0** la x de algunas cercanas y la y de otras tiende a $-\infty$ ; no podemos saber, sin embargo, si las soluciones no acotadas están o no definidas para todo t , ni si, por ejemplo, la solución cuya proyección es y=2 y cuya x tiende a $-\infty$ es o no estable.

**Ej 2.** $\boxed{\begin{array}{l} x'=8x-y^2 \\ y'=-6y+6x^2 \end{array}}$ Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es un punto silla con $\lambda=8 \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\lambda=-6 \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ .

$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ es un foco inestable ($\lambda=1\pm i\sqrt{143}$) .

El campo es horizontal si $y=x^2$ y vertical si $8x=y^2$ .

Sobre los ejes: $\mathbf{v}(x,0) = \begin{pmatrix} 8x \\ 6x^2 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(0,y) = \begin{pmatrix} -y^2 \\ -6y \end{pmatrix}$ .

Estos vectores nos precisan el sentido en el que se abren las espirales del foco y la dirección en que se deforman las órbitas que llegan y parten del punto silla (a partir de ahora llamaremos **separatrices** a estas órbitas, como usualmente se hace). Se tiene, pues, el mapa de fases de la figura.

## 4.3 Ecuaciones autónomas de segundo orden

Todo lo dicho en las secciones anteriores sobre sistemas autónomos se puede, evidentemente, aplicar al caso particular de las ecuaciones autónomas

[e] $\boxed{x''=g(x,x')}$ , o escrita en forma de sistema: [SE] $\boxed{\begin{matrix} x'=v \\ v'=g(x,v) \end{matrix}}$

(utilizamos la variable v porque en muchos problemas físicos representa una velocidad).

La matriz de la aproximación lineal es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x(x,v) & g_v(x,v) \end{pmatrix}$ evaluada en cada punto crítico.

La ecuación de las órbitas y el campo **v** adoptan ahora la forma:

[o] $\boxed{v\,\dfrac{dv}{dx}=g(x,v)}$ $\qquad$ $\boxed{\mathbf{v}(x,v)=\begin{pmatrix} v \\ g(x,v) \end{pmatrix}}$

Algunas propiedades particulares de los mapas de fases de ecuaciones se deducen inmediatamente de las expresiones anteriores:

- **los puntos críticos de las ecuaciones están sobre el eje** v=0 .
  [ y las x de esos puntos son los ceros de g(x,0) ]
- **las órbitas se dirigen hacia la derecha en el semiplano superior y hacia la izquierda en el inferior**
- **las órbitas que cortan el eje** v=0 **lo hacen perpendicularmente**
- **las ecuaciones no poseen nodos estelares**
- **un vector propio asociado a un autovalor** $\lambda$ **es** $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$

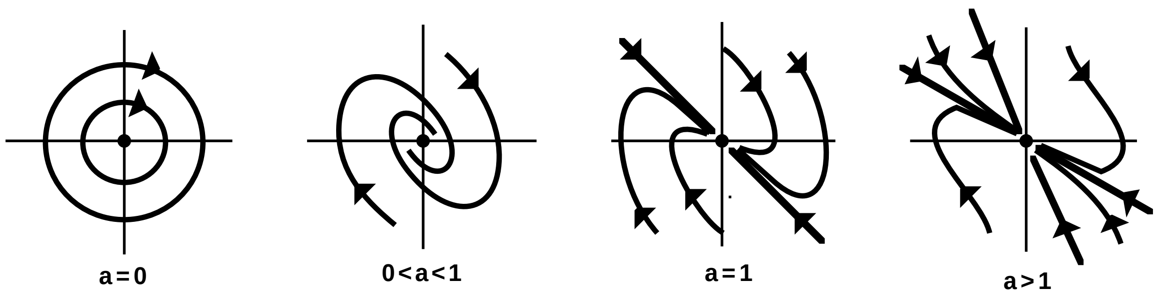
Veamos un par de ejemplos de mapas de fases de ecuaciones que pueden describir sistemas físicos e interpretemos sus órbitas:

**Ej 1.** $\boxed{x''+2ax'+x=0}$ , con $a\geq 0$ [ sistema muelle-masa con rozamiento (si a>0) ]

Aunque esta ecuación lineal es fácilmente resoluble, también lo es dibujar su mapa de fases. Para todo a el único punto crítico es el origen. Sabemos que los autovalores son las raíces de la ecuación $\lambda^2+2a\lambda+1=0$ , es decir: $\lambda=-a\pm[a^2-1]^{1/2}$ . Por tanto:

Si a=0 , el origen es un centro ($\lambda=\pm i$ y el sistema es lineal)
Si 0<a<1 , es un foco estable (autovalores complejos con $\mathrm{Re}\lambda<0$)
Si a=1 , es un nodo de una tangente estable (con $\lambda=-1$ doble)
Si a>1 , es un nodo estable ($\lambda_2=-a-[a^2-1]^{1/2}<-1<\lambda_1=-a+[a^2-1]^{1/2}<0$)

Con estos datos y alguna información adicional más (por ejemplo, el campo **v** sobre el eje x=0 y los puntos en que este campo es horizontal) completamos los mapas de fases:

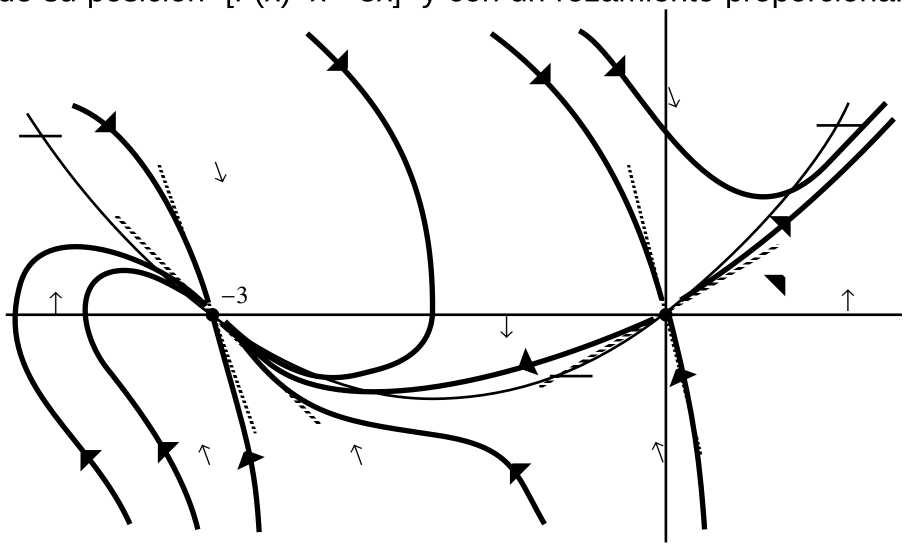


a=0 $\qquad$ 0<a<1 $\qquad$ a=1 $\qquad$ a>1

En todos los casos el origen representa la solución trivial correspondiente a la situación estable de la masa sobre la posición de equilibrio sin velocidad inicial.
Si a=0, cada órbita no trivial describe un movimiento oscilatorio no amortiguado en torno al equilibrio: si inicialmente, por ejemplo, está en el origen con una velocidad v positiva a partir de entonces va aumentando la x hasta su valor máximo en el instante en que la v se hace 0; disminuye la x a partir de entonces (la v (en valor absoluto) pasa por un máximo y luego disminuye cuando el movimiento se opone a la fuerza de recuperación del muelle); avanza después la masa hacia la posición de equilibrio a la que llega con la misma velocidad inicial y repite este movimiento indefinidamente.
Si 0<a<1, la masa pasa infinitas veces por la posición de equilibrio, pero la amplitud de la oscilación va decreciendo hacia 0 según pasa el tiempo.
Si a≥1, todas las órbitas describen movientos de la masa que tienden al equilibrio, pero al ser mayor el rozamiento, no son posibles las oscilaciones. Dependiendo de su posición y velocidad iniciales, o bien tiende indefinidamente hacia la posición de equilibrio sin llegar a superarla, o bien la cruza una única vez.

**Ej 2.** $\boxed{x''=x^2+3x-4x'}$

Puede describir el movimiento de una partícula sobre el eje de las x, sometido a una fuerza que sólo depende de su posición [$F(x)=x^2+3x$] y con un rozamiento proporcional a su velocidad [$-4x'$].
Dibujemos sus órbitas.




En forma de sistema:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = x^2+3x-4v \end{cases}$$

Hallando sus puntos críticos y evaluando

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x+3 & -4 \end{pmatrix}$$

en cada uno de ellos se obtienen la matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \to \lambda= -1,-3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \to \lambda= -2\pm\sqrt{7}$$

Por tanto son un nodo estable y un punto silla.
El campo es horizontal sobre la parábola $v=(x^2+3x)/4$ . Valores interesantes de **v**:

$\mathbf{v}(-3,v) = \mathbf{v}(0,v) = v \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(-4,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(-4,3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(-2,-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(-2,-3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

(estos últimos vectores indican como se deforman las rectas del nodo lineal)
Evaluamos **v** sobre las separatrices del lineal, es decir $\mathbf{v}(x,\lambda x)$. Unos pocos cálculos indican que se deforman de la manera dibujada y completamos el mapa de fases.

Interpretemos alguna de las órbitas. Observemos que el sentido de las fuerzas es el esquematizado por : $\to -3 \leftarrow 0 \to$ (por eso el primer punto es estable y el segundo es inestable). Supongamos que tenemos la partícula inicialmente entre -3 y 0 y discutamos su movimiento para diferentes velocidades $v_o$ inciales. Si $v_o<0$ la partícula tiende hacia el equilibrio estable (llegando a superarlo una vez o no, dependiendo de la magnitud de $v_o$. Si $v_o>0$ y pequeño, no puede superar la fuerza que se le opone, llega a un x máximo y despues regresa acercándose indefinidamente a –3. Si $v_o>0$ y grande consigue cruzar x=0 y, ayudado por la fuerza, tiende a ∞ (¿en tiempo finito?) al tiempo que aumenta su velocidad. Si $v_o>0$ es tal que estamos sobre la separatriz del punto silla tenemos un moviento irrealizable en la práctica: acercarse indefinidamente al equilibrio inestable.

## 4.4 Sistemas y ecuaciones exactos

Un sistema del tipo [S] $\boxed{\begin{array}{c} x'=f(x,y) \\ y'=g(x,y) \end{array}}$ se llama **exacto** si $f_x(x,y)+g_y(x,y)\equiv 0$

(suponemos f y g funciones de clase 1 en todo $\mathbf{R}^2$ como hicimos en la sección 4.1) .

Si [S] es exacto, entonces la ecuación diferencial de sus órbitas

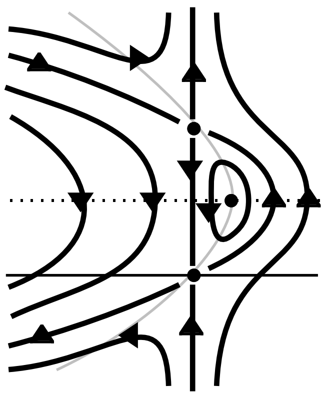
[o] $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}}$ , es decir, $g(x,y)-f(x,y)\frac{dy}{dx}=0$

es también exacta, y por tanto resoluble: **existe una** $H(x,y)$ **tal que** $f=H_y$ **y** $g=-H_x$ **, y las órbitas de [S] vienen dadas por** $H(x,y)=C$ . Además se tiene el siguiente resultado sobre la clasificación de sus puntos críticos:

**Teor 1.** Los puntos críticos elementales de un sistema exacto sólo pueden ser centros o puntos silla.

La ecuación de autovalores de la matriz de la aproximación lineal $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} f_x(x_o,y_o) & f_y(x_o,y_o) \\ g_x(x_o,y_o) & g_y(x_o,y_o) \end{pmatrix}$ en cualquier punto crítico $\mathbf{x}_o$ es de la forma $\lambda^2+|\mathbf{A}|=0$ (pues $f_x+g_y\equiv 0$), con lo que o bien (si el deteminante es negativo) tiene dos raíces reales de distinto signo y el punto crítico es un punto silla (tanto del sistema lineal como del no lineal) o bien (si $|\mathbf{A}|>0$) las raíces son imaginarias puras y se tiene un centro en la aproximación lineal. Además es fácil ver, por ser H continua, que $H(x,y)=H(x_o,y_o)$ contiene además del punto crítico $\mathbf{x}_o$ todas las órbitas que tienden a dicho punto cuando t tiende a + o $-\infty$, con lo que el sistema [S] no puede tener focos (ni nodos) y los centros del lineal lo son también en el no lineal.

**Ej 1.** $\boxed{\begin{array}{c} x'=x-2xy \\ y'=x-y+y^2 \end{array}}$ Es exacto: $f_x+g_y=1-2y-1+2y\equiv 0$. Hallando la H tal que $H_x=-x+y-y^2$, $H_y=x-2xy$ , obtenemos sus órbitas $H(x,y) = xy-xy^2-\frac{x^2}{2} = C$ .



Los puntos críticos son $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ [autovalores $\lambda=\pm 1$ : son puntos silla] y $\begin{pmatrix}1/4\\1/2\end{pmatrix}$ [$\lambda=\pm i/\sqrt{2}$ : centro también del no lineal].

Dibujar todas las curvas H=C es complicado pero para C=0 tenemos dos curvas sencillas $x=0$ y $x=2(y-y^2)$ (cada una de ellas formada por cinco órbitas distintas). El campo $\mathbf{v}$ es horizontal sobre $x=y-y^2$ y vertical en la órbita $x=0$ y en la recta $y=1/2$. Podemos dibujar ya aproximadamente las órbitas, si bien aún no están orientadas. Para ello basta dar un único valor a $\mathbf{v}$ o considerar algún vector propio de los puntos sillas. Estudiemos también la prolongabilidad de alguna solución del sistema: por ejemplo, sobre $x=0$ es $y'=-y+y^2$ , y podemos afirmar (resolviendo esta ecuación o comparándola con otras de la forma $y'=ay^2$) que ninguna de las soluciones cuya proyección es una de las semirrectas de $x=0$ está definida para todo t (se sabía que sí lo están las asociadas al segmento vertical). Análogamente, también explotan para algún t las soluciones no acotadas cuya órbita está sobre $x=2(y-y^2)$ pues satisfacen $y'=y-y^2$ . Es difícil tratar el resto de soluciones no periódicas por ser complicada la expresión de su órbita.

Caso particular de los sistemas exactos, son las **ecuaciones exactas**: $\boxed{x''=g(x)}$ ,

es decir $\begin{cases} x'=v \\ v'=g(x) \end{cases}$ . La ecuación [0] es ahora $v\frac{dv}{dx}=g(x)$ y las órbitas vienen dadas por:

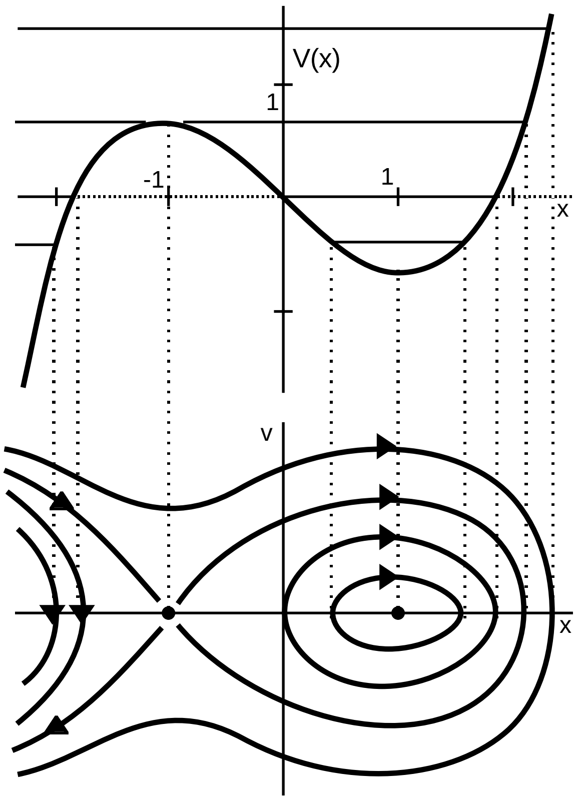
$$\boxed{H(x,v)=\frac{v^2}{2}-\int g(x)dx=C} \text{ , o sea, } \boxed{\frac{v^2}{2}+V(x)=C \text{ , si } V(x)=-\int g(x)dx}$$

(si consideramos que la ecuación describe el movimiento (sin rozamiento) sobre el eje x de una partícula sometida a una fuerza que sólo depende de su posición, la H es la energía total , $v^2/2$ es la cinética y V(x) es la potencial). A la vista de la solución está claro que **las órbitas son simétricas respecto al eje x** y que la órbita u órbitas correspondientes a cada valor de C son curvas definidas en los intervalos del eje x para los que $V(x)\le C$ y que cortan dicho eje en los x tales que V(x)=C. Con lo anterior y el teorema siguiente podremos dibujar el mapa de fases conociendo la gráfica de V(x).

**Teor 2.** Si V tiene un mínimo en $x_o$ entonces $\mathbf{x_o}=\begin{pmatrix} x_o \\ 0 \end{pmatrix}$ es un centro del mapa de fases. Si V tiene un máximo, $\mathbf{x_o}$ es un punto silla.

Si V tiene un máximo o mínimo en $x_o$ entonces $V'(x_o)=-g(x_o)=0$ con lo que $\mathbf{x_o}$ es punto crítico. La ecuación de autovalores en ese punto es $\lambda^2+V''(x_o)=0$ y por tanto se trata de un centro si $V''(x_o)>0$ (mínimo de V) o de un punto silla si $V''(x_o)<0$ (máximo de V) [analizando la ecuación de las órbitas se puede ver que el teorema es válido también aunque $\mathbf{x_o}$ sea no elemental ($V''(x_o)=0$)].

**Ej 2.** $\boxed{x''=1-x^2}$ $\rightarrow V(x)=-x+\frac{x^3}{3}$ .




Usando sólo la gráfica de V(x) deducimos el mapa de fases del dibujo inferior:
Como V posee un máximo en x=–1 y un mínimo en x=1 el mapa de fases posee el punto silla y el centro dibujados abajo.
Dibujamos ahora diferentes rectas V=C y las órbitas correspondientes: $v^2/2+V(x)=C$ .
Para C=0 , $V(x)\le 0$ si $0\le x\le\sqrt{3}$ (y la órbita, que es una curva simétrica definida en ese intervalo y que corta v=0 en sus extremos, se trata de una curva cerrada rodeando al mínimo) o si $x\le -3$ (la órbita sólo corta v=0 en $x=-3$ y por tanto es abierta). Similares son las dos órbitas dibujadas para un C<0 . La V=C que pasa por el máximo de V nos da una curva del mapa de fases que corta v=0 en dos puntos uno de los cuales es el punto silla (nos proporciona, pues, cuatro órbitas: el punto, la órbita que sale y entra en él y las separatrices de la izquierda). Para un C mayor se tiene la otra órbita. La orientación es la de toda ecuación (hacia la derecha arriba, hacia la izquierda abajo).

[Como las órbitas son $\frac{dx}{dt}=v=\pm\left[2x-\frac{2x^3}{3}+C\right]^{1/2}$ las soluciones se obtendrían a partir de:

$\pm\int\left[2x-\frac{2x^3}{3}+C\right]^{-1/2}dx=t+K$ , pero la integral elíptica de la izquierda no es calculable].

## 4.5 ¿Centro o foco?

Ya vimos en la sección 4.2 que el único caso en que no basta el estudio de la aproximación lineal para clasificar un punto crítico elemental $\mathbf{x}_o$ de un sistema no lineal

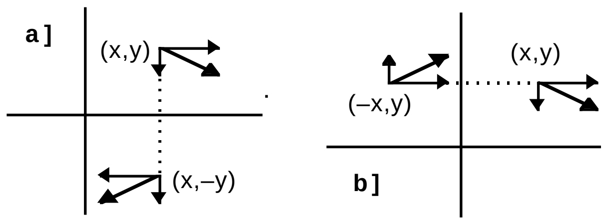
$$[S]\quad \boxed{\begin{array}{l} x'= f(x,y)\\ y'= g(x,y)\end{array}}$$

es el caso en que el lineal posea un centro, ya que entonces el punto de [S] puede también ser un centro o bien ser un foco estable o inestable. Tratamos en la sección anterior una situación en la que el centro del lineal se conservaba: si [S] era **exacto**. En esta sección veremos otras tecnicas para atacar el problema.

También se conservará un centro si las órbitas de [S] poseen **simetría** respecto a alguna recta que pase por $\mathbf{x}_o$ (las órbitas en torno a un centro pueden ser asimétricas y hay puntos críticos con simetría especular (los focos, claramente no la tienen) que no son centros, pero si un punto con esta simetría es centro o foco, necesariamente será centro). El análisis de las simetrías se podrá hacer a la vista de las propias órbitas, en el caso excepcional de que la ecuación diferencial de las órbitas sea resoluble, o a partir del propio campo **v**. Un ejemplo de esto último lo da el siguiente teorema:

**Teor 1.** Si $\mathbf{x}_o$ es punto crítico de [S] , la aproximación lineal posee un centro y
o bien **a]** $\mathbf{x}_o$ está sobre el eje x, $f(x,-y) = -f(x,y)$ , $g(x,-y) = g(x,y)$
o bien **b]** $\mathbf{x}_o$ está sobre el eje y, $f(-x,y) = f(x,y)$ , $g(-x,y) = -g(x,y)$
entonces es un centro del sistema no lineal [S]

Las hipótesis sobre f y g aseguran en el caso **a]** que las órbitas son simétricas respecto al eje x y en el **b]** que lo son respecto al eje y (y que se recorren en sentidos opuestos a cada lado del eje, como debe ocurrir en un centro). De ello se deduce el resultado.




**Ej 1.** $\boxed{x''= \mathrm{sen}\left(x+x'^2\right)}$ , es decir, $\begin{cases} x'= v\\ v'= \mathrm{sen}(x+v^2)\end{cases}$ . Clasifiquemos sus puntos críticos.

Estos resultan ser $\begin{pmatrix}k\pi\\0\end{pmatrix}$ , con aproximación lineal $\begin{pmatrix}0 & 1\\ \cos(x+v^2) & 2v\cos(x+v^2)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 1\\ (-1)^k & 0\end{pmatrix}$ .

Por tanto, si k es par se tratan de puntos silla y si k es impar son centros del lineal. Como f es impar y g es par en v, son también centros del sistema no lineal.

**Ej 2.** $\boxed{\begin{array}{l} x'=x(1-y)\\ y'=y(x-1)\end{array}}$ Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ .

El primero es punto silla y el segundo centro del lineal. Podríamos trasladar éste al origen haciendo $u=x-1$, $v=y-1$ e intentar aplicar el teorema 1, pero se comprueba que el sistema en uv no satisface ninguna de las dos parejas de condiciones. En este caso se pueden calcular las órbitas (ecuación separable) y obtener: $\ln y-y+\ln x-x=C$ . Como esta expresión no varía al cambiar los papeles de x e y las órbitas son simétricas respecto a la recta $y=x$, con lo que el centro lo sigue siendo en el no lineal. [Este sistema es, para unos parámetros muy concretos, el de Lotka-Volterra que rige la evolución de la población de dos especies animales en relación predador-presa].

En algunas ocasiones podremos precisar que el centro se transforma en un foco estable o inestable analizando el sistema escrito en **coordenadas polares** (aunque en la mayoría de los casos esto nos proporcione un sistema más complicado que el inicial). Derivando las relaciones $x = r\cos\theta$ , $y = r\,\mathrm{sen}\theta$ se obtiene

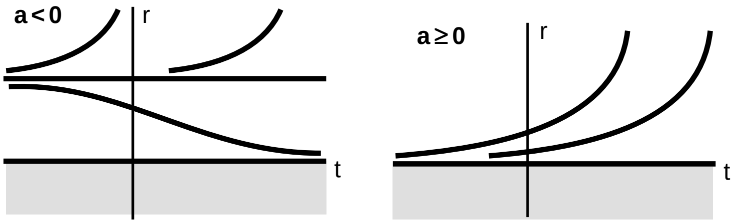
$$\begin{cases} r'\cos\theta - \theta' r\,\mathrm{sen}\theta = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta) \\ r'\mathrm{sen}\theta + \theta' r\cos\theta = g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r' = \cos\theta\, f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta) + \mathrm{sen}\theta\, g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta) \\ \theta' = \frac{1}{r}\left[\cos\theta\, g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta) - \mathrm{sen}\theta\, f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta)\right] \end{cases}$$

En vez de seguir con resultados generales pasamos a analizar un ejemplo concreto:

**Ej 3.** $\boxed{\begin{array}{l} x' = ax - 2y + x^3 \\ y' = 2x + ay + 2x^2y + y^3 \end{array}}$ Clasifiquemos el origen para todo valor de a.

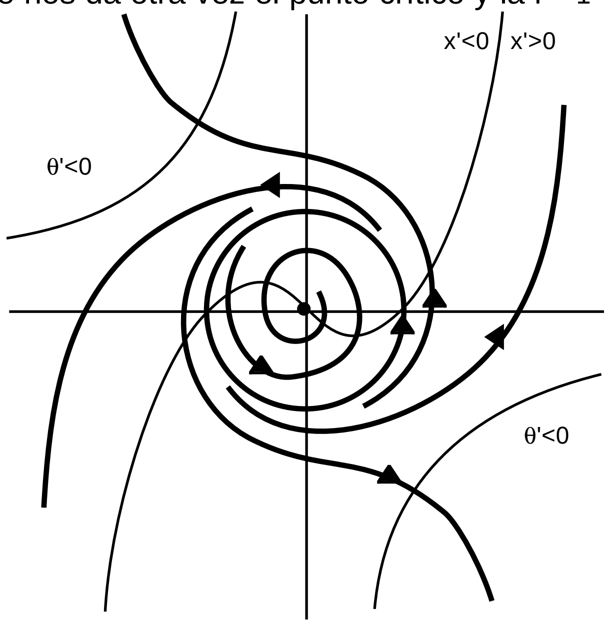
La matriz de la aproximación lineal $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ tiene por autovalores $\lambda = a \pm 2i$ , con lo que si a<0 es foco estable, si a<0 es foco inestable y si a=0 es centro del lineal. Ya que el sistema no es exacto ni simétrico hacemos el trabajo de pasar a polares, obteniendo:

$$\begin{cases} r' = ar + r^3 \\ \theta' = 2 + r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$$




Por suerte hemos obtenido una sencilla ecuación independiente de θ para la r fácil de dibujar. Al crecer con el tiempo la distancia al origen podemos asegurar para el caso a=0 que el origen, que no sabíamos si era centro o foco, es un foco inestable.

Utilicemos la expresión en polares para dibujar el mapa de fases para un valor de a concreto: **a=–1**. La ecuación autónoma $r' = -r + r^3$ tiene entonces la única solución de equilibrio $r=1$ en $r>0$ (además tiene la $r=0$ que nos da otra vez el punto crítico y la $r=-1$ carece de sentido en coordenadas polares).

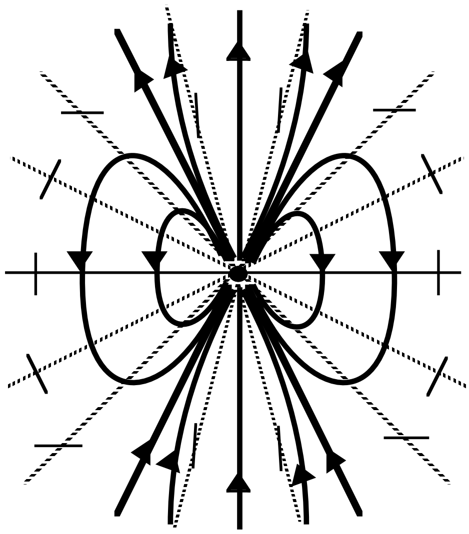



Para $r=1$ se tiene $\theta' = 2 + \mathrm{sen}2\theta/2 > 0$ .Existe por tanto una órbita (la circunferencia unidad) tal que $r=1$ para todo t y tal que su θ crece con el tiempo [a una órbita cerrada aislada como esta se le llama **ciclo límite**]. Como se ve en la ecuación autónoma el resto de las órbitas tienden hacia ella cuando $t \to -\infty$. Podemos también asegurar que no hay más puntos críticos que el origen (difícil sería verlo en la expresión cartesiana) ya que no tiene otras soluciones $r' = \theta' = 0$ (para una solución constante tanto la r como la θ deben permanecer constantes). Dibujando además la curva de puntos con $x'=0$ y $\theta'=0$ ($y=(x^3-x)/2$ y $xy=-2$ , respectivamente) se puede ya dibujar el mapa de fases. Es fácil determinar qué soluciones de este sistema están definidas para todo t : lo están las periódicas asociadas al ciclo límite y las asociadas a las órbitas contenidas en su interior, por estar acotadas; llegan a infinito en tiempo finito aquellas cuya proyección cae fuera del ciclo límite, pues lo hace su distancia al origen, como se ve con facilidad a partir de la ecuación para r'.

Otra técnica para distinguir centros de focos no lineales serán las **funciones de Lyapunov** que se verán en la última sección del capítulo.

## 4.6 Ejemplos con puntos no elementales.

Dibujemos cuatro mapas de fases para los que no podremos clasificar sus puntos críticos (serán no elementales o no los tendrán) y por lo tanto nos basaremos en la ecuación de sus órbitas y en el campo **v**. En alguno de estos ejemplos, además, el sistema no será de clase 1 en todo el plano, a diferencia de lo que hemos supuesto hasta ahora. Estudiaremos también esas propiedades de las soluciones que involucran a la variable t y que normalmente no podemos deducir del dibujo de las órbitas.



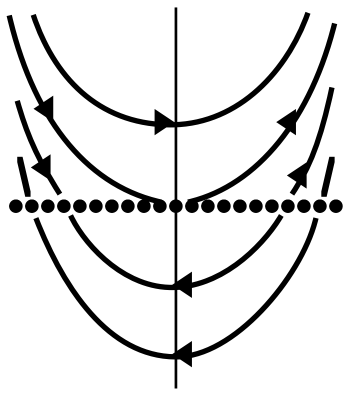
**Ej 1.** $\boxed{\begin{array}{l} x'=3xy \\ y'=4y^2-4x^2 \end{array}}$ El único punto crítico es el $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, con aproximación lineal $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ y por tanto se trata de un punto no elemental. La ecuación diferencial de sus órbitas $\frac{dy}{dx}=\frac{4y^2-4x^2}{3xy}$ se puede resolver, ya que es homogénea o de Bernouilli, obteniéndose:

$y^2=4x^2+Cx^{8/3}$ (si C=0 se tienen las rectas $y=\pm 2x$).

Mejor que dibujar estas curvas, trazamos algunas isoclinas, que por ser la ecuación homogénea son rectas $y=mx$ pasando por el origen. La pendiente de las órbitas sobre ellas es: $K=(4m^2-4)/3m$ . Para $m=0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ es $K=\infty, \pm 2, 0, \pm 2, \pm 5$ , que son las dibujadas. Para orientar las órbitas vemos que **v**(0,y) es un vector vertical apuntando hacia arriba (que además nos da las órbitas verticales no recogidas en la solución).

Observemos que aparecen conjuntos de órbitas (llamadas elípticas) que salen y llegan al punto crítico, situación que no se da en los elementales. Se puede ver que los puntos no elementales aislados o son centros o son focos o existen en torno suyo sectores formados por órbitas elípticas, parabólicas (como las de los nodos o las demás órbitas del ejemplo) o hipérbólicas (como las de los puntos silla).

Saquemos alguna conclusión sobre las soluciones: el origen es inestable; la solución que satisface $x(0)=1$, $y(0)=2$ , cuya órbita es $y=2x$, no está definida para todo t, pues para ella $x'=6x^2$, $y'=3y^2$ , con soluciones que explotan a la derecha de t=0 (se podrían incluso calcular); la solución con $x(0)=1$, $y(0)=0$ sí está definida para todo t por estar acotada (no podemos hallarla explícitamente) y con el mapa de fases no se puede ver si es o no estable (aunque su diferencia con las soluciones cercanas tienda a **0** cuando $t\to\infty$, esto no basta en sistemas para asegurar su estabilidad).



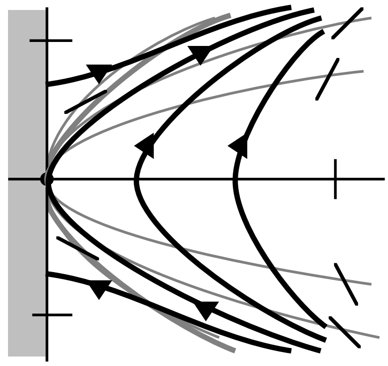
**Ej 2.** $\boxed{x''=2xx'}$ $\to \begin{cases} x'=v \\ v'=2xv \end{cases} \to \frac{dv}{dx}=2x \to v=x^2+C=\frac{dx}{dt}$

El eje x está lleno de puntos críticos no aislados (y no elementales). Parte de las parábolas están formadas por varias órbitas, recorridas como siempre en las ecuaciones. Los puntos criticos con $x\geq 0$ son inestables. Los de $x<0$ son estables (no asintóticamente). Las soluciones de $v<0$ están definidas para todo t. Para ver que no lo están las de $v>0$ podemos comparar la $x'=x^2+C$ o incluso resolverla:

$t+K=\int\frac{dx}{x^2+C} \to x=\sqrt{C}\,\mathrm{tag}(\sqrt{C}\,t+K)$ , si C>0 ; $x=\frac{1}{K-t}$ , si C=0 ;

$x=\sqrt{-C}\,\frac{1-Ke^{2\sqrt{-C}}}{1-Ke^{2\sqrt{-C}}}$ , si C<0 ; además de las $x\equiv K$ perdidas en el cálculo.

**Ej 3.** $\boxed{x''=\sqrt{x}}$ La ecuación sólo tiene sentido para $x\geq 0$ .



El único punto crítico (no elemental) es el origen y por tanto hay una única solución constante: $x\equiv 0$.

Las órbitas son $v\frac{dv}{dx}=\sqrt{x} \;\to\; v^2=\frac{4}{3}x^{3/2}+C$

Dibujamos las isoclinas: $\frac{\sqrt{x}}{v}=K$ , para $K=0,\pm 1/2,\pm 1,\pm 2,\infty$

La curva de puntos de inflexión de las órbitas es $v^2=2x^{3/2}$

La orientación es la típica de las ecuaciones.

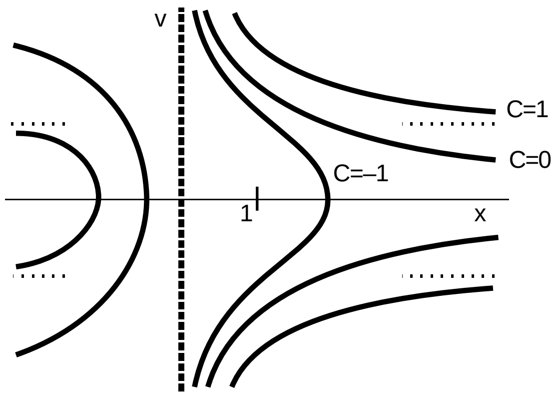
Calculemos y estudiemos la estabilidad de la solución con $x(2)=1/9$, $x'(2)=2/9$. Para hallar la órbita asociada imponemos que $v(x{=}1/9)=2/9 \to C=0$. Así pues:

$$v=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/4}=\frac{dx}{dt} \;\;;\;\; 2\sqrt{3}\,x^{1/4}=t+k \;\;;\;\; x=\frac{(t+k)^4}{144} \;\;;\;\; \text{imponiendo } x(2)=1/9 \to x=\frac{t^4}{144}$$

(en x=0 podía fallar la unicidad y, como se observa, existen dos soluciones que satisfacen $x(0)=x'(0)=0$ : la que acabamos de calcular y la $x\equiv 0$ )

$\left|\,\frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/4}-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^{3/2}+C}\,\right| \to 0$ cuando $x\to\infty$, pero ello no implica que la solución considerada sea estable (además, no podemos hallar la x(t) si $C\neq 0$ ).

**Ej 4.** $\boxed{x''=-x^{-2}}$ No tiene puntos críticos.




(describe, para x>0, el movimiento bajo un campo gravitatorio en unidades adecuadas)

Sus órbitas son $x=\frac{2}{v^2-C} \;\leftrightarrow\; v=\pm\sqrt{C+\frac{2}{x}}$ .

(la interpretación física es fácil, por ejemplo, si $x(0)=2$ , $x'(0)=v_o$ y $v_o<1$, la partícula acaba en el origen; $v_o=1$ es la llamada velocidad de escape (x=2): para velocidades iniciales mayores que ella la partícula se aleja del origen indefinidamente)

Determinemos el tiempo T que tardaría una partícula, inicialmente en reposo en x=2, en llegar al origen. La órbita correspondiente ( $v(x{=}2)=0$ ) es la de C=–1. Así pues:

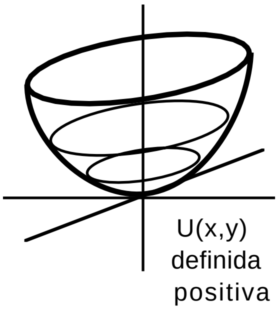
$$T=\int_0^T dt=-\int_2^0\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2-x}}=\left[\sqrt{x}\sqrt{2-x}+2\arctan\sqrt{\frac{2}{x}-1}\,\right]_2^0=\pi\,.$$

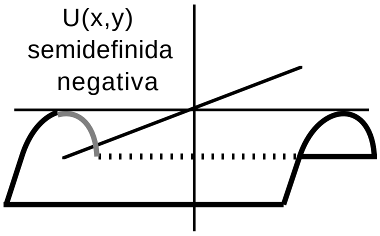
## 4.7 Funciones de Lyapunov

El método directo de Lyapunov tiene como objetivo determinar la estabilidad de un punto crítico. Esto, en la mayoría de los casos, es más fácil hacerlo analizando la aproximación lineal, pero cuando ésta no decida (centros o puntos no elementales) será cuando acudamos a dicho método.

Antes de dar los resultados necesitamos unas definiciones previas:

Sea $D\subset\mathbf{R}^2$ que contiene al origen en su interior. Decimos que una función $U(x,y)$ es **definida positiva** en D si $U(0,0)=0$ y $U(x,y)>0$ para cualquier ortro punto de D. Si sustituimos > por < ó ≤ , la U se dice, respectivamente, **definida negativa** o **semidefinida negativa**. Por ejemplo $U(x,y)=x^2+2y^2$ es definida positiva y $U(x,y)=-x^2$ es semidefinida negativa en todo $\mathbf{R}^2$.



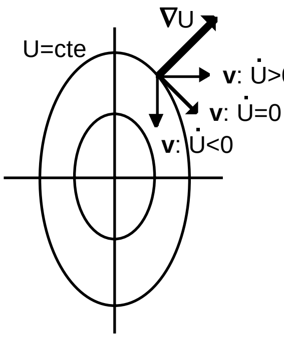




Dados [S] $\boxed{\begin{array}{l} x'= f(x,y) \\ y'= g(x,y)\end{array}}$ y U(x,y) denotaremos $\boxed{\dot U(x,y)=U_x(x,y)f(x,y)+U_y(x,y)g(x,y)}$

(f, g y U de clase 1)

**Teor 1.** Supongamos que el origen es punto crítico de [S]. Si existen un conjunto D y una función U de clase 1 definida positiva en D tal que $\dot U$ es definida negativa, semidefinida negativa o definida positiva en D, entonces el origen es, respectivamente, asintóticamente estable, estable o inestable. A una U con cualquiera de esas propiedades se le llama **función de Lyapunov**.

La idea de la demostración es sencilla: como $\dot U=\nabla U\cdot\mathbf{v}$ , el $\nabla U$ es perpendicular a las curvas U=cte (curvas cerradas que rodean el origen) y **v** es tangente a las órbitas, el hecho de que el producto escalar sea menor, menor o igual, o mayor que 0 en D implica que las órbitas cruzan todas las curvas de nivel de U contenidas en D hacia dentro, que no las cruzan hacia fuera o que sí lo hacen.




El problema básico de este método es encontrar una U adecuada. En un problema físico se puede intentar probar como U la energía total del sistema, pero en otras ocasiones deberemos acudir a tanteos con posibles funciones U que sepamos que son definidas positivas (y en muchas ocasiones no sabremos encontrar la función de Lyapunov).

**Ej 1.** $\boxed{\begin{array}{l} x'=y+x^3-xy^2 \\ y'=-x+y^3\end{array}}$ El origen es un centro de la aproximación lineal.

Buscamos una U tanteando con las funciones definidas positivas mas sencillas:

$U(x,y)=ax^2+by^2$, $a,b>0 \to \dot U=2ax(y+x^3-xy^2)+2by(-x+y^3)=2(a-b)xy+2ax^4-2ax^2y^2+2by^4$

Para que tenga signo definido debe ser a=b ($=\frac{1}{2}$ , por ejemplo) $\to \dot U = x^4-x^2y^2+y^4$

que es definida positiva en todo $\mathbf{R}^2$ $\left(\dot U=(x^2-y^2)^2+x^2y^2\right)$. El origen es inestable (foco).

**Ej 2.** $\boxed{x''+x'+x^3=0} \to \begin{cases} x' = v \\ v' = -v-x^3 \end{cases}$ . El origen no es elemental.

Podemos interpretar la ecuación como describiendo el movimiento con rozamiento de un punto sobre el eje x sometido a una fuerza $-x^3$. Esto nos hace suponer que el origen es asintóticamente estable y nos sugiere probar como U la energía total:

$$U = \frac{v^2}{2} + \frac{x^4}{4} \to \dot{U} = x^3v+v(-v-x^3) = -v^2 \text{ semidefinida negativa.}$$

El teorema nos asegura que el origen es al menos estable, pero lo esperado es la estabilidad asintótica (de hecho, dicho teorema es la versión menos fina de todos los que existen: se debería esperar que si, como en el ejemplo, las órbitas cruzan hacia dentro cada curva de nivel excepto en un par de puntos de cada una (los de v=0 en este caso) deberíamos tener no sólo estabilidad, sino estabilidad asintótica; aunque no los enunciemos, se pueden encontrar teoremas que precisan esta idea).

Podemos probar la estabilidad asintótica utilizando el teorema dado, aunque para ello hay que tantear con más términos. Haciéndolo se encuentra la siguiente U:

$$U = \frac{(x+v)^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{v^4}{4} \to \dot{U} = -x^4-v^4-x^3v^3 \text{ definida negativa en un entorno del origen}$$

(pues los términos de orden 6, aunque no tienen signo definido, son despreciables respcto a los de orden 4 en las cercanías del origen).

# problemas 1

**1 .** Hallar las soluciones particulares que satisfacen los siguientes problemas de valores iniciales:

$2tyy'-3y^2+3t^2=0\ ,\ y(1)=2$ $\qquad t^2+y^2+t+tyy'=0\ ,\ y(1)=0$ $\qquad y'=1+\cos^2(y-t)\ ,\ y(0)=0$

$y\,\mathrm{sen}\,t+y'\ln y=0\ ,\ y(0)=2$ $\qquad ty'=2y+t\ ,\ y(1)=2$ $\qquad y'=\cos t-y-y^2\,\mathrm{sen}\,t\,\cos^{-2}t\ ,\ y(0)=-1$

$e^y-2t+te^y\,y'=0\ ,\ y(1)=0$ $\qquad t^2y'=2ty-y^2\ ,\ y(1)=-1$ $\qquad 3y'+y=(1-2t)\,y^4\ ,\ y(1)=1$

**2 .** Probar que la ecuación lineal admite un factor integrante que sólo depende de $t$ y utilizarlo para deducir la expresión de la solución general de dicha ecuación.

**3 .** Resolver $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+2}{y-2x+6}$ (convertirla en homogénea mediante un adecuado cambio de variables).

**4 .** Dibujar el campo de direcciones y la forma aproximada de las curvas integrales de

$y'=1-y^2$ $\qquad y'=t^2+y$ $\qquad y'=\frac{y}{y-t}$ $\qquad y'=\frac{y-t}{y+t}$ $\qquad y'=\frac{1}{t^2+y^2}$ $\qquad y'=\frac{1}{(t-4y)^2}$ $\qquad y'=\frac{t^2-y}{t+y^2}$

**5 .** Integrar numéricamente entre $0$ y $1$ los problemas $y'=t+y\ ,\ y(0)=2$ ; $y'=t-y\ ,\ y(0)=2$ , mediante los métodos de Euler, Euler modificado y Runge-Kutta, para $h=0.2$, $h=0.1$ y $h=0.05$ . Resolver las ecuaciones y comparar con los valores exactos.

**6 .** Calcular el valor aproximado en t=0.2 de la solución de: $\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y'=t^2+y^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y'=t-|y| \\ y(0)=0 \end{cases}$

a partir de la segunda aproximación de Picard. Comparar con Euler y Runge-Kutta para $h=0.1$ .

**7 .** Estudiar en qué subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ son lipschitzianas respecto de la $y$ las funciones:

$$f(t,y)=t^3|y| \qquad\qquad g(t,y)=\begin{cases} t-y\ ,\ y>0 \\ t\ ,\ y\le 0 \end{cases}$$

**8 .** Estudiar existencia y unicidad de soluciones y curvas integrales:

$y'=\frac{y-t}{y+t}$ $\qquad y'=3ty^{1/3}$ $\qquad y'=-\frac{2y}{t}+4t$ $\qquad y'=\frac{1}{(t-4y)^2}$ $\qquad y'=y\ln|t|$ $\qquad y'=\begin{cases} -y\ln y\ ,\ y>0 \\ 0\ ,\ y=0 \end{cases}$

**9 .** Estudiar existencia y unicidad de soluciones y curvas integrales de $y'=1+y^{2/3}$ .
Sea $y^*$ la solución con $y^*(0)=1$ . ¿Está $y^*$ definida hasta $\infty$?¿En qué instante T es $y^*(T)=0$ ?
Probar que $y^*(1)\ge 3$ . Calcular aproximadamente $y^*(1)$ por Euler-modificado con $h=1$ .

**10 .** Sea $ty'=te^{-y/t}+y$ . Resolverla. ¿Cuántas soluciones satisfacen $y(-1)=0$? Probar que todas las soluciones de la ecuación son crecientes. Dibujar la isoclina asociada a la pendiente 1 de las soluciones de la ecuación y la curva de puntos de inflexión.

**11 .** Sea $y'=\frac{y^2}{t}-\frac{1}{t}$ . Resolverla por dos métodos diferentes. Dibujar isoclinas y curvas integrales.
Determinar cuántas curvas integrales pasan por los puntos $(0,-1)$ , $(0,0)$ y $(0,1)$ .

**12 .** Estudiar existencia y unicidad y dibujar aproximadamente las soluciones de $y'=|y-t|$ .
Hallar la solución que satisface la condición inicial $y(0)=1/2$ .

**13 .** Resolver $y'=(\sqrt{y}-1)\,t$ . Estudiar crecimiento y decrecimiento. Precisar cuántas soluciones satisfacen i) $y(0)=1$ , ii) $y(0)=0$ . ¿Esta definida para todo $t\ge 0$ la solucion con $y(0)=2$ ?.

**14 .** Sean: i) $y'=\sqrt{y}+t$ , ii) $y'=\frac{2}{t}\sqrt{y}$ .
Estudiar para ambas la existencia y unicidad y dibujar aproximadamente sus soluciones.

**15.** Sean la ecuación $y' = \sqrt{4-y^2}$ y las condiciones iniciales: a) $y(0)=-2$ , b) $y(\pi)=0$ .
Hallar la única solución que satisface una de las condiciones anteriores y encontrar dos soluciones distintas que satisfagan la otra.

**16.** Sea $y' = y^2 - 2t^{-2}$ . Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales y hallar las que pasen por el origen. Probar que existen soluciones de la forma $y = A/t$ . Determinar en qué intervalo está definida la solución con $y(1)=0$ y estudiar su estabilidad.

**17.** Estudiar existencia, unicidad y prolongabilidad, según los valores iniciales, de las solciones de

$y' = y^4 + y$ $\quad y' = e^{-y/t}$ $\quad y' = 1-y^{-2}$ $\quad y' = y^2+t^2$ $\quad y' = 4y+\cos y$

$y' = -ye^{-y^2}$ $\quad y' = \dfrac{1}{t^2+y^2}$ $\quad y' = \dfrac{y}{y-t}$ $\quad y' = \dfrac{y^3}{1+y^2}$ $\quad y' = y\cos^2\sqrt{y} + t^2$

**18.** Dadas la ecuaciones i) $y' = y - 1/t$ y ii) $y' = t - 1/y$ :
Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales y dibujarlas aproximadamente.
Sea $y_a$ la solución con $y(1)=a$ . ¿Alguna $y_a$ posee una asíntota vertical a la derecha de $t=1$ ?
¿Para algún $a$ está acotada $y_a$ para todo $t\geq 0$ ? Aproximar este $a$ con métodos numéricos.

**19.** Comprobar que $y' = t^{n-1}f(y+at^n)$ se convierte en una ecuación de variables separadas haciendo $z=y+at^n$ y utilizarlo para resolver $y' = 2t\,(y+t^2)^2$ . Resolverla después considerándola como una ecuación de Ricatti. ¿Está definida hasta $\infty$ la solución que satisface $y(1)=2$ ?

**20.** Comprobar que las soluciones de $y' = -y+e^{at}$ e $y' = \cos^2 ay$ que satisfacen $y(0)=0$ dependen de forma continua del parámetro a.

**21.** Probar que para que una solución $y(t)$ sea asintóticamente estable a la derecha de $t_o$ basta que las soluciones $y^*(t)$ que parten suficientemente cerca de ella estén definidas para $t\geq t_o$ y que la diferencia $|y(t)-y^*(t)|$ tienda a 0 cuando t tiende a $\infty$ .

**22.** Estudiar para qué valores de las constantes a, b y c la solución de $y' = (\text{sen}t+2bt)y+e^{ct}$ , $y(0) = a$: existe, es única, es prolongable hasta $\infty$, depende continuamente de a, b y c, es estable.

**23.** Sea $y' = y^{2/3} - y$ . Estudiar si existe una única solución satisfaciendo $y(0)=0$ y si es estable la solución que verifica $y(1)=1$.

**24.** Sea $ty' = y + t\,\text{sen}t$ . Imponer un dato inicial para el que existan infinitas soluciones y otro para el que haya solución única. Estudiar la prolongabilidad y si es estable la solución con $y(1)=0$ .

**25.** Sea $y' = 6t^2\sqrt{y}$ . Dar un valor de $a$ para el que tenga solución única con $y(0)=a$ , y otro valor para el que tenga más de una solución. Discutir la estabilidad de la solución que cumple $y(1)=1$ .

**26.** Sea $y' = by + \dfrac{y^2}{t}$ . Discutir, según los valores de $b$ , dónde crecen y decrecen las soluciones. Hallar la curva de sus puntos de inflexión. Precisar cuántas curvas integrales pasan por el origen. Discutir la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=0$ .

**27.** Sea $y' = y - t^a y^2$ . Resolverla y determinar la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=0$ para todos los valores de la constante $a$ .

**28.** Estudiar la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=a$ , según los valores de a:

$y' = \text{sen}y$ $\quad y' = -y^3 - y\cos^2 t$ $\quad y' = \dfrac{y-y^2}{t}$ $\quad y' = 2t^{-3}y + \cos^3 t$ $\quad y' = \begin{cases} y-y^2, & y>0 \\ 0, & y\leq 0 \end{cases}$

**29.** Determinar la estabilidad de las soluciones con $y(1)=0$ e $y(1)=-3$ :

$y' = -2y + \text{sen}t$ $\quad y' = -e^{\cos t}y + y^2$ $\quad y' = -\dfrac{2y}{t} + y^2$ $\quad y' = 1-e^y$ $\quad y' = y\cos t - y^3$

**30.** Dibujar aproximadamente las soluciones de las siguientes ecuaciones, probar que está definida hasta $\infty$ la solución que satisface la condición inicial que se indica y estudiar su estabilidad:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'=t-\lvert y\rvert$ | $y'=1-ty$ | $y'=y^3+2y^2$ | $y'=\frac{2y-t}{t-2}$ | $y'=\frac{2ty-y^2}{t^2}$ | $y'=e^{t-y}$ |
| $y(0)=-1$ | $y(0)=0$ | $y(0)=-2$ | $y(\pi)=0$ | $y(2)=1$ | $y(0)=0$ |

**31.** Sea $y' = y-(2+2\cos t)\,y^2$ . Resolverla y dibujar a grandes rasgos sus soluciones. Estudiar la prolongabilidad. Determinar la estabilidad de la solución $y=0$ y de la que satisface $y(0)=1/3$ .

**32.** Sean $y'=t^2-y^2-1$ , $y'=t^2-y^2$ e $y'=t^2-y^2+1$ .
Resolver las que se pueda. Dibujar isoclinas y soluciones. Estudiar la prolongabilidad de las soluciones con $y(0)=a$ . Determinar la estabilidad de las rectas solución que aparezcan.

**33.** Resolver $\frac{dy}{dt}=\frac{t^2+y^2}{2ty}$ . Dibujar isoclinas y curvas integrales. Determinar cuántas curvas integrales pasan por cada punto del plano. Estudiar la estabilidad de la solución que cumple $y(1) = 1$ .

**34.** Sea $y' = \begin{cases} t & \text{si } y\geq t \\ y & \text{si } y\leq t \end{cases}$ . Estudiar existencia y unicidad de soluciones. Dibujar estas soluciones. Hallar para todo $t$ la solución con $y(-3)=3$ . Determinar la estabilidad de la solución con $y(0)=1$ .

**35.** Estudiar la estabilidad de solución con $y(0)=0$ de $y'=\operatorname{sen}(\pi y)-ay$ , según los valores $a$ .
Dibujar isoclinas, puntos de inflexión y soluciones para $a=2$ [ $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.28$ ]

**36.** Sea la ecuación $y' = y^2-ay^3$ , $a\geq 0$ . Dibujar aproximadamente sus soluciones.
Estudiar existencia, unicidad, prolongabilidad y estabilidad. Resolverla.
Comprobar la dependencia continua del parámetro $a$ cuando éste tiende a $0$ .

**37.** Dada la ecuación $[E_a]$ $y' = 1-\frac{a}{t+y}$ , $a\geq 0$ .
a) Estudiar existencia y unicidad. Resolverla. Dibujar aproximadamente sus soluciones.
b) Sea $y_a(t)$ la solución de $[E_a]$ tal que $y_a(0)=1$. Estudiar el comportamiento de $y_a$ cuando $a\to 0$.
c) Estudiar la prolongabilidad de las soluciones y la estabilidad de la que verifica $y(0)=a/2$ .

**38.** Sea $\frac{dy}{dt}=\frac{2ty}{ay^2-t^2}$ . Hallar la solución general para todo $a$ y dibujar las curvas integrales si $a=3$ .
Precisar para todo $a$ el número de curvas integrales que pasan por cada punto del plano.

**39.** Sea la ecuación $[E_a]$ $y' = \frac{ay}{t}+\frac{y^3}{t^3}$ .
a) Estudiar existencia y unicidad.
b) Resolver por dos métodos diferentes para todos los posibles valores de $a$ .
c) Dibujar el campo de direcciones y las soluciones para $a=-1$ , $a=0$ , $a=1/2$ y $a=1$ .
d) Discutir la prolongabilidad de las soluciones verificando $y(1)=b$ para el caso $a=0$ .
e) Estudiar la estabilidad de todas las rectas solución que tenga para todo $a$.
f) Calcular el valor aproximado en $t=2.5$ para $a=0$ de la solución con $y(2)=1$ :
i) usando la segunda aproximación de Picard, ii) por Euler y Runge-Kutta con paso $h=0.1$
g) Comprobar que hay dependencia continua del parámetro $a$ de la solución con $y(1)=1$ .

**40.** Sea $y'=2ty+t^2y^2$ .
a) Resolverla y dibujar aproximadamente las soluciones.
b) Estimar las soluciones con $y(0)=1$ e $y(0)=-1$ por diferentes métodos numéricos con diferentes pasos, una hasta que se pueda y otra hasta valores grandes de $t$ . Comparar estos valores con los de la segunda aproximación de Picard.
c) Estudiar la estabilidad para diferentes datos iniciales.

**41.** Hallar la expresión de las curvas que verifican la siguiente propiedad: para cada tangente a cada curva en un punto el segmento comprendido entre ese punto y el eje $y$ tiene su punto medio en el eje $x$ .

**42.** Consideremos la familia de hipérbolas $xy=C$. Escribir la ecuación diferencial de la que son curvas integrales (eliminando $C$ entre la ecuación dada y la ecuación obtenida derivándola). Hallar las trayectorias ortogonales a dichas hipérbolas, es decir, las lineas que las cortan en ángulo recto. Resolver el mismo problema para las circunferencias $x^2+y^2=2Cx$ , las parábolas $y^2+2Cx=C$ y las cardioides $r=C(1+\cos\theta)$ .

**43.** Sea $y' = \frac{t-2y}{t}$ . Resolverla y dibujar sus curvas integrales. Estudiar si es estable la solución que satisface $y(1)=3$. Hallar una recta que corte perpendicularmente a las soluciones de la ecuación.

**44.** Tenemos en el instante $t=0$ un gramo de material radiactivo A que sigue la ley de desintegración $x' =-2x$ y tal que al desintegrarse se transforma en otro material radiactivo B que sigue $y' = -ay$ . Encontrar la función $y(t)$ que nos da la cantidad de material B existente en cada instante t y el valor máximo de esta función para los casos $a=1$, $a=2$ y $a=4$.

**45.** Supongamos ahora que tenemos un gramo de otro material radiactivo que se desintegra con una velocidad proporcional a la raiz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año sólo queda 1/4 de gramo, ¿al cabo de cuaántos años tendremos 0.1 gramos? Comprobar que este material se desintegra totalmente en un tiempo finito y calcular ese tiempo.

**46.** Algunas enfermedades se difunden por medio de portadores, individuos que transmiten la enfermedad pero no la padecen. Sean x e y las densidades de portadores y personas sanas en el instante t. Se supone que los portadores se retiran de la población según la ecuación $x'=-mx$ y que la enfermedad se difunde con velocidad proporcional al producto xy: $y'=-nxy$ .
a) Determinar $x(t)$ si $x(0)=x_o$ e $y(t)$ si $y(0)=y_o$ . b) Encontrar la proporción de población que no enferma (es decir, el límite de $y(t)$ cuando $t\to\infty$) y determinar cómo varía esta cantidad con m y n.

**47.** Un cuerpo a 80º de temperatura se coloca en el instante $t=0$ en un medio cuya temperatura se mantiene a 20º y al cabo de 5 minutos el cuerpo se ha enfriado hasta los 50º.Suponiendo que su enfriamiento sigue la ley de Newton (su temperatura varía proporcionalmente a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio) determinar: a) la temperatura del cuerpo al cabo de 10 minutos; b) el instante en que dicha temperatura será de 30º.

**48.** Un cuerpo se coloca en un medio con temperatura $T(t)=\operatorname{sen} t$ en el instante t. Comprobar que, si sigue la ley de Newton, la temperatura del cuerpo tiende a oscilar periódicamente.

**49.** Una reacción química se produce por la interacción de una molécula de sustancia P con otra de sustancia Q para dar una molécula nueva X : $P+Q \to X$ . Sea $x(t)$ la concentración de X en el tiempo t y sean p y q las concentraciones iniciales respectivas de P y Q. Suponiendo que la reacción obedece a la ley de acción de masas, esto es, que la variación de $x(t)$ es proporcional al producto de las concentraciones de P y Q, hallar la expresión de $x(t)$ si $x(0)=0$.

**50.** Un cuerpo de masa m es lanzado con velocidad inicial $v_o$ a gran altura en la atmósfera terrestre. Suponemos que cae en línea recta y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad terrestre mg (suponemos g constante) y otra fuerza $-kv$ debida a la resistencia del aire. Hallar la velocidad límite del cuerpo cuando t tiende a $\infty$.
Modificar el ejemplo anterior suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a $v^2$.

**51.** Hallar la solución de la ecuación logística $y'=by(M-y)$ que satisface la condición inicial $y(t_o)=M/2$. A partir de la solución anterior encontrar una fórmula que de el valor de M en función de los valores de y en tres instantes sucesivos: $y(t_1)=y_1$, $y(t_1+h)=y_2$, $y(t_1+2h)=y_3$ . Suponiendo que la población española se rige por la ecuación logìstica y sabierdo que dicha población era en 1960, 1970 y 1980 de 30.9, 34.0 y 37.4 millones, respectivamente, determinar la población hacia la que tenderá a estabilizarse el número de españoles.

**52.** Supongamos que la ecuación $y'=y[1-h(t)y]$ , $h(t)>0$ , describe la evolución de una población animal con tope logístico variable. Estudiar el comportamiento de las soluciones para grandes valores de t si i] $h(t)\to\infty$ cuando $t\to\infty$ , ii] $h(t)\to cte$ cuando $t\to\infty$ . Interpretar el resultado.

# problemas 2

**1.** Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de

$xx''' - x'x'' - 2x^2 = \tan t$ $\quad (1-t^2)x'' - 2tx' + x = 0$ $\quad \begin{cases} x' = tx + \ln t \\ y' = x\sqrt{t} - y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = x + \operatorname{sen} y \\ y' = tx^{2/3} - y \end{cases}$

**2.** Resolver los siguientes sistemas: i) utilizando matrices , ii) convirtiéndolos en ecuaciones de segundo orden:

$\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = 5x - y + 1 \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 3x + y + te^{2t} \\ y' = -x + y \\ x(0)=1,\ y(0)=-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -6x - 4y + t\cos t \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x' = x - 2y - t \\ y' = 2x - 3y - t \\ x(0)=1,\ y(0)=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4te^{3t} \\ x(0)=y(0)=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 2x - y \\ x(0)=1,\ y(0)=2 \end{cases}$

**3.** Estudiar existencia, unicidad y prolongabilidad y hallar la solución general de:

$x'' + x = t\operatorname{sen}2t - 1$ $\quad x'' + 2x' + 2x = te^{-t}$ $\quad x'' - x = 2(1+e^t)^{-1}$ $\quad x'' + x = \tan t$

$t^2x'' + 3tx' + x = \ln t$ $\quad t^2x'' - 2x = t^3e^t$ $\quad (t+1)x'' - x' = (t+1)^2$ $\quad (1+t^2)x'' + 2tx' = 2t^{-3}$

**4.** Hallar la solución general sabiendo que la $x_1$ que se indica es solución de la homogénea:

$(1-t)x'' + tx' - x = e^t(1-t)^2$, $x_1 = e^t$ $\quad (t^2-1)x'' - 2x = 0$, $x_1 = t^2 - 1$ $\quad tx'' - (t+1)x' + x = e^t t^2$, $x_1 = e^t$ $\quad t^2x'' - t(t+2)x' + (t+2)x = 0$, $x_1 = t$

**5.** Hallar la solución general y la que satisface x(0)=y(0)=z(0)=1:

$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + 2y \\ z' = x - z \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = -y + z \end{cases}$

**6.** Hallar la solución general:

$x^{iv} + x = \operatorname{sen} t$ $\quad x^{v} + 2x''' + x' = t$ $\quad t^3x''' + t^2x'' - 2tx' + 2x = \ln t$

**7.** Encontrar la matriz fundamental canónica del sistema asociado a las siguientes ecuaciones:

$x'' + 2x' + x = 0$ $\quad x''' + x'' + x' + x = 0$ $\quad 2(t+1)^2 x'' + 3(t+1)x' - x = 0$

**8.** Calcular la solución particular que se indica y precisar si es estable o no:

$\begin{cases} x'' - 2x' + 2x = e^t\cos t \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x''' + 2x'' + 5x' = 5t \\ x(0)=x'(0)=0,\ x''(0)=1/5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^{iv} - 16x = 8t^2 \\ x(0)=-1,\ x'(0)=-2,\ x''(0)=3,\ x'''(0)=-8 \end{cases}$

$\begin{cases} x'' + 2tx' = 2t \\ x(0)=x'(0)=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t^2x'' + 5tx' + 4x = t^{-2} \\ x(1)=x'(1)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x''' + x' - 10x = 36te^{-t} \\ x(0)=0,\ x'(0)=-3,\ x''(0)=2 \end{cases}$

**9.** Estudiar la estabilidad de $x^{(n)} + x = 2\cos t$ según los valores de n (entero positivo). Para n=1994 , precisar si la homogénea y la no homogénea poseen alguna solución periódica.

**10.** Determinar si son estables las soluciones de la ecuación $x^{iv} + x''' + 3x'' + 2x' + 3x = 0$ .

**11.** Hallar una solución de $x''' + x'' + x = \cos t + te^{-t}$ y determinar si dicha solución es estable.

**12.** Sea [e] $x'''+2x''+2x'+n^2x = t$ , $n=0,1,2,...$
Hallar una solución particular de [e] para todo valor de n.
Hallar la solución general para aquellos valores de n para los que [e] sea asintóticamente estable y para aquellos en que [e] sea estable no asintóticamente.

**13.** Sea [e] $x^{iv}+4x'''+cx''+4x'+x = \text{sen}\, t$ . Hallar la solución general para c=6. Determinar un valor de c para el que [e] sea inestable y otro para el que [e] no tenga ninguna solución periódica.

**14.** Sea (E) $x''' + ax'' + bx' + abx = 1$ .
Para a=–1, b=1, hallar la solución de (E) que cumple $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=-1$ .
Discutir la estabilidad de (E) según los valores de las constantes a y b .
Determinar para qué valores de a y b ninguna solución de (E) está acotada en todo $(-\infty,\infty)$.

**15.** Sea $x_a(t)$ la solución de $x''' + 5x'' + 2ax' + ax = -8e^{-2t}$ con $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=9$ .
Determinar si son estables $x_2(t)$ , $x_0(t)$ y $x_{-2}(t)$ . Hallar $x_4(t)$ .

**16.** Hallar la solución de $\begin{array}{l} x' = 2x+y \\ y' = -4x+2z \\ z' = 4-2z \end{array}$ con $x(0)=1$, $y(0)=-2$, $z(0)=2$ y estudiar su estabilidad.

**17.** Determinar para qué valores de a es asintóticamente estable el sistema $\begin{array}{l} x' = y-2z \\ y' = -z \\ z' = ax-5z \end{array}$
¿Es estable para a=0? Calcular z(t) para a=4 si $x(0)=y(0)=0$, $z(0)=1$ .

**18.** Estudiar para qué valores de a es asintóticamente estable la solución de $\begin{array}{l} x' = x+y \\ y' = -5x-y-z \\ z' = ax-z \end{array}$
con $x(0)=1$, $y(0)=-2$ , $z(0)=5$ . Calcular esta solución si a=0 y estudiar su estabilidad.

**19.** Determinar un valor de a , si existe, para el que el sistema $\begin{array}{l} x' = -2x+y \\ y' = x-2y+az \\ z' = ay-z \end{array}$
sea i) asintóticamente estable, ii) estable no asintóticamente, iii) inestable.

**20.** Discutir, en función del parámetro real a , la estabilidad del sistema: $\begin{array}{l} x'=z \\ y'=u+1 \\ z'=-x+au+2 \\ u'=-y-az+t \end{array}$ .
Para a=0 , hallar la solución que satisface $x(0)=y(0)=z(0)=u(0)=0$ .

**21.** Sea $\begin{array}{l} x''+cx'+a^2x+y = 0 \\ y''+cy'+a^2y+x = 0 \end{array}$ . Determinar para qué valores de a y c es asintóticamente estable.
Calcular para a=1 y c=0 la solución con $x(0)=y(0)=1$, $x'(0)=y'(0)=0$ **.** ¿Es estable esta solución?

**22.** Resolver $tx''+2x'=t$ : i) como ecuación de Euler, ii) haciendo $x'=y$ , iii) haciendo $x=\frac{y}{t}$ .
Discutir cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $x(t_o)=0$ , $x'(t_o)=1$ .

**23.** Sea $x_a$ la solución de $tx'' + ax' = 1$ con $x_a(1)= x_a'(1)=0$ . Calcular $x_a$ para todo valor de a .
¿Es $x_a$ función continua de a? Discutir la estabilidad de $x_a$ **.**

**24.** Estudiar la estabilidad de las soluciones de la ecuación $e^{\cos t} x'' - tx' + x = \log\left(1+e^t\right)$ .

**25.** Encontrar una matriz **A** tal que $\begin{pmatrix} e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-2e^{-t} \end{pmatrix}$ sea solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ .

**26.** Sean $x_1$ y $x_2$ soluciones de [e] $x''+a(t)x'+b(t)x = 0$ y llamemos $w(t)$ al determinante wronskiano $|W(t)|$ de $x_1$ y $x_2$ . Hallar $w'(t)$ y utilizando la ecuación concluir que

$$w(t) = w(0)\, e^{-\int_0^t a(s)ds} \quad \text{(fórmula de Abel).}$$

De esta fórmula y de la igualdad $(x_2/x_1)' = w(t)/x_1^2$ deducir la fórmula para la segunda solución $x_2$ de [e] en función de la primera $x_1$ , encontrada en teoría mediante la reducción de orden.

**27.** Resolver $t^2(t+3)x'''-3t(t+2)x''+6(t+1)x'-6x = 0$ sabiendo que $x_1=t^2$ es solución de la ecuación.

**28.** Sea $t^3x'''-3t^2x''+6tx'-6x = f(t)$ . Hallar una matriz fundamental del sistema equivalente y utilizarla pra encontrar una fórmula para la solución general de la ecuación no homogénea.

**29.** Sean las ecuaciones no lineales $2tx'x'' = (x')^2-1$ y $x'' = 4t\sqrt{x'}$ . Estudiar existencia y unicidad, calcular su solución general, comprobar la dependecia continua de los valores iniciales y determinar la estabilidad de la solución particular que satisface $x(1)=x'(1)=1$ .

**30.** Hallar las soluciones pedidas en los problemas 2 , 5 , 8 (las de coeficientes constantes) , 15 , 16 , 17 , 18 y 20 , mediante transformadas de Laplace.

**31.** Resolver $y' = -y + \begin{cases} t\ , & t\le 2 \\ 2\ , & t>2 \end{cases}$ con $y(0)=-1$ . ¿Cuántas derivadas tiene la solución en $t=2$ ?

**32.** Sea $t^2x''-6x = (a-3)t^a$ , con $x(1)=0$ , $x'(1)=1$ .

Hallar su solución para todos los valores de la constante $a$ y determinar su estabilidad.

Para $a=-2$ , comprobar el resultado haciendo $t=e^p$ y utilizando transformadas de Laplace.

**33.** Resolver:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x''+x = u_\pi(t)$ | $x''+4x = \delta(t-\pi)-\delta(t-2\pi)$ | $x''-x = 2\delta(t-1)$ | $x'+x = u_1(t)[e^{-1}-e^{-t}]$ |
| $x(0)=1,\ x'(0)=0$ | $x(0)=0,\ x'(0)=0$ | $x(0)=1,\ x'(0)=0$ | $x(0)=1$ |

**34.** Resolver: $x''+x' = \begin{cases} t+1 & 0\le t<1 \\ 3-t & 1\le t \end{cases}$ , $x(0)=-1,\ x'(0)=0$ $\qquad x''+x = \begin{cases} \operatorname{sen} t & 0\le t<3\pi \\ 0 & 3\pi\le t \end{cases}$ , $x(0)=x'(0)=0$

**35.** Resolver $\begin{array}{l} x''-x' = f_n(t) \\ x(0)=x'(0)=0 \end{array}$ con $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\le t<1 \\ ne^{n-nt} & \text{si } t\ge 1 \end{cases}$ y estudiar lo que sucede cuando $n\to\infty$.

**36.** Resolver $x''+2cx'+x = \delta(t-1)$ , $c\ge 0$, con $x(0)=x'(0)=0$, distinguiendo los casos $c<1$, $c=1$ y $c>1$. Dibujar la solución para $c=0$ y comentarla físicamente.

**37.** Hallar la solución de $x''+2x'+2x = f(t)$ , $x(0)=x'(0)=0$ , i) a partir de la fórmula de variación de las constantes, ii) utilizando transformadas de Laplace. Escribir la solución si en particular $f(t)=\delta(t-\pi)$.

**38.** Hallar la solución de $x'''+6x'+20x = 18\,\delta(t-\pi)$ con $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ y escribir su valor para $t=\pi/2$ y $t=13\pi/12$ . ¿Cuántas derivadas posee dicha solución en $t=\pi$ ?

**39.** Calcular la solución de $x'''-3x''+2x' = \begin{cases} 0 & ,\ t<1 \\ 2e[2t-3] & ,\ t\ge 1 \end{cases}$ que verifica $x(0)=x'(0)=x''(0)=2$ .

**40.** Resolver los sistemas:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x' = 2x-y$ | $x(0)=0$ | $x' = -x+y$ | $x(0)=0$ | $x' = -y+tu_1(t)$ | $x(0)=-e$ |
| $y' = x+\|2-t\|$ | $y(0)=-1$ | $y' = x-y+2\delta(t-1)$ | $y(0)=0$ | $y' = x-2y$ | $y(0)=0$ |

$\begin{array}{l} x' = -y+f(t) \\ y' = x+f(t) \end{array}$ $\quad f(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t<\pi \\ 0 & t\ge\pi \end{cases}$ , $\begin{array}{l} x(0)=0 \\ y(0)=0 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{l} x' = x+f(t) \\ y' = x+y \end{array}$ $\quad f(t)=\begin{cases} 2e^t & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1 \end{cases}$ , $\begin{array}{l} x(0)=-2 \\ y(0)=1 \end{array}$

**41.** a) Consideremos la ecuación integral de Volterra $x(t) + \int_0^t k(t-s)\,x(s)\,ds = f(t)$ , con f y k dadas. Tomando transformadas de Laplace obtener una expresión para L(x) en términos de L(f) y L(k).

b) A partir de lo anterior, resolver en particular $x(t) + \int_0^t (t-s)\,x(s)\,ds = \operatorname{sen}2t$ .

Ver que este problema equivale a: $x'' + x = -4\operatorname{sen}2t$ , $x(0)=0$, $x'(0)=2$ . Resolverlo y comprobar.

**42.** Determinar si existen soluciones $2\pi$-periódicas y si son o no estables:

$x' = x\cos t - \operatorname{sen}^2 t$ $\quad x' = x\cos^2 t - \operatorname{sen} t$ $\quad x'' + x = \cos^3 t$ $\quad x'' - x' + 2x = \operatorname{sen} t$

$x'' + x' = 1 + \cos 2t$ $\quad 4x'' + x = \cos t$ $\quad x'' = \operatorname{sen} t\,|\cos t|$ $\quad x'' + x = \operatorname{sen}(t+1)$

**43.** Encontrar una fórmula para la solución general de $x''' + x' = f(t)$ . Hallar dicha solución general si i] $f(t)=1$, ii] $f(t)=\cos 2t$ . Estudiar en cada caso el número de soluciones $2\pi$-periódicas existentes. En general, si f(t) es cualquier función $2\pi$-periódica, dar criterios para determinar el número de soluciones $2\pi$-periódicas.

**44.** Sea $x'' + x = f_c(t)$ $(c>0)$ donde a) $f_c(t) = \operatorname{sen} ct$ , b) $f_c(t) = u_{\pi/c}(t) - u_{2\pi/c}(t) + u_{3\pi/c}(t) - \dots$

c) $f_c(t) = \delta\left(t - \frac{2\pi}{c}\right) + \delta\left(t - \frac{4\pi}{c}\right) + \dots$

En los tres casos:
i] Hallar la solución general para todo valor de c.
ii] Estudiar la existencia de soluciones $2\pi$-periódicas si $c=1$ y $c=2$ .
iii] Dibujar para $c=1$ y $c=2$ la solución con $x(0)=x'(0)=0$ , comparando con $f_1(t)$ y $f_2(t)$ .
iv] Interpretar físicamente los resultados anteriores.

**45.** Sea $x'' + \frac{1}{4}x' + x = \operatorname{sen} ct$ , $c>0$ .

Responder para esta ecuación las cuestiones i] y ii] del problema anterior.
Determinar la solución periódica $y^*(t,c)$ a la que tienden a acercarse todas las soluciones y escribirla para cada c en la forma $y^* = A\operatorname{sen}(ct+B)$ . Estudiar como varía A en función de c .
¿Para qué valor de c se obtiene la amplitud máxima? Interpretarlo físicamente.

**46.** Sean las ecuaciones $x''+x=|\operatorname{sen} t|$ ; $x''+4x=|\operatorname{sen} t|$ .
Estudiar si tienen soluciones periódicas. Hallar y dibujar la solución que satisface $x(0)=x'(0)=0$ .

# problemas 3

**1.** Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no y clasificarlos:

$t^2x'' - 2x = 0$ $\quad$ $(2t-t^2)\,x'' + (1-3t)\,x' - x = 0$ $\quad$ $tx'' + 2x' + \ln t\, x = 0$

$t^2x'' + 2x' + 4x = 0$ $\quad$ $tx'' + e^t x' + 3\cos t\, x = 0$ $\quad$ $t\,\text{sen}\,t\, x'' + 3x' + tx = 0$

**2.** Escribir una ecuación lineal homogénea de segundo orden tal que: i) tenga un punto singular regular en $t=0$, ii) las raíces de su polinomio indicial en ese punto sean 1/3 y –1/3, iii) tenga en $t=1$ un punto singular que no sea regular.

**3.** Resolver por medio de series en torno a $t=0$:

$2t^2x'' + (t^2-t)\,x' + x = 0$ $\quad$ $x'' - e^t x = 0$ $\quad$ $t^2x'' - 5tx' + 3(t+3)x = 0$ $\quad$ $2tx'' + x' - x = 0$

$(t^2-t)\,x'' - tx' + x = 0$ $\quad$ $x'' + t^2 x = 0$ $\quad$ $(1+t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$ $\quad$ $(t^2-1)x'' - 2x = 0$

$2t^2x'' - tx' + (t-5)x = 0$ $\quad$ $x'' + tx = 0$ $\quad$ $t^2x'' - t(t+2)x' + (t+2)x = 0$ $\quad$ $tx'' + (1-t)\,x' + x = 0$

$(t^2-1)\,x'' + 3tx' + tx = 0$ $\quad$ $x'' + tx' + x = 0$ $\quad$ $3t^2(1+t)x'' + t(5+2t)x' - x = 0$ $\quad$ $(1-\cos 3t)\,x'' - 2x = 0$

**4.** Dar un valor de b para el que la solución general por series de $tx'' + b\,e^{\text{sen}\,t}x' = 0$ en torno a t=0 no contenga logaritmos y otro valor para el que sí.

**5.** Determinar si contiene o no logaritmos la solución general por series en torno a $t=0$:

$t\,x'' + 2e^t x' = 0$ $\quad$ $t\,x'' + 2\cos t\; x' = 0$

**6.** Sabiendo que $x=t$ es solución de la ecuación $tx' - tx' + x = 0$, determinar si es posible escribir el desarrollo en torno a $t=0$ de otra solución linealmente independiente sin que aparezcan logaritmos. Estudiar si es estable la solución con $x(1)=x'(1)=0$.

**7.** Probar que toda solución del sistema $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{3}{t^2}x + \dfrac{5}{2t}\cos t\, y \end{cases}$ tiende a **0** cuando $t\to 0$.

**8.** Sea $2\sqrt{t}\,x'' - x' = 0$. Precisar si $t=0$ es un punto singular regular de la ecuación.
Calcular el desarrollo en serie en $t=1$, hasta tercer orden, de la solución con $x(1)=x'(1)=1$.

**9.** Demostrar que $2\ln t\, x'' + x' + 2x = 0$ tiene un punto singular regular en $t=1$. Calcular los tres primeros términos del desarrollo en serie correspondiente a la raiz mayor del polinomio indicial. Indicar donde converge, al menos, la serie obtenida.

**10.** Sean $(1+t^2)\,x'' - 2x = 1$ $\quad$ $t^2x'' - 2tx' + (2+t^2)\,x = t^3\cos t$ $\quad$ $t^2x'' - 2tx' + (2-t^2)\,x = 2t^3\text{ch}\, t$

Hallar la solución general de la homogénea en forma de series en tono a $t=0$.
Hallar la solución general en términos de funciones elementales.

**11.** Hallar la solución general de $(t^3+1)x'' - 3t^2x' + 3tx = (t^3+1)^2$.

**12.** Sea $(1-t^2)\,x'' - tx' + x = 1-t^2$. Resolver la homogénea por medio de series y hallar la solución general de la no homogénea en términos de funciones elementales. Comprobar el resultado haciendo el cambio $t = \text{sen}\, s$.

**13.** Sea $t^2x'' - 3tx' + 3x = t^3$. Hallar la solución general de la no homogénea. Hallar la solución general de la homogénea utilizando series de potencias centradas en i] t=0, ii] t=1.

**14.** Calcular la solución general por medio de series de $x'' - 2tx' = 0$. Resolverla por otros métodos y comparar. Estudiar la estabilidad de la solución $x=0$.

**15.** Escribir la solución de $x''-\ln|t|x'=0$ con $x(1)=0, x'(1)=1$ en términos de funciones elementales y ver si es estable. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo de dicha solución en torno a $t=1$. Determinar qué puntos de la ecuación son regulares o singulares regulares.

**16.** Hallar el desarrollo en torno a t=0 de la solución de $(1-t)(1-2t)x''+2tx'-2x=0$ con $x(0)=x'(0)=1$. Hallar las raíces del polinomio indicial para cada punto singular regular. Estudiar cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

**17.** Discutir para qué valores de a es $t=0$ un punto singular regular de $t^a x''+4tx'+2x=0$.
Si a=2, hallar el desarrollo en serie de la solución con $x(1)=1$, $x'(1)=-1$ en $t=1$ hasta tercer orden.
Hallar la solución de la ecuación $t^2 x''+4tx'+2x=e^t$, con $x(1)=x'(1)=0$. ¿Es estable?

**18.** Hallar la solución general de la ecuación $\operatorname{sen} t\, x''-3\cos t\, x'=2\operatorname{sen} t\cos t$.
Determinar qué puntos t son regulares o singulares regulares, y hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en torno a t=0 de una solución de la homogénea que no sea constante.

**19.** Sea $tx''-x'-4t^3x=0$. Comprobar que $x=e^{t^2}$ es solución. Hallar el desarrollo en serie de potencias de una solución que se anule en $t=0$.

**20.** Hallar el desarrollo hasta orden 5 de una solución de $t^2x''-3t^4x'-(3t^3+2)x=0$ que esté acotada en t=0 [puede ser útil saber que $x=1/t$ es solución].

**21.** Sea $(t-1)x''+2tx'+(t+1)x=0$. a) Comprobar que tiene una solución de la forma $e^{at}$ y escribir la solución con $x(0)=1$, $x'(0)=0$ en términos de funciones elementales. b) Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en torno a 0 de esta solución utilizando directamente el método de series. c) ¿Es estable la solución que satisface $x(\pi)=x'(\pi)=1$ ?

**22.** Hallar una solución no trivial de $tx''-(3t+1)x'+9x=0$.
¿Es cierto que todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando t tiende a 0?

**23.** Sean las ecuaciones $t^2x''+x'=0$ y $t^3x''+tx'-x=0$. Hallar la solución general por métodos elementales y estudiar la estabilidad. ¿Se podrían resolver por series en torno a t=0 ? Calcular hasta orden 3 el desarrollo en serie de potencias en torno a t=1 de la solución con $x(1)=x'(1)=1$.

**24.** Sea $\cos t\, x''+(2-\operatorname{sen} t)x'=0$. Hallar por diversos métodos el desarrollo hasta orden 4 en t=0 de la solución con $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.

**25.** Sea $t^2x''+(1-e^t)x'+tx=0$. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en t=0.

**26.** Sea $t^2x''-4tx'+[t^2+6]x=f(t)$.
Si $f(t)=0$, hallar una solución por el método de Frobenius e identificar la serie obtenida.
Para $f(t)=t^4$, hallar la solución general en términos de funciones elementales.
Para $f(t)=e^{-t}$, determinar la estabilidad de la solución que verifica $x(1)=\pi$, $x'(1)=10$.

**27.** Sea [E] $t^3x''+[At^2+B]x'+[Ct^2+D]x=0$. Determinar para qué valores de A, B, C y D son tanto t=0 como $t=\infty$ puntos singulares regulares de [E]. Para estos valores, precisar cuándo existen soluciones de [E] que tienden hacia 0 cuando t tiende a $\infty$.

**28.** Sea $t[t-1]x''+2[2t-1]x'+2x=0$. Probar que existe una solución analítica en torno a t=0 y calcularla. Estudiar si todas las soluciones tienden hacia 0 cuando t tiende a $\infty$.

**29.** Sea $t^4x''+2t^3x'-x=1$. Determinar si $t=0$ y $t=\infty$ son puntos regulares o singulares regulares de la homogénea. Hallar la solución que satisface $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

**30.** Sea $[t^4+t^2]x''+[5t^3+t]x'+[3t^2-1]x=0$.
Probar que posee soluciones no triviales que tienden a 0 cuando i) $t\to 0$, ii) $t\to\infty$.
¿Existen soluciones que tiendan a 0 tanto cuando $t\to 0$ como cuando $t\to\infty$ ?

**31.** Estudiar las soluciones en t=0 de las ecuaciones

$$tx''+(1-t)x'+px=0 \ \text{(Laguerre)} \qquad (1-t^2)x''-tx'+p^2x=0 \ \text{(Tchebycheff)}$$

y determinar para qué valores de $p$ las soluciones son polinomios.

**32.** Resolver la ecuación de Hermite $x''-2tx'+2px=0$ por medio de series. Comprobar que si p es un número natural existe solución polinómica. Se llaman polinomios de Hermite $H_n(t)$ a aquellas soluciones polinómicas tales que los términos que contienen la potencia más alta de t son de la forma $2^nt^n$ . Escribir los cuatro primeros $H_n$ y comprobar que vienen dados por la fórmula:

$$H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$$

**33.** Hallar una solución linealmente independiente de $P_1$ para la ecuación de Legendre con p=1, sin recurrir a series. Desarrollar en serie de Taylor esta solución y comparar con la serie obtenida a partir de la fórmula general de las soluciones.

**34.** Cualquier polinomio $Q_n(t)$ de grado $n$ se puede escribir como combinación lineal de los $n+1$ primeros polinomios de Legendre: $Q_n=c_0P_0+...+c_nP_n$ .
Probar que $c_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}Q_n(t)\,P_k(t)\,dt$ . Escribir $Q_4(t)=t^4$ como combinación lineal de $P_0,...,P_4$ .

**35.** Deducir de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre:

$$nP_n=tP_n'-P_{n-1}' \qquad (n+1)P_{n+1}-(2n+1)\,t\,P_n+nP_{n-1}=0$$

**36.** Hallar la solución general de la ecuación de Legendre con p=1 en forma de series de potencias de 1/t resolviendo la ecuación del infinito. Comparar con la solución del problema 33.

**37.** Sea $t(t-1)x''+x'-px=0$ . Determinar para qué valores de $p$ tiene solución polinómica. Probar que todas sus soluciones está acotadas en $t=0$ . Probar que para $p=2$ existen soluciones que tienden a 0 cuando t tiende a $\infty$: i] calculando la solución general en términos de funciones elementales, ii] haciendo $s=1/t$ y analizando la ecuación resultante en s=0 .

**38.** La ecuación hipergeométrica de Gauss es [G] $t(1-t)x''+[c-(a+b+1)t]x'-abx=0$ .

a) Hallar las raíces del polinomio indicial en cada punto singular regular de [G].

b) Probar que el punto del infinito es singular regular y hallar las raíces de su polinomio indicial.

c) Probar que cada uno de los cambios: i) $x=t^{1-c}z$ , ii) $s=1-t$ , iii) $x=t^aw$ , convierte [G] en otra ecuación hipergeométrica.

d) Suponiendo que $1-c$ , $c-a-b$ y $a-b$ no son enteros, hallar las soluciones de [G] en forma de serie en torno a $t=0$ , $t=1$ y $t=\infty$ .

e) Probar que toda ecuación de la forma $(s-A)(s-B)x''+(C+Ds)x'+Ex=0$ se puede convertir en la ecuación [G] mediante un cambio de variable independiente.

**39.** Hallar una solución de $tx''+2x'+a^2tx=0$ que esté acotada en $t=0$ . Hacer $x=\frac{y}{t}$ y comprobar.

**40.** Comprobar que la ecuación de Bessel tiene un punto singular no regular en el infinito.

**41.** Desarrollar hasta orden 3 en $t=1$ la solución de $t^2x''+tx'+(t^2-\frac{1}{4})x=0$ con $x(1)=0, x'(1)=1$ .

**42.** Calcular la solución de $t^2x''+tx'+(t^2-\frac{1}{4})x=t^{3/2}$ con $x(1)=1, x'(1)=-1/2$ .

**43.** Comprobar: $J_{-n}=(-1)^nJ_n$ ; $(t^pJ_p)'=t^pJ_{p-1}$ ; $(t^{-p}J_p)'=-t^{-p}J_{p+1}$ ; $J_{p-1}+J_{p+1}=\frac{2p}{t}J_p$ ;

$J_p'=\frac{1}{2}(J_{p-1}-J_{p+1})$ ; $J_{1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\text{sen}\,t$ ; $J_{-1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$ . Hallar $J_{5/2}$ .

**44.** Comprobar que el cambio $x = t^{-p}y$ transforma $tx'' + (2p+1)x' + tx = 0$ en $t^2y'' + ty' + (t^2-p^2)y = 0$.
Utilizar dicho cambio para: i] Resolver la ecuación de Bessel con $p=1/2$ sin utilizar series
ii] Resolver $tx'' + 2x' + tx = 0$ .

**45.** Obtener la función de Bessel $J_o$ siguiendo los pasos indicados: a) Convertir la ecuación de Bessel de orden 0 mediante transformadas de Laplace en una de primer orden para $X(s)$ .
b) Resolver esta segunda ecuación y desarrollar el resultado en serie de potencias de $s$ .
c) Calcular, término a término, la transformada inversa de $X(s)$ (suponiendo que se puede).

**46.** Sea $t^2x'' + (3t-1)x' + x = 0$ . Comprobar que t=0 es punto singular. ¿Es regular?
Hallar una solución de la forma $t^r \Sigma a_n t^n$ y discutir su validez.

**47.** Adaptar la teoría de este capítulo a la resolución por series de las más sencillas ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes analíticos (o "poco" no analíticos). Identificar algunas ecuaciónes de los problemas del primer capítulo resolubles por medio de series, hallar por este camino su solución y comparar resultados.

# problemas 4

**1.** Dibujar el mapa de fases:

$x''=-4x'-4x$ $\quad x''=x-x^3$ $\quad x''=x^{-3}-x^{-2}$ $\quad x''=x\left[(x')^2-1\right]$ $\quad x''=(1-x^2)x'-x$

$\begin{cases} x'=xy \\ y'=x+y^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=y\,e^x \\ y'=e^x-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=y-2xy \\ y'=y^2-2x \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=2y+2xy \\ y'=2x-x^2-y^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=1-x+3y \\ y'=x+y-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x'=y(x+1) \\ y'=x(1+y^3) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=y-y^2 \\ y'=x-x^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=x^3y \\ y'=-y+x^2y^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=2x \\ y'=y(1-y)+x^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'=x^2-2xy \\ y'=y^2-2xy \end{cases}$

**2.** Sea $\begin{cases} x'=x-x^2y \\ y'=y-x^3 \end{cases}$. Hallar sus órbitas, localizar todas las órbitas rectas y dibujar el mapa de fases.

**3.** Sea $\begin{cases} x'=3y^2-3 \\ y'=6x+4x^3 \end{cases}$. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.
Determinar para qué valores de $a$ es periódica la solución con $x(0)=0$, $y(0)=a$ .

**4.** Sea el sistema: $\begin{cases} x'=\operatorname{sen} y \\ y'=\operatorname{sen} x \end{cases}$. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.
Determinar qué soluciones del sistema están definidas para todo t.

**5.** Sea $x''=x^3-7x^2+10x$ . Dibujar su mapa de fases y determinar para qué valores de $a$ es periódica la solución con $x(0)=a$, $x'(0)=0$ .

**6.** Sea la ecuación $x''=(x-x^2)\,e^{-2x}$ . Dibujar su mapa de fases.
Estudiar la estabilidad de las soluciones que satisfacen i) $x(0)=x'(0)=0$ , ii) $x(0)=1$, $x'(0)=e^{-1}$ .

**7.** Sea $\begin{cases} x'=2xy \\ y'=1-x^2-y^2 \end{cases}$. Dibujar su mapa de fases y estudiar la prolongabilidad de las soluciones.

**8.** Sea $x''=g(x)$ y supongamos que en $x_o$ la gráfica de la función potencial tiene un punto de inflexión con tangente horizontal. Describir el mapa de fases cerca de $(x_o,0)$.

**9.** Calcular el valor de a para el que las órbitas de $x''=x^2-4x+a$ cambian radicalmente, dibujando el mapa de fases en cada caso.

**10.** Sea $\begin{cases} x'=2x-4y+ax^3+by^2 \\ y'=2x-2y \end{cases}$.
Elegir a y b (no ambos cero) para los que haya un centro en el origen y dibujar el mapa de fases. Identificar en él órbitas que correspondan a soluciones i] inestables, ii] definidas para todo t .

**11.** Sea $V(x,y)=2x^2-2xy+5y^2+4x+4y+4$ .
Dibujar las curvas de nivel de V y el mapa de fases del sistema $\begin{cases} x'=-V_x \\ y'=-V_y \end{cases}$.

**12.** Sea [e] $2x''-(x')^2+x(x-2)=0$ y sea [o] la ecuación diferencial de sus órbitas. Resolver [o] . Dibujar el mapa de fases de [e]. Estudiar existencia y unicidad para [e] y [o] . Explicar por qué no es contradictorio que existan dos soluciones de [o] pasando por el origen y que exista una única de [e] con $x(0)=x'(0)=0$ . Estudiar la estabilidad de las soluciones de [e] que satisfacen:

i] $x(0)=x'(0)=0$ $\quad$ ii] $x(7)=2$, $x'(7)=0$ $\quad$ iii] $x(-1)=1$, $x'(-1)=-1$

**13.** Dibujar el mapa de fases del sistema $\begin{cases} x'=2xy \\ y'=y^2-x^2-4 \end{cases}$
Identificar la órbita asociada a la solución con $x(0)=2$ , $y(0)=0$ y describir la $x(t)$ de dicha solución.

**14.** Dibujar las órbitas del sistema $\begin{array}{l} x'=2xy \\ y'=1-x^2+y^2 \end{array}$ y las curvas ortogonales a dichas órbitas. Estudiar qué soluciones están definidas para todo t .

**15.** Hallar la ecuación de las óbitas y dibujar el mapa de fases de los sistemas

$$\begin{array}{l} x'=x+2xy \\ y'=y^2-1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x'=x(x-2) \\ y'=(x-2y)(x-1) \end{array}$$

Estudiar si están definidas para todo t las soluciones cuyas proyecciones sean semirrectas.

**16.** Dibujar el mapa de fases tras escribir en coordenadas polares:

$$\begin{array}{l} x'=y+x^3+xy^2 \\ y'=-x+x^2y+y^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x'=y-x(x^2+y^2-1) \\ y'=-x-y(x^2+y^2-1) \end{array} \qquad \begin{array}{l} x'=(x-y)(1-x^2+y^2) \\ y'=(x+y)(1-x^2+y^2) \end{array}$$

**17.** Sea $\begin{array}{l} x'=y+x^2y \\ y'=-x+xy^2 \end{array}$. Hallar sus órbitas y dibujar su mapa de fases. Escribirlo en polares.

Estudiar para qué valores de b está definida para todo t la solución con $x(\pi)=0$, $y(\pi)=b$ .

**18.** Sea el sistema [S] $\begin{array}{l} x'=x^2-xy-2y \\ y'=xy-y^2+2x \end{array}$ .

Escribir [S] en coordenadas polares, hallar la expresión de las órbitas en polares y deducir la expresión en cartesianas. Hallar y clasificar los puntos críticos de [S] , probar que hay una órbita de [S] que es una recta y dibujar el mapa de fases de [S] .

**19.** Dibujar el mapa de fases del siguiente sistema debido a Poincaré (el uso de polares es útil):

$$\begin{array}{l} x'=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8) \\ y'=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8) \end{array}$$

**20.** Clasificar los puntos críticos de los sistemas: $\begin{array}{l} x'=x^3-y \\ y'=x+y^3 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{l} x'=x^2-y \\ y'=xe^y \end{array}$

**21.** Sea $x''=-x\left[x^2+(x')^2\right]$ . Hallar la órbita de su mapa de fases que pasa por el punto (–1,0) . ¿Es periódica la solución de la ecuación que satisface $x(\pi)=-1$, $x'(\pi)=0$ ?

**22.** Estudiar los mapas de fases de los sistemas lineales autónomos que tienen algún autovalor 0.

**23.** Sea [S] $\begin{array}{l} x'=x^2 \\ y'=x-y+x^2 \end{array}$ Resolver la ecuación diferencial [o] de sus órbitas.

Dibujar las isoclinas y curvas integralesde [o] y el mapa de fases de [S] . Determinar si es estable el origen en el sistema [S] y si lo es la solución y(x) de [o] que satisface $y(1)=1$ .

**24.** Sean los sistemas $[S_a]$ $\begin{array}{l} x'=ax \\ y'=2ay-y^2 \end{array}$ .

i] Hallar la ecuación de sus órbitas y determinar la curva del plano xy en la que dichas órbitas poseen puntos de inflexión.

ii] Dibujar los mapas de fases de $[S_a]$ para $a>0$ , $a=0$ y $a<0$ .

iii] Hallar la solución de $[S_a]$ con $x(0)=y(0)=2a$ . ¿Es estable? ¿Lo es la órbita y(x) que define, vista como solución de la ecuación diferencial de las órbitas?

**25.** Probar que son periódicas las soluciones de $\begin{array}{l} x'=y^m \\ y'=-x^n \end{array}$ , m,n impares.

**26.** Estudiar, según los valores de a, la estabilidad de la solución x=0 de las ecuaciones:

$$x''=a\,\mathrm{sen}x\cos x \qquad x''+ax'+e^x=1 \qquad x''+x=a\,\mathrm{sen}(x') \qquad x''+ax^n=0,\ n\in\mathbb{N}$$

**27.** Sea $\begin{array}{l} x' = ay+bx^3 \\ y' = ax+by^3 \end{array}$. i) Discutir según los valores de a y b la estabilidad de la solución x=y=0 .
ii) Discutir si existen soluciones no triviales de [S] que tiendan a 0 cuando $t\to\infty$.

**28.** Sea la ecuación $x'' = ax-2x'+(x')^2$ .
Para a=0 : Resolver la ecuación diferencial de las órbitas y dibujar el mapa de fases.
Hallar la solución de la ecuación que satisface x(0)=1 , x'(0)=2 .
Para todo a : discutir la estabilidad de la solución trivial x=0 .

**29.** Calsificar según los valores de a todos los puntos críticos de [E] $x'' = \mathrm{sen}(ax+x')$ , $a\geq 0$ .
Para a=2, dibujar el mapa de fases.
Para a=0, hallar la solución de [E] que satisface i) $x(0)=\pi$, x'(0)=0 , ii) x(0)=0, $x'(0)=\pi$ .

**30.** Sea el sistema [S] $\begin{array}{l} x' = a(y-x)+1 \\ y' = a(y-x)+x \end{array}$ . Hallar la expresión de sus órbitas.
Para diferentes valores de a dibujar el mapa de fases y estudiar la estabilidad de las soluciones.
Para a=–1 , calcular la solución de [S] que satisface x(0)=y(0)=0 .

**31.** Hallar la solución general y la particular que satisface el dato inicial x(0)=x'(0)=1 :

$$3x'x'' = 1 \qquad\qquad x^2x'' = x'(xx'-2)$$

**32.** Comparar la órbitas y las soluciones de los sistemas $\begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \end{array}$ y $\begin{array}{l} x' = y(x^2+y^2) \\ y' = -x(x^2+y^2) \end{array}$ .

**33.** Sea [e] la ecuación a) $x'' = 4x-3x'$ , b) $x'' = x\left[1-(x')^2\right]$ , c) $x'' = 2x^3$
Llamemos [o] a la ecuación diferencial de sus órbitas. Para los tres casos:
i] Resolver [o] y dibujar el mapa de fases de [e].
ii] Estudiar existencia y unicidad para [e] y [o].
iii] Si en t=0 es x=x'=1 , ¿en que instante es $x=10^{10}$ ?
iv] Estudiar la estabilidad de la solución v(x) de [o] con v(1)=1.
v] Estudiar la prolongabilidad de la solución x(t) de [e] que satisface x(0)=0, x'(0)=2 .

**34.** Sea el sistema $\begin{array}{l} x'=x^a \\ y'=y^a \end{array}$ . Dibujar su mapa de fases basándose en la ecuación de sus órbitas.
Estudiar para qué valores de a la solución del sistema con x(0)=y(0)=1 explota en tiempo finito.

**35.** Sea $\begin{array}{l} x'=y-xy \\ y'=-x+x^2 \end{array}$ . Dibujar su mapa de fases. Estudiar la estabilidad de la solución x=1 , y=0 .
Precisar las órbitas que corresponden a soluciones periódicas del sistema y calcular su periodo.

**36.** Sea la ecuación [E] $x'' + x + ax^2 + bxx' = 0$ . a) Estudiar para que valores de a y b se puede garantizar que [E] posee un centro en el origen. b) Si a = b = –1 , dibujar el mapa de fases. ¿Qué sugiere este dibujo sobre la estabilidad de la solución x=0 ?

**37.** Estudiar las simetrías de sus órbitas y dibujar el mapa de fases de la ecuación $x'' = x - x^3 - xx'$ .

**38.** Sea [S] $\left\{ \begin{array}{l} x' = x^2+3y^2 \\ y' = -2xy \end{array} \right.$ .
a) Resolver la ecuación diferencial de sus órbitas de dos formas diferentes.
b) Dibujar isoclinas y curvas de puntos de inflexión de esta ecuación.
c) Dibujar el mapa de fases de [S] .
d) Precisar si está definida para todo t la solución de [S] con x(2)=1, y(2)=0 .
e) Determinar si es estable la solución de [S] con x(2)=y(2)=0 .

**39.** Sea $x'' = ax + (x')^2$ . a) Resolver la ecuación diferencial de sus órbitas.
b) Discutir, según los valores de la constante a , la estabilidad de la solución x=0 .
c) Para a=–1 , dibujar el mapa de fases y hallar la solución que cumple x(2)=1/2 , x'(2)=1 .

**40.** Estudiar para qué valores de A , B y C las siguientes funciones son definidas positivas en un entorno del origen:

$U(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2$ $\quad U(x,y) = Ax^4+Bx^2y^2+Cy^4$ $\quad U(x,y) = Ax^3+By^3$ $\quad U(x,y) = Ax^2+Cy^2+Bx^3$

**41.** Estudiar la estabilidad del origen con funciones de Lyapunov:

$x''+(x')^3+2x=0$ $\qquad \begin{aligned} x' &= -x^3+xy^2 \\ y' &= -4x^2y-y^3 \end{aligned}$ $\qquad \begin{aligned} x' &= 2y^3 \\ y' &= -xy^2-y^3 \end{aligned}$ $\qquad \begin{aligned} x' &= y^3+x^3-x^4 \\ y' &= -x+y \end{aligned}$

**42.** Sea $x''+x'+ax^2-2x=0$ . Clasificar los puntos críticos y dibujar el mapa de fases según los valores de a . Interpretar físicamente las órbitas.

**43.** Clasificar los puntos críticos de $x''=1-x^2-kx'$, $k\geq 0$, en función de los valores de k. Dibujar aproximadamente el mapa de fases para k=0 , k=1 y k=3 . Interpretar físicamente.

**44.** Clasificar los puntos críticos de la ecuación del péndulo rotatorio $x''=\operatorname{sen}x\,(-1+w^2\cos x)$ , según los valores de w. Dibujar el mapa de fases para w=0 (péndulo simple) y para $w=\sqrt{2}$ .

**45.** Un péndulo se desplaza un ángulo $x[(0,\pi)$ de su posición de equilibrio estable y se abandona. Hallar el periodo de la oscilación en función de una integral (se supone g/l =1 ).

**46.** Considérese el péndulo rotatorio del problema 43 y supongamos ahora que hay rozamiento:

$$x''=\operatorname{sen}x\,(-1+w^2\cos x)-ax' \;,\; a>0$$

Estudiar la estabilidad de la solución x=0 (para w=1 hacer uso de una función de Lyapunov). Dibujar e interpretar el mapa de fases con a=1 y w=0 (péndulo simple con rozamiento).

**47.** Una partícula se mueve por el eje x según $x''=-x\,(x^2+9)^{-2}$ . Dibujar e interpretar el mapa de fases. Si la partícula pasa por el origen con velocidad v=1/3, ¿qué velocidad tiene cuando pasa por x=4 ? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a x=4 ?
¿Existe alguna órbita v(x) que sea solución estable de la ecuación diferencial de las órbitas? ¿Es estable la órbita que satisface v(0)=1/3? Imponer una pareja de datos iniciales a la ecuación inicial de segundo orden de modo que la solución correspondiente sea inestable.

**48.** El sistema $\begin{aligned} x' &= x(3-x-ay) \\ y' &= y(3-y-ax) \end{aligned}$ , a>0 , puede describir la evolución de las poblaciones de dos especies animales en competición ( x e y son esas poblaciones expresadas en unidades adecuadas) . Clasificar los puntos críticos elementales para todo a>0 . Dibujar los mapas de fases para a=1/2 , a=1 y a=2 , e interpretarlos comparando los resultados.

**49.** Supongamos que el sistema $\begin{aligned} x' &= x(2-x-y) \\ y' &= y(3-y-2x) \end{aligned}$ describe la evolución de una población de truchas (x) y salmones (y) en un mismo estanque y que un pescador pesca sólo truchas con una velocidad proporcional al número de ellas existente. Indicar, dibujando varios mapas de fases, como influye en la evolución de ambas poblaciones su mayor o menor habilidad pescadora.

**50.** a) El sistema $\begin{aligned} x' &= x(3-y) \\ y' &= y(-1+x) \end{aligned}$ puede describir la evolución de dos poblaciones animales en relación preadadora (x moscas, y murciélagos, por ejemplo). Dibujar e interpretar el mapa de fases. Comprobar que (según este modelo) es contraproducente emplear insecticida si éste mata también una proporción fija de los murciélagos existentes.

b) Si suponemos la existencia de un tope de población para las moscas se tiene $\begin{aligned} x' &= x(3-ax-y) \\ y' &= y(-1+x) \end{aligned}$ .
Dibujar e interpretar este mapa de fases para a=1 , a=2 y a=4 .

**51.** Construir una teoría para el dibujo de órbitas de ecuaciones autónomas de primer orden $y'=f(y)$ en la "recta de fases". Estudiar el caso particular en que f es periódica, representando entonces el "mapa de fases" sobre una circunferencia.