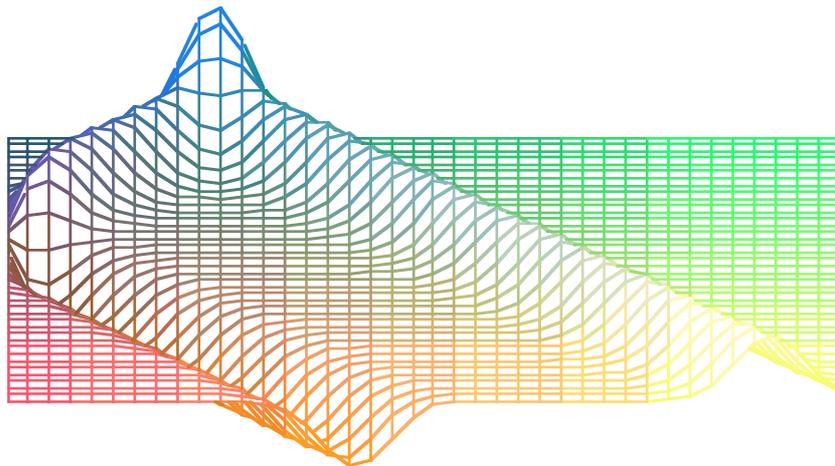


apuntes de ecuaciones en derivadas parciales



Pepe Aranda
Métodos Matemáticos
Físicas Complutense
pparanda@fis.ucm.es

Índice

Introducción	1
5. Características. Problemas clásicos en EDPs	3
5.1 EDPs lineales de primer orden	4
5.2 EDPs lineales de segundo orden. Clasificación	7
5.3 Los problemas clásicos. Unicidad	11
6. La ecuación de ondas	17
6.1 Ecuación de la cuerda vibrante	18
6.2 Ondas en tres y dos dimensiones	25
7. Problemas de contorno para EDOs	29
7.1 Algunos ejemplos	30
7.2 Problemas de Sturm-Liouville homogéneos	32
7.3 Series de Fourier	36
7.4 Problemas no homogéneos. Función de Green	40
8. Separación de variables	44
8.1 Problemas homogéneos	45
8.2 Problemas no homogéneos	53
8.3 Algunos problemas en tres variables	57
9. Otros métodos en EDPs	61
9.1 Funciones de Green	62
9.2 Transformadas de Fourier	66
Bibliografía	70
Problemas 5	2p1
Problemas 6	2p3
Problemas 7	2p5
Problemas 8	2p8
Problemas 9	2p11

Introducción

Esta segunda parte de los apuntes está dedicada al estudio de las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs), aunque también se estudiarán los **problemas de contorno** para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Recordamos que una ecuación en derivadas parciales es una ecuación en la que aparece una función incógnita de varias variables y algunas de sus derivadas parciales. Todas las EDPs que veremos serán **lineales**. Más en concreto, salvo un breve estudio de las lineales de **primer orden**, trataremos de EDPs **lineales de segundo orden**, del tipo:

$$[1] \quad Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c u = d$$

donde u , a_{ij} , b_j , c y d son funciones de (x_1, \dots, x_n) . Una **solución** de [1] será una función $u(x_1, \dots, x_n)$ de clase C^2 en un dominio D de \mathbf{R}^n que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Entre las EDPs lineales de segundo orden se encuentran muchas ecuaciones de la física. Entre ellas las tres clásicas:

ecuación de ondas	$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$
ecuación del calor	$u_t - k \Delta u = 0$
y ecuación de Laplace	$\Delta u = 0$

que son ejemplos de los tres grandes tipos en que se clasifican (**hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**, respectivamente). La teoría de las EDPs viene a ser la generalización del estudio de estos tres problemas. Sus propiedades son tan diferentes que no existen teorías generales como la de las EDOs lineales.

En el capítulo 5 veremos que, normalmente, no es posible hallar la solución general de una EDP. Eso será tal vez posible para las de primer orden y para unas pocas de segundo (en particular, para la de ondas). Además se verá qué condiciones adicionales (iniciales o de contorno) hay que imponer a las EDPs clásicas para que tengan solución única. En el 6 estudiaremos la ecuación de ondas, primero para una $u(x,t)$ y luego, con menos detalles, para dos y tres dimensiones espaciales.

El capítulo 8 trata el método de **separación de variables** para resolver (en recintos sencillos) las ecuaciones clásicas (homogéneas y no homogéneas). Este método exigirá resolver problemas de contorno para EDOs y expresará las soluciones en términos de series de Fourier. La teoría de los problemas de contorno (muy diferente de la de los de valores iniciales) y un repaso de dichas series se dará previamente en el capítulo 7.

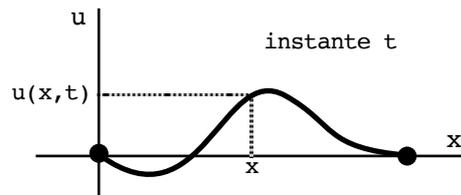
El último capítulo, el 9, estudia dos temas independientes: las **funciones de Green** para la ecuación de Laplace y la utilización de la **transformada de Fourier** para resolver algunas EDPs (en particular, la del calor en la recta infinita).

Para acabar esta introducción, describamos el significado físico de las ecuaciones clásicas. Interpretémoslas únicamente en sus versiones más sencillas (que son las más tratadas en los apuntes): cuando la u es función de dos variables.

Comencemos con la ecuación de **ondas unidimensional** o ecuación de la **cuerda vibrante**. Consideremos las oscilaciones de una cuerda totalmente elástica, tensa y fija en sus extremos. Se supone que sus oscilaciones son siempre transversales y de pequeña amplitud. En esas condiciones se puede ver que si $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa x en el instante t , la función $u(x,t)$ satisface la EDP:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

donde $c^2 = T_0/\rho$, con T_0 fuerza de tensión en los extremos, ρ masa por unidad de longitud (densidad lineal) y $F(x,t)$ fuerza externa por unidad de masa que actúa en dirección vertical sobre el punto x en el instante t . No olvidemos que el modelo matemático de esta cuerda ideal es sólo una simplificación de la realidad; lo mismo ocurre con las siguientes.



La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que podemos suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor**:

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

donde $u(x,t)$ representa la temperatura del punto de abscisa x en el instante t y $k > 0$ es una constante proporcional a la conductibilidad e inversamente proporcional a la densidad y al calor específico. Si existiesen fuentes de calor en el interior de la varilla deberíamos escribir una $F(x,t)$ en el segundo miembro de la ecuación.

La **ecuación de Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

puede describir, entre otras situaciones físicas, la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional. La existencia de fuentes de calor en el interior de la superficie aportaría una F en el segundo miembro (ecuación de Poisson). Frente a las dos ecuaciones anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, ésta describe situaciones estacionarias.

5. Características. Problemas clásicos en EDPs

En las EDOs planteábamos problemas de valores iniciales, que casi siempre tenían solución única. Para resolverlos (las pocas veces que se podía) solíamos hallar primero la solución general e imponer después una o varias condiciones, dependiendo del orden de la ecuación, en un t_0 dado. En este capítulo intentamos ver cuáles son los problemas análogos para las EDPs. La variedad y complicación será mucho mayor que en las ordinarias.

Comenzamos en 5.1 tratando las EDPs **lineales de primer orden** en dos variables, es decir, ecuaciones del tipo:

$$[1] \quad A(x,y) u_y + B(x,y) u_x = C(x,y) u + D(x,y) ,$$

que no tienen muchas aplicaciones físicas, pero que plantean de forma sencilla los problemas de las de segundo orden. Veremos que pueden resolverse si es posible integrar una EDO de primer orden, cuyas curvas integrales son llamadas **características** de [1]. En la solución general de [1] aparecerá una función p arbitraria (como en el sencillo ejemplo $u_x=0$, de solución $u(x,y)=p(y)$, para cualquier p). Para fijar esta p fijaremos el valor de la solución a lo largo de una curva G del plano xy (**problema de Cauchy**) y la solución quedará determinada de forma única si G no es tangente a las curvas características.

En la sección 5.2 se intentan resolver las EDPs **lineales de segundo orden** en dos variables:

$$[2] \quad A u_{yy} + B u_{xy} + C u_{xx} + D u_y + E u_x + F u = G ,$$

con u y los coeficientes funciones de x e y . Trataremos de escribirlas, mediante cambios de variables, en la forma más sencilla posible (**forma canónica**). Esto nos llevará a la clasificación de [2] en hiperbólicas, parabólicas y elípticas. Otras curvas características volverán a jugar un papel esencial. En unos pocos casos, a partir de la forma canónica, se podrá calcular la solución general, que dependerá de dos funciones arbitrarias.

Para aislar una única solución de [2] podría plantearse un problema de Cauchy análogo a los de [1]. Esto puede servir para la ecuación de ondas, pero carece de sentido físico y plantea problemas matemáticos para las otras ecuaciones clásicas. Las condiciones iniciales y de contorno ligadas a un problema físico real son muy diferentes para cada ecuación. Incluso a una misma ecuación aparecen asociadas condiciones de diferentes tipos. No existe una teoría general de EDPs que pueda abarcar todas las posibilidades. En cada caso habrá que comprobar que el problema esté "bien planteado", es decir, que tiene **solución única que depende continuamente de los datos** (lo que era en las EDOs de comprobación trivial). La sección 5.3 se dedica a plantear diferentes problemas asociados a las ecuaciones clásicas y a estudiar la unicidad de algunos de ellos.

5.1. EDPs lineales de primer orden

Sea [1] $A(x,y)u_y + B(x,y)u_x = C(x,y)u + D(x,y)$, $u = u(x,y)$.

Para resolverla consideramos la EDO de primer orden:

[2] $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ **ecuación característica**

Suponemos A y B regulares y que no se anulan simultáneamente en una región del plano. [2] tendrá en ella unas curvas integrales:

[3] $\xi(x,y) = K$ **curvas características** de [1]

(se podrán hallar explícitamente si [2] es separable, lineal, exacta...)

Veamos que el cambio de variable $\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = y \end{cases}$ (o bien $\eta = x$)

lleva [1] a una ecuación en las nuevas variables (ξ, η) en la que no aparece u_ξ y que es resoluble elementalmente. En efecto:

$$\begin{cases} u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \\ u_x = u_\xi \xi_x \end{cases} \rightarrow Au_\eta + A\xi_y u_\xi + B\xi_x u_\xi = Cu + D$$

Como sobre las soluciones $y(x)$ definidas por [3] se tiene:

$$\xi(x, y(x)) = k \rightarrow \xi_x + \xi_y y' = \frac{1}{B} [A\xi_y + B\xi_x] = 0$$

Por tanto [1] se convierte en:

[4] $A(\xi, \eta)u_\eta = C(\xi, \eta)u + D(\xi, \eta)$, $u = u(\xi, \eta)$.

(si hubiésemos escogido $\eta = x$ habríamos llegado a $Bu_\eta = Cu + D$)

[4] es una ecuación lineal ordinaria en η si consideramos la ξ constante (es resoluble). En su solución aparecerá una constante arbitraria para cada ξ , es decir, una función arbitraria de ξ :

[5] $u(\xi, \eta) = p(\xi)R + R \int \frac{D}{RA} d\eta$, con $R(\xi, \eta) = e^{\int C/A d\eta}$, p arbitraria

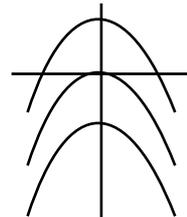
deshaciendo el cambio queda resuelta [1] en función de x e y .

Ejemplo 1. $2xu_y - u_x = 4xy$ $\frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow y+x^2=K$ **características**

$\begin{cases} \xi = y+x^2 \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow 2xu_\eta = 4xy ; u_\eta = 2\eta \rightarrow u = p(\xi) + \eta^2 = p(y+x^2) + y^2$

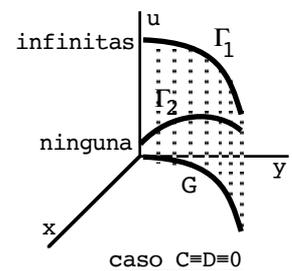
$\begin{cases} \xi = y+x^2 \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow -u_\eta = 4xy = 4\xi\eta - 4\eta^3 \rightarrow u = p^*(\xi) + \eta^4 - 2\xi\eta^2 = p^*(y+x^2) - 2yx^2 - x^4$

[ambas expresiones con p y p^* definen la misma solución general]



¿Cómo determinar de forma única una solución de [1]? Cada solución representa una superficie en el espacio. Generalizando el problema de valores iniciales para ordinarias definimos: el problema de Cauchy para [1] consiste en hallar la solución $u(x,y)$ que contenga una curva Γ del espacio, o lo que es lo mismo, que tome unos valores dados en los puntos de una curva G del plano xy . Si, en particular, G es una recta $y=cte$ [por ejemplo, si imponemos $u(x,0)=f(x)$], tendremos lo que se llama un problema de valores iniciales.

Un problema de Cauchy puede no tener solución única. Por ejemplo, si $C \equiv D \equiv 0$, la solución general es de la forma $u(x,y)=p(\xi(x,y))$, y por tanto cada una de sus soluciones toma un valor constante sobre cada característica. Si buscamos una solución que contenga una Γ cuya proyección G sea una de las características $\xi(x,y)=k$ debemos exigir que Γ esté en un plano horizontal $z=K$. En ese caso hay infinitas soluciones (una para cada función p con $p(k)=K$). Si Γ no tiene la z constante, no hay solución que contenga a la curva Γ .



En general, supongamos que Γ es una curva suave que viene dada paramétricamente: $\Gamma(s)=(g(s),h(s),f(s))$. Buscamos la solución de [1] con $u(g(s),h(s))=f(s)$. Sustituyendo en [5] y despejando p se tiene: $p(\xi(g(s),h(s)))=F(s)$, con F conocida. Llamemos $v=\xi(g(s),h(s))$. Si podemos expresar de forma única s en función de v : $s=s(v)$, la $p(v)=f(s(v))$ queda determinada y hay una única solución de [1] conteniendo a Γ . El teorema de la función implícita asegura que esto se puede hacer en un entorno de cada s_0 para el que:

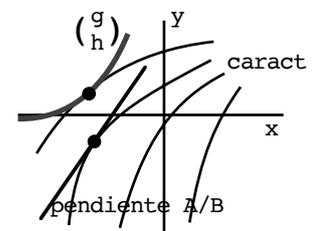
$$\left. \frac{d}{ds} [\xi(g(s),h(s))] \right|_{s=s_0} = \nabla \xi(g(s_0),h(s_0)) \cdot (g'(s_0),h'(s_0)) \neq 0$$

El $\nabla \xi$ es perpendicular a las características y (g',h') es tangente a G . Así pues, hemos deducido que si G no es tangente en ningún punto a ninguna de las características el problema de Cauchy tiene solución única, al menos local.

Se puede ver si hay esta tangencia sin resolver la EDO [2] a partir de su campo de direcciones: un vector tangente a las soluciones de [2] es $(B(g(s_0),h(s_0)),A(g(s_0),h(s_0)))$ y, por tanto, la curva G es tangente a alguna curva integral de [2] en un punto $(g(s_0),h(s_0))$ si y sólo si:

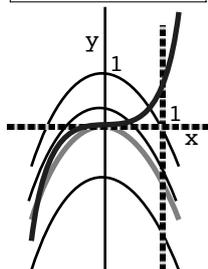
$$\Delta(s_0) \equiv g' A(g,h) - h' B(g,h) \Big|_{s=s_0} = 0$$

[y así, si $\Delta \neq 0 \forall s$ el problema de Cauchy tiene solución única].



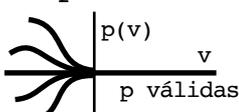
Ejemplo 1*. Imponemos diferentes datos de Cauchy a $2xu_y - u_x = 4xy$

$u(1,y)=0 \rightarrow p(y+1)+y^2=0 \rightarrow p(v)=-(v-1)^2 \rightarrow u=2y+2x^2-2yx^2-x^4-1$
 [o bien, $p^*(y+1)-2y-1=0 \rightarrow p^*(v)=2v-1 \uparrow$]
 [p o p* fijadas $\forall v$. $x=1$ no es tangente a las características]

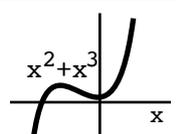


$u(x,-x^2)=0 \rightarrow p(0)+x^4=0$. Imposible, no hay solución.
 $u(x,-x^2)=x^4 \rightarrow p(0)=0$. Cada $p \in C^1$ con $p(0)=0$ nos da una solución diferente: hay infinitas.
 [datos sobre características dan 0 o ∞ soluciones]

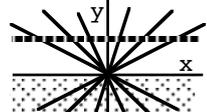
$u(x,0)=0 \rightarrow p(x^2)=0$. Sólo queda determinada la $p(v)=0$ para $v \geq 0$ pero no tenemos ninguna condición sobre p si $v < 0$.
 Podemos elegir cualquier $p \in C^1$ que valga 0 para $v \geq 0$.
 Existen infinitas soluciones en un entorno de $(0,0)$:
 $u(x,y)=y^2$ si $y \geq -x^2$, pero está indeterminada si $y < -x^2$.
 [En $(0,0)$ es $y=0$ tangente a las características. Lo confirma $\Delta = 1.2x - 0 \cdot (-1)$].



$u(x,x^3)=x^6 \rightarrow p(x^2+x^3)=0 \rightarrow p(v)=0 \forall v \rightarrow u=y^2$ para todo (x,y) .
 [A pesar de ser la curva de datos tangente a las características en dos puntos $(0,0)$ y $(-2/3, -8/27)$ [pues $\Delta = 1.2x - 3x^2 \cdot (-1)$] hay solución única. La no tangencia es suficiente pero no es necesaria].



Ejemplo 2. $yu_y + xu_x = 2u$
 $u(x,1)=x^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \begin{cases} \xi = y/x \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \eta u_\eta = 2u \rightarrow$
 $u = p(\xi)\eta^2 = p(y/x)y^2; u(x,1)=p(1/x)=x^3 \rightarrow p(v)=1/v^3; u = \frac{x^3}{y}$ [sólo si $y > 0$]

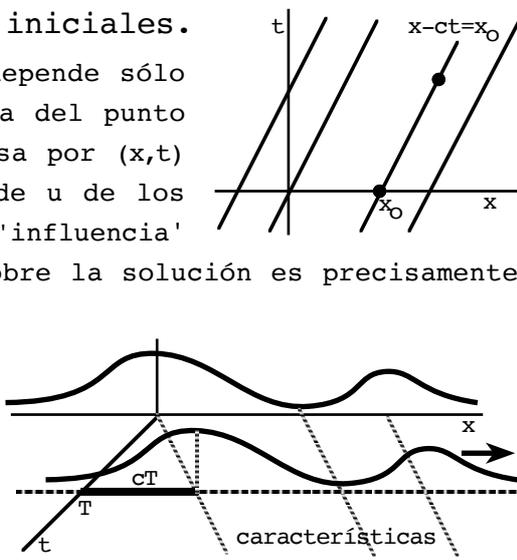


Ejemplo 3. $u_t + cu_x = 0$
 $u(x,0)=f(x)$ $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \rightarrow$ características: $x-ct = cte$.

Solución general: $u(x,t)=p(x-ct)$; $u(x,0)=p(x)=f(x) \rightarrow u(x,t)=f(x-ct)$, solución única del problema de valores iniciales.

Observemos que el valor de u en cada (x,t) depende sólo del valor inicial de f en $x_0 = x-ct$, abscisa del punto de intersección de la característica que pasa por (x,t) con el eje x. El 'dominio de dependencia' de u de los valores iniciales se limita al punto x_0 . La 'influencia' de los valores iniciales en un punto x_0 sobre la solución es precisamente la

recta característica que pasa por $(x_0,0)$.
 Para dibujar la gráfica de u en función de x para cada $t=T$ fijo basta trasladar la de f(x) una distancia cT. Se puede interpretar la solución como una onda que viaja (hacia la derecha si $c > 0$) a lo largo del tiempo.



[Situación similar a la veremos en la ecuación de ondas]

5.2. EDPs lineales de segundo orden; clasificación

Consideremos [1] $Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Fu = G$,

con u y los coeficientes funciones de (x,y) . Suponemos que los coeficientes son C^2 y que A, B y C no se anulan simultáneamente en una región Ω del plano. Como ocurría en las EDPs de primer orden podemos pensar que un cambio de variable adecuado haga desaparecer algunos términos de [1]. Hagamos el cambio genérico:

$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ con ξ y η de C^2 y con jacobiano no nulo en Ω . Entonces:

$$\begin{aligned} u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_y \xi_x + u_{\xi\eta} [\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x] + u_{\eta\eta} \eta_y \eta_x + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \end{aligned}$$

Con lo que [1] queda en función de las nuevas variables:

$$\begin{aligned} [A\xi_y^2 + B\xi_y \xi_x + C\xi_x^2] u_{\xi\xi} + [2A\xi_y \eta_y + B[\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x] + 2C\xi_x \eta_x] u_{\xi\eta} + \\ + [A\eta_y^2 + B\eta_y \eta_x + C\eta_x^2] u_{\eta\eta} + \dots = A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + \dots = G^* \end{aligned}$$

donde los puntos representan los términos en u_ξ , u_η y u , y G^* es la función G expresada en las nuevas variables.

Intentemos hacer $A^*=C^*=0$ eligiendo ξ y η adecuados. Para ello debe cumplirse la EDP de primer orden (no lineal):

$$[2] \quad A\xi_y^2 + B\xi_y \xi_x + C\xi_x^2 = 0 \quad (C^*=0 \text{ tiene la misma forma})$$

Si conseguimos encontrar dos soluciones distintas de [2] podemos hacer desaparecer los términos en $u_{\xi\xi}$ y $u_{\eta\eta}$. Pero, si $B^2 - 4AC > 0$, podemos separar [2] en dos EDPs de primer orden:

$$[3] \quad \xi_y = \frac{1}{2A} [-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}] \xi_x$$

[suponemos $A \neq 0$; si $A=0$ y $C \neq 0$ despejamos ξ_x ; $A=C=0$ es caso trivial]

Por otra parte, es fácil verificar que $B^{*2} - 4A^*C^* = [B^2 - 4AC]J^2$, con $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ (jacobiano del cambio) y, por tanto, el signo de $B^2 - 4AC$ es invariante bajo cambios de coordenadas. Esto lleva a definir:

Si en todos los puntos (x,y) de una región del plano se cumple que la expresión $B(x,y)^2 - 4A(x,y)C(x,y)$ es mayor que 0, igual a 0 o menor que 0, se dice, respectivamente, que la EDP [1] es hiperbólica, parabólica o elíptica en dicha región.

Sigamos con la simplificación de [1]. Veamos cuál es el cambio adecuado a cada tipo y encontremos la forma más sencilla en que podemos escribir la ecuación (forma canónica) en cada caso.

Si [1] es hiperbólica, [3] nos proporciona dos EDPs diferentes, cuyas ecuaciones características son:

$$[4] \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2A} [B - \sqrt{B^2 - 4AC}] , \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2A} [B + \sqrt{B^2 - 4AC}]$$

Se llaman curvas características de [1] a las curvas integrales de estas dos ecuaciones $\xi(x,y)=cte$, $\eta(x,y)=cte$ (son las características de las ecuaciones de primer orden [3]). Como sabemos, $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$ son soluciones de [3] ($u=p(\xi(x,y))$ y $u=p(\eta(x,y))$ son sus soluciones generales) y, por tanto, el cambio $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ transforma [1] en $B^*u_{\xi\eta}+\dots=G^*$, y como $B^{*2}>0$ podemos escribir:

$$\boxed{u_{\xi\eta} + \dots = G^{**}} \quad \text{forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas.}$$

Si [1] es parabólica, [3] proporciona una única EDP:

$$\xi_y + \frac{B}{2A} \xi_x = 0 \quad \text{cuya ecuación característica es} \quad \boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{B}{2A}}$$

Sus curvas integrales $\xi(x,y)=cte$ son las características de [1] (para las parabólicas sólo existe una familia de características). Escogiendo $\xi=\xi(x,y)$ tenemos que $A^*=0$ (y como $B^{*2}-4A^*C^*=0$ también es $B^*=0$). Como η podemos tomar cualquier función de x e y tal que el jacobiano no sea nulo. Se suele tomar $\eta=y$. Dividiendo por C^*

se obtiene la forma canónica de las parabólicas: $\boxed{u_{\eta\eta} + \dots = G^*}$.

Si [1] es elíptica, los segundos miembros de [4] no son reales (no hay pues características) sino funciones complejas conjugadas. No es difícil probar que las soluciones de [4] son también complejas conjugadas: $\xi(x,y)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=cte$, $\eta(x,y)=\alpha(x,y)-i\beta(x,y)=cte$. También es fácil ver que el cambio $\alpha=\alpha(x,y)$, $\beta=\beta(x,y)$ lleva [1]

a la forma canónica de las elípticas $\boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \dots = G^*}$.

En general, [1] puede ser de diferente tipo en diferentes regiones del plano (y tendrá entonces una forma canónica distinta en cada región). Observemos también que las EDOs de primer orden que nos dan las características pueden no ser resolubles. Pero en el caso de que A, B y C sean constantes, B^2-4AC también lo es y así [1] es del mismo tipo para todo el plano. Además los cambios de variable [ahora válidos para todo (x,y)] se hallan fácilmente:

$\begin{cases} \xi = x - \frac{1}{2A} [B - \sqrt{B^2 - 4AC}] y \\ \eta = x - \frac{1}{2A} [B + \sqrt{B^2 - 4AC}] y \end{cases}$	$\begin{cases} \xi = x - \frac{B}{2A} y \\ \eta = y \end{cases}$	$\begin{cases} \xi = \frac{2Ax - By}{\sqrt{4AC - B^2}} \\ \eta = y \end{cases}$
si [1] hiperbólica	si [1] parabólica	si [1] elíptica

[las hiperbólicas tienen dos familias de rectas características, las parabólicas una única familia de rectas características y las elípticas no tienen; la expresión dada para la elíptica se deduce de que $\xi = \frac{2Ax-By}{2A} \pm i \frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A} y = cte$ equivale a $\xi = \frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}} \pm iy = cte$]

Ejemplo 1. $4u_{yy} - 4u_{xy} + u_{xx} = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0 \rightarrow$ parabólica en todo \mathbf{R}^2 .
A, B y C son constantes y basta copiar el cambio: $\xi = x + \frac{y}{2}$, o mejor

$$\begin{cases} \xi = 2x + y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = u_\xi + u_\eta \\ u_x = 2u_\xi \end{cases} \quad \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = 4u_{\xi\xi} \end{cases}$$

Llevándolo a la ecuación y dividiendo por 4 se tiene $u_{\eta\eta} = 0$.

Esta forma canónica se resuelve fácilmente: $u_\eta = p(\xi) \rightarrow u = \eta p(\xi) + q(\xi)$

Por tanto, la solución general de la ecuación es:

$$u(x,y) = yp(2x+y) + q(2x+y) \quad \text{con } p \text{ y } q \text{ funciones } C^2 \text{ arbitrarias.}$$

Ejemplo 2. $u_{yy} - yu_{xx} = 0$ (ecuación de Tricomi) $\rightarrow B^2 - 4AC = 4y \rightarrow$ hiperbólica si $y > 0$ y elíptica si $y < 0$ (sobre $y = 0$ es parabólica, pero las EDPs se plantean sobre conjuntos abiertos).

$y > 0$: $\frac{dx}{dy} = \pm y^{1/2}$; características $x \pm \frac{2}{3} y^{3/2} = cte$. Hacemos pues:

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{2}{3} y^{3/2} \\ \eta = x - \frac{2}{3} y^{3/2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = y^{1/2} [u_\xi - u_\eta] \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{cases} \quad \begin{cases} u_{yy} = \frac{1}{2} y^{-1/2} [u_\xi - u_\eta] + y [u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}] \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} y^{-1/2} [u_\xi - u_\eta] - 4y u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow \boxed{u_{\xi\eta} - \frac{1}{6} \frac{u_\xi - u_\eta}{\xi - \eta} = 0}, \text{ pues } \xi - \eta = \frac{4}{3} y^{3/2}.$$

$y < 0$: $\frac{dx}{dy} = \pm i [-y]^{1/2} \rightarrow \xi = x \pm i \frac{2}{3} [-y]^{3/2} = cte$. Hacemos ahora:

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = \frac{2}{3} [-y]^{3/2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = -[-y]^{1/2} u_\beta \\ u_x = u_\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} u_{yy} = \frac{1}{2} [-y]^{-1/2} u_\beta + [-y] u_{\beta\beta} \\ u_{xx} = u_{\alpha\alpha} \end{cases}$$

$$\rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{2} [-y]^{-3/2} u_\beta = 0 \rightarrow \boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta} u_\beta = 0}.$$

Como ocurría en el ejemplo 1, en ocasiones será posible hallar elementalmente la solución general de [1] tras escribirla en forma canónica (pero en la mayoría seguirá siendo imposible; como en las dos regiones del ejemplo 2). Identifiquemos las formas canónicas resolubles (en los problemas veremos que otras pocas ecuaciones más pueden llevarse a ellas haciendo otros cambios de variable que hacen desaparecer alguna derivada de menor orden):

Si sólo hay derivadas respecto a una variable:

$$u_{\eta\eta} + E^*u_{\eta} + F^*u = G^*$$

Esta ecuación lineal de segundo orden en η se integra considerando la otra variable como un parámetro. Un par de constantes para cada ξ dan lugar a dos funciones arbitrarias de ξ en la solución. La ecuación, como vemos, debe ser parabólica.

Si sólo aparece $u_{\xi\eta}$ y una de las derivadas primeras:

$$u_{\xi\eta} + D^*u_{\xi} = G^*$$

Se resuelve haciendo $u_{\xi} = v$: la lineal de primer orden $v_{\eta} + D^*v = G^*$ es integrable viendo ξ como parámetro. La v contiene, pues, una función arbitraria de ξ . Al integrarla para hallar la u aparece otra función arbitraria (de η). Las cosas serían análogas si en vez de la u_{ξ} apareciese la u_{η} . La ecuación es hiperbólica.

[Al resolver las EDOs de segundo orden aparecían dos constantes; aquí hay, en los dos casos, dos funciones arbitrarias (evaluadas en las características como en las EDPs de primer orden)].

Ejemplo 3. $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + u_y + u_x = 2 \rightarrow B^2 - 4AC = 9 \rightarrow$ hiperbólica

Haciendo $\begin{cases} \xi = x - y \\ \eta = x - 4y \end{cases}$ se obtiene $u_{\xi\eta} + \frac{1}{3}u_{\eta} = -\frac{2}{9}$. Hacemos $u_{\eta} = v \rightarrow$

$$v_{\xi} = -\frac{1}{3}v - \frac{2}{9} \rightarrow v = q^*(\eta)e^{-\xi/3} - \frac{2}{3} \rightarrow u(\xi, \eta) = q(\eta)e^{-\xi/3} - \frac{2\eta}{3} + p(\xi)$$

La solución general es, pues:

$$u(x, y) = q(x - 4y)e^{(y-x)/3} + \frac{2}{3}(4y - x) + p(x - y) \quad q \text{ y } p \text{ arbitrarias.}$$

Ejemplo 4. $y^2u_{yy} + 2xyu_{xy} + x^2u_{xx} + y^2u_y + xyu_x = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0$
parabólica en \mathbf{R}^2

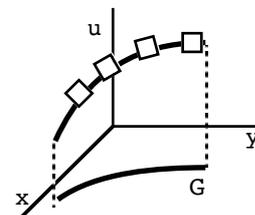
$$\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{2y^2} = \frac{x}{y} \rightarrow \begin{cases} \xi = y/x \\ \eta = y \end{cases} \text{ . Operando: } u_{\eta\eta} + u_{\eta} = 0 \rightarrow u(\xi, \eta) = p(\xi) + q(\xi)e^{-\eta}$$

Es decir, $u(x, y) = p(y/x) + q(y/x)e^{-y}$

5.3. Los problemas clásicos. Unicidad.

Sea [1] $Lu=G$ una EDP lineal de segundo orden en dos variables. ¿Qué datos adicionales nos proporcionan problemas bien planteados para [1]? Para una EDO de segundo orden era necesario fijar el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial para tener solución única. En una EDP lineal de primer orden fijábamos los valores de la solución en toda una curva G (no tangente a las características). Acabamos de ver que en los pocos casos en que [1] era resoluble aparecían dos funciones arbitrarias en la solución. Todo ello nos lleva a plantear el siguiente problema de Cauchy para [1]: hallar la solución que tome unos valores dados de u y u_y a lo largo de una curva dada G del plano xy .

(geoméricamente, encontrar una superficie solución que contenga una curva dada y tenga a lo largo de ella una familia de planos tangentes también dados. Alternativamente se podrían fijar sobre G los valores de u_x o de la derivada normal u_n .



Un caso particular de este problema de Cauchy sería el obtenido al tomar como G el eje $y=0$: el problema de valores iniciales consiste en encontrar la solución de [1] que cumple $u(x,0)=f(x)$, $u_y(x,0)=g(x)$.

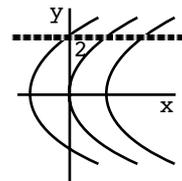
Como ocurría en las de primer orden se puede probar que si los datos son regulares y G no es tangente a las características en ningún punto entonces el problema de Cauchy tiene solución única en las proximidades de G .

Ejemplo 1. Sea

$$[P] \begin{cases} yu_{yy} + 2y^2u_{xy} + y^3u_{xx} - u_y = 0 \\ u(x,2) = x, u_y(x,2) = 0 \end{cases} .$$

$B^2 - 4AC = 0$, la ecuación es parabólica en todo \mathbf{R}^2 .

$$\frac{dx}{dy} = y \rightarrow \text{las características son } x - \frac{y^2}{2} = \text{cte} .$$



Como $y=2$ nunca es tangente a ellas, el problema de Cauchy [P] tiene solución única. Es resoluble y podemos comprobarlo:

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{y^2}{2} \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \eta u_{\eta\eta} - u_{\eta} = 0 \xrightarrow{\text{Euler ó } u_{\eta} = v} u = p(\xi) + q(\xi)\eta^2 = p\left(x - \frac{y^2}{2}\right) + q\left(x - \frac{y^2}{2}\right)y^2$$

Imponiendo los datos de Cauchy ($u_y = -yp' - y^3q + 2yq$):

$$\left. \begin{aligned} u(x,2) &= p(x-2) + 4q(x-2) = x \\ u_y(x,2) &= -2p'(x-2) - 8q'(x-2) + 4q(x-2) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} p'(x-2) + 4q'(x-2) &= 1 \\ -p'(x-2) - 4q'(x-2) + 2q(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

[p' y q' representan la misma derivada ordinaria en ambas ecuaciones]

$$\rightarrow q(x-2) = \frac{1}{2} \rightarrow q(v) = \frac{1}{2} \quad \forall v \rightarrow p(x-2) = x-2 \rightarrow p(v) = v \quad \forall v \rightarrow u = x - \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = x$$

Solución determinada de forma única por los cálculos anteriores.

[Es fácil comprobar que se satisfacen la ecuación y los datos].

Parece en principio que el problema de Cauchy es un problema adecuado a todas las EDPs de segundo orden. Pero esto no es cierto. En el estudio de los problemas reales aparecen condiciones mucho más variadas que las de Cauchy: en unos casos habrá que imponer condiciones iniciales y de contorno al mismo tiempo, en otro sólo exigiremos condiciones de contorno ... Además un dato de Cauchy puede originar problemas mal planteados para ecuaciones no hiperbólicas. Por ejemplo, el problema para la ecuación elíptica:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_y(x,0) = \frac{\text{sen} nx}{n} \end{cases} \text{ tiene por solución única } u(x,y) = \frac{\text{sh} ny \text{ sen} nx}{n^2}$$

Pero no hay dependencia continua de los datos: $\text{sen} nx/n$ tiende a 0 uniformemente, pero la solución se hace para $y \neq 0$ tan grande como se quiera (por grande que sea n) y se parece poco a la solución $u=0$ correspondiente a los datos $u(x,0) = u_y(x,0) = 0$.

Veamos ahora los principales problemas asociados a las tres **ecuaciones clásicas** [sólo el (P_1) será un problema de Cauchy]. Para cada uno de ellos habrá que comprobar que tiene solución única dependiente continuamente de los datos:

Ondas. Un problema bien planteado para la cuerda vibrante es el

problema puro de valores iniciales:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

que surge al considerar una cuerda infinita (tiene sentido real si nos preocupamos por valores pequeños de t antes de que las perturbaciones lleguen a los extremos). Fijamos la posición inicial de la cuerda y la distribución de velocidades verticales iniciales. Como fijamos los datos sobre una recta no característica (estas son $x \pm ct = \text{cte}$) tendrá solución única. A partir de la solución del siguiente capítulo comprobaremos la dependencia continua).

Podemos también considerar una cuerda acotada con los extremos fijos. Deberemos entonces imponer unas condiciones de contorno adicionales: $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Más en general, si los extremos se mueven verticalmente según $h_0(t)$ y $h_L(t)$ dadas se tiene:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), x \in [0,L], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = h_0(t), u(L,t) = h_L(t) \end{cases}$$

Demostremos su unicidad (probaremos su existencia, como en otros problemas, hallando explícitamente las soluciones [en el capítulo 6]; la dependencia continua, que se cumple, no la demostraremos [se podría deducir de la del problema (P_1)]).

Sean u_1 y u_2 soluciones cualquiera de (P_2) y sea $u = u_1 - u_2$. Entonces u satisface:

$$(P_0) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Nuestro objetivo es demostrar que $u \equiv 0$. Partimos de la identidad:

$$u_t [u_{tt} - c^2 u_{xx}] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] - c^2 \frac{\partial}{\partial x} [u_t u_x]$$

Integramos respecto a x entre 0 y L y respecto a t entre 0 y T cualquiera suponiendo que u es solución de (P_0) :

$$\frac{1}{2} \int_0^L [u_t^2 + c^2 u_x^2]_{(x,0)}^{(x,T)} dx - c^2 \int_0^T [u_t u_x]_{(0,t)}^{(L,t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^L [u_t(x,T)^2 + c^2 u_x(x,T)^2] dx = 0$$

pues $u_{tt} - c^2 u_{xx} = u_t(x,0) = u_x(x,0) = u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0$. Como el último corchete es ≥ 0 y es función continua de x debe ser $u_t(x,T) = u_x(x,T) = 0$ para $0 \leq x \leq L$ y para cualquier T . Por tanto $u(x,t)$ es constante y como $u(x,0) = 0$ debe ser $u = u_1 - u_2 \equiv 0$. Hay unicidad.

Calor. Para la varilla infinita se prueba que está bien planteado:

$$(P_3) \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x, t), x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u \text{ acotada} \end{cases}$$

Basta un único dato, la distribución inicial de temperaturas, para fijar las posteriores [no podemos dar arbitrariamente la $u_t(x,0)$ pues debe ser $u_t(x,0) = k u_{xx}(x,0) = k f''(x)$ si u es solución ($t=0$ es una característica y (P_3) no es buen problema de valores iniciales)].

Para una varilla acotada hay que añadir condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos. Si los extremos deben tener a lo largo del tiempo unas temperaturas dadas $h_0(t)$ y $h_L(t)$ se tiene:

$$(P_4) \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x, t), x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = h_0(t), u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Si lo que fijamos es el flujo de calor en los extremos obtenemos:

$$(P_5) \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x, t), x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = h_0(t), u_x(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

[En particular, si $h_0(t) = h_L(t) = 0$, los extremos están aislados].

Un tercer tipo de condiciones de contorno combina la u y la u_x : $u_x(0,t) - a u(0,t) = h_0(t)$ ó $u_x(L,t) + b u(L,t) = h_L(t)$, con $a, b > 0$, que expresan la radiación libre de calor hacia un medio a temperatura dada (si el extremo $x=L$ está más (menos) caliente que h_L/b entonces irradia (chupa) calor ya que $u_x = -b(u - h_L/b) < 0$ (> 0) y el flujo de calor es siempre en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas; lo mismo sucede con el otro extremo).

Probemos que (P_4) ó (P_5) (o cualquiera de los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones descritos) poseen solución única. Sean u_1 y u_2 soluciones. Entonces $u=u_1-u_2$ satisface el problema con $F=f=h_0=h_L=0$. Multiplicando la ecuación por u e integrando respecto a x entre 0 y L se tiene:

$$\int_0^L uu_t dx - k \int_0^L uu_{xx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx - k [uu_x]_{(0,t)}^{(L,t)} + k \int_0^L u_x^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx \leq 0$$

(si $u=0$ o $u_x=0$ en los extremos la última implicación es clara, ya que $k>0$; es también fácil verlo si $u_x-au=0$, $a<0$ ó si $u_x+bu=0$, $b<0$). La última integral es una función $U(t)$ no creciente, que satisface $U(0)=0$ (pues $u(x,0)=0$) y $U(t) \geq 0$ (integrando positivo). De las tres cosas se deduce que $U(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$. Unicidad.

[Para otros problemas parabólicos la demostración de unicidad será similar].

Una forma alternativa de demostrar la unicidad de algunos problemas (que además permite atacar la dependencia continua) es usando un principio del máximo que se ajuste al problema considerado. Por ejemplo, es cierto el siguiente principio que no demostramos:

Si u es continua en $[0,T] \times [0,L]$ y satisface $u_t - ku_{xx} = 0$ en $(0,T) \times (0,L)$, los valores máximo y mínimo de u se alcanzan o bien en $t=0$ o bien en $x=0$ ó en $x=L$.

[si la temperatura inicial en la varilla no supera un valor M y la de los extremos tampoco, no se puede crear en su interior una temperatura mayor que M (si no hay fuentes externas); la prueba a partir de esto de la unicidad y la dependencia continua de (P_4) sería muy parecida a la que veremos para Laplace y por eso no la hacemos; si quisiéramos demostrar la unicidad para los otros problemas citados para la ecuación del calor, necesitaríamos otros principios del máximo ligeramente diferentes].

Laplace. Los problemas clásicos son de contorno (la ecuación describe procesos estacionarios). Los dos más importantes son:

Problema de Dirichlet: $(P_D) \begin{cases} \Delta u = F & \text{en } D \\ u = f & \text{en } \partial D \end{cases}$

Problema de Neumann: $(P_N) \begin{cases} \Delta u = F & \text{en } D \\ u_n = f & \text{en } \partial D \end{cases}$



Donde D es un abierto conexo acotado de \mathbf{R}^2 , ∂D es su frontera y u_n es la derivada en la dirección del vector normal unitario exterior \mathbf{n} . Si vemos la ecuación describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en (P_D) fijamos las temperaturas en el borde y en (P_N) el flujo de calor en dirección normal al borde.

Si F , f y ∂D son suficientemente regulares, el (P_D) es un problema bien planteado. Hallaremos su solución en recintos sencillos en el capítulo 8 y en 9.1. Probemos ahora su unicidad por dos caminos.

El primero está basado en la fórmula de Green (que generaliza la integración por partes a \mathbf{R}^2):

$$\text{Sea } u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}). \text{ Entonces } \iint_D u \Delta u \, dx dy = \oint_{\partial D} u u_n \, ds - \iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy$$

Basta aplicar el teorema de la divergencia a una identidad:

$$\iint_D \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad u \Delta u = \operatorname{div}[u \nabla u] - \|\nabla u\|^2.$$

Si u_1 y u_2 son soluciones de (P_D) , $u = u_1 - u_2$ verifica el problema con $F = f = 0$. La fórmula de Green dice entonces que:

$$\iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = \text{cte} \Rightarrow u \equiv 0 \quad (\text{pues } u = 0 \text{ en } \partial D)$$

Utilizaremos ahora el siguiente principio del máximo para Laplace que no demostramos (intuitivamente es claro):

Si u satisface $\Delta u = 0$ en un dominio acotado D y es continua en \bar{D} entonces u alcanza su máximo y su mínimo en la ∂D .

[la temperatura de una placa no supera la máxima de su borde]

Demos a partir de él otra demostración de la unicidad de (P_D) y comprobemos también la dependencia continua:

Como $u = u_1 - u_2$, u_1, u_2 soluciones, verifica $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D \\ u = 0 & \text{en } \partial D \end{cases}$ se tiene:

$$0 = \min_{\partial D} u \leq \min_D u \leq \max_D u \leq \max_{\partial D} u = 0 \Rightarrow u \equiv 0$$

Sea ahora u^* solución de (P_D) con $u = f^*$ en ∂D y sea $|f - f^*| < \varepsilon$ en ∂D .

Entonces $v = u - u^*$ satisface $\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } D \\ v = f - f^* & \text{en } \partial D \end{cases} \Rightarrow -\varepsilon < \min_{\partial D} v \leq v \leq \max_{\partial D} v < \varepsilon$

Por tanto, $|u - u^*| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in D$. Si la diferencia entre los datos es pequeña, también es pequeña la diferencia entre soluciones.

Para el problema de Neumann (P_N) la situación es más complicada. En primer lugar, para que (P_N) pueda tener solución es necesario que F y f satisfagan la relación:

$$\iint_D F \, dx dy = \oint_{\partial D} f \, ds$$

[basta aplicar el teorema de la divergencia a ∇u para verlo].

Además, en el caso de que (P_N) tenga solución, esta contiene una constante arbitraria [lo que era esperable, ya que la ecuación y la condición de contorno sólo contienen derivadas]. También se ve que si queremos repetir la prueba de la unicidad de (P_N) a partir de la fórmula de Green, podemos dar todos los pasos excepto la última implicación. Se suele decir que (P_N) tiene unicidad salvo constante.

A la ecuación de Laplace se le pueden imponer también condiciones de contorno mixtas del tipo $u_n + au = f$, $a > 0$, y también tienen significado físico los problemas en que en parte de la frontera se imponen condiciones tipo Dirichlet, en otra tipo Neumann... (todos ellos son problemas bien planteados).

Por último, en ocasiones hay que estudiar problemas para Laplace en recintos D no acotados. Para conseguir la unicidad, además de fijar datos en ∂D hay que exigir acotación en el infinito (si el problema no es en el plano, sino en el espacio, esto no basta y hay que pedir que la solución tienda a 0 en el infinito).

6. La ecuación de ondas

Las técnicas de la sección 5.2 sólo permiten hallar la solución general de una de las tres ecuaciones clásicas: la ecuación de ondas unidimensional. En 6.1 obtendremos primero la solución del problema puro de valores iniciales para una **cuerda infinita (fórmula de D'Alembert)**. Veremos que la solución $u(x,t)$ resulta ser la suma de dos ondas que se mueven en sentido opuesto. Observaremos que la información contenida en los datos iniciales "viaja por las características" y definiremos los conceptos de dominio de dependencia y dominio de influencia. Daremos también una fórmula para las soluciones en el caso de que la ecuación sea no homogénea (que existan **fuerzas externas**).

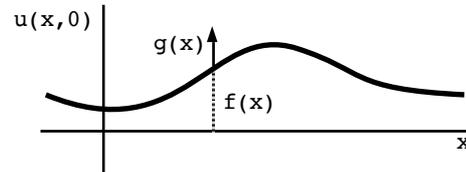
Pasaremos después a resolver el problema más real de la **cuerda acotada** y fija en sus extremos. Lo reduciremos al problema de la cuerda infinita extendiendo de forma adecuada los datos iniciales a todo \mathbf{R} . Al estar manejando funciones con expresiones diferentes en diferentes intervalos, será complicado escribir explícitamente la solución. Nos conformaremos por eso en muchos casos con hallar su expresión para valores de t o de x fijos o con hacer dibujos de las soluciones. Acabaremos la sección indicando como tratar el problema con **condiciones de contorno no homogéneas**.

En la sección 6.2 comenzaremos dando sin demostración la solución del problema puro de valores iniciales para la ecuación de ondas homogénea en el **espacio** (fórmula de Poisson-Kirchoff). De ella deduciremos la fórmula para el caso **bidimensional**. Estudiaremos las diferencias entre la propagación de las ondas en una, dos y tres dimensiones espaciales. Comprobaremos que las ondas en el espacio "pasan" (como ocurre con el sonido), mientras que en el plano la influencia de los datos iniciales se deja sentir, aunque amortiguándose, a lo largo del tiempo (en la recta depende de si la perturbación inicial se da en la posición o en la velocidad). Estudiaremos también las ondas que se propagan en el espacio con simetría esférica que son de tratamiento sencillo, por ser esencialmente unidimensionales.

6.1. Ecuación de la cuerda vibrante

Comencemos con el problema puro de valores iniciales:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



Para esta ecuación hiperbólica $\begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = c^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \end{cases}$

y, por tanto, en las nuevas variables:

$$-4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow u_{\xi} = p^*(\xi) \rightarrow u = p(\xi) + q(\eta)$$

Luego la solución general de la ecuación es:

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct) \quad , \quad p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p'(x) + q'(x) = f'(x) \\ p'(x) - q'(x) = \frac{g(x)}{c} \end{cases} \rightarrow 2p'(x) = f'(x) + \frac{g(x)}{c}$$

$$\rightarrow p(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k \rightarrow q(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - k$$

$$\rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (1)$$

fórmula de D'Alembert que da la solución de (P_1) de forma única a partir de los datos f y g . Para que la u sea de C^2 , f debe ser C^2 y g debe ser C^1 (entonces será una solución clásica o regular). La solución de (P_1) es la suma de dos ondas que viajan a velocidad c , una hacia las x crecientes y otra hacia las decrecientes.

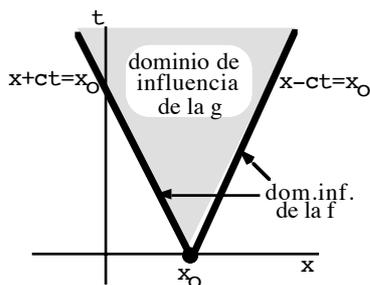
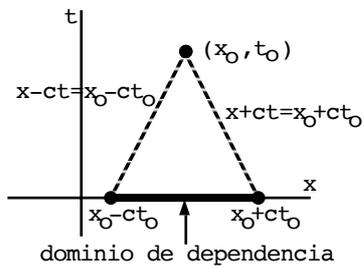
[Si $G(x) \equiv \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$, $\frac{1}{2} f(x) - G(x)$ se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda va $\frac{1}{2} f(x) + G(x)$].

Veamos a partir de (1) la dependencia continua (a datos iniciales próximos corresponden soluciones próximas en intervalos de tiempo finitos): sea $|f(x) - f^*(x)| < \delta$ y $|g(x) - g^*(x)| < \delta$ para todo x ; entonces para $t \in [0, T]$ se tiene:

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u^*(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |f(x+ct) - f^*(x+ct)| + \frac{1}{2} |f(x-ct) - f^*(x-ct)| + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(s) - g^*(s)| ds < \delta + \frac{\delta}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds = \delta(1+T) \end{aligned}$$

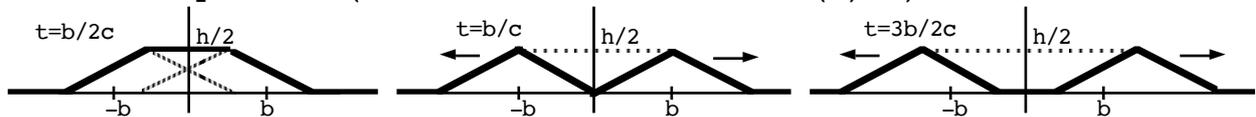
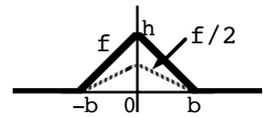
Por tanto, si $\delta < \frac{\varepsilon}{1+T}$ es $|u(x, t) - u^*(x, t)| < \varepsilon \quad \forall x \text{ y } \forall t \in [0, T]$.

Observemos que $u(x_0, t_0)$ está determinado sólo por los valores de f en los puntos $x_0 - ct_0$ y $x_0 + ct_0$ [puntos de corte con el eje x de las características que pasan por (x_0, t_0)] y los de g en el intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. A este intervalo se le llama dominio de dependencia de la solución en (x_0, t_0) de los valores iniciales f y g [el dominio de dependencia de los valores de f se reduce a los extremos del intervalo].

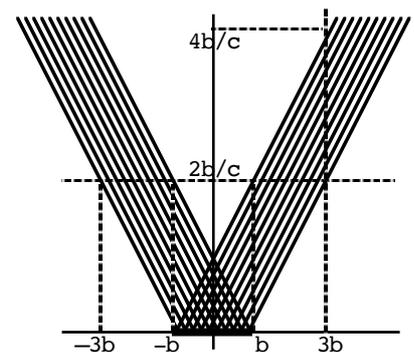


Recíprocamente, el valor de la f inicial en $x=x_0$ influye sólo en los valores de la solución u sobre las dos características que pasan por $(x_0, 0)$ [dominio de influencia de la f], pues este punto no pertenece al dominio de dependencia de los puntos que no estén en esas características. Por la misma razón el dominio de influencia de la g en x_0 consiste en el triángulo infinito limitado por dichas características.

Ejemplo 1. Supongamos que $f=0$ salvo una perturbación en forma de triángulo en torno a 0 y que soltamos la cuerda sin impulso ($g=0$). Dibujemos la solución para diferentes instantes. Basta trasladar las dos ondas que viajan en sentidos opuestos (en este caso ambas son $f(x)/2$):



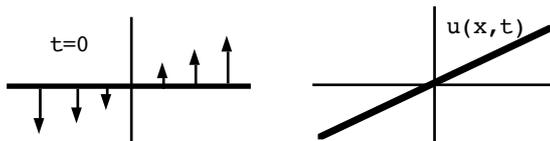
Veamos que nos dice el dominio de influencia. El conjunto de puntos de $[-b, b]$ modifican la solución en las dos bandas dibujadas (cada uno influye en dos características). Fuera de ellas seguro que es $u=0$. Por ejemplo, para $t=2b/c$ vemos que sólo puede ser no nula la solución en $[-3b, -b]$ y en $[b, 3b]$. Un punto como $x=3b$ sólo se moverá si $t \in [2b/c, 4b/c]$ y después permanecerá en reposo.



En este ejemplo hemos considerado una f que ni siquiera es C^1 , por lo que $[f(x+ct)+f(x-ct)]/2$ no es estrictamente una solución (no es "clásica"). Se llama solución débil o generalizada a una u continua de la forma (2) aunque no sea C^2 (se puede considerar como límite uniforme de soluciones clásicas). El concepto de solución débil aparece muchas veces en EDPs. En cada caso hay que precisar que se entiende por solución débil y comprobar que los problemas siguen bien planteados (por ejemplo, si ampliamos el conjunto de funciones entre las que buscamos soluciones, ¿seguirá habiendo unicidad?). El ejemplo 1 muestra también que las "discontinuidades" de los datos iniciales se propagan a lo largo de las características.

Ejemplo 2. Sea $f(x)=0, g(x)=x \rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} s ds = tx$.

[la cuerda infinita se va inclinando progresivamente; no es una situación física muy real: la ecuación es sólo un modelo simplificado de la realidad]



Supongamos ahora que hay fuerzas externas. El problema es:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

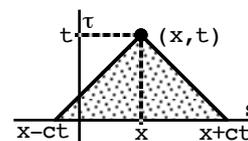
Para resolverlo nos basta hallar una solución u_F del problema en el caso de que f y g sean 0, pues entonces si u_1 es la solución del problema (P_1) anterior [dada por (1)] se tiene que $u_1 + u_F$ es la solución buscada de (P_2) [gracias a la linealidad de la ecuación y de las condiciones iniciales]. Como no es difícil comprobar que

$$u_F(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s,\tau) ds d\tau \quad \text{satisface} \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

concluimos que la solución de (P_2) es:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s,\tau) ds d\tau \quad (2)$$

[Observemos que el recinto descrito por la integral doble es el triángulo del plano $s\tau$ limitado por el eje $\tau=0$ y las características que pasan por (x,t)]



En ocasiones es fácil encontrar una solución particular v de la ecuación no homogénea (por ejemplo si f depende sólo de x o t se pueden buscar soluciones que dependan sólo de esa variable). En esos casos podemos evitar el cálculo de la integral doble, ya que haciendo $w = u - v$, la w satisface (por la linealidad) un problema más sencillo (con $F=0$) resoluble por la fórmula (1).

Ejemplo 3. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 3 \end{cases}$ Utilizando directamente (2):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [(x+t) + (x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]} 2 ds d\tau = \dots = x + 3t + t^2$$

Podemos también encontrar una $v(x)$ o una $v(t)$ y hacer $w = u - v$:

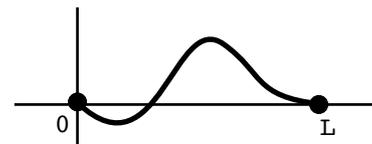
$$-v_{xx} = 2 \rightarrow v = -x^2 + Cx + K \rightarrow \text{si } v = -x^2, w \text{ cumple } \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = x + x^2, w_t(x,0) = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow w = \frac{1}{2} [(x+t) + (x+t)^2 + (x-t) + (x-t)^2] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds = x + x^2 + t^2 + 3t \rightarrow u = x + 3t + t^2$$

$$v_{tt} = 2 \rightarrow v = t^2 + 3t, \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = x, w_t(x,0) = 0 \end{cases} \rightarrow w = x \rightarrow u = x + 3t + t^2$$

Consideremos ahora la cuerda acotada y fija en los extremos:

$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$



(observemos que debe ser $f(0)=f(L)=0$).

Para resolverla utilizando (1) necesitamos unos datos iniciales definidos $\forall x$. Extendemos f y g a $[-L, L]$ de forma impar respecto a 0 y luego de forma $2L$ -periódica a todo \mathbf{R} , es decir, si llamamos f^* y g^* a estas extensiones:

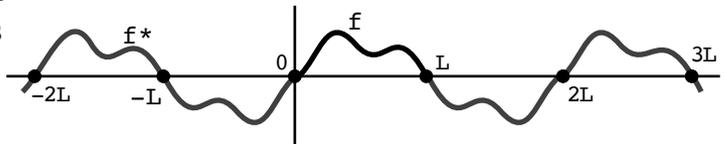
$$f^*(-x) = -f^*(x); \quad f^*(x+2L) = f^*(x)$$

$$g^*(-x) = -g^*(x); \quad g^*(x+2L) = g^*(x)$$

(se tiene entonces que f^* y g^* son también impares respecto a L).

Resolviendo el siguiente problema con la fórmula de D'Alembert:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x) \\ u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds \quad (3)$$



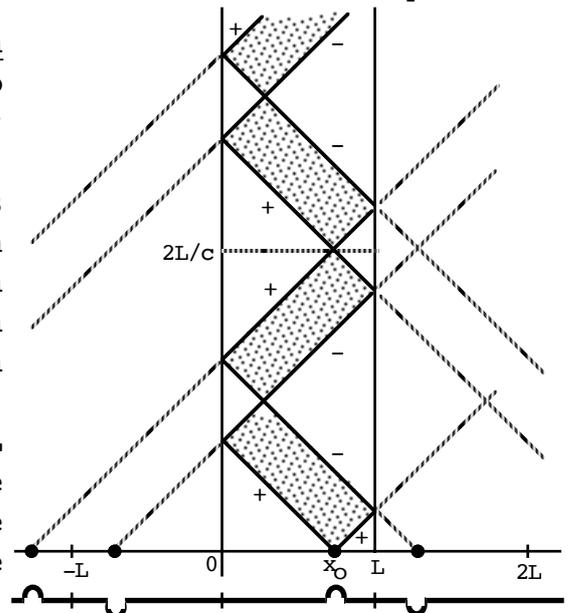
obtenemos la solución única de (P_3) , ya que u cumple la ecuación, las condiciones iniciales para $x \in [0, L]$ y, por la imparidad de los datos, también las de contorno:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g^*(s) ds = 0$$

$$u(L, t) = \frac{1}{2} [f^*(L+ct) + f^*(L-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} g^*(s) ds = 0$$

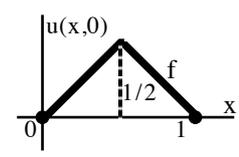
Para que la u dada por (3) sea regular deben ser $f \in C^2[0, L]$ y $g \in C^1[0, L]$ y además: $f(0)=f(L)=f'(0)=f'(L)=g(0)=g(L)=0$ [f' y g' existen en 0 y L por la imparidad]. Si falla alguna de estas hipótesis la u no será C^2 en todo punto.

Hallemos los dominios de influencia de (P_3) . Supongamos que $g=0$ y $f=0$ salvo una perturbación en torno a x_0 . f^* será no nula cerca de $\dots, x_0-2L, -x_0, x_0, -x_0+2L, \dots$. Cada punto influirá en dos características. Veamos que pasa en $[0, L]$. Al principio la perturbación va por las características. Para $t=x_0/c$ la de la izquierda se cruza en $x=0$ con la que viene de $-x_0$ (cambiada de signo), que sigue esta característica hasta $x=L$ donde se encuentra otra que procede de x_0+2L y así sucesivamente. A la que parte inicialmente hacia la derecha le ocurrirá algo similar. El dominio de influencia de la f consiste, pues, en este par de características reflejadas en $x=0$ y $x=L$. Es fácil ver que el de la g son todos los paralelogramos rayados.

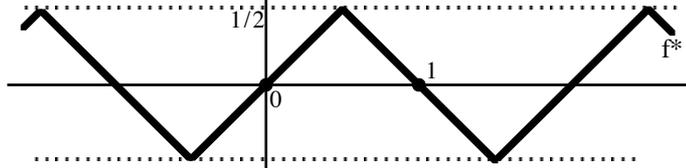


Ejemplo 4.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \in [0,1], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$



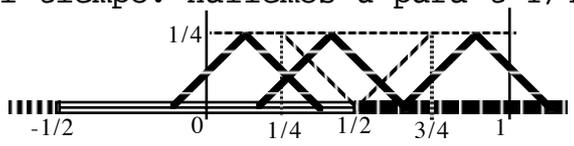
(puede representar idealizadamente la pulsación de la cuerda de una guitarra)
 Con la fórmula (3) es, en general, complicado hallar expresiones analíticas de soluciones para todo x y todo t, pues f* y g* tienen diferentes formas en diferentes intervalos. Así, en nuestro caso:



$$f^*(x) = \begin{cases} \dots \\ -1-x, & -3/2 \leq x \leq -1/2 \\ x, & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ x-2, & 3/2 \leq x \leq 5/2 \\ \dots \end{cases}$$

Para hallar $u(x,t) = [f^*(x+t) + f^*(x-t)]/2$ tendríamos que discutir según los valores de x y t los intervalos en que se mueven x+t y x-t, lo que nos llevaría a un número excesivo de casos (para estas discusiones conviene utilizar los dominios de dependencia). Más fácil es dar analíticamente la forma de la cuerda para un t dado o ver la evolución de un x a lo largo del tiempo. Hallemos u para $t=1/4$:

$$\begin{aligned} u(x,1/4) &= \frac{1}{2} [f^*(x+1/4) + f^*(x-1/4)] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} x+1/4+x-1/4, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 3/4-x+x-1/4, & 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ 3/4-x+5/4-x, & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1/4, & 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ 1-x, & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

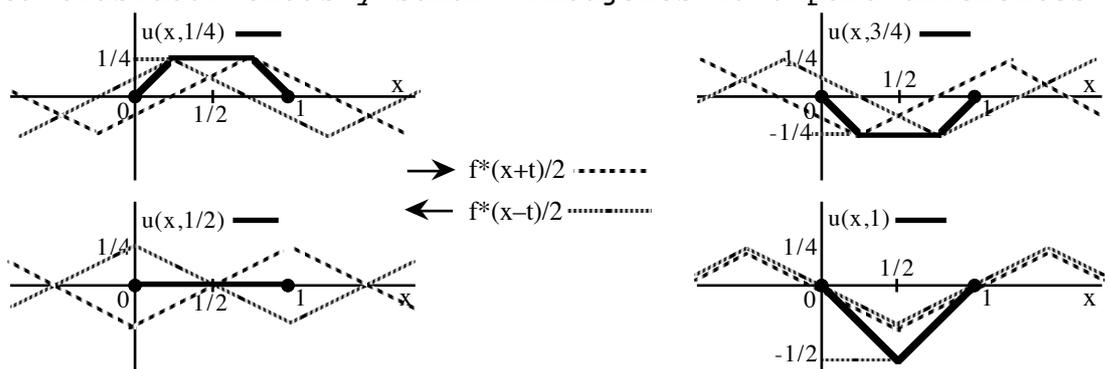


Lo que sí es fácil es calcular la u para un x y un t dados. No es siquiera necesario conocer la expresión de la f*. Por ejemplo:

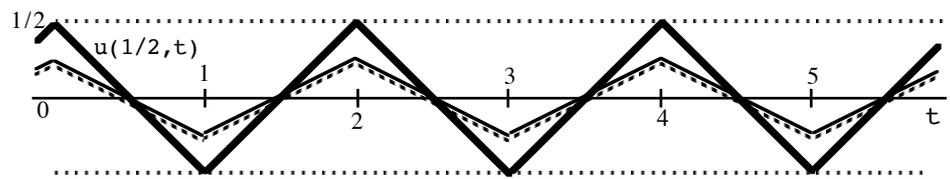
$$u(1/4,3) = \frac{1}{2} [f^*(13/4) + f^*(-11/4)] = \frac{1}{2} [f^*(-3/4) + f^*(-3/4)] = -f(3/4) = -1/4$$

f* es 2-periódica f* es impar

Tampoco es necesaria la expresión de la f* para hacer dibujos: basta trasladar ondas y sumar. Dibujemos la u para diferentes t:



Dibujemos ahora $u(1/2,t) = \frac{1}{2} [f^*(1/2+t) + f^*(1/2-t)] = \frac{1}{2} [f^*(1/2+t) - f^*(t-1/2)]$



Como vemos, la gráfica se repite con periodo 2. Esto es general: por las propiedades f* y g* la u dada por (3) es 2L/c-periodica.

Por último, tratamos el problema más general en el que existen fuerzas externas y movemos los extremos de la cuerda:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & x \in [0,L], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = h_0(t), u(L,t) = h_L(t) \end{cases}$$

Lo primero que hay que hacer es convertirlo en uno con condiciones de contorno homogéneas. Para ello hay que encontrar una v que las satisfaga y hacer $w = u - v$. Un ejemplo de tal v puede ser:

$$v(x,t) = \frac{x}{L} h_L(t) + \left[1 - \frac{x}{L}\right] h_0(t) \quad [\text{a veces será mejor buscar otra}]$$

La solución del problema resultante en w viene dada por (2) si sustituimos f, g y F por f^*, g^* y F^* , siendo ésta la extensión impar y $2L$ -periódica de F considerándola como función de x .

Ejemplo 5.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0,1], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = \text{sent} \end{cases}$$

Hallemos $u(1/2, 1/2)$ y $u(1/2, 3/2)$. La v de arriba es $v = x \text{sent}$.

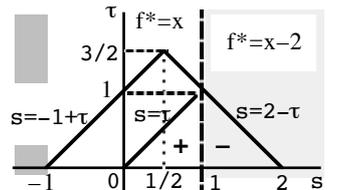
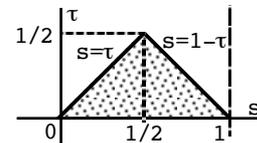
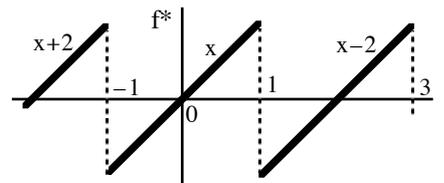
$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = x \text{sent} \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = -x \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 \end{cases} \quad \text{Sea } f^*(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow w \text{ es la solución de } \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = f^*(x) \text{sent} \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = -f^*(x) \end{cases}$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 -s \, ds + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \int_{\tau}^{1-\tau} s \text{sent} \tau \, ds d\tau + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{1}{2} = 0$$

[un punto a distancia 1/2 de donde movemos la cuerda era de esperar que para $t=1/2$ todavía esté parado]

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 -f^*(s) \, ds + \frac{1}{2} \int_0^{3/2} \text{sent} \tau \int_{-1+\tau}^{2-\tau} f^*(s) \, ds d\tau + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{3}{2} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \text{sent} \tau \int_{-1+\tau}^{\tau} s \, ds d\tau + \frac{1}{2} \int_1^{3/2} \text{sent} \tau \int_{-1+\tau}^{2-\tau} s \, ds d\tau + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{3}{2} = \text{sen} 1 \end{aligned}$$



Basándose en el capítulo 8 se puede encontrar una v mejor:

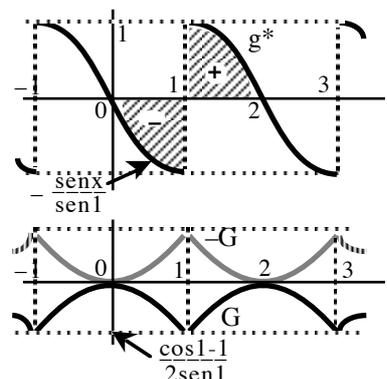
$$v = \frac{1}{\text{sen} 1} \text{sent} \text{sen} x \quad \text{satisface las c.c. y también la ecuación.}$$

$$\text{Ahora } w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = -\frac{\text{sen} x}{\text{sen} 1} \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{Por tanto: } u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\text{sen}^2(1/2)}{\text{sen} 1} + \frac{1}{2} \int_0^1 -\frac{\text{sen} s}{\text{sen} 1} \, ds = 0,$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\text{sen}(1/2)\text{sen}(3/2)}{\text{sen} 1} + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 -\frac{\text{sen} s}{\text{sen} 1} \, ds = \text{sen} 1.$$

Para dibujar hallaríamos las ondas viajeras de este problema: $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g^* \left[\leftarrow \right]$ y $-G(x) \left[\rightarrow \right]$



Para acabar hagamos unas cuantas reflexiones sobre cambios de variable y descomposición en subproblemas que generalicen las ideas que hemos utilizado en esta sección. Los problemas clásicos que presentamos en 5.3 están formados por una ecuación lineal [que podemos representar por $Lu=F$, con L lineal] y unas condiciones adicionales también lineales [$M_k u=f_k$, unas iniciales, otras de contorno]. Supongamos, por ejemplo, que son 3 las condiciones.

$$\text{Nuestro problema es entonces (P) } \begin{cases} Lu=F \\ M_1 u=f_1 \\ M_2 u=f_2 \\ M_3 u=f_3 \end{cases}$$

El problema de resolver (P) puede ser reducido a resolver otros más sencillos. Por ejemplo, si u_1, u_2, u_3 y u_4 son soluciones de

$$(P_1) \begin{cases} Lu=F \\ M_1 u=0 \\ M_2 u=0 \\ M_3 u=0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} Lu=0 \\ M_1 u=f_1 \\ M_2 u=0 \\ M_3 u=0 \end{cases} \quad (P_3) \begin{cases} Lu=0 \\ M_1 u=0 \\ M_2 u=f_2 \\ M_3 u=0 \end{cases} \quad (P_4) \begin{cases} Lu=0 \\ M_1 u=0 \\ M_2 u=0 \\ M_3 u=f_3 \end{cases}$$

está claro que $u=u_1+u_2+u_3+u_4$ es solución de (P) [pero otras veces nos convendrá descomponer (P) en menos subproblemas].

En otros casos lo que puede interesar es convertir la ecuación o algunas de las condiciones adicionales (sobre todo si son de contorno) en homogéneas. Por ejemplo, y como hemos visto para la ecuación de ondas, si conocemos una solución particular v de la ecuación el cambio $w=u-v$ convierte (P) en

$$\begin{cases} Lw=0 \\ M_1 w=f_1 - M_1 v \\ M_2 w=f_2 - M_2 v \\ M_3 w=f_3 - M_3 v \end{cases}$$

si lo que tenemos es una v que satisfaga, por ejemplo, $M_2 v=f_2$ y $M_3 v=f_3$, haciendo $w=u-v$ acabaríamos en

$$\begin{cases} Lw=F-Lv \\ M_1 w=f_1 - M_1 v \\ M_2 w=M_3 w=0 \end{cases}$$

(lo que ya es un lujo es tener una v que satisfaga la ecuación y dos condiciones como en el ejemplo 5 de antes). Como vemos, hay mucha variedad en los posibles cambios. En cada caso habrá que ver cuáles nos llevan a problemas más asequibles. Si inicialmente hay condiciones homogéneas intentaremos que los cambios no nos estropeen esas condiciones, aunque a veces no tendremos más remedio.

Por último, observemos que si u_1, \dots, u_n satisfacen algunas condiciones homogéneas, entonces cualquier combinación lineal de ellas $u=c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ sigue satisfaciendo esas mismas condiciones. Si son infinitas las u_k también satisfará esas condiciones homogéneas (si las cuestiones de convergencia van bien) la serie infinita $\sum c_n u_n$ [esto lo utilizaremos en separación de variables en el capítulo 8]

6.2. Ondas en tres y dos dimensiones.

Consideremos el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas en 3 dimensiones espaciales:

$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] = 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,0) = g(x,y,z) \end{cases}$$

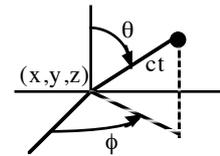
Se puede deducir una fórmula para la solución de (P_3) análoga a la de D'Alembert para la cuerda vibrante. Aceptemos que, si $f \in C^3$ y $g \in C^2$, esa solución viene dada por la fórmula de Poisson o Kirchoff:

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_C f \, dS \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_C g \, dS \quad (1)$$

siendo C la superficie de la bola de centro (x,y,z) y radio ct .

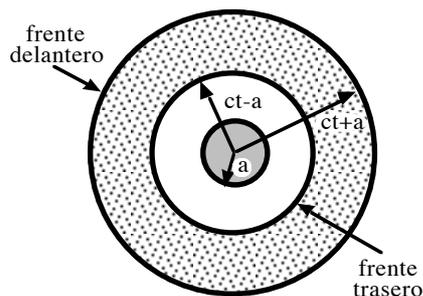
(en otras palabras, si ω_f y ω_g representan los valores medios de f y g sobre la superficie esférica C la solución es $u = \partial[t\omega_f]/\partial t + t\omega_g$).

La forma más natural de parametrizar esta superficie es mediante los ángulos θ y ϕ de las coordenadas esféricas centradas en el punto (x,y,z) del dibujo \rightarrow Desarrollando las integrales de (1) se obtiene:



$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x+ct \sin\theta \cos\phi, y+ct \sin\theta \sin\phi, z+ct \cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \right] + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(x+ct \sin\theta \cos\phi, y+ct \sin\theta \sin\phi, z+ct \cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

Interpretemos (1). Los valores de la solución sólo dependen de los valores de f y g sobre el borde de la esfera $B((x,y,z), ct)$. Así, si inicialmente hay una perturbación concentrada en un punto P , en el instante t sólo están perturbados los puntos de la superficie esférica de centro P y radio ct , ya que para los demás puntos es $f=g=0$ sobre la superficie C de (1). Si inicialmente es perturbado todo un conjunto R , en cada instante t los puntos afectados por esa perturbación constituyen una región R_t del espacio formada por la unión de todas superficies esféricas de radio ct y centro $P \in R$. La superficie exterior de R_t se llama frente delantero de la onda y la interior frente trasero. En el dibujo están esquematizados ambos frentes para el caso de una perturbación inicial de una esfera de radio a . Los puntos que alcanza el frente delantero, antes en reposo, comenzarán a oscilar. Los puntos sobrepasados por el frente trasero permanecerán en reposo.



Estudiemos ahora la propagación de ondas en 2 dimensiones:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{xx} + u_{yy}] = 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R} \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$$

Podemos mirar (P_2) como un caso particular de (P_3) en que los datos (y por tanto las soluciones) no dependen de z . Las coordenadas adecuadas ahora para parametrizar C son las cartesianas (o las cilíndricas). Expresando (1) en cartesianas se obtiene:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_B \frac{f(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - [\xi-x]^2 - [\eta-y]^2}} + \iint_B \frac{g(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - [\xi-x]^2 - [\eta-y]^2}} \right]$$

donde B es todo el círculo de centro (x,y) y radio ct .

La fórmula anterior escrita en polares centradas en (x,y) queda:

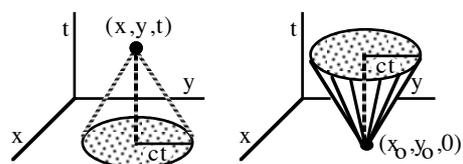
$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^{ct} \frac{r f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) dr d\theta}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} + \int_0^{2\pi} \int_0^{ct} \frac{r g dr d\theta}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right]$$

Supongamos una perturbación localizada en un punto P del plano. Otro punto M , situado a una distancia d de P , permanecerá en reposo hasta el instante $t_0 = d/c$. Si $t \geq t_0$, $P \in B(M, ct)$ y por tanto es $u(M,t) \neq 0$: a partir del instante t_0 el punto M permanece perturbado indefinidamente (aunque tienda a pararse cuando $t \rightarrow \infty$, como las ondas producidas por una piedra en un estanque). Esta situación no contradice los resultados para $n=3$: la perturbación de P , vista como una perturbación en el espacio independiente de z , consiste de hecho en un cilindro vertical infinito sobre P , con lo que al M irán llegando las perturbaciones provenientes de puntos cada vez más lejanos del cilindro. Las ondas que se propagan constituyen ondas cilíndricas en el espacio: en cada cilindro paralelo al inicial la solución toma un valor constante.

[Las ondas pasan en el espacio y permanecen en el plano].

Si descendiésemos desde $n=3$ hasta $n=1$, considerando que la f y la g de (1) sólo dependen de x , llegaríamos a la conocida fórmula de D'Alembert. Si se contempla esta solución sumergida en \mathbf{R}^3 se puede interpretar como la suma de dos ondas planas avanzando por planos perpendiculares al eje x a velocidad $\pm c$. Todos los puntos de cada plano están igualmente perturbados. El caso $n=1$ presenta un comportamiento intermedio entre $n=2$ y $n=3$: la influencia del desplazamiento inicial f desaparece, pero la de la velocidad g inicial se deja sentir permanentemente.

Para $n=2$, el dominio de dependencia de $u(x,y,t)$ de los datos iniciales es todo el círculo $B((x,y), ct)$ y el de influencia de la f y g iniciales en un punto $(x_0, y_0, 0)$ es todo el cono $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq c^2 t^2$. Para $n=3$ la influencia de $(x_0, y_0, z_0, 0)$ es sólo la superficie de un cono tetradimensional (no dibujable).



Consideremos ahora ondas en el espacio con simetría radial. Si suponemos que las f y g iniciales sólo dependen de r (distancia al origen), la solución entonces dependerá sólo de r y t . Escribiendo el laplaciano en esféricas y quitando los términos con derivadas respecto a los ángulos θ y ϕ llegamos a nuestro problema:

$$(P_r) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{rr} + \frac{2}{r} u_r] = 0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r,0) = f(r), u_t(r,0) = g(r) \end{cases}$$

Haciendo $v = ur$, la ecuación se transforma en: $v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0$.

Si u es acotada, aparece la condición de contorno: $v(0,t) = 0$.

Por tanto, el problema en las nuevas variables es:

$$(P_v) \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ v(r,0) = rf(r), v_t(r,0) = rg(r) \\ v(0,t) = 0 \end{cases}$$

que es la ecuación de las oscilaciones de una cuerda semiacotada con extremo fijo, resoluble por D'Alembert tras extender de forma impar respecto a 0 las funciones $F(r) = rf(r)$ y $G(r) = rg(r)$, es decir, si llamamos F^* y G^* a las extensiones, la solución de (P_r) es:

$$u(r,t) = \frac{1}{2r} [F^*(r+ct) + F^*(r-ct)] + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} G^*(s) ds, \quad (2)$$

solución que podemos escribir en la forma $u(r,t) = p(r+ct)/r + q(r-ct)/r$ e interpretar como la suma de dos ondas esféricas cuyos radios disminuyen o crecen a velocidad c . La magnitud de la perturbación propagada, a diferencia de la cuerda, es inversamente proporcional al radio. Se ve que la fórmula (2) da problemas en el origen, pero aplicando L'Hôpital y el teorema fundamental del cálculo tenemos:

$$u(r,t) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} [F^{*'}(ct) + F^{*'}(-ct)] + \frac{1}{2c} [G^*(ct) - G^*(-ct)] = F^{*'}(ct) + \frac{1}{c} G^*(ct)$$

$[u(0,t)$ podría ser discontinua aunque la f sea continua (si F^* no es C^1)]

[Las ondas para $n=2$ siempre dan más problemas de cálculo que las de $n=3$; por ejemplo, no hay cambios como el $v=ur$ que lleven a la ecuación de la cuerda la ecuación de ondas en el plano con simetría radial: $u_{tt} - c^2 [u_{rr} + u_r/r] = 0$].

Ejemplo 1. Resolvamos:

$$\begin{cases} u_{tt} - [u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] = 0, (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \\ u(x,y,z,0) = z, u_t(x,y,z,0) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (z+t\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi \right] + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (x^2+y^2+t^2\sin^2\theta+2t[x\sin\theta\cos\phi+y\sin\theta\sin\phi]) \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{2} \int_0^\pi (z+t\cos\theta) \sin\theta d\theta \right] + \frac{t}{2} \int_0^\pi (x^2+y^2+t^2\sin^2\theta) \sin\theta d\theta = \frac{\partial}{\partial t} [tz] + t(x^2+y^2 + \frac{2t^2}{3}) = z + tx^2 + ty^2 + \frac{2t^3}{3}$$

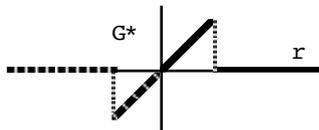
También podemos descomponer el problema en 2. El de $f=z, g=0$ se puede ver como uno para $n=1$: $u_1 = \frac{1}{2} [(z+t) + (z-t)] = z$. El de $f=0, g=x^2+y^2$, como uno de $n=2$:

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{r(x^2+y^2+r^2+2r[x\cos\theta+y\sin\theta])}{\sqrt{t^2-r^2}} dr d\theta = \int_0^t \frac{r(x^2+y^2+r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}} dr = \dots = tx^2 + ty^2 + \frac{2t^3}{3}.$$

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, r \geq 0, t \in \mathbb{R} \\ u(r,0) = 0, u_t(r,0) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Comencemos suponiendo que $n=3$. Sabemos que su solución es $u=v/r$, si v es la solución del problema para la cuerda infinita:



$$\begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, r, t \in \mathbb{R} \\ v(r,0) = 0, v_t(r,0) = G^*(r) = \begin{cases} 1, & |r| \leq 1 \\ 0, & |r| > 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow v(r,t) = \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} G^* ds$$

Estudiamos la oscilación para $t \geq 0$ de un punto M del espacio situado a una distancia $R > 1$ del origen. Si $t < R-1$ o si $t > R+1$ es claro que $v=0$. Si $t \in [R-1, R+1]$, la integral se reduce a:

$$\int_{R-t}^1 ds \rightarrow u(R,t) = \frac{1 - [R-t]^2}{4R}$$

Se ve que el punto M oscila sólo durante un determinado intervalo de tiempo. Se ve también que la amplitud máxima de la oscilación es inversamente proporcional a la distancia que separa M del origen.

Llegar a la solución utilizando la fórmula de Poisson es complicado. Es evidente como antes que $u=0$ si $t \notin (R-1, R+1)$ [$C \cap \{r \leq 1\} = \emptyset$]. En $(R-1, R+1)$ el valor de u viene dado por:

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_D dS = \frac{\text{área de } D}{4\pi t}$$

siendo D la intersección de la superficie esférica C de centro M y radio t con la esfera unidad. Buscando en libros de geometría:

$$\text{área de } D = 2\pi [1 - \cos\alpha] t^2 = 2\pi \left[1 - \frac{R^2 + t^2 - 1}{2tR} \right] t^2$$

que lleva a lo mismo. Sí es fácil con Poisson hallar $u(0,0,0,t)$:

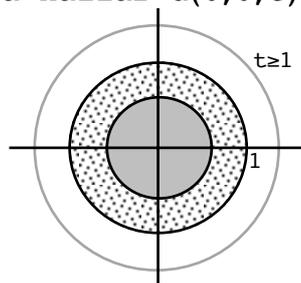
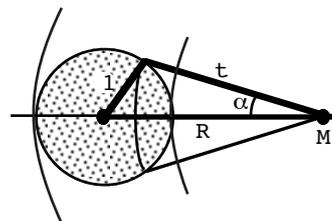
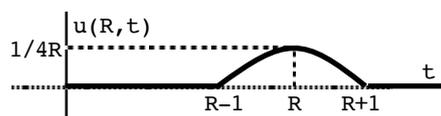
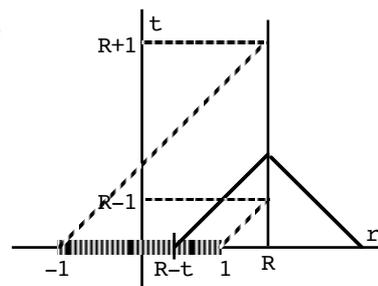
$$u(0,0,0,t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_C 1 dS = \frac{\text{área de } C}{4\pi t} = t \text{ si } t \leq 1, u(0,0,0,t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_C 0 dS = 0 \text{ si } t > 1$$

(que coincide con la expresión $u(0,t) = G^*(t)$ deducida por L'Hôpital; como era previsible, por la discontinuidad de la G , aparecen soluciones discontinuas; pero $u(M,t)$ era continua; en el origen se concentran las discontinuidades).

Miremos ahora el problema como si fuese para $n=2$. Los cálculos son siempre más difíciles, así que nos limitamos a hallar $u(0,0,t)$:

$$\begin{aligned} u(0,0,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{rg dr d\theta}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \int_0^t \frac{rg dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \\ &= \begin{cases} \int_0^t r [t^2 - r^2]^{-1/2} dr = t, & t \leq 1 \\ \int_0^1 r [t^2 - r^2]^{-1/2} dr = t - \sqrt{t^2 - 1}, & t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como debía suceder, $t - \sqrt{t^2 - 1} = 1/[t + \sqrt{t^2 - 1}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.



7. Problemas de contorno para EDOs

Un problema de valores iniciales para una ecuación ordinaria con coeficientes continuos tenía solución única. En concreto, la solución de una ecuación lineal de segundo orden queda determinada fijando el valor de la solución y de su derivada en un punto dado. Las cosas cambian si imponemos las condiciones en los dos extremos de un intervalo $[a,b]$. Estos **problemas de contorno** presentan propiedades muy diferentes. Por ejemplo, un problema tan sencillo y regular como

$$\begin{aligned}y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0, y(\pi) = 0\end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones: $y=C\sin t$, con C constante arbitraria.

Los problemas de contorno que aparecerán al utilizar el método de separación de variables del siguiente capítulo dependerán de un parámetro λ . Convendrá escribirlos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(py')' - qy + \lambda ry &= 0 \\ (P) \quad \alpha y(a) + \alpha' y'(a) &= 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) &= 0\end{aligned}$$

Ante un problema de este tipo nuestro objetivo será hallar los valores del parámetro λ para los que hay soluciones no triviales (**autovalores** de (P)) y esas soluciones no triviales correspondientes a cada λ (**autofunciones** de (P) asociadas a λ). Observemos que $y=0$ es siempre solución trivial de (P) y que, por la homogeneidad de la ecuación y de las condiciones de contorno, si $y(t)$ es solución de (P) también lo es $Cy(t)$ para cualquier C .

Comenzaremos en 7.1 estudiando varios ejemplos. Veremos que aparecen infinitos autovalores y que las autofunciones asociadas a λ distintos son ortogonales entre sí. En 7.2 precisaremos para qué tipo de problemas de contorno se mantienen esas propiedades. Serán los que se llaman **problemas de Sturm-Liouville**.

En la sección 7.3 veremos que cualquier función f continua y derivable a trozos se puede desarrollar en **serie de autofunciones** de un problema de Sturm-Liouville, lo que será muy útil en la resolución de EDPs. Este resultado generaliza los desarrollos de Fourier en series de senos y cosenos, cuyas propiedades básicas también veremos. Aunque la convergencia natural de estas series sea la de L^2 , nosotros nos limitaremos a hablar de convergencia puntual y uniforme.

Por último, en 7.4, estudiaremos problemas en que la ecuación (o alguna condición de contorno) sea no homogénea. Para ellos, ni $y=0$ es solución, ni lo son los múltiplos de una solución dada. La existencia de soluciones dependerá de si existen o no soluciones no triviales del homogéneo. Cuando haya solución única daremos una fórmula para las soluciones del no homogéneo en términos de la llamada **función de Green**.

7.1. Algunos ejemplos

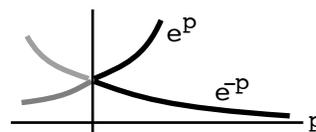
Veamos unos ejemplos de problemas de contorno homogéneos 'buenos' (1, 2 y 3) y 'malos' (el 4). El 5 es problema no homogéneo.

Ejemplo 1. $(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases} \quad \mu^2 + \lambda = 0 \rightarrow \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$

Busquemos sus autovalores y autofunciones.

$\lambda < 0$: la solución general de la ecuación es $y = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$, $p = \sqrt{-\lambda} > 0$
Imponiendo las condiciones de contorno:

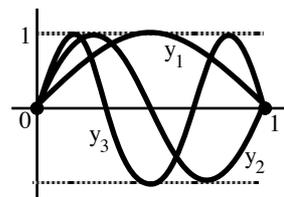
$$\left. \begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y(1) &= c_1 e^p + c_2 e^{-p} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow c_2 = -c_1 \rightarrow c_1 [e^p - e^{-p}] = 0$$



Por tanto $c_1 = c_2 = 0$ (pues $e^p - e^{-p} \neq 0$ si $p > 0$). Ningún $\lambda < 0$ es autovalor.

$\lambda = 0$: $y = c_1 + c_2 t \rightarrow \left. \begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y(1) &= c_2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 0$. $\lambda = 0$ tampoco es autovalor.

$\lambda > 0$: $y = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$, $w = \sqrt{\lambda} > 0 \rightarrow \left. \begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y(1) &= c_2 \sin w = 0 \end{aligned} \right\}$



Para tener solución no trivial debe ser $c_2 \neq 0$.

Por tanto, $w = \sqrt{\lambda} = n\pi$, $\lambda_n = n^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$

Para cada uno de estos λ_n hay soluciones no triviales $y_n = c_2 \sin n\pi t$.

Observemos que se cumple: $\int_0^1 \sin n\pi t \sin m\pi t dt = 0$, si $m \neq n$.

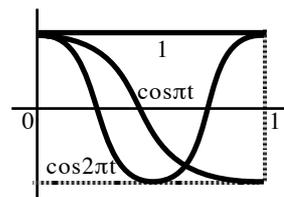
Resumiendo: (P_1) tiene una sucesión infinita de autovalores $\lambda_n = n^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$ Para cada λ_n las autofunciones asociadas forman un espacio vectorial de dimensión 1: $y_n = \{\sin n\pi t\}$. La n -ésima autofunción posee $n-1$ ceros en $(0, 1)$. Las autofunciones son ortogonales en $[0, 1]$ [respecto del producto escalar $(u, v) = \int_0^1 uv dt$].

Ejemplo 2. $(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0 \end{cases}$

$\lambda < 0 \rightarrow \left. \begin{aligned} y'(0) &= p[c_1 - c_2] = 0 \\ y'(1) &= p[c_1 e^p - c_2 e^{-p}] = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow c_2 = -c_1 \rightarrow c_1 [e^p - e^{-p}] = 0 \rightarrow y = 0$.

$\lambda = 0 \rightarrow \left. \begin{aligned} y'(0) &= c_2 = 0 \\ y'(1) &= c_2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda = 0$ autovalor con autofunción $y_0 = c_1$.

$\lambda > 0 \rightarrow \left. \begin{aligned} y'(0) &= w c_2 = 0 \\ y'(1) &= w c_1 \sin w = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2$ con $y_n = c_1 \cos n\pi t$.



Los $\lambda_n = n^2 \pi^2$ y las $y_n = \{\cos n\pi t\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ tienen las mismas propiedades subrayadas del ejemplo anterior.

Ejemplo 3. $(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1), y'(0) = y'(1) \end{cases}$

$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} c_1[1 - e^p] + c_2[1 - e^{-p}] = 0 \\ c_1[1 - e^p] - c_2[1 - e^{-p}] = 0 \end{cases}$ Como el determinante $\begin{vmatrix} 1 - e^p & 1 - e^{-p} \\ 1 - e^p & e^{-p} - 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el sistema sólo tiene la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. No autovalores.

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 = c_1 + c_2 \\ c_2 = c_2 \end{cases}$ se satisface para $c_2 = 0$ y cualquier c_1 : $y_0 = c_1$.

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} c_1[1 - \cos w] - c_2[\text{sen} w] = 0 \\ c_1[\text{sen} w] + c_2[1 - \cos w] = 0 \end{cases}$; $\begin{vmatrix} 1 - \cos w & -\text{sen} w \\ \text{sen} w & 1 - \cos w \end{vmatrix} = 2(1 - \cos w) = 0 \rightarrow \lambda_n = 4n^2\pi^2, n = 1, 2, \dots$

Para esos λ las condiciones de contorno se satisfacen para cualquier c_1 y cualquier c_2 . Autofunciones: $y_n = c_1 \cos 2n\pi t + c_2 \text{sen} 2n\pi t$.

Las propiedades de (P_3) son, pues, ligeramente diferentes:

Hay una sucesión infinita de autovalores $\lambda_n = 4n^2\pi^2, n = 0, 1, 2, \dots$. Ahora las autofunciones $y_0 = \{1\}, y_n = \{\cos 2n\pi t, \text{sen} 2n\pi t\}$ forman, si $n > 0$, un espacio vectorial de dimensión 2, pero sigue siendo cierto que las autofunciones asociadas a distintos autovalores son ortogonales.

Ejemplo 4. $(P_4) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(0), y(1) = -y'(1) \end{cases}$

Operando como en los otros ejemplos es fácil ver que las cosas son muy diferentes: todo λ es autovalor y en general no es cierto que las autofunciones asociadas a λ distintos sean ortogonales.

Ejemplo 5. $(P_5) \begin{cases} y'' + \lambda y = f(t) \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$ Lo estudiamos sólo si $\lambda > 0$.

La fórmula de variación de las constantes da la solución general:

$$y = c_1 \cos wt + c_2 \text{sen} wt + \frac{1}{w} \int_0^t f(s) \text{sen} w(t-s) ds, w = \sqrt{\lambda}$$

Imponiendo las condiciones de contorno se obtiene:

$$c_1 = 0, c_2 \text{sen} w + \frac{1}{w} \int_0^1 f(s) \text{sen} w(1-s) ds = 0$$

Podemos despejar c_2 de forma única si $\text{sen} w \neq 0$, es decir, si $\lambda \neq n^2\pi^2$. Si $\lambda = n^2\pi^2$, sólo hay solución si además se cumple:

$$\int_0^1 f(s) \text{sen} n\pi(1-s) ds = [-1]^n \int_0^1 f(s) \text{sen} n\pi s ds = 0$$

En caso contrario las condiciones no se cumplen para ningún c_2 .

Si λ no es autovalor del problema homogéneo asociado (P_1) , el problema no homogéneo (P_5) tiene solución única. Si λ es autovalor, el no homogéneo puede tener infinitas soluciones o no tener ninguna.

[según sea $\int_0^1 f \text{sen} n\pi s$ igual o distinto de cero]

7.2. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos

Generalicemos los ejemplos de 7.1. Sea la ecuación lineal de segundo orden dependiente de un parámetro real λ :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y + \lambda c(t)y = 0, \text{ con } a, b, c \in C[a, b], c(t) > 0 \text{ en } [a, b]$$

Conviene escribirla de otra forma: multiplicando por $e^{\int a}$ se tiene

$$[e^{\int a} y']' + b e^{\int a} y + \lambda c e^{\int a} y = [p y']' - q y + \lambda r y = 0, \text{ con } p \in C^1, q, r \in C \text{ y } p, r > 0$$

Las condiciones que imponemos son o separadas (si cada una afecta a los valores de y o de y' en uno de los extremos del intervalo) o periódicas (ligadas a la periodicidad de las soluciones):

Se llaman problemas de Sturm-Liouville regulares a cualquiera de los dos tipos siguientes:

$$(P_s) \begin{cases} [p y']' - q y + \lambda r y = 0 \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{condiciones separadas})$$

$$(P_p) \begin{cases} [p y']' - q y + \lambda r y = 0, p(a) = p(b) \\ y(a) = y(b), y'(a) = y'(b) \end{cases} \quad (\text{condiciones periódicas})$$

donde $p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p, r > 0$ en $[a, b], |\alpha| + |\alpha'|, |\beta| + |\beta'| \neq 0$

Los ejemplos 1 y 2 de 7.1 eran (P_s) y el 3 era (P_p) . El siguiente teorema generaliza sus propiedades a estos problemas de S-L que, en general, ya no serán resolubles:

Teor 1.

Los autovalores de un problema de Sturm-Liouville regular forman una sucesión infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ que tiende a ∞ . Las autofunciones asociadas a autovalores diferentes son ortogonales en $[a, b]$ respecto al peso r , es decir:

$$\int_a^b r y_n y_m dt = 0, \text{ si } y_n, y_m \text{ están asociadas a } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Las autofunciones $\{y_n\}$ de (P_s) son un espacio vectorial de dimensión 1 y cada y_n posee exactamente $n-1$ ceros en (a, b) .

La primera afirmación y la relativa a los ceros son difíciles de demostrar. Probamos las otras dos. Sean y_n, y_m asociadas a $\lambda_n \neq \lambda_m$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n r y_n &= -[p y_n']' + q y_n \\ \lambda_m r y_m &= -[p y_m']' + q y_m \end{aligned} \right\} \rightarrow (\text{multiplicando por } y_m \text{ e } y_n, \text{ restando e integrando})$$

$$[\lambda_n - \lambda_m] \int_a^b r y_n y_m dt = \int_a^b [y_n (p y_m')' - y_m (p y_n')'] dt = (\text{partes}) = [p (y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b$$

Imponiendo las condiciones de contorno, es fácil comprobar para (P_s) que el wronskiano $|W|(y_n, y_m)$ se anula en a y en b . Para (P_p) es claro que $|W|(b) = |W|(a)$. Por tanto, si $\lambda_n \neq \lambda_m$ se tiene la ortogonalidad. Si y_n, y_n^* están asociadas a λ_n , se deduce para (P_s) que $|W|(y_n, y_n^*) = 0$ en a (o en b), con lo que las dos soluciones dependen linealmente.

[Los problemas de Sturm-Liouville pueden generalizarse: en la demostración anterior se aprecia que lo esencial para la existencia de ortogonalidad es el hecho de que $[p|W|(y_n, y_m)]_a^b = 0$; esto sucede para otros tipos de condiciones de contorno además de las separadas y las periódicas (y para otras muchas no sucede); se llaman problemas autoadjuntos aquellos tales que $[p|W|(u, v)]_a^b = 0$ para todo par de funciones u, v que satisfacen sus condiciones de contorno; las autofunciones de estos problemas más generales son, pues, ortogonales; el término 'autoadjunto' responde al hecho de que si llamamos $Ly = [py']' - qy$ y $(u, v) = \int_a^b uv dt$, entonces para todo par de funciones que cumplen las condiciones de contorno se tiene que $(Lu, v) = (u, Lv)$: el operador L es autoadjunto].

En los ejemplos de 7.1 todos los autovalores eran ≥ 0 . Esto no es cierto en general, pero el siguiente teorema nos da condiciones suficientes para que esto suceda (lo que nos ahorrará cálculos):

Teor 2. Si $\alpha \cdot \alpha' \leq 0$, $\beta \cdot \beta' \geq 0$ y $q(t) \geq 0$ para $t \in [a, b]$ entonces todos los autovalores de (P_s) son mayores o iguales que 0. En particular, si $\alpha' = \beta' = 0$ [$y(a) = y(b) = 0$] son estrictamente positivos.

[en el ejemplo 1 de 7.1 nos ahorraría analizar los $\lambda \leq 0$, y en el 2 los $\lambda < 0$]
 Si y es la autofunción asociada a λ y $\alpha \cdot \alpha' \leq 0$, $\beta \cdot \beta' \geq 0$ entonces:

$$\lambda \int_a^b r y^2 dt = \int_a^b [-y(py')' + qy^2] dt = \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] dt - [pyy']_a^b \geq 0$$

pues

$$\int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \geq 0 \quad (p, q \geq 0), \quad -[pyy']_a^b = p(b) \frac{\beta}{\beta'} [y(b)]^2 - p(a) \frac{\alpha}{\alpha'} [y(a)]^2 \geq 0 \quad \text{si } \alpha', \beta' \neq 0,$$

$$[pyy'](a) = 0 \quad \text{si } \alpha' = 0 \quad \text{y} \quad [pyy'](b) = 0 \quad \text{si } \beta' = 0.$$

Como $r > 0$ es $\int_a^b r y^2 > 0$ y por tanto $\lambda \geq 0$.

Si $y(a) = y(b) = 0$, $y = cte$ no es autofunción $\Rightarrow y' \neq 0 \Rightarrow \int_a^b p(y')^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$.

Ejemplo 1. $(P_1) \begin{cases} y'' - 2y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0 \end{cases} \rightarrow [e^{-2t} y']' + \lambda e^{-2t} y = 0$

[El teor. 2 nos asegura que los $\lambda \geq 0$, pero aquí es poco útil, pues no nos ahora ningún caso, ya que $\mu^2 - 2\mu + \lambda = 0 \rightarrow \mu = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$ y hay que mirar $\lambda < = > 1$]

$\lambda < 1$: $y = c_1 e^{(1+p)t} + c_2 e^{(1-p)t}$, $y = c_1 (1+p) e^{(1+p)t} + c_2 (1-p) e^{(1-p)t}$, $p = \sqrt{1 - \lambda}$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1(1+p) + c_2(1-p) = 0 \\ c_1(1+p)e^{1+p} + c_2(1-p)e^{1-p} = 0 \end{cases} \rightarrow c_2(1-p)e[e^{-p} - e^p] = 0 \rightarrow p = 1 \quad (\lambda = 0), \quad y_0 = \{1\}$$

$\lambda = 1$: $y = [c_1 + c_2 t] e^t \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 1$ no autovalor.

$\lambda > 1$: $y = [c_1 \cos wt + c_2 \sen wt] e^t$, $w = \sqrt{\lambda - 1} \rightarrow y'(0) = c_1 + c_2 w = 0 \rightarrow$

$y'(1) = -c_2 \lambda e \sen w = 0 \rightarrow \lambda_n = 1 + n^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$, $y_n = \{e^t [\sen n\pi t - n\pi \cos n\pi t]\}$

Las autofunciones son ortogonales respecto al peso $r(t) = e^{-2t}$:

$$\int_0^1 e^{-t} [\sen n\pi t - n\pi \cos n\pi t] = \int_0^1 [\sen m\pi t - m\pi \cos m\pi t] [\sen n\pi t - n\pi \cos n\pi t] = 0 \quad (m \neq n)$$

La determinación exacta de los autovalores sólo será posible (y no siempre) si tenemos resuelta la ecuación. Sin embargo, se puede obtener información sobre su localización comparando el problema con otros resolubles. Por ejemplo, el siguiente teorema (que no demostramos) generaliza lo que ocurre con el problema:

$$\begin{cases} py'' - qy + \lambda ry = 0 \\ y(0)=0, y(1)=0 \end{cases}, p, q, r \text{ constantes} \rightarrow \lambda_n = \frac{pn^2\pi^2 + q}{r}$$

Teor 3. Aumentando p o q o disminuyendo r aumentan todos los autovalores positivos del problema $\begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ y(a)=0, y(b)=0 \end{cases}$.

Ejemplo 2. (P₂) $\begin{cases} [(1+t^2)y']' + ty + \lambda(1+t^2)y = 0 \\ y(0)=0, y(1)=0 \end{cases}$ $p=r=1+t^2, q=-t$.

Comparando con las ecuaciones: $y'' + y + 2\lambda y = 0$, $2y'' + \lambda y = 0$, se tiene que sus autovalores satisfacen: $\frac{1}{2} [n^2\pi^2 - 1] < \lambda_n < 2n^2\pi^2$.

En el estudio de algunos problemas de EDPs aparecen problemas singulares de Sturm-Liouville que no reúnen todas las condiciones de los regulares: p o r se anulan o son discontinuas en algún extremo del intervalo, el intervalo es infinito... Vamos a resolver tres de ellos (el 3 surge, por ejemplo, tratando ondas o calor en el espacio, el 4 si esas ecuaciones son en el plano y el 5 para Laplace en la esfera), en los que en uno o los dos extremos es p=0. En esos extremos las condiciones de contorno de un (P_s) son demasiado fuertes para tener autovalores y autofunciones como las de los regulares y en vez de ellas se pide acotación (que basta para garantizar la ortogonalidad, o sea, que $[p(y_n y_m' - y_m y_n')] \Big|_a^b = 0$).

Ejemplo 3. (P₃) $\begin{cases} ty'' + 2y' + \lambda ty = 0 \\ y \text{ acotada en } t=0, y(1)=0 \end{cases}$ $\rightarrow [t^2 y']' + \lambda t^2 y = 0$.

Haciendo el cambio $x=ty$ la ecuación se convierte en $x'' + \lambda x = 0 \rightarrow$ la solución general de la inicial para $\lambda > 0$ es $y = c_1 \frac{\cos wt}{t} + c_2 \frac{\sen wt}{t}$. y acotada $\rightarrow c_1 = 0$; $y(1)=0 \rightarrow \sen w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2\pi^2, n=1, 2, \dots, y_n = \left\{ \frac{\sen n\pi t}{t} \right\}$ [claramente ortogonales respecto al peso $r(t) = t^2$]

Es fácil ver directamente que ningún $\lambda \leq 0$ es autovalor o podemos evitar las cuentas ya que la demostración del teorema 2 es válida también para este tipo de problemas singulares, con lo que $\lambda > 0$.

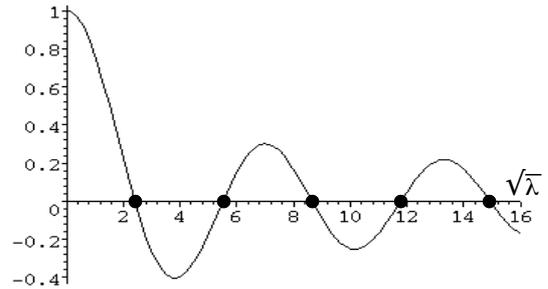
[Si hubiésemos impuesto $y(0)=y(1)=0$ la única solución sería $y=0 \forall \lambda$: las condiciones habrían sido demasiado fuertes]

Ejemplo 4. $(P_4) \begin{cases} ty''+y'+\lambda ty=0 \\ y \text{ acotada en } t=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow [ty']'+\lambda ty=0.$

Haciendo el cambio de variable independiente $s=\sqrt{\lambda}t$ (para $\lambda>0$), la ecuación se convierte en la de Bessel de orden 0:

$$s \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} + sy=0 \rightarrow y = c_1 J_0(s) + c_2 K_0(s) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}t) + c_2 K_0(\sqrt{\lambda}t)$$

La primera condición de contorno impone que $c_2=0$ (K_0 no acotada en $t=0$). De la segunda obtenemos $c_1 J_0(\sqrt{\lambda})=0$. Así, los autovalores son los $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ cuyas raíces son los infinitos ceros de J_0 [sabemos que están tabulados y que para n grande es $\sqrt{\lambda_n} \approx (n-1/4)\pi$]. Las autofunciones asociadas son $y_n = \{J_0(\sqrt{\lambda_n}t)\}$, que son ortogonales respecto al peso t .



Ejemplo 5. $(P_5) \begin{cases} [(1-t^2)y']'+\lambda y=0 \\ y \text{ acotada en } t=\pm 1 \end{cases}$

La ecuación es la de Legendre con $\lambda=p(p+1)$.

Como se sabe, sus únicas soluciones acotadas en 1 y -1 son los polinomios de Legendre P_n que aparecen cuando $p=n$, $n=0,1,2,\dots$

Los autovalores son $\lambda_n=n(n+1)$, $n=0,1,2,\dots$ y las autofunciones son los P_n , que cumplen como sabíamos $\int_{-1}^1 P_n P_m dt = 0$ si $m \neq n$ [$r(t)=1$].

7.3. Series de Fourier

Consideremos el problema de Sturm-Liouville separado regular:

$$(P_s) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

y sean $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ sus autofunciones asociadas a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$. La importante propiedad que estudiaremos en esta sección es que cualquier función f suficientemente regular en $[a, b]$ (luego precisaremos esta regularidad) puede ser desarrollada en serie de dichas autofunciones, es decir:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(t)$$

Supongamos que este desarrollo es válido y que la serie puede ser integrada término a término. Entonces, por ser las y_n ortogonales:

$$\int_a^b r f y_m dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r y_n y_m dt = c_m \int_a^b r y_m y_m dt$$

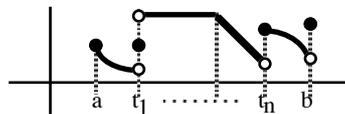
Es decir, si representamos el producto escalar respecto al peso r :

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b r u v dt \quad \text{debe ser} \quad c_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} \quad n=1, 2, \dots$$

El problema (nada elemental) reside en precisar para qué funciones f la serie de coeficientes así definidos (serie de Fourier de f) converge realmente hacia la función en el intervalo $[a, b]$. Aunque se pueden exigir condiciones más débiles a f nosotros pediremos que f sea C^1 a trozos, condición que será satisfecha por la gran mayoría de las funciones que aparecerán en problemas prácticos.

[Recordamos que $f(t)$ es C^1 a trozos en $[a, b]$ si podemos dividir el intervalo en subintervalos $[a, b] = [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_n, b]$ de modo que:

- i. f y f' son continuas en cada (t_k, t_{k+1}) ,
- ii. los límites laterales de f y f' en cada t_k existen y son finitos]



Teor 1. Si f es C^1 a trozos en $[a, b]$ entonces su serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n(t)$$

converge hacia $f(t)$ en los $t \in (a, b)$ en que f es continua y hacia $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)]$ en los $t \in (a, b)$ en que es discontinua.

[la demostración es difícil y no la hacemos]

Caso particular de estos desarrollos en serie de autofunciones son los desarrollos en series trigonométricas, que, porque son las que más a menudo nos aparecerán, estudiamos con más detalle.

Los autovalores y autofunciones del problema

$$(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

son $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$, $n=1, 2, \dots$ e $y_n = \left\{ \text{sen} \frac{n\pi t}{L} \right\}$.

La serie de Fourier en senos de una función dada f es entonces:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi t}{L}, \text{ con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n=1, 2, \dots \quad [1]$$

Ya que el peso es $r(t) \equiv 1$ y se tiene que $\langle Y_n, Y_n \rangle = \int_0^L \left[\text{sen} \frac{n\pi t}{L} \right]^2 dt = \frac{L}{2}$.

[Hemos escrito impropriadamente $f = \Sigma$; sabemos que la igualdad sólo se da en los puntos de $(0, L)$ en que f es continua; en 0 y L aún no sabemos]

Para $(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$ son $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$, $Y_n = \left\{ \text{cos} \frac{n\pi t}{L} \right\}$, $n=0, 1, \dots$ [$Y_0 = \{1\}$]

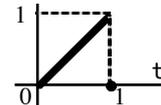
Por tanto, la serie de Fourier en cosenos de una f dada es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{cos} \frac{n\pi t}{L}, \text{ con } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{cos} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad [2]$$

Pues $\langle Y_0, Y_0 \rangle = \int_0^L 1^2 dt = L$ e $\langle Y_n, Y_n \rangle = \int_0^L \left[\text{cos} \frac{n\pi t}{L} \right]^2 dt = \frac{L}{2}$, si $n \geq 1$.

[escribimos $a_0/2$ para que la fórmula del a_n valga también para a_0]

Ejemplo 1. Sea $f(t) = t, t \in [0, 1]$.



Hallemos sus series en senos y en cosenos:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n} \text{sen} n\pi t, \text{ pues } b_n = 2 \int_0^1 t \text{sen} n\pi t dt = -\frac{2}{n\pi} \text{cos} n\pi, \quad n=1, 2, \dots$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n-1}}{n^2} \text{cos} n\pi t = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{cos} (2m-1)\pi t}{[2m-1]^2}$$

ya que $a_0 = 2 \int_0^1 t dt = 1$, $a_n = 2 \int_0^1 t \text{cos} n\pi t dt = \frac{2}{n^2 \pi^2} [\text{cos} n\pi - 1]$, $n=1, 2, \dots$

Ambas series, según el teorema 1, convergen hacia $f(t)$ para todo $t \in (0, 1)$. Más adelante sabremos lo que ocurre en los extremos.

[Otras dos familias de autofunciones en las que hay que desarrollar funciones bastantes veces en situaciones reales son las de los siguientes problemas:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \text{ con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, \quad y_n = \left\{ \text{sen} \frac{[2n-1]\pi t}{2L} \right\}, \quad \langle Y_n, Y_n \rangle = \frac{L}{2}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases} \text{ con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, \quad y_n = \left\{ \text{cos} \frac{[2n-1]\pi t}{2L} \right\}, \quad \langle Y_n, Y_n \rangle = \frac{L}{2}, \quad n=1, 2, \dots \quad]$$

La teoría de series de Fourier puede ser extendida para incluir autofunciones de problemas con condiciones periódicas. Así para:

$$(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-L) = y(L) \\ y'(-L) = y'(L) \end{cases}, \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n=0,1,\dots, \quad Y_0 = \{1\}, \quad Y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L} \right\}$$

se deduce la siguiente serie de Fourier en senos y cosenos:

$$[3] \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right], \quad \text{con coeficientes:}$$

$$[4] \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n=0,1,\dots \quad \text{y} \quad [5] \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n=1,2,\dots$$

ya que se cumple: $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0$ para todo m y n .

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}; \quad \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi t}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

[las fórmulas [3]-[5] también son válidas para el desarrollo de una f definida inicialmente en cualquier intervalo de la forma $[a, a+2L]$ (sin más que cambiar los límites a la integral) pues $\int_a^{a+2L} \cos^2 = \int_a^{a+2L} \sin^2 = L$]

Como en el teorema 1 la serie [3] converge hacia $f(t)$ en los puntos de continuidad de f . Además se puede decir lo que sucede en los extremos $-L$ y L (observando que la [3] define de hecho una función en todo \mathbf{R} que es $2L$ -periódica). Podemos hablar también sobre la convergencia uniforme de [3] (sin demostrar la afirmación):

Teor 2. Supongamos que f es C^1 a trozos en $[-L, L]$ y extendamos $f(t)$ fuera de $[-L, L]$ de forma $2L$ -periódica. Entonces la serie [3] con coeficientes dados por [4] y [5] converge hacia $f(t)$ en todos los puntos en que su extensión es continua (y hacia $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)]$ en los puntos de discontinuidad). Además f converge uniformemente en todo intervalo cerrado que no contenga discontinuidades de la f extendida. Por tanto, si f es continua y $f(-L) = f(L)$ entonces [3] converge uniformemente hacia f en todo el intervalo $[-L, L]$.

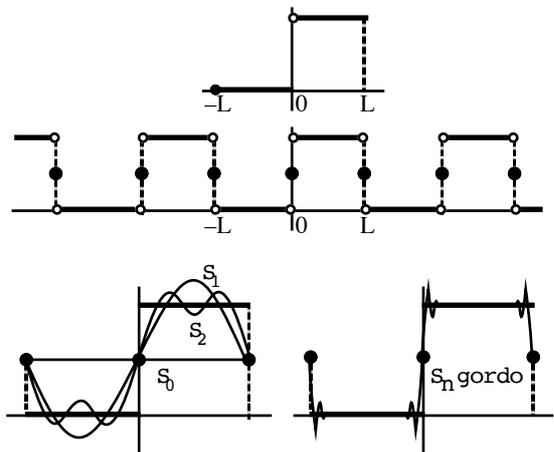
Ejemplo 2. Sea

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -L \leq t \leq 0 \\ L, & 0 < t \leq L \end{cases}.$$

Calculando su serie en senos y cosenos:

$$\frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[(2m-1)\pi t/L]}{2m-1}$$

La suma de esta serie es 0 en $(-L, 0)$, L en $(0, L)$ y $L/2$ en $-L, 0$ y L . En todo cerrado que no contenga estos puntos la convergencia es uniforme. Cerca de ellos la convergencia es mala y lenta.



Las fórmulas [1] y [2] obtenidas para los coeficientes de las series de senos y series de cosenos se pueden deducir como casos particulares de [4] y [5]. Dada una f inicialmente definida en $[0,L]$ podemos extenderla de forma impar o de forma par a $[-L,L]$. En el primer caso $f(t)\cos[n\pi t/L]$ es impar y $f(t)\sin[n\pi t/L]$ es par. En el segundo $f(t)\cos[n\pi t/L]$ es par y $f(t)\sin[n\pi t/L]$ es impar. Por tanto [4] se hace 0 y [5] se convierte en [1] en el primer caso, y en el segundo [5] se hace 0 y [4] se convierte en [2].

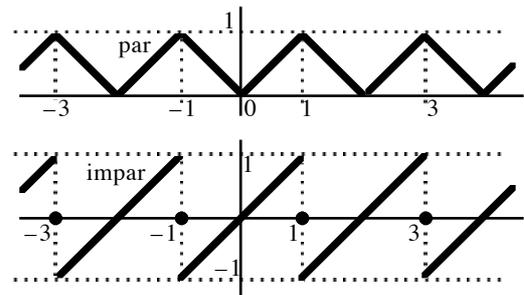
[Si definiésemos la f de cualquier otra forma en $[-L,0)$, la serie en senos y cosenos también convergería hacia f en los t de $(0,L)$ en que fuese continua].

Como consecuencia de lo anterior y del teorema 2 se tiene que:

La serie de cosenos de una f continua en $[0,L]$, con f' continua a trozos, converge uniformemente hacia f todo el intervalo. Si f además satisface que $f(0)=f(L)=0$ la serie en senos de f también converge uniformemente hacia f en todo $[0,L]$.

(si no fuese $f(0)=0$ ó $f(L)=0$ la f extendida de forma impar a $[-L,L]$ y luego de forma $2L$ -periódica no sería continua en 0 o en L).

En particular, la serie en senos del ejemplo 1 no converge uniformemente hacia f en $[0,1]$ (aunque sí lo hace en cualquier intervalo de la forma $[0,b]$ con $b<1$). La serie en cosenos sí converge uniformemente en $[0,1]$.



[aunque las series en cosenos se comporten mejor, resolviendo EDPs no podremos elegir

el tipo de series a utilizar: nos lo impondrán las condiciones del problema].

Observemos para acabar que también se pueden hacer desarrollos de Fourier en serie de autofunciones de diversos problemas de Sturm-Liouville singulares, en particular en las de los tres que vimos en la sección 2. Por ejemplo, podemos desarrollar una f (C^1 a trozos) en las autofunciones del (P_4) de aquella sección:

$$(P_4) \begin{cases} ty'' + y' + \lambda ty = 0 \\ y \text{ acotada en } t=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n} t), \text{ peso } r(t)=t$$

$$\rightarrow c_n = \frac{\int_0^1 t f(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} t) dt}{\int_0^1 t J_0^2(\sqrt{\lambda_n} t) dt} = \frac{2}{J_1^2(\sqrt{\lambda_n})} \int_0^1 t f(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} t) dt$$

pues

$$\int_0^1 t J_0^2(\sqrt{\lambda_n} t) dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\sqrt{\lambda_n}} u J_0^2(u) du = \frac{1}{2\lambda_n} [u^2 (J_0^2(u) + J_1^2(u))] \Big|_0^{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{J_1^2(\sqrt{\lambda_n})}{2}$$

ya que las J_n satisfacen $[t^n J_n]' = t^n J_{n-1} \rightarrow [t J_1]' = t J_0, J_0' = -J_1$

$$\rightarrow \int u J_0^2 = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \int u J_0 u J_1 = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \frac{1}{2} [u J_1]^2$$

7.4. Problemas no homogéneos. Función de Green.

Sea el problema no homogéneo con condiciones separadas:

$$(P_{nh}) \begin{cases} [p(t)y']' + g(t)y = f(t) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}, \quad p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b]$$

y llamemos (P_h) al problema homogéneo asociado ($f=0$). Más adelante consideraremos condiciones de contorno no homogéneas y el caso en que la ecuación depende de un parámetro. El siguiente teorema generaliza lo que ocurriría en el ejemplo 5 de 7.1:

Teor 1. El problema (P_{nh}) tiene solución única si y sólo si (P_h) tiene únicamente la solución $y=0$. Si (P_h) tiene soluciones no triviales $\{y_h\}$ entonces (P_{nh}) tiene infinitas soluciones o no tiene solución según sea, respectivamente, igual o distinta de cero la integral: $\int_a^b f(t) y_h(t) dt$

Imponiendo las condiciones de contorno a la solución general de la no homogénea $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$ y utilizando las propiedades de los sistemas algebraicos de ecuaciones se demuestra gran parte del teorema. Además si hay soluciones y de (P_{nh}) debe ser:

$$\int_a^b f y_h = \int_a^b [(py')' + gy] y_h = [p(y_h y' - y y_h')]_a^b + \int_a^b [(py_h')' + g y_h] y = 0$$

y se prueba que esta condición necesaria es también suficiente.

Veamos ahora una fórmula que para cualquier $f(t)$ nos da la solución de (P_{nh}) (en el caso de que ésta sea única), conocidas las soluciones de la ecuación homogénea (algo parecido a la fórmula de variación de las constantes para problemas de valores iniciales):

Teor 2. Supongamos que (P_h) tiene sólo la solución $y=0$ y sean y_1 e y_2 dos soluciones no triviales de la ecuación homogénea $[py']' + gy = 0$ satisfaciendo, respectivamente, $\alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0$ y $\beta y(b) + \beta' y'(b) = 0$. Entonces la solución única de (P_{nh}) es:

$$y(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds, \quad \text{con } G(t,s) = \begin{cases} \frac{y_1(s)y_2(t)}{p|W|(y_1, y_2)}, & a \leq s \leq t \\ \frac{y_1(t)y_2(s)}{p|W|(y_1, y_2)}, & t \leq s \leq b \end{cases}$$

A la $G(t,s)$ se le llama función de Green del problema.

[Conocida la G , dada cualquier f , basta realizar un par de integraciones para encontrar la solución del (P_{nh}) ; la idea de la función de Green se generaliza a otros problemas de ecuaciones ordinarias y en derivadas parciales].

[Observemos que el denominador que aparece en la G es constante:

$$[p(y_1 y_2' - y_2 y_1')] = y_1 [p(y_2')] - y_2 [p(y_1')] = -g y_1 y_2 + g y_2 y_1 = 0]$$

Comprobemos que la solución de (P_{nh}) viene dada por la expresión del teorema. Desarrollando la integral:

$$y(t) = y_1(t) \int_a^b \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{p(s)} ds + y_2(t) \int_a^t \frac{y_1(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{p(s)} ds - y_1(t) \int_a^t \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{p(s)} ds = cy_1 + y_p$$

Por tanto $y(t)$ es solución de la no homogénea $y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = \frac{f}{p}$.

Además como $y'(t) = y_1' \int_a^b \frac{y_2}{|W|} \frac{f}{p} + y_2' \int_a^t \frac{y_1}{|W|} \frac{f}{p} - y_1' \int_a^t \frac{y_2}{|W|} \frac{f}{p}$ se tiene que:

$$y(a) = cy_1(a), y'(a) = cy_1'(a), y(b) = ky_2(b), y'(b) = ky_2'(b) \text{ con } c = \int_a^b \frac{y_1 f}{|W| p}, k = \int_a^b \frac{y_2 f}{|W| p}$$

Como y_1, y_2 cumplen cada condición de contorno, también lo hace la y .

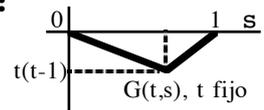
Ejemplo 1. $(P_1) \begin{cases} y'' = f(t) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ sólo lo satisface $y=0$.

Por tanto, (P_1) tiene solución única. Hallemos su función de Green: La solución general de la ecuación homogénea es $y = c_1 + c_2 t$.

De la primera condición de contorno $y(0) = c_1 = 0$. Podemos tomar $y_1 = t$.

De la segunda, $y(1) = c_1 + c_2 = 0$. Elegimos $y_2 = t-1$. Entonces:

$$|W|(t) = \begin{vmatrix} t & t-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, p(t) = 1, G(t,s) = \begin{cases} s(t-1), & 0 \leq s \leq t \\ t(s-1), & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Si, por ejemplo, $f(t) = 1$, la solución de (P_1) viene dada por:

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) 1 ds = (t-1) \int_0^t s ds + t \int_t^1 (s-1) ds = \frac{1}{2} [t^2 - t]$$

Para resolver un problema con una f dada, calcular la G puede ser un rodeo inútil. Por ejemplo, la última solución se podría obtener:

$$y'' = 1 \rightarrow y = c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} t^2 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2} [t^2 - t] \text{ como antes.}$$

Pero para cada nueva f habría que hallar la y_p e imponer $y(0) = y(1) = 0$. Observemos que la G de arriba para t fijo (o para s fijo, pues G es simétrica) es continua pero no derivable en $s=t$ y su 'derivada' segunda es $\delta(s-t)$. De hecho, esto es lo que sucede en general:

Teor 3. $G(t,s)$ es la solución para $t \in (a,b)$ fijo del problema:

$$\begin{cases} [p(s)y']' + g(s)y = \delta(s-t) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

[La prueba es trivial: $\int_0^1 G(s,u) \delta(u-t) ds = G(s,t) = G(t,s)$].

Podemos hallar la G del (P_1) siguiendo este camino más largo [pero que es el que se generaliza a las EDPs; además da una forma de hallar la G en problemas autoadjuntos para los que no es válida la fórmula del teorema 1]:

$$G(s) = \begin{cases} c_1 + c_2 s, & y(0) = c_1 = 0 \rightarrow y = c_2 s, s \leq t \\ k_1 + k_2 s, & y(1) = k_1 + k_2 = 0 \rightarrow y = k_2 [s-1], s \geq t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(t^-) = c_2 t = k_2 [t-1] = y(t^+) \\ y'(t^+) - y'(t^-) = k_2 - c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = t-1 \\ k_2 = t \end{cases}$$

Por Laplace: si $L[G(s)] = H(p)$ y $G'(0) = a, p^2 H - a = e^{-tp} \rightarrow G(s) = as + u_t(s)(s-t)$

$$\rightarrow G(1) = a + 1 - t = 0 \rightarrow G(s) = (t-1)s + u_t(s)(s-t) = \begin{cases} s(t-1), & 0 \leq s \leq t \\ st - s + s - t, & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

[La f y la p que aparecen en los teoremas 1 y 2 son las de la ecuación escrita en la forma $[py']' + gy = f$, que se suele denominar 'forma auto-ajunta' o 'forma Sturm-Liouville'; en la mayoría de los problemas que aparecerán al estudiar EDPs por el método de separación de variables del próximo capítulo la p (y el peso r) será 1 (como en el ejemplo anterior), pero no olvidemos que en ocasiones deberemos reescribir la ecuación].

Sea ahora el problema con condiciones de contorno no homogéneas:

$$(P_{AB}) \begin{cases} [p(t)y']' + g(t)y = f(t) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = A, \beta y(b) + \beta' y'(b) = B \end{cases}$$

y llamemos (P_h) al homogéneo obtenido haciendo $f(t) \equiv 0$, $A=0$ y $B=0$. Hallando una función v que satisfaga sus condiciones de contorno este (P_{AB}) se puede reducir a otro con las condiciones homogéneas: haciendo $w = y - v$ se obtiene (gracias a la linealidad de la ecuación y de las condiciones de contorno) el problema:

$$(P_w) \begin{cases} [p(t)w']' + g(t)w = f(t) - [p(t)v']' - g(t)v \\ \alpha w(a) + \alpha' w'(a) = 0, \beta w(b) + \beta' w'(b) = 0 \end{cases}$$

que es del tipo (P_{nh}) ya analizado. Deducimos, por ejemplo, que:

$$(P_{AB}) \text{ tiene solución única} \Leftrightarrow (P_h) \text{ tiene sólo la solución } y \equiv 0$$

[y si (P_h) tiene infinitas soluciones, (P_{AB}) puede tener infinitas o ninguna]

Ejemplo 2.

$$(P_a) \begin{cases} ty'' - y' = 0 \\ y'(1) + ay(1) = 0, y(2) = 1 \end{cases}$$

Discutamos, según los valores de a , cuántas soluciones tiene.

[Aunque la ecuación sea homogénea, la presencia de la condición de contorno no homogénea hace que (P_a) tenga las típicas propiedades de un no homogéneo].

Comenzamos analizando cuántas soluciones tiene el homogéneo:

$$y = c_1 + c_2 t^2 \rightarrow \begin{cases} y'(1) + ay(1) = 2c_2 + ac_1 + ac_2 = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [2-3a]c_2 = 0 \\ c_1 = -4c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \text{ si } a \neq 2/3 \\ y = \{t^2 - 4\} \text{ si } a = 2/3 \end{cases}$$

Por tanto, si $a \neq 2/3$ el problema (P_a) tiene solución única.

Para ver lo que sucede si $a = 2/3$ lo más corto es verlo directamente:

$$\begin{cases} y'(1) + \frac{2}{3}y(1) = \frac{2}{3}[c_1 + 4c_2] = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{no existe solución}$$

También podríamos convertirlo en un (P_{nh}) y aplicar el teorema 1:

Buscamos una v de la forma $v = Mt + N$ que satisfaga las condiciones:

$$\begin{cases} v'(1) + \frac{2}{3}v(1) = \frac{1}{3}[5M + 2N] = 0 \\ v(2) = 2M + N = 1 \end{cases} \rightarrow v = 5 - 2t, w = u - v \rightarrow (P_w) \begin{cases} tw'' - w' = -2 \\ w'(1) + \frac{2}{3}w(1) = w(2) = 0 \end{cases}$$

Escribimos la ecuación en la forma $[\frac{w'}{t}]' = -\frac{2}{t^2}$ y usamos el teorema 1:

$$\int_1^2 [-\frac{2}{t^2}][t^2 - 4] dt \neq 0 \Rightarrow (P_w) \text{ [y por tanto } (P_{2/3}) \text{] no tiene solución.}$$

Para acabar consideremos el problema de S-L no homogéneo:

$$(P_\lambda) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = f(t) \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

y sea (P_s) el homogéneo asociado ($f=0$). Para cada valor de λ tenemos un problema de los ya vistos (con $g=-q+\lambda r$). Se tiene por tanto:

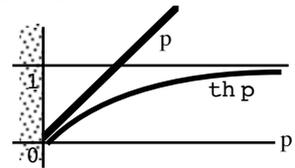
(P_λ) tiene solución única [calculable a partir de la función de Green $G_\lambda(t,s)$] $\Leftrightarrow \lambda$ no es autovalor de (P_s) .
 Si $\lambda=\lambda_n$ autovalor con autofunción $\{y_n\}$, (P_λ) no tiene solución o tiene infinitas dependiendo de que $\int_a^b f y_n dt$ sea $\neq 0$ ó $=0$.

Ejemplo 3. $(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = t \\ y(0) = y'(1) - y(1) = 0 \end{cases}$ ¿Cuántas soluciones tiene?

Hallemos los autovalores y autofunciones del homogéneo.

Como $\beta\beta' < 0$ podrían aparecer autovalores negativos.

$\lambda < 0$: $y = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_2(p[e^p + e^{-p}] - [e^p - e^{-p}]) = 0 \end{cases} \rightarrow$



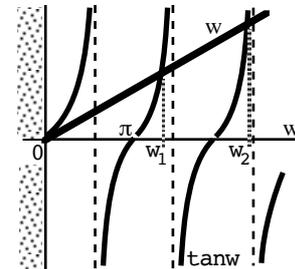
como no existe $p > 0$ con $p = thp$ [(thp)'(0)=1] $\rightarrow y \equiv 0$.

$\lambda = 0$: $y = c_1 + c_2 t \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = c_2 \end{cases} \rightarrow \lambda_0 = 0$ autovalor con autofunción $y_0 = \{t\}$.

$\lambda > 0$: $y = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2(\sin w - w \cos w) = 0 \end{cases}$

\rightarrow existen infinitos w_n con $w_n = \tan w_n \rightarrow$

$\lambda_n = w_n^2$ con autofunciones $y_n = \{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)\}$.



Por tanto (la ecuación está escrita ya en forma autoadjunta):

Si $\lambda \neq \lambda_n$ hay solución única de (P_3) .

Si $\lambda = 0$, como $\int_0^1 t t dt \neq 0$, (P_3) no tiene solución.

Si $\lambda = \lambda_n, n=1,2,\dots$, $\int_0^1 t \sin w_n t dt = \frac{1}{w_n} [\sin w_n - w_n \cos w_n] = 0 \rightarrow$ infinitas soluciones.

[podíamos ahorrarnos el cálculo de la integral pues y_0 e y_n son ortogonales]

8. Separación de variables

Este capítulo está dedicado a uno de los más viejos métodos de resolución de EDPs (método de separación de variables) que nos va a permitir encontrar la solución (en forma de serie de Fourier) de gran parte de los problemas clásicos planteados en el capítulo 5. Resolveremos la ecuación del calor con diferentes condiciones de contorno, la de la cuerda acotada (vista en 6.1), la de Laplace en un rectángulo y en un círculo,... Ello será posible porque las ecuaciones y los dominios que consideraremos son simples, pero hay muchos problemas no resolubles por este método.

En la sección 8.1 resolveremos diferentes problemas para EDPs **homogéneas** en dos variables. Las condiciones adicionales serán todas homogéneas menos una (necesariamente serán homogéneas las de contorno, si no haremos un cambio de variable). Básicamente esta será la técnica utilizada: buscaremos soluciones de la ecuación que sean productos de funciones de cada variable [por ejemplo, $u(x,y)=X(x)Y(y)$] y que cumplan todas las condiciones homogéneas; obtendremos así infinitas soluciones de ese tipo resolviendo un problema de Sturm-Liouville y otra EDO; construiremos una serie a partir de ellas [$u(x,y) = \sum c_n X_n(x)Y_n(y)$], cuyos coeficientes c_n arbitrarios se determinarán imponiendo la condición no homogénea aún no utilizada (bastará para ello desarrollar una función dada en serie de autofunciones del problema de Sturm-Liouville citado). La presencia de series en el proceso anterior exigiría justificar todas las cuestiones relativas a su convergencia, pero nosotros no entraremos en ello.

En la sección 8.2 atacaremos los problemas **no homogéneos** buscando también una serie solución. Probaremos en la ecuación una serie cuyos términos serán productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable. Resolviendo la familia infinita resultante de EDOs lineales no homogéneas con las condiciones que se deducen de las condiciones adicionales (iniciales o de contorno según los casos), se obtendrá la solución (formal) del problema.

En 8.3 extenderemos el método de separación de variables a algunos problemas para ecuaciones en **tres variables**. La técnica será prácticamente la misma una vez definidas las series de Fourier dobles. Veremos ejemplos en que aparecen de forma natural los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel.

8.1. Separación de variables para los problemas clásicos.

Consideremos primero varios problemas para la ecuación del calor.

$$\text{Sea } [P_1] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 & [1] \\ u(x, 0) = f(x) & & [2] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & & [3] \end{cases}$$

Busquemos soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Debe ser $XT' - kX''T = 0$, es decir, $X''/X = T'/(kT)$. Como el primer miembro es función sólo de x y el segundo lo es sólo de t ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\lambda$$

Así obtenemos una EDO para $X(x)$ y otra para $T(t)$: $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & [4] \\ T' + \lambda k T = 0 & [5] \end{cases}$.

El producto de una solución de [4] por una de [5] es entonces una solución de [1], cualquiera que sea λ . Sin embargo, nos interesan sólo las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \text{ (si fuese } T(t) \equiv 0 \text{ tendríamos } u \equiv 0 \text{ y no se cumpliría la condición inicial). Análogamente, debe ser } X(L) = 0.$$

Nos interesan, pues, las soluciones (no triviales) del problema:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}.$$

Llevando estos valores de λ a la ecuación [5] obtenemos:

$$T' = -\frac{kn^2\pi^2}{L^2} T \rightarrow T_n = \left\{ e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \right\}.$$

Hemos deducido hasta ahora que para cada n las funciones

$$u_n(x, t) = \left\{ e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

son soluciones de [1] que satisfacen también las condiciones de contorno [3]. Sabemos que una combinación lineal finita de estas u_n también cumple [1] y [3]. Pero consideremos la serie infinita:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad [6]$$

y supongamos que converge y que satisface también [1] y [3]. Si queremos que además se cumpla la condición inicial [2] debe ser:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \Rightarrow c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad [7]$$

pues la serie es precisamente la serie de Fourier en senos de f (si es que f admite desarrollo de Fourier).

Este método de separación de variables nos proporciona una posible solución de $[P_1]$: la serie [6] con coeficientes dados por [7]. Pero esta solución es sólo formal mientras no se compruebe que la convergencia de la serie es suficientemente buena para asegurar que realmente cumple la ecuación y todas las demás condiciones (en principio una suma infinita de funciones derivables podría ser no derivable). Si $f(x)$ es C^1 a trozos, se puede probar que la serie converge en $[0,L] \times (0,\infty)$ hacia una función continua y que u_t y u_{xx} se pueden calcular derivando término a término (y así se satisface la ecuación). Para $x=0$ y $x=L$ está claro que la u se anula. Y la condición inicial se satisface en el siguiente sentido: la $u(x,t)$ definida por la serie para $t>0$ y por $u(x,0)=f(x)$ es una función continua salvo en los puntos de $t=0$ en que la f es discontinua.

[Observemos que aunque f sea discontinua, la solución es continua para valores de $t>0$ arbitrariamente pequeños: a diferencia de lo que ocurriría en la ecuación de ondas, las discontinuidades desaparecen aquí instantáneamente].

Observemos también que como cada $u_n \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ (y es buena la convergencia), se tiene que $u(x,t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $x \in [0,L]$ (la barra tiende a ponerse a 0 grados, como era de esperar).

Supongamos ahora que las condiciones [3] se sustituyen por:

$$u(0,t)=T_1, \quad u(L,t)=T_2, \quad T_1 \text{ y } T_2 \text{ constantes}$$

Comenzaremos haciendo las condiciones de contorno homogéneas. Una v que las satisface es:

$$v(x) = T_1 + [T_2 - T_1] \frac{x}{L}$$

Haciendo $w = u - v$, nuestro problema se convierte en:

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0, & x \in (0,L), t > 0 \\ w(x,0) = f(x) - v(x) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 \end{cases}$$

y, por tanto:

$$u(x,t) = T_1 + [T_2 - T_1] \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

con

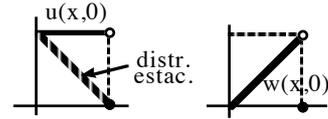
$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - T_1 - [T_2 - T_1] \frac{x}{L}] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=1,2,\dots$$

Esta $v(x)$ tiene un significado físico claro: como $w \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, $v(x)$ es la distribución estacionaria de temperaturas hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

[Si T_1 y T_2 fuesen funciones de t , la $v(x,t)$ definida como arriba seguiría cumpliendo las condiciones de contorno, pero la ecuación para la w sería no homogénea y para resolver el problema resultante hay que esperar a la próxima sección; dicha v , dependiente de t , pierde además su significado físico].

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = 1 \\ u(0,t) = 1, u(1,t) = 0 \end{cases}$$



Operando se llega a: $u(x,t) = 1-x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \text{sen}(n\pi x)$

y la distribución estacionaria hacia la que tiende es $v(x) = 1-x$.

[No nos importa que para $t=0$ sea incoherente el dato inicial con el de contorno en $x=1$; la solución será una función continua para $t>0$].

Resolvemos ahora el problema de la varilla con extremos aislados:

$$[P_2] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0,L), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables (es la misma ecuación) aparecen las EDOs de antes. Pero ahora cambian las condiciones de contorno de la X:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad X_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad [X_0 = \{1\}].$$

Para estos valores de λ se tienen las $T_n = \{e^{-kn^2\pi^2 t/L^2}\} \quad [T_0 = \{1\}]$.

Así pues, probamos la serie:

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Si queremos que se satisfaga la condición inicial:

$$u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

con lo que los c_n desconocidos son los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de f :

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=0,1,2,\dots$$

Observemos que de nuevo la solución se puede interpretar como la suma de una distribución de temperaturas estacionaria [$c_0/2$] y una distribución transitoria que tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Era esperable que toda la varilla (aislada) tendiese a la misma temperatura y que esta fuese el valor medio de las temperaturas iniciales:

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

[Si las condiciones de contorno hubiesen sido $u_x(0,t) = F_0, u_x(L,t) = F_L$ (flujo constante dado en los extremos), no se puede encontrar una $v(x)$ que sea una recta (en general) y la ecuación en w resulta no homogénea].

En el tercer problema para la ecuación del calor que tratamos la condición de $x=0$ representa la radiación libre hacia un medio a 0 grados (el flujo de calor es proporcional a la temperatura en $x=0$; si es positiva el calor sale y entra si es negativa). En $x=1$ fijamos el flujo de calor que entra en la varilla (al ser $u_x > 0$ las temperaturas crecen cerca de $x=1$ y el flujo es hacia la izquierda)

$$[P_3] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) - au(0,t) = 0, & a > 0 \\ u_x(1,t) = 1 \end{cases}$$

Vimos en el capítulo 5 que tiene solución única. Para resolverlo lo primero, como siempre, es conseguir condiciones de contorno que sean homogéneas. Tanteando se ve que $v = x + 1/a$ las satisface.

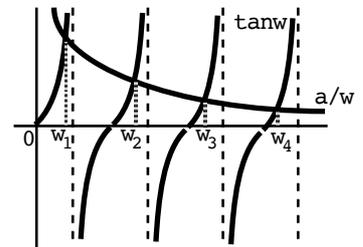
$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0 \\ w(x,0) = f(x) - x - \frac{1}{a} \\ w_x(0,t) - aw(0,t) = w_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables se llega a $T' + \lambda kT = 0$ y al problema de contorno:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - aX(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \text{ que no tiene autovalores } \leq 0. \text{ Para } \lambda > 0:$$

$$X = c_1 \cos wx + c_2 \sen wx, \quad w = \sqrt{\lambda} \rightarrow X'(0) - aX(0) = c_2 w - ac_1 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{a}{w} c_1$$

$$\rightarrow X'(1) = c_1 \left(\frac{a}{w} \cos w - \sen w \right) = 0 \rightarrow \tan w = \frac{a}{w}$$



Esta ecuación trascendente no se puede resolver pero está claro que hay infinitos autovalores λ_n positivos (que se pueden aproximar numéricamente).

Las autofunciones son $X_n = \left\{ \cos \sqrt{\lambda_n} x + \frac{a}{\sqrt{\lambda_n}} \sen \sqrt{\lambda_n} x \right\}$.

Yendo a la ecuación en T : $T_n = \{ e^{-\lambda_n kt} \} \rightarrow w = \sum c_n e^{-\lambda_n kt} X_n(x)$

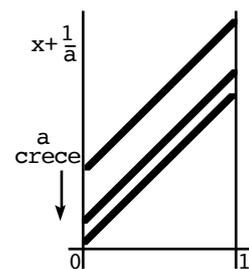
Imponiendo el dato inicial se determinan los c_n :

$$c_n = \frac{\int_0^1 \left[f(x) - x - \frac{1}{a} \right] X_n(x) dx}{\int_0^1 [X_n(x)]^2 dx} \quad [\text{serían aproximados al serlo los } \lambda_n]$$

Sí es calculable la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas en la varilla:

$$u(x,t) = w(x,t) + x + \frac{1}{a} \rightarrow x + \frac{1}{a} \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

[la temperatura final de la varilla es menor cuanto mayor sea el a , es decir, cuanto más fuertemente irradie su extremo]



Resolvamos el problema para la cuerda vibrante con extremos fijos (ya resuelto en 6.1 extendiendo y aplicando D'Alembert):

$$[P_4] \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = X(x)T(t) \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases}$$

Las condiciones de contorno imponen $X(0) = X(L) = 0$ y por tanto:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las soluciones correspondientes para T son combinaciones lineales de $\sin(n\pi ct/L)$ y $\cos(n\pi ct/L)$. Así, funciones de la forma:

$$u_n(x, t) = \left[k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

satisfacen la EDP y las condiciones de contorno. Probamos, pues:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

donde k_n y c_n son constantes que deberemos escoger de modo que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \rightarrow k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

y suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

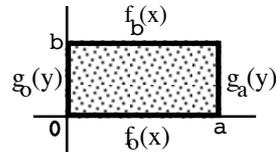
pues $(n\pi c/L)c_n$ son los coeficientes del desarrollo de g en senos.

Tenemos pues una solución, formal en principio, aunque se puede comprobar que de hecho las series convergen y satisfacen realmente la ecuación si f y g cumplen las condiciones vistas en 6.1, es decir, si sus extensiones impares respecto a 0 y L son C^2 y C^1 , respectivamente (si f o g no son tan regulares pero podemos calcular la serie solución, esta representará una solución generalizada o débil de las que hablamos en aquella sección).

Para una serie de cuestiones (cálculos de valores concretos, dibujos,...) es preferible usar la fórmula de D'Alembert, pero otras propiedades de la solución se ven mejor a partir de la serie. Por ejemplo, como cada sumando es una función periódica en t de periodo $2L/c$, también tiene este periodo la u . Observemos además que la solución aparece como una combinación infinita de 'modos naturales de vibración' $[\sin(n\pi x/L)]$ cada uno de los cuales vibra con una frecuencia $n\pi c/L$ (las 'frecuencias naturales' de la cuerda). En términos acústicos u_1 nos da el tono fundamental (su frecuencia es $\pi c/L$) y los demás son los armónicos (vibraciones de frecuencia múltiplo de la anterior).

Utilicemos, por último, el método de separación de variables en el estudio de diversos problemas relativos a la ecuación de Laplace en recintos especialmente simples, comenzando por el problema de Dirichlet en un rectángulo, es decir:

$$[P_5] \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = f_0(x), u(x,b) = f_b(x) \\ u(0,y) = g_0(y), u(a,y) = g_a(y) \end{cases}$$



Sabemos que basta resolver los 4 subproblemas que se obtienen al hacer 3 condiciones de contorno igual a 0. Resolvamos, por ejemplo:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = f_0(x) \\ u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0 \end{cases} \quad u(x,y) = X(x)Y(y) \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$$

De $u(0,y) = u(a,y) = 0$ se obtiene $X(0) = X(a) = 0$, con lo que el problema de contorno para la X tiene solución no trivial para

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \left\{ \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \right\}, \quad n=1,2,\dots$$

Para esos valores de λ es $Y_n(y) = c_1 e^{n\pi y/a} + c_2 e^{-n\pi y/a}$. La condición de contorno homogénea que nos falta $u(x,b) = 0$ impone que $Y(b) = 0$. Luego nos interesan las Y_n que la cumple que se pueden escribir:

$$Y_n(y) = \left\{ \text{sh} \frac{n\pi [b-y]}{a} \right\}$$

Probamos:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi [b-y]}{a} \text{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

Para satisfacer la condición de contorno no homogénea que falta:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} \text{sen} \frac{n\pi x}{a} = f_0(x) \rightarrow c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{a} dx$$

Y análogamente se resolverían los otros 3 subproblemas de $[P_5]$.

En dos de ellos la Y proporciona las autofunciones y en el otro las vuelve a dar la X (sus papeles son intercambiables). En calor y ondas el problema de contorno siempre era el de la X (las T tenían condiciones iniciales). Para Laplace en polares (los siguientes ejemplos), aunque tanto la R como la Θ tendrán condiciones de contorno, la EDO de la Θ será más sencilla y la elegiremos siempre para obtener las autofunciones.

Para resolver problemas en círculos nos interesa expresar el Laplaciano en polares ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$). Como,

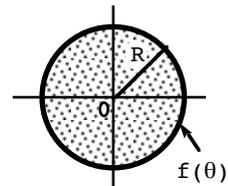
$$\begin{aligned} u_r &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta; \quad u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta \\ u_{\theta\theta} &= u_{xx} r^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy} r^2 \sin \theta \cos \theta + u_{yy} r^2 \cos^2 \theta - u_x r \cos \theta - u_y r \sin \theta \end{aligned}$$

deducimos que:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

Resolvamos el problema de Dirichlet en un círculo:

$$[P_6] \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta) & , \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



$$u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \rightarrow \frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Parece que no hay condiciones para la Θ , pero está claro que la solución $u(r, \theta)$ debe ser 2π -periódica en θ , o lo que es lo mismo, debe ser $\Theta(0) = \Theta(2\pi), \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$. Este problema de Sturm-Liouville periódico tiene los siguientes autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \Theta_0(\theta) = \{1\}, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

Las soluciones correspondientes de R son (ecuación de Euler):

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r \quad \text{y} \quad R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \quad \text{si } n \geq 1.$$

Parece lógico imponer por consideraciones físicas que la solución debe permanecer acotada cuando $r \rightarrow 0$ (y matemáticamente la solución también debe estarlo si debe ser derivable), así que debe ser $c_2 = 0$ en ambos casos. Por tanto, probamos soluciones de la forma:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

Debe ser

$$u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

y por tanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, \dots, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie y operando formalmente:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta - \phi) \right] f(\phi) \, d\phi$$

Operando también se puede demostrar la identidad:

$$[R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta] \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n\theta \right] = R^2 - r^2$$

con lo que la solución de $[P_6]$ se puede expresar:

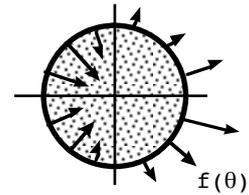
$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) \, d\phi \quad \text{fórmula integral de Poisson}$$

Haciendo $r=0$ deducimos que $u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \, d\phi$: si $\Delta u = 0$, el valor de u en el centro de un círculo es el valor medio de u sobre la frontera.

Como en los otros casos habría que probar que las u obtenidas para $[P_5]$ y $[P_6]$ son realmente soluciones. Para $[P_6]$ se demuestra que si f es continua a trozos, la u satisface $\Delta u = 0$ en $r < R$ y que alcanza el valor de contorno con continuidad en todos θ en que f es continua (y que sigue habiendo unicidad) [análogo para $[P_5]$].

Resolvamos ahora el problema de Neumann en un círculo:

$$[P_7] \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } r < R \\ u_r(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



La solución que probamos es como antes:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

pero ahora es diferente la condición de contorno que falta:

$$u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$$

Así que:

$$a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n=1, 2, \dots$$

siempre que no tenga término independiente el desarrollo en senos y cosenos de $f(\theta)$; es decir, una condición necesaria para que el problema se pueda resolver por este método es que se cumpla:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = 0 \quad [\text{confirma lo visto en 5.3: debía ser } \oint_{\partial D} f \, ds = \iint_D F \, dx dy = 0]$$

Además, a_0 queda indeterminado [ya sabíamos desde 5.3 que un problema de Neumann tenía unicidad salvo constante].

Ejemplo 2. $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } r < 1 \\ u_r(1, \theta) = \sin^3 \theta \end{cases}$ No es necesario calcular integrales:

$$u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = \sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta}{4} - \frac{\sin 3\theta}{4}$$

Por tanto, $b_1 = 3/4$, $b_3 = -1/12$ y los demás coeficientes son cero.

La solución es: $u(r, \theta) = C + \frac{3}{4} r \sin \theta - \frac{1}{12} r^3 \sin 3\theta$, con C cualquiera.

Resolvemos para acabar un problema con condiciones mixtas:

$$[P_8] \begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, \theta \in (0, \pi/2) \\ u_r(1, \theta) = f(\theta) \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi/2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \Theta'(0) = \Theta(\pi/2) = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0, R \text{ acotada en } r=0 \end{cases}$$

Los autovalores y autofunciones son (citados en la página 37):

$$\lambda_n = (2n-1)^2, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos(2n-1)\theta\}, \quad n=1, 2, \dots$$

Resolviendo la ecuación en R y utilizando la acotación:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) c_n \cos(2n-1)\theta = f(\theta)$$

$$\rightarrow c_n = \frac{4}{[2n-1]\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos(2n-1)\theta \, d\theta, \quad n=1, 2, \dots \quad (\text{solución única})$$

8.2. Problemas no homogéneos

Ejemplo 1.

$$[P_1] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t), & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(tomamos $L=\pi$ para abreviar las expresiones, pero no se pierde generalidad pues un sencillo cambio de variable lleva $[0,L]$ a $[0,\pi]$).

Aunque no es necesario, descomponemos $[P_1]$ en dos subproblemas $[P_h]$ y $[P_F]$, el primero con $F=0$ (ya resuelto) y el otro con $f=0$:

$$[P_F] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t), & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Las autofunciones del $[P_h]$ eran $\{\text{sen} nx\}$, $n=1,2,\dots$. Probamos en $[P_F]$ la siguiente serie que ya satisface las condiciones de contorno:

$$u_F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{sen} nx$$

con las $T_n(t)$ funciones a determinar (si $T_n = c_n e^{-kn^2 t}$, funciones que nos aparecieron resolviendo $[P_h]$, la u satisfaría la ecuación con $F=0$; debemos darle más libertad a las T_n para conseguir una $F \neq 0$). Suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t) + kn^2 T_n(t)] \text{sen} nx = F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \text{sen} nx$$

con $B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x,t) \text{sen} nx \, dx$ (desarrollo de F en senos para t fijo)

Entonces para cada n debe ser: $T_n' + kn^2 T_n = B_n$.

Y del dato inicial: $u_F(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \text{sen} nx = 0$ deducimos $T_n(0) = 0$.

Resolviendo la ecuación ordinaria con el dato inicial (utilizando la fórmula de variación de las constantes; para una F concreta a lo mejor hay métodos más rápidos) hallamos la T_n y por tanto:

$$u_F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-kn^2 [t-s]} B_n(s) \, ds \right] \text{sen} nx$$

Esta serie es una solución formal de $[P_F]$ (como siempre faltaría comprobar que es solución de verdad). La solución u de $[P_1]$ será la suma de u_F y la solución de $[P_h]$ obtenida en la sección anterior.

[Si las condiciones de contorno hubiesen sido $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ la u_F sería la construida con las autofunciones correspondientes:

$$u_F(x,t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos nx \quad]$$

Ejemplo 2.

$$[P_2] \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Las autofunciones del homogéneo (lo vimos en 8.1) son las de $[P_h]$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} nx \quad (\text{ya se anula en } x=0 \text{ y } x=\pi). \text{ Entonces:}$$

$$T_n'' + c^2 n^2 T_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2[-1]^{n+1}}{n} \rightarrow T_n = c_1 \cos nct + c_2 \operatorname{sen} nct + \frac{2[-1]^{n+1}}{c^2 n^3}$$

Imponiendo $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ (pues $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$) deducimos que:

$$u(x, t) = \frac{2}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n^3} [1 - \cos nct] \operatorname{sen} nx \quad .$$

Ejemplo 3.

$$[P_3] \begin{cases} \Delta u = F(x, y) & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}$$

Separando variables en la ecuación homogénea se llega, como vimos, a las ecuaciones $X'' + \lambda X = 0$, $Y'' - \lambda Y = 0$. Las condiciones de contorno nos dan $X'(0) = X'(\pi) = 0$, $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$. Para este problema tenemos dos familias de autofunciones $\{\cos nx\}$ ó $\{\cos ny\}$, $n=0, 1, \dots$ y podemos elegir cualquiera de ella para nuestra serie. Por ejemplo:

$$u(x, y) = X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cos ny \quad \rightarrow$$

$$X_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n'' - n^2 X_n] \cos ny = \frac{1}{2} B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos ny, \quad B_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \cos ny \, dy$$

Debemos resolver las infinitas ecuaciones ordinarias:

$$X_0'' = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dy; \quad X_n'' - n^2 X_n = B_n, \quad n \geq 1; \quad \text{con } X_n'(0) = X_n'(\pi) = 0$$

Las X_n con $n \geq 1$ quedan determinadas de forma única (el problema homogéneo tiene sólo la solución trivial). Pero $X_0'' = 0$, $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$ tiene soluciones no triviales ($\{1\}$), con lo que según 7.4 para que haya solución para X_0 es necesario que sea $\int_0^{\pi} 1 \cdot B_0(x) \, dx = 0$. Es decir,

$$[P_3] \text{ tiene solución sólo si } \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dx \, dy = 0$$

(y en ese caso tiene infinitas que difieren en una constante; esto es coherente con lo que sabíamos sobre Neumann desde 5.3)

Calculemos la solución en el caso particular en que $F(x, y) = x - a$.

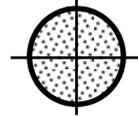
El problema sólo tiene solución si $\iint F = 0$, es decir, si $a = \pi/2$. Entonces nos queda $X_0'' = x - \pi/2$ (la F ya está desarrollada en $\{\cos ny\}$ y por la misma razón los B_n , y por tanto los X_n , son nulos si $n \geq 1$).

Integrando e imponiendo $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$ obtenemos $u(x, y) = \frac{1}{6} x^3 - \frac{\pi}{4} x^2 + C$

[Probando $\sum Y_n \cos nx$ hubiésemos tenido que desarrollar en serie]

Ejemplo 4.

$$[P_4] \begin{cases} \Delta u = 4 & \text{en } r < 1 \\ u(1, \theta) = \cos 2\theta \end{cases}$$



Podríamos descomponerlo en dos subproblemas (el de $\Delta u = 0$ lo vimos en 8.1), pero lo resolvemos directamente. Las autofunciones del problema homogéneo nos llevan a probar la serie:

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta] \rightarrow$$

$$a_0'' + \frac{1}{r} a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left([a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n] \cos n\theta + [b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n] \sin n\theta \right) = 4$$

que, por suerte, ya está desarrollada en senos y cosenos.

Habrà, pues, que resolver las ecuaciones de Euler:

$$a_0'' + \frac{1}{r} a_0' = 4, \quad a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n = 0, \quad b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n = 0$$

La condición $u(1, \theta) = \cos 2\theta$ impone que $b_n(1) = 0 \forall n$; $a_2(1) = 1$; $a_n(1) = 0, n \neq 2$.

La acotación cuando $r \rightarrow 0$ será la segunda condición necesaria para determinar la solución de cada EDO de segundo orden. La de a_0 sabemos que tiene una $a_{0p} = Ar^2$ ($\rightarrow A = 1$). Su solución general será:

$$a_0 = c_1 + c_2 \ln r + r^2 \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \quad a_0(1) = 0 \xrightarrow{} c_1 = -1$$

Para a_2 :

$$a_2 = c_1 r^2 + c_2 r^{-2} \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \quad a_2(1) = 1 \xrightarrow{} c_1 = 1$$

Sin resolver más ecuaciones podemos asegurar que las demás a_n y las b_n son cero (cero es solución y, por unicidad, no hay más).

Por tanto, la solución es:

$$u(r, \theta) = r^2 - 1 + r^2 \cos 2\theta$$

Como vimos en la sección 6.1, en ocasiones un cambio de variable adecuado nos simplifica un problema. Por ejemplo, en nuestro caso podíamos haber buscado una solución particular v de la ecuación no homogénea que no dependiera de θ resolviendo $v'' + v/r = 4$. La más sencilla de sus soluciones es $v = r^2$. Hacer $w = u - v$ nos lleva a:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } r < 1 \\ w(1, \theta) = \cos 2\theta - 1 \end{cases}$$

De la serie obtenida en 8.1 obtenemos, sin más que identificar coeficientes, que la solución de este problema es:

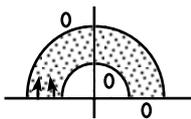
$$w(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta - 1$$

lo que nos lleva de forma mucho más rápida a la solución de antes.

Para todos los ejemplos que hemos visto hasta ahora en esta sección habíamos resuelto previamente el problema homogéneo. Si nos enfrentásemos a un problema nuevo, deberíamos comenzar con el cálculo de las autofunciones del homogéneo, como en el siguiente:

Ejemplo 5.

$$[P_5] \begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = u(r, 0) = 0 \\ u_\theta(r, \pi) = r^2 \end{cases}$$



Aparentemente se trata de un problema homogéneo, pero ya dijimos que las condiciones de contorno para Laplace en polares que deben ser homogéneas son las de la θ . Necesitamos una v que las cumpla. Claramente $v=r^2\theta$ lo hace. Haciendo $w=u-v$ se obtiene:

$$\begin{cases} \Delta w = -4\theta, & 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ w(1, \theta) = -\theta, w(2, \theta) = -4\theta \\ w(r, 0) = w_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$

Conocemos la ecuación en Θ que sale al separar variables en $\Delta w = 0$. Junto a las condiciones de contorno nos dará las autofunciones:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{[2n-1]^2}{4}, \Theta_n(\theta) = \left\{ \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} \right\}, n=1, 2, \dots$$

Probamos entonces la serie:

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{[2n-1]^2}{4r^2} R_n \right] \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} = -4\theta = 4 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2}$$

$$\text{con } B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -\theta \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} d\theta = \frac{2[-1]^n}{\pi [n-1/2]^2}$$

De los datos no homogéneos deducimos las condiciones para las R_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(1) \Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Theta_n(\theta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_n(2) \Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} 4B_n \Theta_n(\theta)$$

Resolvemos pues: $r^2 R_n'' + r R_n' - [n - \frac{1}{2}]^2 R_n = 4B_n r^2$ con $R_n(1) = B_n, R_n(2) = 4B_n$.

$$R_{np} = Ar^2 \quad [\lambda=2 \text{ no autovalor}] \rightarrow A = \frac{4B_n}{4 - (n-1/2)^2} \rightarrow R_n = c_1 r^{n-1/2} + c_2 r^{-(n-1/2)} + Ar^2$$

$$\text{c. contorno} \rightarrow c_1 = \frac{[2^{q+2}-1][B_n-A]}{2^{2q-1}}, \quad c_2 = \frac{2^q [2^q-4][B_n-A]}{2^{2q-1}} \quad \text{llamando } q = n - \frac{1}{2}$$

Simplificando un poco:

$$R_n(r) = \frac{2[-1]^n}{\pi q^2 [q^2-4][2^{2q-1}]} \left([2^{q+2}-1] q^2 r^q + 2^q [2^q-4] q^2 r^{-q} - 4[2^{2q-1}] r^2 \right)$$

La solución final es $u=r^2\theta+w$ donde la w es la serie de arriba con sus coeficientes dados por la última expresión.

8.3. Algunos problemas en tres variables

Comenzamos estudiando las series de Fourier dobles, de teoría semejante a las de una variable. Sean $X_m(x)$, $x \in [a, b]$ e $Y_n(y)$, $y \in [c, d]$ las autofunciones de dos problemas de Sturm-Liouville con pesos respectivos $r(x)$ y $s(y)$, y sea $f(x, y) \in C^1([a, b] \times [c, d])$. Entonces, para cada $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ se puede escribir f como la serie:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} X_m Y_n \quad \text{con} \quad c_{mn} = \frac{1}{\langle X_m, X_m \rangle} \frac{1}{\langle Y_n, Y_n \rangle} \int_a^b \int_c^d f(x, y) X_m Y_n r s \, dy \, dx$$

[$\langle u, v \rangle$ designa, desde luego, $\int_a^b u v r \, dx$ ó $\int_c^d u v s \, dy$]

pues para x fijo se puede poner $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n$, $C_n(x) = \frac{\langle f(x, y), Y_n \rangle}{\langle Y_n, Y_n \rangle}$,

y con $C_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} X_m$, $c_{mn} = \frac{\langle C_n(x), X_m \rangle}{\langle X_m, X_m \rangle}$ se tiene la expresión de arriba.

En particular, se tienen los desarrollos en series trigonométricas:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{M} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{L} \quad \text{con} \quad b_{mn} = \frac{4}{ML} \int_0^M \int_0^L f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{M} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{L} \, dy \, dx$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} \cos \frac{m\pi x}{M} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos \frac{n\pi y}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{M} \cos \frac{n\pi y}{L}$$

$$\text{con} \quad a_{mn} = \frac{4}{ML} \int_0^M \int_0^L f(x, y) \cos \frac{m\pi x}{M} \cos \frac{n\pi y}{L} \, dy \, dx$$

[o los desarrollos parecidos en $\sum \operatorname{sencos}$ ó $\sum \operatorname{cosen}$]

Por ejemplo, desarrollemos $f(x, y) = x \cos y$ en $[0, \pi] \times [0, \pi]$ de dos formas:

$$x \cos y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \operatorname{sen} m x \operatorname{sen} n y \quad \text{con} \quad b_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \operatorname{sen} m x \operatorname{sen} n y \, dy \, dx \rightarrow$$

$$x \cos y = \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{m+1} n}{m[4n^2-1]} \operatorname{sen} m x \operatorname{sen} 2n y$$

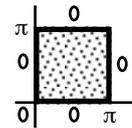
$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \cos m x \cos n y \, dy \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \pi & \text{si } n=1, m=0 \\ 2([-1]^{m-1})/(\pi m^2) & \text{si } n=1, m>0 \end{cases} \rightarrow$$

$$x \cos y = \frac{\pi}{2} \cos y - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[2m-1]^2} \cos [2m-1] x \cos y \quad (\text{ya estaba desarrollado en } y)$$

[la igualdad entre f y su serie se da en los puntos de continuidad de la f extendida, de forma impar en el primer caso y par en el segundo, en cada variable hasta $[-\pi, \pi]$ y luego de forma 2π -periódica; así, la serie en senos converge hacia $x \cos y$ en el lado $x=0$ del cuadrado $[0, \pi] \times [0, \pi]$, pero no lo hace en los otros lados; la serie en cosenos, en cambio, converge (uniformemente) en todo el cuadrado, incluido el borde].

Resolvamos por separación de variables varios ejemplos de problemas en tres variables. Primero, la ecuación del calor en un cuadrado: estudiamos la evolución de las temperaturas de una placa cuadrada (dadas las iniciales) si el borde se mantiene a 0 grados:

$$\begin{cases} u_t - k[u_{xx} + u_{yy}] = 0, & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi), t > 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0 \end{cases}$$



Buscamos soluciones: $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t) \rightarrow XT' - k[X''Y + XY''] = 0$

$$\rightarrow \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} - \frac{X''}{X} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ \frac{X''}{X} = \lambda + \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\mu \rightarrow \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ T' + k[\lambda + \mu]T = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Las condiciones de contorno exigen: $X(0) = X(\pi) = Y(0) = Y(\pi) = 0$. Así pues:

$$\begin{cases} \mu = m^2, X_m = \{\sin mx\}, m = 1, 2, \dots \\ \lambda = n^2, Y_n = \{\sin ny\}, n = 1, 2, \dots \end{cases} \rightarrow T_{mn} = \{e^{-[m^2+n^2]kt}\}.$$

Probamos, pues, la serie:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} e^{-[m^2+n^2]kt} \sin mx \sin ny$$

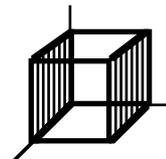
que debe satisfacer:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin mx \sin ny = f(x,y) \rightarrow b_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x,y) \sin mx \sin ny \, dy \, dx, m, n \geq 1$$

(como en la varilla, aquí también $u \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$)

Ahora, Laplace en un cubo (con condiciones de contorno mixtas):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0,\pi) \times (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u = 0 \text{ en } x=0, x=\pi, z=\pi \\ u_y = 0 \text{ en } y=0, y=\pi \end{cases}$$



$$u = XYZ \rightarrow \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow \frac{Z''}{Z} - \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(\pi) = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0, Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \\ Z'' - [\lambda + \mu]Z = 0, Z(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\sin nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\cos my\}, m = 0, 1, \dots \end{cases} \rightarrow Z_{mn} = \{\text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z])\} \rightarrow$$

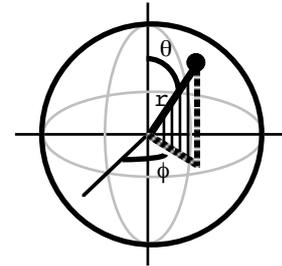
$$u(x,y,z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n} \text{sh}(n[\pi-z]) \sin nx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z]) \sin nx \cos my$$

Como $u(x,y,0) = f(x,y)$, los c_{mn} son:

$$c_{mn} = \frac{4}{\pi^2 \text{sh}(\pi\sqrt{n^2+m^2})} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x,y) \sin nx \cos my \, dy \, dx \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots \end{matrix}$$

Resolvamos el problema de Dirichlet en una esfera con datos independientes de ϕ . La laplaciana en esféricas tiene la forma:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos\theta u_\theta}{\sin\theta r^2} + \frac{u_{\phi\phi}}{\sin^2\theta r^2}$$



Si intentásemos resolver el problema general:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < R, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \\ u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi) \end{cases}$$

Aparecería una EDO desconocida para nosotros, así que tratamos el caso de que f no dependa de ϕ . Podemos buscar entonces soluciones que tampoco dependan de ϕ , con lo que de hecho tenemos un problema con dos variables. Resolvemos pues:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos\theta u_\theta}{\sin\theta r^2} = 0, r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, \pi] \end{cases} \quad u = R\Theta \rightarrow \begin{cases} r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \\ \sin\theta \Theta'' + \cos\theta \Theta' + \lambda \sin\theta \Theta = 0 \end{cases}$$

El cambio $t = \cos\theta$ transforma la segunda ecuación en la de Legendre:

$$[1-t^2] \frac{d^2\Theta}{dt^2} - 2t \frac{d\Theta}{dt} + \lambda \Theta = 0$$

Imponemos que Θ esté acotada en $t = \pm 1$ ($\theta = 0, \pi$ polos de la esfera). Los autovalores de este problema singular son $\lambda = n(n+1), n = 0, 1, \dots$ y sus autofunciones son los polinomios de Legendre:

$$\{P_n(t)\} = \{P_n(\cos\theta)\} \quad [P_0 = 1, P_1 = t, P_2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \dots]$$

Para estos valores de λ :

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \rightarrow R_n = c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)} \xrightarrow{R \text{ acotada}} R_n = \{r^n\}, n = 0, 1, \dots$$

Probamos:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta)$$

Debe ser:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta) = f(\theta) \rightarrow a_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta, n = 0, 1, \dots$$

Ya que el peso es $r(\theta) = \sin\theta$ [$(\sin\theta \Theta')' + \lambda \sin\theta \Theta = 0$] y es sabido que:

$$\int_0^\pi [P_n(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 [P_n(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

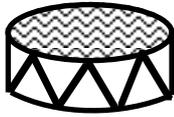
Por ejemplo, si $R=1$ y $f(\theta) = \cos^2\theta$ se tiene: $a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 t^2 P_n(t) dt$

Por tanto:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, a_2 = \dots = \frac{2}{3} \text{ y los demás } a_n = 0 \rightarrow u(r, \theta) = \frac{1-r^2}{3} + r^2 \cos^2\theta$$

$$[\text{o tanteando: } \cos^2\theta = \frac{2}{3} [\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2}] + \frac{1}{3} \rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, a_0 = \frac{1}{3}]$$

Si los problemas con simetría esférica llevan a la ecuación de Legendre, los de simetría cilíndrica llevan a la de Bessel, como en el siguiente problema de vibración de una membrana circular:



$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}] = 0, r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), u_t(r, \theta, 0) = 0 \\ u(1, \theta, t) = 0 \end{cases}$$

$$u = R\Theta T \rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + \lambda r^2 = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu \rightarrow$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0, \Theta \text{ } 2\pi\text{-periódica} \rightarrow \mu_m = m^2, m = 0, 1, \dots, \Theta_0 = \{1\}, \Theta_m = \{\cos m\theta, \text{sen } m\theta\} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0, T'(0) = 0 \rightarrow \{\cos[\sqrt{\lambda} c t]\} \\ r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - \mu]R = 0, R \text{ acotada en } 0 \end{cases}$$

Para $\mu = m^2$ consideramos el problema de contorno singular para R:

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - m^2]R = 0 \\ R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \end{cases}$$

Haciendo $t = r\sqrt{\lambda}$ la ecuación se transforma en la de Bessel:

$$t^2 R''(t) + tR'(t) + [t^2 - m^2]R = 0 \rightarrow R = c_1 J_m(t) + c_2 K_m(t) = c_1 J_m(r\sqrt{\lambda}) + c_2 K_m(r\sqrt{\lambda})$$

R acotada $\Rightarrow c_2 = 0$. Los autovalores serán los λ que hagan $J_m(\sqrt{\lambda}) = 0$, que son una sucesión infinita para cada m: $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_k}, \dots$

Y las autofunciones son $R_{mk} = \{J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}})\}$. Así que probamos:

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} J_0(r\sqrt{\lambda_{0k}}) \cos [c\sqrt{\lambda_{0k}} t] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos m\theta + d_{mk} \text{sen } m\theta] J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) \cos [c\sqrt{\lambda_{m_k}} t]$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} J_0(r\sqrt{\lambda_{0k}}) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos m\theta + d_{mk} \text{sen } m\theta] J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) = f(r, \theta)$$

Para r fijo, $f(r, \theta) = \frac{1}{2} A_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(r) \cos m\theta + B_m(r) \text{sen } m\theta]$, con

$$A_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos m\theta d\theta, m = 0, 1, \dots, B_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \text{sen } m\theta d\theta, m = 1, 2, \dots$$

Desarrollando: $A_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{mk} J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}), B_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{mk} J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}})$

$$[\text{teniendo en cuenta que } \int_0^1 r J_m^2(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) dr = \frac{1}{2} J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{m_k}})]$$

se llega a la expresión definitiva para los coeficientes:

$$\begin{cases} c_{mk} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{m_k}})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \cos m\theta J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) dr d\theta \\ d_{mk} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{m_k}})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \text{sen } m\theta J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) dr d\theta \end{cases}$$

9. Otros métodos en EDPs

Este último capítulo está dedicado al estudio de dos temas independientes entre sí. En la sección 9.1 generalizaremos las **funciones de Green** que aparecieron en el estudio de problemas de contorno para ecuaciones ordinarias no homogéneas. Seguiremos un camino poco formal (utilizando la delta de Dirac como si fuera una función) que nos abreviará los cálculos. Sobre todo nos ocuparemos de las funciones de Green para la ecuación de Poisson en recintos sencillos utilizando el llamado **método de las imágenes**. De paso introduciremos el concepto de **solución fundamental** (función v tal que $\Delta v = \delta$) que es básico en estudios más avanzados de EDPs que utilizan la teoría de distribuciones.

En la 9.2 definiremos la **transformada de Fourier** \mathfrak{F} (y las transformadas seno y coseno) y citaremos sin demostración aquellas propiedades que permiten resolver algunas EDPs en intervalos no acotados (para ellos no se puede utilizar separación de variables). Como ocurría con la transformada de Laplace, aplicando la \mathfrak{F} a algún problema para EDPs acabaremos en otro más sencillo (de EDOs, para las ecuaciones en dos variables que tratamos). Resuelto este segundo problema, para hallar la solución habrá que calcular una transformada inversa. En particular, las transformadas de Fourier nos permitirán resolver problemas de la ecuación del calor para varillas no acotadas (que no son resolubles con las técnicas de los capítulos anteriores). Aparecerá la solución fundamental de la ecuación del calor y se comprobará que, según nuestra ecuación matemática, el calor se transmite a velocidad infinita.

9.1. Funciones de Green.

[A lo largo de esta sección trabajaremos formalmente con la δ de Dirac, utilizando simplemente que:

- i. $\delta(\xi-x, \eta-y) = 0$ para $(\xi, \eta) \neq (x, y)$
- ii. $\iint_D F(\xi, \eta) \delta(\xi-x, \eta-y) d\xi d\eta = F(x, y)$ si F continua en $D \subset \mathbf{R}^2$ y $(x, y) \in D$
análogamente 'definiríamos' la δ en más dimensiones].

Comencemos considerando el problema de Dirichlet no homogéneo:

$$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F(x, y) \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$

Nuestro objetivo es (como hacíamos en el capítulo 7) expresar su solución en términos de integrales en las que sólo aparezcan una 'función de Green' G y las funciones dato F y f :

Teor 1: Si $G(x, y; \xi, \eta)$ satisface para cada $(x, y) \in D$ el problema

$$(P_G) \begin{cases} \Delta u = \delta(\xi-x, \eta-y) \text{ en } D \\ u = 0 \text{ en } \partial D \end{cases},$$

vista G como función de (ξ, η) , entonces la solución de (P_D) es

$$u(x, y) = \iint_D G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_n(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) ds$$

[G_n es la derivada G en la dirección de \mathbf{n} , vector unitario exterior a D]

[Se puede probar que la función de Green G es simétrica: $G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$ así que en lo que sigue podríamos intercambiar los papeles de (x, y) y (ξ, η)].

Del teorema de la divergencia en el plano se deduce sin dificultad la llamada segunda identidad de Green: si u y G son $C^2(\bar{D})$ se tiene

$$\iint_D [G \Delta u - u \Delta G] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [G u_n - u G_n] ds$$

Si u es ahora la solución de (P_D) y G la de (P_G) , y si admitimos que la identidad anterior es válida para nuestra G (evidentemente no es C^2 , pero la fórmula es válida para distribuciones) tenemos:

$$\iint_D [GF - u \delta] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [-f G_n] ds \rightarrow u = \iint_D GF d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_n f ds$$

Tenemos, pues, que resolver (P_G) . Comencemos buscando una $v(x, y; \xi, \eta)$ que, vista como función de (ξ, η) , satisfaga la ecuación, aunque no cumpla las condiciones de contorno. ¿Qué funciones conocemos que satisfagan $\Delta v = 0$ y que puedan originar una δ ? Las soluciones de Laplace en polares que no dependen del ángulo son:

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + c_2 \ln r$$

La función discontinua puede dar la δ . Así que algún múltiplo del logaritmo de la distancia r de (ξ, η) a (x, y) es buen candidato a v :

Teor 2: $v = \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]$ satisface $\Delta v = \delta(\xi-x, \eta-y)$ para (x,y) fijo

A v se le llama solución fundamental para el punto (x,y) ; llamando $P=(\xi,\eta)$ y $Q=(x,y)$, podemos abreviar la expresión de v escribiendo:

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}, \text{ siendo } \overline{PQ} \text{ la distancia de } P \text{ a } Q$$

Para demostrar el teorema 2 volvemos a hacer 'trampa' con la δ . Ya vimos que $\Delta v = 0$ si $r \neq 0$, o sea, si $(\xi,\eta) \neq (x,y)$. Además, aplicando el 'teorema' de la divergencia en un círculo de centro Q y radio R :

$$\iint_{r \leq R} \Delta v \, d\xi \, d\eta = \oint_{r=R} v_n \, ds = \oint_{r=R} v_r \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi R} R \, d\theta = 1 \rightarrow \Delta v = \delta$$

Si w es cualquier función que satisfaga $\Delta w = 0$ en D entonces $v+w$ seguirá satisfaciendo $\Delta[v+w] = \delta$ para cada (x,y) fijo. Por tanto:

Para encontrar G [y tener resuelto (P_D)] bastará encontrar la w armónica en D tal que $v+w$ se anule en la frontera ∂D

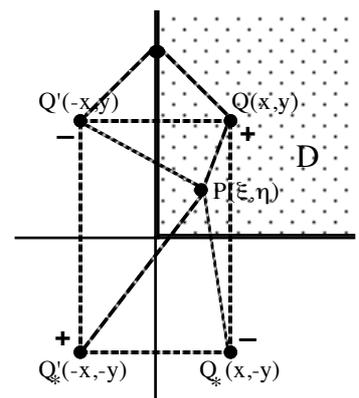
[Podríamos pensar en hacer $w = G - v$ y resolver (tal vez separando variables) el problema que queda: $\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ en } D \\ w = -v \text{ en } \partial D \end{cases}$ pero para eso separamos variables en (P_D)].

La forma práctica de encontrar la w (en recintos D limitados por líneas rectas y circunferencias) es el método de las imágenes. Basándonos en la geometría de D se tratará de escribir G como suma de la solución fundamental v y de funciones armónicas w del mismo tipo: logaritmos de distancias a otros puntos Q' exteriores a D ('imágenes' de Q respecto de la ∂D), escogidos de tal forma que la G se anule en la frontera de D .

Como primer ejemplo resolvamos, hallando la G , el problema:

$$(P_1) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D = \{x > 0\} \times \{y > 0\} \\ u(x,0) = f(x), u(0,y) = 0, u \text{ acotada} \end{cases}$$

Sea $Q=(x,y)$ fijo. Está claro que si considero el punto $Q'=(-x,y)$, entonces $\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ} - \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}'$ es una función de $P=(\xi,\eta)$ que se anula cuando P pertenece al eje y , ya que entonces $\overline{PQ} = \overline{PQ}'$; y $w' = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}'$ es armónica en D (lo es en $\mathbf{R}^2 - \{Q'\}$). Análogamente $w_* = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}_*$, siendo $Q_*(x,-y)$, es armónica en D y $w+w_* = 0$ si P está en el eje x . Para que G sea cero en ambos ejes a la vez hay que sumar una nueva $w'_* = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}'_*$, $Q'_*(-x,-y)$.



Entonces $G(P,Q) = v + w' + w_* + w'_*$ es la función de Green buscada, ya que $\Delta G = \delta$ [pues $\Delta v = \delta$ y $\Delta(w' + w_* + w'_*) = 0$] y $G = 0$ si $P \in \partial D$ [si P está en el eje y es $\overline{PQ} = \overline{PQ}'$ y $\overline{PQ}_* = \overline{PQ}'_*$; y análogo si P está en el eje x].

Escribiendo las distancias anteriores analíticamente tenemos que:

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta-y)^2] - \\ - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta+y)^2] + \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta+y)^2]$$

Como $n=-j$ en el eje x , la solución de nuestro problema (P_1) será:

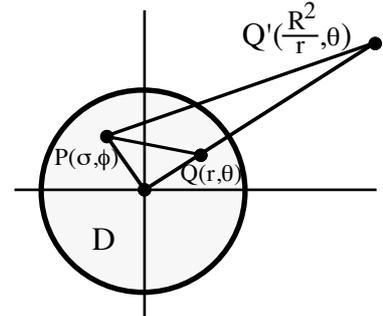
$$u(x,y) = \oint_{\partial D} G_n f ds = \int_0^\infty -G_n \Big|_{\eta=0} f(\xi) d\xi = \dots = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{(\xi-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(\xi+x)^2 + y^2} \right] f(\xi) d\xi$$

Resolvamos el problema no homogéneo de Dirichlet en el círculo:

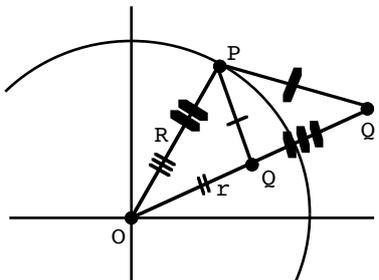
$$(P_2) \begin{cases} \Delta u = F(r,\theta) & \text{en } r < R \\ u(1,\theta) = f(\theta) & , \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Las coordenadas adecuadas son las polares. Las del punto Q fijo son (r,θ) y las del P variable las llamaremos (σ,ϕ) . La solución fundamental v en estas coordenadas queda entonces:

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ} = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2r\sigma \cos(\theta - \phi)]$$



¿Dónde situar el punto imagen Q' ? Las cosas no son tan simples como en el ejemplo anterior. Es claro que su θ ha de ser la misma, pero ¿a qué distancia del origen O colocarlo? Podríamos llegar al resultado tanteando, pero nos limitamos a comprobar que la G es:



$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \overline{PQ} - \ln \overline{PQ'} + \ln \frac{R}{r} \right], \quad Q' = \left(\frac{R^2}{r}, \theta \right)$$

Como $G = v + v' + cte$ se cumple $\Delta G = 0$, pues v' es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{Q'\}$ y $Q' \notin D$. Además si P está sobre la circunferencia se cumple:

$$\frac{\overline{PQ}}{r} = \frac{\overline{PQ'}}{R} \quad (\Rightarrow \ln \overline{PQ} - \ln \overline{PQ'} + \ln R - \ln r = 0)$$

ya que entonces los triángulos OQP y OPQ' son semejantes, pues tienen un ángulo común y dos lados proporcionales: $OQ'/R = R/OQ$.

Expresando la $G(P,Q)$ en términos de coordenadas obtenemos:

$$G(r,\theta;\sigma,\phi) = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2r\sigma \cos(\theta - \phi)] - \frac{1}{4\pi} \ln \left[R^2 + \frac{r^2\sigma^2}{R^2} - 2r\sigma \cos(\theta - \phi) \right]$$

[$G=0$ si $P \in \partial D$, es decir, si $\sigma=R$; podíamos ahorrarnos la discusión geométrica]

y como $G_n = G_\sigma \Big|_{\sigma=R}$ y $ds = R d\phi$, deducimos que la solución de (P_2) es:

$$u(r,\theta) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma G(r,\theta;\sigma,\phi) F(\sigma,\phi) d\phi d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) d\phi$$

expresión mucho más compacta que las series del capítulo 7, aunque estas integrales, en general, no sean calculables explícitamente (y habrá que aproximarlas numéricamente, pero son aproximaciones también las sumas parciales de las series).

Los cálculos de funciones de Green en tres dimensiones son muy similares a los de dos. Si G es la solución del (P_G) (∂D es ahora una superficie) u es:

$$u = \iiint_D G F d\xi d\eta d\gamma + \oint_{\partial D} G_n f dS$$

Se ve de manera similar que la solución fundamental en el espacio es:

$$v = -\frac{1}{4\pi PQ} \quad [v_{rr} + \frac{2}{r}v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + \frac{c_2}{r}]$$

Los puntos imágenes respecto a planos son igual de sencillos y para la esfera de radio R vuelve a situarse el punto Q' a una distancia R^2/r del origen.

También se habla de funciones de Green para la ecuación de ondas y para la del calor. No entraremos en la primera (ya tenemos D'Alambert). Para la segunda, a diferencia de las que hemos calculado para Laplace, la expresión de la G es una serie y tiene mucha menor utilidad. Vimos que la solución de:

$$[P] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t), & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

era:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-kn^2[t-s]} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\xi,s) \operatorname{sen} n\xi d\xi \right) ds \right] \operatorname{sen} nx$$

es decir, intercambiando formalmente integrales y sumatorios:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^{\pi} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2[t-s]} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n\xi \right] F(\xi,s) d\xi ds \rightarrow$$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^{\pi} G(x,\xi,t-s) F(\xi,s) d\xi ds, \quad \text{con } G(x,\xi,t-s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2[t-s]} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n\xi$$

Como todas las G es la solución de un problema que contiene una δ :

si $F(x,t) = \delta(x-x_0, t-t_0)$ con $x_0 \in (0,\pi)$ y $t_0 > 0$ la solución de $[P]$ para $t > t_0$ es:

$$\int_0^t \int_0^{\pi} G(x,\xi,t-s) \delta(\xi-x_0, s-t_0) d\xi ds = G(x,x_0,t-t_0)$$

con lo que $G(x,\xi,t-s)$ se puede mirar como la solución de $\begin{cases} u_t - k u_{xx} = \delta(x-\xi, t-s) \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$

9.2. Transformadas de Fourier.

Sea $f(x)$ definida en \mathbf{R} y absolutamente integrable $[\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty]$.
Se llama transformada de Fourier de f a la función:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

Si la f es además C^1 se puede recuperar a partir de \hat{f} usando la fórmula de inversión (que, como otros resultados, no demostramos):

Teor 1: Sea $f \in C^1(\mathbf{R})$ y absolutamente integrable. Entonces $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk$$

[en algunos libros no aparece el coeficiente $1/\sqrt{2\pi}$ en la definición de \hat{f} y aparece $1/2\pi$ en la fórmula de inversión; también se puede encontrar e^{-ikx} en la primera fórmula y e^{ikx} en la segunda].

A f se llamará transformada inversa de Fourier de \hat{f} . Denotaremos también $\mathfrak{F}f = \hat{f}$ y $\mathfrak{F}^{-1}\hat{f} = f$. Es evidente que \mathfrak{F} y \mathfrak{F}^{-1} son lineales.

Estudiemos algunas propiedades de la \mathfrak{F} y calculemos las transformadas de algunas funciones que nos aparecerán resolviendo EDPs:

Teor 2: Sean $f, f', f'' \in C(\mathbf{R})$ y absolutamente integrables. Entonces:

$$\mathfrak{F}(f') = -ik\mathfrak{F}(f) \quad , \quad \mathfrak{F}(f'') = -k^2\mathfrak{F}(f)$$

Teor 3: Se llama convolución de f y g en $(-\infty, \infty)$ a la función:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds$$

Se tiene que $f * g = g * f$ y que $\mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g)$, siempre que las transformadas que aparecen tengan sentido.

Teor 4: $\mathfrak{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}$; $\mathfrak{F}^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}$

$$\mathfrak{F}[\delta(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ika} \quad ; \quad \mathfrak{F}^{-1}(f(k)e^{iak}) = f(x-a)$$

$$\text{Si } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad , \quad \mathfrak{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$$

Frecuentemente un problema en EDP referente a una función u de dos variables puede reducirse a una EDO para la \hat{u} respecto de una de las variables. Resolviendo esta EDO respecto de la otra se puede determinar \hat{u} . Identificando la u de la que proviene esta \hat{u} o aplicando el teorema de inversión se podrá en ocasiones obtener la solución explícitamente, pero en muchos casos habrá que dejar la solución en términos de integrales no calculables.

Ejemplo 1. Problema para el calor en una varilla infinita:

$$(P_1) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Supongamos que la u y la f son suficientemente regulares y tienden a 0 lo suficientemente rápido como para que se puedan utilizar los teoremas anteriores. Aplicando la transformada de Fourier en la variable x a la ecuación y al dato inicial se tiene el problema:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \quad \text{cuya solución es} \quad \hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}$$

La solución es la convolución de las transformadas inversas de cada uno de los factores (la del segundo la vimos en el teorema 4):

$$(*) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) f(s) ds$$

donde $G(x, s, t) = e^{-(x-s)^2/4t} / 2\sqrt{\pi t}$ es la llamada solución fundamental de la ecuación del calor que representa la temperatura del punto x en el instante t debida a una f inicial de la forma $\delta(x-s)$.

Una vez deducida (*), en vez de justificar los pasos que llevaron a ella, se prueba que proporciona realmente la solución de (P_1) con hipótesis más amplias incluso de las que nos permiten aplicar la \mathfrak{S} . En concreto, para cualquier f acotada y continua a trozos (*) nos da la solución única acotada de (P_1) que es continua para $t > 0$ a excepción de los puntos de $t=0$ en que f es discontinua.

De (*) se deduce también que, según nuestro modelo matemático, el calor se transmite a velocidad infinita: si $f > 0$ en un entorno de un x_0 y nula en el resto, está claro que $u(x, t) > 0$ por pequeño que sea t y grande que sea $|x-x_0|$. También se ve que u es C^∞ para $t > 0$ aunque f sea discontinua (¡aunque sea $f(x) = \delta(x-s)$!). Son propiedades claramente diferentes de la ecuación de ondas.

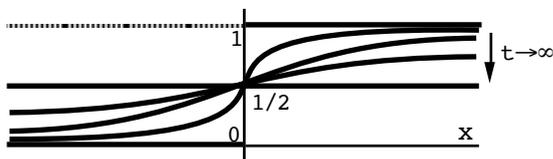
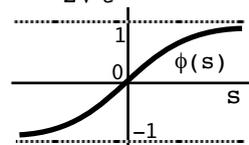
Apliquemos (*) para resolver un problema particular. Suponemos que:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} ds$$

Haciendo $v = (s-x)/2\sqrt{t}$ la integral se transforma en:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{2} \left[1 + \phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right]$$

donde $\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-v^2} dv$ es la llamada función error que aparece a menudo en la teoría de las probabilidades.



Como se observa, la solución tiende hacia $1/2$ para todo x cuando t tiende a ∞ .

Ejemplo 2.

$$(P_2) \begin{cases} u_t + u_x = g(x) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Aplicando la \mathfrak{F} en la variable x (suponiendo como siempre que u, g y f son buenas; el rigor sólo se emplea al justificar el resultado):

$$\begin{cases} \hat{u}_t - ik\hat{u} = \hat{g}(k) \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \end{cases} \rightarrow \hat{u}(k,t) = p(k)e^{ikt} - \frac{\hat{g}(k)}{ik} \text{ con } p \text{ función arbitraria.}$$

Imponiendo el dato inicial: $\hat{u} = \hat{f}(k)e^{ikt} + \hat{g}(k) \left[\frac{e^{ikt}-1}{ik} \right]$

Por tanto: $u(x,t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi} g(x) * h(x)$ siendo $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,t] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

Como $\int_0^t g(x-u) du = -\int_x^{x-t} g(s) ds$, concluimos que $u = f(x-t) + \int_{x-t}^x g(s) ds$

[Es fácil comprobar que la expresión satisface la ecuación y el dato inicial. La solución la podemos calcular también con las técnicas del capítulo 5:

$$dt/dx = 1 \rightarrow \begin{cases} \xi = x-t \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = g(\eta) \rightarrow u = p(x-t) + \int_0^x g(s) ds \rightarrow$$

$$p(x) + \int_0^x g(s) ds = f(x) \rightarrow u = f(x-t) - \int_0^{x-t} g(s) ds + \int_0^x g(s) ds \text{ como antes]}$$

Para problemas en regiones semi-infinitas son útiles las transformadas seno y coseno que surgen como caso particular de la de Fourier por las propiedades de las funciones pares o impares. Se definen estas transformadas de funciones f absolutamente integrables en $[0, \infty)$ mediante:

$$\mathfrak{F}_S(f)(k) = \hat{f}_S(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} kx \, dx ; \quad \mathfrak{F}_C(f)(k) = \hat{f}_C(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{cos} kx \, dx$$

La fórmula de inversión adopta la forma:

Teor 1':

Sea $f \in C^1([0, \infty))$ y sea $\int_0^\infty |f| < \infty$. Entonces:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_S(k) \operatorname{sen} kx \, dk \quad \text{para todo } x \in (0, \infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_C(k) \operatorname{cos} kx \, dk \quad \text{para todo } x \in [0, \infty)$$

Con hipótesis análogas a las del teorema 2 se tiene también:

Teor 2':

$$\mathfrak{F}_S(f'') = -k^2 \mathfrak{F}_S(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)k ; \quad \mathfrak{F}_C(f'') = -k^2 \mathfrak{F}_C(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

[Por este resultado, la \mathfrak{F}_S será útil cuando nos den el valor de $u(0,t)$ mientras que la \mathfrak{F}_C la emplearemos si lo fijado es $u_x(0,t)$].

Estas transformadas aparecen en problemas del calor en $[0, \infty)$:

Teor 4':

$$\mathfrak{F}_S^{-1}(ke^{-ak^2}) = \frac{1}{[2a]^{3/2}} xe^{-x^2/4a} ; \quad \mathfrak{F}_C^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}$$

Ejemplo 3. Calor en una varilla semi-infinita:

$$(P_3) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = g(t) \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$

Sea $\hat{u}(k, t)$ la transformada seno de $u(x, t)$ respecto a x (suponiendo como siempre que existe). El problema para \hat{u} es:

$$\hat{u}_t + k^2 \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(t) k, \hat{u}(k, 0) = 0 \rightarrow \hat{u}(k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-k^2 t} \int_0^t g(s) k e^{k^2 s} ds$$

Utilizando la fórmula de inversión, cambiando el orden de integración y utilizando el teorema 4':

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^t g(s) k e^{-k^2(t-s)} \text{sen} kx ds dk = \frac{2}{\pi} \int_0^t g(s) \int_0^\infty k e^{-k^2(t-s)} \text{sen} kx dk ds$$

$$\rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{[t-s]^{3/2}} e^{-x^2/4(t-s)} g(s) ds$$

Ejemplo 4. Ondas semi-infinita:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t^2 \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_s u = \hat{u} \rightarrow \hat{u}_{tt} + k^2 \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^2 k \rightarrow \hat{u} = p(k) \cos kt + q(k) \text{sen} kt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{t^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right]$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_t(k, 0) = 0 \rightarrow \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{t^2}{k} + \frac{2}{k^3} (\cos kt - 1) \right] \rightarrow u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{t^2}{k} + \frac{2}{k^3} (\cos kt - 1) \right] \text{sen} kx dk$$

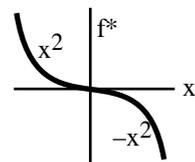
La integral parece muy complicada. Vamos a calcular sólo $u(1, 2)$ ya que entonces parece simplificarse:

$$u(1, 2) = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\text{sen} k}{k} - \frac{\text{sen}^3 k}{k^3} \right] dk = (\text{tablas}) = \frac{8}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right] = 1$$

Lleguemos a este valor a partir de D'Alembert (mejor camino). Lo primero es hacer homogénea la condición de contorno (\mathfrak{S}_s y \mathfrak{S}_c no exigen este paso):

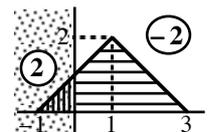
Tanteando un poco se ve que $v = x^2 + t^2$ satisface la condición y la ecuación:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbb{R} \\ w(x, 0) = -x^2, w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, x, t \in \mathbb{R} \\ w(x, 0) = f^*(x), w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [f^*(-1) + f^*(-3)] = -4 \rightarrow u(1, 2) = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Con menos vista, } w = u - t^2 \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -2 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ -2 & x > 0 \end{cases} \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [(2) \text{ area} + (-2) \text{ area}] = -3 \rightarrow u(1, 2) = -3 + 4 = 1$$

bibliografía

- BD Boyce-Di Prima. ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA. Limusa
- Si Simmons. ECUACIONES DIFERENCIALES (CON APLICACIONES Y NOTAS HISTORICAS). McGraw-Hill
- Br Braun. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. Interamericana
- R Ross. ECUACIONES DIFERENCIALES. Reverté
- E Elsgoltz. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. Mir
- MCZ Marcellán-Casasús-Zarzo. ECUACIONES DIFERENCIALES. PROBLEMAS LINEALES Y APLICACIONES. McGraw-Hill
- PA Puig Adam. CURSO TEORICO-PRACTICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADO A LA FISICA Y TECNICA.
- MU Myint-U. PARTIAL DIFFRENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS. Elsevier
- W Weimberger. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES. Reverté
- T Tijonov-Samarski. ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA. Mir
- Sp Stephenson. INTRODUCCION A LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Reverté
- Ch Churchill. SERIES DE FOURIER Y PROBLEMAS DE CONTORNO. McGraw-Hill
- J John. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. Springer-Verlag
- Sk Stakgold. GREEN'S FUNCTIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS. Wiley

Los primeros cinco libros (básicamente de EDOs y ya citados en la primera parte de los apuntes) tienen introducciones a las EDPs. En concreto, BD, Br, R y Si estudian los problemas de contorno para EDOs y el método de separación de variables. R clasifica también las EDPs de segundo orden con coeficientes constantes. E trata con detalle las EDPs de primer orden.

Los dos siguientes, el MCZ y el clásico PA (de 1950), son mixtos de EDOs y EDPs y abarcan una mayor parte del curso.

Los demás libros son más bien de EDPs: MU, W y T incluyen casi todos los temas de los apuntes (y muchos otros que no se tratan en ellos). Sp y Ch tienen bastantes menos páginas (y sirven para parte del curso). J y Sk son de mayor nivel y bastante más difíciles de leer.

Gran parte de los libros de EDPs, en vez de organizarse en torno a los métodos de resolución (como en los apuntes), estudian por separado y con diferentes técnicas las ecuaciones hiperbólicas, elípticas y parabólicas.

Las EDPs de primer orden se estudian en E, PA y J, pero en el caso más general de las ecuaciones cuasilineales (también tratan las no lineales). La reducción a forma canónica y las cuestiones de unicidad se ven en casi todos los libros de EDPs. Véase por ejemplo MU, W o T. Para un estudio serio de los problemas de Cauchy ver el J. La deducción de las ecuaciones y el significado físico de los problemas se puede mirar, por ejemplo, en Bd, W o T (en éste se tratan otros muchos problemas de la física).

Para el capítulo 6 se puede consultar el PA, el MU, el W, el T o el J. En ellos se deducen las fórmulas de 6.2 no demostradas en los apuntes.

Para el 7 es recomendable leer BD y Si. La teoría general de problemas de contorno, funciones de Green, desarrollos en autofunciones... en el Sk. Hay demostraciones menos generales (con matemáticas más elementales) en Ch o W.

La separación de variables (capítulo 8) está en casi todos los libros. Buenas introducciones hay en los cuatro primeros y en el Sp. Para precisiones de convergencia y problemas de varias variables ver MU, W o T.

La sección 9.1 sigue más o menos el MU. W, T y Sp también estudian las funciones de Green por otros caminos. Cuestiones más avanzadas en el Sk. Para la 9.2 ver Ch, MU, Sp y sobre todo W (tiene introducción a la variable compleja y utiliza también la transformada de Laplace para EDPs).

El MCZ da métodos numéricos para problemas de contorno y EDPs (lo que no hacen los demás libros, salvo unas pocas ideas del W).

problemas 5

1. Resolver (si es posible) los siguientes problemas de Cauchy:

$$\begin{array}{lll} 3x^2u_y + u_x = x^5 & yu_y + (2y-x)u_x = x & xu_y - yu_x = 2xyu \\ u(x,0) = x^3 & u(x,1) = 0 & u(x,0) = x \\ u_x - u_y = \frac{x-y}{xy} u & u_y + 3y^2u_x = \frac{2u}{y} + 6y^4x & yu_y + e^{x^2}u_x = 2x \\ u(x,1) = x & u(x,1) = x^2 & u(x,0) = 0 \end{array}$$

2. Precisar para qué valores de n entero positivo la condición $u(x, x^n) = x^n$ determina una única solución de la ecuación $u_x + yu = y^2$ cerca de $(0,0)$.

3. Determinar en torno a qué puntos tienen solución única los problemas:

$$\begin{array}{lll} senyu_y + u_x = 1 & (x^2 + y^2)u_y + u_x = 0 & (x^2 + y)u_y + xu_x = 0 \\ u(0,y) = 1 & u(x,0) = 0 & u(x, x^2) = x \end{array}$$

4. Sea $u_y - 2yu_x = 2yu$. Hallar la solución que satisface los datos de Cauchy:
i) $u(x,1) = e^{-x}$, ii) $u(2y,y) = 0$, discutiendo la unicidad de las soluciones.

5. Hallar la solución y estudiar la unicidad de: $u_y + xu_x = -x^2e^{-y}$, $u(-1,y) = 0$.

6. Sea (E) $(y+1)u_y + xu_x = 0$. Dibujar sus características. Probar que (E) tiene una única solución satisfaciendo $u(x,0) = f(x)$. Probar que si f no es constante dicha solución no puede estar definida en todo \mathbf{R}^2 . ¿En torno a qué puntos hay más de una solución de (E) que cumple $u(y^2,y) = 0$? Estudiar si existen soluciones de (E) satisfaciendo $u(0,y) = g(y)$.

7. Demostrar que no existe solución de $u_x = 0$ que esté definida en todo el semiplano $y \geq 0$ y que contenga la curva $\Gamma: y = x^2, z = x^3$. Estudiar en qué entornos de Γ hay soluciones únicas locales.

8. Sea (E) $u_t - 2tu_x + \frac{2tu}{1+t^2} = 0$. Hallar la solución que satisface $u(x,0) = f(x)$.

$$\text{Dibujar } u(x,2) \text{ en el caso particular en que } f(x) = \begin{cases} \text{sen}^2 \pi x & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Escribir un problema de Cauchy para (E) que tenga infinitas soluciones.

9. Sea (E) $t^2u_t + u_x = 2xu$.

Hallar la solución de (E) que cumple $u(x,1) = f(x)$, estudiando su unicidad.

En particular, si $f(x) = \text{sen}^2 x$ en $[0, \pi]$ y 0 en el resto de \mathbf{R} , hallar $u(3, \frac{1}{2})$.

Plantear un problema de Cauchy para (E) que tenga infinitas soluciones.

10. Sea (E) $A(x,y,u)u_y + B(x,y,u)u_x = C(x,y,u)$ [ecuación cuasilineal].

Supongamos que las curvas integrales del sistema de EDOs: $\frac{du}{dx} = \frac{C}{B}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B}$

vienen dadas por $\eta(x,y,u) = C_1$, $\xi(x,y,u) = C_2$ [curvas características de (E)].

Probar que $\eta(x,y,u) = p[\xi(x,y,u)]$ (o bien, $\xi(x,y,u) = q[\eta(x,y,u)]$) para cualquier función p (q) arbitraria es solución de (E).

11. Hallar (si se puede) la solución o soluciones de las siguientes ecuaciones que satisfacen cada uno de los datos de Cauchy que se indican:

$$u_y + uu_x = 0 \quad \text{con} \quad \text{i) } u(x,0) = x \quad , \quad \text{ii) } u(0,y) = 0$$

$$uu_y + xu_x = u \quad \text{con} \quad \text{i) } u(x,0) = 1 \quad , \quad \text{ii) } u(0,y) = 1$$

$$u_y + u_x = u^2 \quad \text{con} \quad \text{i) } u(x,0) = x \quad , \quad \text{ii) } u(x,x) = 1$$

12. Reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:

$$\begin{array}{lll} t^2 u_{tt} - x^2 u_{xx} = 0 & u_{yy} + 2u_{xy} + 2u_{xx} = 0 & x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = e^x \\ e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u & u_{xx} - 3y u_x + 2y^2 u = y & u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + 6u_x + 3u_y = 9u \end{array}$$

13. Escribir (E) $u_{tt} + 2u_{xt} = 2$ en forma canónica y hallar su solución general. De los datos de Cauchy: i) $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, ii) $u(0,t) = 0, u_x(0,t) = t$, hay unos que determinan una única solución de (E). Hallarla en ese caso.

14. Sea [E] $u_{tt} - x^2 u_{xx} - u_t = 0$. Hallar su solución general. Determinar la solución de [E] que satisface $u(x,0) = 2x, u_t(x,0) = x$. Escribir (en el caso de que exista) alguna solución de [E], distinta de la $u=0$, que satisfaga $u(e^t, t) = u_t(e^t, t) = 0$.

15. Sea $u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx} = 2t^{-2}u$.

Calcular la solución que satisface $u(x,1) = 0, u_t(x,1) = g(x)$.

En el caso particular $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen}^4 \pi x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ hallar y dibujar $u(x,2)$.

16. a) Escribir (E) $4y u_{yy} - u_{xx} + 2u_y = 0$ en forma canónica para $y > 0$ y para $y < 0$.
b) Resolver (E) con los datos iniciales: $u(x,1) = 2x, u_y(x,1) = x$.

17. Resolver los siguientes problemas de Cauchy ($x, t \in \mathbf{R}$):

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \\ u(x,x) = x^2 \\ u_t(x,x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,x) = 0 \\ u_t(x,x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u_t + u_x \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

18. Sea (E) $Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Fu = G(x,y)$, con A, B, \dots, F constantes.

Probar que, si (E) no es parabólica, un cambio de variable $u = e^{py + qx} w$, con p y q constantes adecuadas, lleva (E) a una ecuación (E*) en la que no existen derivadas de primer orden. ¿Para qué relación entre las constantes A, \dots, F no tiene (E*) término en w ?

Aplicar lo anterior para hallar la solución general de $u_{xy} + 2u_y + 3u_x + 6u = 1$. Probar que cualquier ecuación parabólica o es resoluble o se puede escribir mediante cambios de variable en la forma $w_\eta + E^* w_{\xi\xi} = G^{**}(\xi, \eta)$.

19. Estudiar la unicidad de los problemas:

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t), & x \in (0,L), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) + a u(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) + b u(L,t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - (c(x)u_x)_x = F(x,t), & x \in [0,1], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0, & u(1,t) = 0 \\ & (c \text{ de } C^1 \text{ y positiva}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u - k^2 u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } C_1 \\ \mathbf{u}_n = g \text{ en } C_2 \\ \text{si } C_1 \cup C_2 = \partial D, C_1 \cap C_2 = \emptyset \end{cases} \quad \begin{cases} u_t - k \Delta u = F(x,y,t) \text{ en } D \\ u(x,y,0) = f(x,y) \text{ en } D \\ u(x,y,t) = 0 \text{ en } \partial D \end{cases}$$

(D dominio acotado en \mathbf{R}^2)

20. Si la distribución inicial de temperaturas en una varilla es $f(x) = 2x^2 - 3x$, $x \in [0,2]$, y la temperatura para $t > 0$ en los extremos es $h_0(t) = -t/(1+t^2)$, $h_2(t) = 2 \text{sen} t / t$, y suponemos que no existen fuentes de calor en el interior de la varilla, determinar la máxima y mínima temperaturas alcanzadas en la varilla para $t \geq 0$.

problemas 6

1. Resolver por diferentes caminos:
$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=e^{-t}, & x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2, u_t(x,0)=-1 \end{cases}$$

2. Para los problemas:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \text{sen}\pi x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{resto de } \mathbf{R} \end{cases} \\ u_t(x,0)=\begin{cases} \text{sen}\pi x, & -4 \leq x \leq -3 \\ 0 & \text{resto de } \mathbf{R} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \in [0,4], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \text{sen}\pi x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{resto de } [0,4] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(4,t)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u_t(x,0)=\begin{cases} \text{sen}\pi x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & [0,1] \cup [2,\infty) \end{cases} \\ u(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$$

i) dibujar el dominio de influencia y ver cuando la cuerda está en reposo; ii) dibujar $u(x,1)$, $u(x,2)$ y $u(x,3)$; iii) dibujar $u(3,t)$, $t \geq 0$.

3. Para los siguientes problemas:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\text{sen}\pi x, & x \in [0,1], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\text{sen}\pi x \\ u_t(x,0)=\text{sen}\pi x \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$$

i) hallar $u(x,1)$ y $u(1,t)$, $t \geq 0$; ii) dibujar $u(x,1/2)$, $u(x,1)$ y $u(x,2)$.

4. Sea el problema
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\delta(x), & x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases} .$$

Hallar la expresión analítica de su solución para $t \geq 0$. Dibujar $u(x,2)$ y $u(3,t)$. Analizar la continuidad y diferenciabilidad de la solución.

[ayuda: $v(x)=|x|/2$ satisface $v''(x)=\delta(x)$]

5. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=F(x,t), & x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases} , \text{ con } F(x,t)=\begin{cases} 1, & x \in [1,2], t \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} .$$

Calcular $u(-1,1)$ y $u(1,1)$. Calcular y dibujar $u(x,1)$.

6. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \text{sen}x, & x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} , u_t(x,0)=\begin{cases} \text{cos}x, & x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \end{cases}$$

Demostrar que su solución es una onda que viaja hacia la izquierda.

7. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, & x \in [0,2], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=4x-x^3, u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases} \quad \text{Hallar } u\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right). \text{ Dibujar } u(x,2). \text{ Hallar } u(x,1).$$

8. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \in [0,L], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=t, u(L,t)=0 \end{cases}$$

Hallar la expresión analítica de $u(x,T)$ con $T \in [0,L]$. Describir la evolución de la cuerda en el intervalo de tiempo $t \in [0,L]$. Hallar $u(x,kL)$, $k=1,2,\dots$

9. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x), u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

Escribir su solución extendiendo f y g de forma adecuada a todo \mathbf{R} y aplicando la fórmula de D'Alembert. ¿Que condiciones deben cumplir f y g para que la solución sea clásica? ¿Se invierten las ondas al reflejarse en $x=0$? ¿Cómo son los dominios de influencia?

10. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6x, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0 \end{cases}$$
 . Calcular $u(0,t)$ para todo t .

11. Sea $u_{tt}-e^{2t}u_{xx}-u_t=0$. Hallar su solución general y la particular que satisface $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=0$. Escribir un problema de Cauchy para dicha ecuación que no tenga solución, y otro con infinitas soluciones.

Si $f(x)=\begin{cases} 1-2|x|, & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$, dibujar la solución para $t=1$ y $t=2$.

Dibujar en el plano xt las características que pasan por $(0,0)$ y $(0,1)$.

¿Cuál es el dominio de influencia sobre la solución del valor inicial de f en $x=0$? ¿Cuál es el dominio de dependencia de $u(0,1)$ de los valores de f ?

12. El potencial v y la intensidad i en una línea telegráfica satisfacen:

$$v_x+Li_t+Ri=0, \quad i_x+Cv_t+Gv=0$$

donde L, R, C y G son constantes características de la línea.

a) Hallar la ecuación de segundo orden (E) que verifica el potencial v .

b) Si $GL=RC$, comprobar que un cambio adecuado reduce (E) a la ecuación de ondas y hallar $v(x,t)$ si inicialmente $v(x,0)=V(x)$ e $i(x,0)=I(x)$.

13. Resolver
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0 \\ u(x,y,z,0)=f(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,0)=0 \end{cases}$$
 , si $f(x,y,z)=\begin{cases} a] & x+y+z \\ b] & x+y \\ c] & x \end{cases}$.

14. Hallar $u(0,t)$ para $t \geq 0$ en los seis casos y $u(r,t)$ cuando se pueda para:

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 \\ u(r,0)=f(r) \\ u_t(r,0)=g(r) \end{cases} \quad \text{con } \begin{cases} \text{a) } f(r)=g(r)=r^2 \\ \text{b) } f(r)=0, g(r)=\begin{cases} 1-r^2, & r \leq 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

vistos como problemas en i) una, ii) dos y iii) tres dimensiones [r es la distancia de un punto (de la recta, del plano, del espacio) al origen]

15. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0, & r \geq 0 \\ u(r,0)=0, u_t(r,0)=e^{-r^2} \end{cases}$$

Hallar $u(r,t)$ para $r > 0$. Hallar $u(0,t)$. Dibujar u para varios valores de t .

16. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0, & r \geq 0 \\ u(r,0)=6, u_t(r,0)=5r^3 \end{cases}$$
 . Hallar $u(2,3)$.

17. Sea
$$\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0, & r \geq 0 \\ u(r,0)=r, u_t(r,0)=0 \end{cases}$$
 . Calcular $u(1,t)$.

18. Sean los problemas:

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ v(x,0)=xf(x) \\ v_t(x,0)=v(0,t)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r,0)=f(r) \\ u_t(r,0)=0 \end{cases}$$

donde $f(x)=(x-2)(x-4)$ si $x \in [2,4]$ y 0 en el resto de $[0, \infty)$.

Dibujar $v(x,3)$, $v(x,6)$, $u(r,3)$ y $u(r,6)$. Comentar la evolución a lo largo del tiempo de las soluciones de ambos problemas.

19. Estudiar qué tipo de ondas viajeras [soluciones $u(x,t)=f(x-ct)$] admite la ecuación no lineal (de Sine-Gordon): $u_{tt}-u_{xx}+\text{senu}=0$.

problemas 7

1. Determinar los autovalores y autofunciones asociadas:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= y'(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(-1) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= y(1) + y'(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^2 y'' + ty' + \lambda y &= 0 \\ y(1) &= y(e) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^2 y'' + ty' + [\lambda t^2 - \frac{1}{4}] y &= 0 \\ y(1) &= y(4) = 0 \end{aligned}$$

2. Estudiar los autovalores y autofunciones del ejemplo 4 de 7.1:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= y'(0), y(1) = -y'(1) \end{aligned}$$

3. Sea $y'' + \lambda y = 0$
 $\alpha y(0) + y'(0) = y(1) = 0$.

Probar que posee infinitos autovalores positivos $\forall \alpha$. Discutir si existen autovalores negativos ó 0. Estudiar la evolución con α del menor autovalor. Comprobar para $\alpha=0$ que la n-sima autofunción posee n-1 ceros en $(0,1)$.

4. Hallar cotas superior e inferior para los autovalores positivos de

$$\begin{aligned} t^2 y'' - 2ty' + [2 + \lambda t^2] y &= 0 \\ y(\pi) &= y(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

comparando con una ecuación de coeficientes constantes.

Con el cambio $y=xt$ resolver explícitamente el problema y comprobar la validez de las acotaciones anteriores.

5. Sea $y'' + [\lambda - V(t)]y = 0$ y supongamos que $m < V(t) < M$ para todo $t \in [a, b]$.
 $y(a) = y(b) = 0$
 Hallar cotas superior e inferior para los autovalores del problema.

6. Determinar los autovalores de $y'' + [\lambda - V(t)]y = 0$ si $V(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$.

7. Hallar autovalores y autofunciones de los problema singulares:

$$\begin{aligned} [1-t^2]y'' - ty' + \lambda y &= 0 \quad (\text{ecuación de Tchebycheff}). \\ y, y' &\text{ acotadas en } \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + (2p+1-t^2)y &= 0, p \text{ cte} \geq 0 \quad (\text{hacer } y = u e^{-t^2/2} \text{ para obtener Hermite}) \\ y &\rightarrow 0 \text{ cuando } |t| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

8. Desarrollar $f(t) = t^2$, $t \in [0, 1]$ en serie de i) $\{\text{senn}\pi t\}$, ii) $\{\text{cosn}\pi t\}$.
 Dibujar algunas sumas parciales de las series obtenidas.

9. Desarrollar $f(t)$ en serie de senos y cosenos en $[-\pi, \pi]$, estudiando la convergencia puntual y uniforme de dicha serie si:

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{sen}^2 t & f(t) &= |\text{sent}| & f(t) &= \text{sen} \frac{t}{2} & f(t) &= \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq t < 0 \\ \text{sent}, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

10. Desarrollar $f(t) = t$ en serie de autofunciones de cada uno de los problemas del problema 1.

11. Escribir los tres primeros términos del desarrollo de $f(t) = 1$ en serie de autofunciones del problema singular:

$$\begin{aligned} ([1-t^2]y')' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= 0, y \text{ acotada en } 1 \end{aligned}$$

12. Desarrollar la función $f(t) = 1 - t^2$ en serie de autofunciones del problema:

$$\begin{aligned} (ty')' + \lambda ty &= 0 \\ y &\text{ acotada en } 0, y(1) = 0 \end{aligned}$$

13. Estudiar la unicidad de $y''=f(t)$, $t \in (0,1)$ [ecuación de Poisson en una dimensión] con diferentes condiciones de contorno, utilizando técnicas similares a las de las ecuaciones en derivadas parciales.

14. Determinar para qué valores de α existe solución del problema:

$$y'' = e^{-(t-1)^2}$$

$$\alpha y(0) + (1-\alpha)y'(0) = y(1) = 0$$

15. Estudiar para qué valores de n (entero positivo) existe solución de:

$$y'' + ny = \cos^n t$$

$$y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$$

16. Estudiar según los valores de b cuántas soluciones posee el problema:

$$ty'' + 2y' = 1$$

$$y'(1) = 2y'(2) + by(2) = 0$$

Para $b=1$ hallar la solución mediante la función de Green.

17. Sea (P) $\cos t y'' - 2 \sin t y' = f(t)$
 $y'(-\pi/4) = y'(\pi/4) - ay(\pi/4) = 0$.

Determinar para qué valor de a el problema (P) no tiene solución única. Para ese a dar una $f(t)$ para el que (P) tenga infinitas soluciones.

Calcular la solución de (P) utilizando la función de Green si $a=2$ y $f(t)=1$.

18. Discutir, según las constantes c y a , cuántas soluciones tiene el problema

$$y'' + \frac{2y'}{t} = 1 + \frac{c}{t}$$

$$y'(1) + ay(1) = y'(2) = 0$$

Para $c=0$ y $a=1$, hallar la solución haciendo uso de la función de Green.

19. Hallar la función de Green y la solución para $f(t)=t$

$$\begin{array}{lll} y'' = f(t) & t^2 y'' + ty' - y = f(t) & y'' + y' - 2y = f(t) \\ y(0) = y'(1) = 0 & y(1) + y'(1) = y(2) = 0 & y(0) - y'(0) = y(1) = 0 \end{array}$$

20. Hallar una fórmula para la solución de $y'' = f(t)$
 $y(1)=a, y(2)=b$
 en términos de la función de Green, la función f y las constantes a y b .
 Calcular su solución si $f(t)=1$, $a=0$, $b=1$.

21. Considérese $u'' + r^{-1}u' = F(r)$ con $a, b \geq 0$.
 $u'(1) - au(1) = A, u'(2) + bu(2) = B$

Precisar cuándo tiene solución o soluciones [se puede interpretar como un problema para la ecuación de Laplace en el plano con simetría radial].

Para $F(r)=r^{-2}$, $a=1, b=0, A=B=0$ resolverlo haciendo uso de la función de Green.

22. Sea el problema singular $(ty')' = f(t)$
 y acotada en 0, $y(1)=0$.

Hallar su función de Green utilizando la fórmula para problemas regulares. Comprobar que proporciona la solución i) si $f(t)=1$, ii) si $f(t)=t$.

Relacionar los resultados con la ecuación de Poisson en el plano.

23. Calcular la función de Green $G(t,s)$ para $y'' + y = f(t)$
 $y(0) = y(1) = 0$,

$$\text{resolviendo para } s \text{ fijo } \begin{array}{l} G'' + G = \delta(t-s) \\ G(0) = G(1) = 0 \end{array} .$$

24. Sea $y'' = f(t)$
 $y(0) = -y(1), y'(0) = -y'(1)$.

Construir su función de Green y usarla para hallar la solución si $f(t)=t$.

25. Calcular para $\lambda=0$ y $\lambda=1$ la solución (si la hay) de
- $$t^2 y'' - ty' + \lambda y = t^3$$
- $$y(1) - y'(1) = y(2) - 2y'(2) = 0$$
- haciendo uso de la función de Green en el caso de que exista.
26. Sea $y'' + \lambda y = -4\pi^2 t$. ¿Para qué valores de λ tiene solución única?
 $y(0)=1, y(1)=0$
 Precisar para qué λ tiene infinitas soluciones y resolverlo en ese caso.
27. Sea $y'' + \lambda y = 0$
 $y(0)=0, y(1)=1$. Hallar la función de Green G_λ para todos λ que exista.
 Hallar la solución para todos los λ para los que exista alguna.
28. Sea $y'' + \lambda y = 1$
 $y'(0) = y'(1) - 2y(1) = 0$.
 Determinar los autovalores y autofunciones del problema homogéneo.
 Precisar si el no homogéneo posee infinitas soluciones para algún λ .
 Calcular la solución para $\lambda=0$, haciendo uso de la fórmula de Green.
29. Sea $y'' + \lambda y = 1$
 $y(0) - y'(0) = y(1) + y'(1) = 0$.
 Hallar autovalores y autofunciones del homogéneo.
 Calcular aproximadamente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y los ceros en $(0,1)$ de y_2 e y_3 .
 Estudiar para qué λ tiene solución y para cuáles dicha solución es única.
30. Sea $y'' + 2y' + \lambda y = e^{-t}$
 $y(0) + y'(0) = y(1/2) = 0$. ¿Existen para algún λ infinitas soluciones?
31. Sea $ty'' + 2y' + \lambda ty = f(t)$.
 $y(1) = y(2) = 0$.
 Determinar autovalores y autofunciones del homogéneo.
 Si $\lambda=0$, $f(t)=1$, calcular la solución a partir de la función de Green.
 Determinar para qué enteros positivos n el problema con $\lambda=\pi^2$, $f(t)=\text{senn}\pi t$ tiene solución o soluciones, calculándolas en ese caso.
32. Hallar una fórmula para la solución de un problema de Sturm-Liouville no homogéneo utilizando desarrollos en serie de autofunciones del homogéneo.
 Escribir, si $\lambda \neq n^2\pi^2$, el desarrollo en autofunciones de la solución de
- $$y'' + \lambda y = 1$$
- $$y(0) = y(1) = 0$$
- Hallar (a partir de la función de Green y directamente) la solución exacta para $\lambda=0$, $\lambda=1$ y $\lambda=-1$. Desarrollar esta solución para $\lambda=0$ y comprobar.
33. Desarrollar la solución para $\lambda=0$ en serie de autofunciones del homogéneo:
- | | | |
|-----------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| $y'' + \lambda y = t$ | $y'' + \lambda y = \text{senn}\pi t$ | $y'' - 2y' + y + \lambda y = e^t$ |
| $y(0) = y'(1) = 0$ | $y(-1) = y(1) = 0$ | $y(0) = y(1) = 0$ |

problemas 8

1. Resolver por separación de variables y dar interpretación física a los problemas y soluciones que se pueda:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0, \quad x \in [0,1], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x, & x \in [0,1/2] \\ 1-x, & x \in [1/2,1] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=4 \operatorname{sen} 6x \cos 3x, \quad x \in [0, \pi/2] \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0,t)=u_x(1,t)=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}+4u_t-u_{xx}=0, \quad x \in [0, \pi], t \geq 0 \\ u(x,0)=\operatorname{sen} 2x \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0, \quad r \leq 1, t > 0 \\ u(r,0)=1 \\ u_t(r,0)=u(1,t)=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t-u_{xx}=0, \quad x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0)=1 \\ u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=\cos t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t-u_{xx}=0, \quad x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=1, \quad u_x(\pi,t)=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t-u_{xx}-4u_x-4u=0, \quad x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0)=e^{-2x} \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r < 2 \\ u(2, \theta) = \begin{cases} 3, & x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 1, & x \in (\pi/2, 3\pi/2) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = -1, \quad (x,y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u=0 \text{ en } x=0, x=\pi, y=0, y=\pi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \cos \theta, \quad 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta) = 0, \quad u_r(2, \theta) = \cos 2\theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = y \cos x, \quad (x,y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \\ u_y(x,0)=u_y(x,1)=0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 2x \cos^2 y, \quad (x,y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(\pi,y)=5+\cos y \\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=u(0,y)=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = r, \quad r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \\ u(2,\theta)=3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \cos \frac{3\theta}{2}, \quad r < 1, 0 < \theta < \pi/3 \\ u(1,\theta)=0 \\ u_\theta(r,0)=u(r,\pi/3)=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi/4 \\ u(1,\theta)=0, \quad u_r(2,\theta)=\operatorname{sen} \theta \\ u(r,0)=u(r,\pi/4)-u_\theta(r,\pi/4)=0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u + u = 0, \quad r < 1, \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen} 2\theta, \quad u \text{ acotada} \\ u(r,\pi/2)=u(r,3\pi/2)=0 \end{array} \right.$$

2. Resolver y determinar para qué relación entre las constantes existe solución estacionaria (interpretarlo físicamente):
- $$\left\{ \begin{array}{l} u_t-u_{xx}=A, \quad x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0)=B \\ u_x(0,t)=C, u_x(1,t)=D \end{array} \right.$$

3. Resolver
- $$\left\{ \begin{array}{l} u_t-u_{xx}=F(t), \quad x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{array} \right.$$

Determinar la distribución estacionaria si $f(x)=\operatorname{sen} \frac{2x}{2}$ y $F(t)=e^{-t}$.

4. Sea
- $$\left\{ \begin{array}{l} u_t-u_{xx}=F(x), \quad x \in (-1,1), t > 0 \\ u(x,0)=0 \\ u_x(-1,t)=u_x(1,t)=0 \end{array} \right. \quad \text{y sea } Q(t) = \int_1^{-1} u(x,t) dx.$$

Calcular la variación en el tiempo de $Q(t)$ y deducir cuándo es constante. Resolver si i) $F(x)=\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$, ii) $F(x)=\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{2}$. ¿Tiene límite u cuando $t \rightarrow \infty$?

5. Calcular la solución y su límite cuando $t \rightarrow \infty$ (F y T constantes):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t-ku_{xx}=\cos \frac{\pi x}{2}, \quad x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0)=T, \quad u_x(0,t)=F, \quad u(1,t)=T \end{array} \right.$$

6. Sea una varilla de aluminio ($k=0.86 \text{ cm}^2/\text{seg}$) de 20 cm de longitud, con una temperatura inicial uniforme de 25 grados. En el instante $t=0$ el extremo $x=0$ se enfría hasta 0 grados, mientras que el extremo $x=20$ se calienta hasta 60 grados, y ambos se mantienen posteriormente a esas temperaturas. Escribir la distribución de temperaturas $u(x,t)$ para todo t y evaluar u en $x=5, 10$ y 15 para $t=0, 5$ y 30 utilizando tres y diez términos de la serie.

7. Sea
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_x(0,t) = 0, & u_x(1,t) - u(1,t) = 1 \end{cases}$$

Hallar su solución y comprobar que tiende a ∞ cuando t tiende a ∞ .

8. Resolver
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = 1, & u_x(0,t) = 0, & u(\pi,t) = e^{-t} \end{cases}$$

9. Sea una placa circular homogénea de 1cm de radio, inicialmente a 0 grados. Supongamos que en $t=0$ todo su borde se calienta hasta 1 grado y luego se mantiene a esa temperatura. Determinar la distribución de temperaturas en la placa para $t > 0$. ¿Hacia qué valor tenderá la temperatura de un punto situado a 0.5cm del centro de la placa cuando $t \rightarrow \infty$?

10. Sea (E) $u_t - u_{xx} + 2u_x = 0$, $x \in (0,1)$, $t > 0$, con el dato inicial (D) $u(x,0) = f(x)$.
 a) Determinar la solución de (E) que satisface (D) y las condiciones de contorno $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$. En el caso de que $f(x) = e^x$ determinar el límite de dicha solución cuando $t \rightarrow \infty$.
 b) Demostrar que existe una única solución de (E) que verifica (D) y las condiciones de contorno $u(0,t) = h_0(t)$, $u(1,t) = h_1(t)$.

11. Sea
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - au = 0, & x \in (0,3\pi), t > 0 \\ u(x,0) = 1 \\ u(0,t) - 4u_x(0,t) = u(3\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Determinar, según la constante a , el límite de la solución si $t \rightarrow \infty$.

12. Dado
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & x \in [0,\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = x, & u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, & u(\pi,t) = \pi \end{cases}$$
, obtener el valor de $u(\frac{\pi}{2}, \pi)$,

a] utilizando la fórmula de D'Alembert; b] por separación de variables.

(sumar la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ desarrollando $\pi x - x^2$ en $\text{sen} nx$ en $[0,\pi]$)

13. Sea
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0,2\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = g(x) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0 \end{cases}$$
 con $g(x) = \begin{cases} \text{sen} x, & x \in [0,\pi] \\ 0, & x \in [\pi,2\pi] \end{cases}$

Hallar $u(x,2\pi)$ con la fórmula de D'Alembert y por separación de variables.

14. Sea
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0,\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \text{sen} wt, & u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Determinar los valores de w para los que la solución no está acotada.

15. Sea
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r}u_r = F(r), & 1 \leq r \leq 2, t > 0 \\ u(r,0) = 0, & u_t(r,0) = g(r) \\ u(1,t) = u(2,t) = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la solución para $F(r) \equiv 0$ i) por separación de variables, ii) con las técnicas del capítulo 6.

b) Resolver el problema con $F(r) = g(r) = \frac{1}{r} \text{sen} \pi r$

16. Resolver
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, 1) \times (0, \pi) \\ u(x, 0) = u_y(x, \pi) = u(0, y) = 0, & u(1, y) = 1 \end{cases}$$

17. Sean (P_α)
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, 0 < \theta < \alpha \\ u(1, \theta) = \text{sen} \frac{k\pi\theta}{\alpha} \\ u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0 \end{cases}$$
 y (P)
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1 \\ u(1, \theta) = \text{sen} \frac{k\theta}{2} \end{cases}$$

Comparar para $k=1$ y $k=2$ las soluciones de (P) con las de (P_α) si $\alpha > 2\pi$. Hallar cotas superiores e inferiores para todas las soluciones.

18. Sea el problema en el plano:
$$\begin{cases} \Delta u = \pi, & r < 1, \theta \in (0, \pi) \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = u(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

Resolverlo y justificar si $u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ es mayor o menor que cero.

19. Probar que $\frac{2}{3} \leq u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) \leq 1$, si $u(r, \theta)$ es la solución del problema plano:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1 \\ u(1, \theta) = f(\theta) \end{cases} \quad \text{con} \quad f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

20. Resolver
$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = \cos^2 \theta - a, & r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = 0, & u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$
 para los a que se pueda.

21. Resolver por separación de variables el problema en la semiesfera:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{r^2 \text{sen} \theta} u_\theta = 0, & r < 1, 0 < \theta < \pi/2 \\ u_r(1, \theta) = f(\theta), & u_\theta(r, \pi/2) = 0 \end{cases}$$

¿Qué condición debe cumplir $f(\theta)$ para que exista solución?
Hallar la solución si $f(\theta) = \cos^2 - a$ para el único a en que existe.

22. Calcular la solución (o soluciones) de
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (-\pi/4, \pi/4) \\ u(0, y) = u_y(x, -\pi/4) = u_y(x, \pi/4) = 0 \\ u(\pi, y) = \text{sen} 2y \end{cases}$$

Comprobar que no podemos garantizar la unicidad del problema si utilizamos la fórmula de Green.

23. Resolver el problema exterior para la ecuación de Laplace en el círculo y en la esfera con simetría, es decir, resolver:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } r > R \\ u(R, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta < 2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } r > R \\ u(R, \theta) = f(\theta), & 0 < \theta < \pi \\ u \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Hallar la solución en ambos casos para $f(\theta) = a$ constante y para $f(\theta) = \cos^3 \theta$.

24. Resolver:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t > 0 \\ u(x, y, 0) = 1 + \cos x \cos 2y \\ u_x(0, y, t) = u_x(\pi, y, t) = 0 \\ u_y(x, 0, t) = u_y(x, \pi, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t \in \mathbb{R} \\ u(x, y, 0) = \text{sen}^3 x \text{sen} y, u_t(x, y, 0) = 0 \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = z, & x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u = z^3 & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & 1 < r < 2, 0 < z < 1, t > 0 \\ u(r, z, 0) = \text{sen} \pi z \\ u(1, z, t) = u(2, z, t) = 0 \\ u(r, 0, t) = u(r, 1, t) = 0 \end{cases}$$

25. Un cubo homogéneo de lado π , inicialmente a temperatura constante T_1 , se sumerge en el tiempo 0 en un baño que se mantiene a temperatura T_2 . Hallar la distribución de temperaturas en cualquier tiempo $t > 0$.

problemas 9

1. Hallar una fórmula para la solución de $y'' = f(t)$
 $y(1)=a, y(2)=b$
siguiendo el camino de la teoría para el cálculo de la función de Green para la ecuación de Laplace en el plano [ayuda: la función $v(s)=|s-t|/2$ satisface $v''=\delta(s-t)$ para cada t fijo].
2. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace en el semiplano $\{(x,y):x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ y utilizarla para la hallar la solución de

$$\begin{aligned} \Delta u &= F(x,y), \quad x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

Resolver el mismo problema para $F=0$ con transformadas de Fourier.

3. a) Resolver: $(P_a) \begin{cases} \Delta u = 0, & r < a, 0 < \theta < \pi/2, a > 0 \\ u(r,0) = u(a,\theta) = 0 \\ u(r,\pi/2) = 1 \end{cases}$
b) Utilizando la función de Green adecuada resolver $\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0, & u(0,y) = 1 \end{cases}$
y comparar su solución con el límite cuando $a \rightarrow \infty$ de la solución de (P_a) .

4. Calcular el valor en el origen de la solución de $\begin{cases} \Delta u = r \cos^2 \theta, & r < 1 \\ u(1,\theta) = 0, & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$

5. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace:
i) en el semicírculo $r < 1, \theta \in (0, \pi)$; ii) en el dominio $r > 1, \theta \in (0, \pi/2)$.

6. Sabiendo que $u(1,\theta) = \begin{cases} \sin \theta, & \theta \in [0, \pi] \\ 0, & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$, hallar el potencial u en el punto del plano de coordenadas polares $r=2, \theta=0$.

7. a) Hallar la función de Green en el semiespacio $z > 0$ para la ecuación de Laplace.
b) En el plano $z=0$ el potencial es V_0 dentro de un círculo de radio a , centrado en el origen, y 0 fuera de ese círculo. Usando a) expresar mediante una integral el potencial en un punto de coordenadas cilíndricas (r,θ,z) . Demostrar que a lo largo del eje del círculo ($r=0$) el potencial es

$$V = V_0 [1 - z(z^2 + a^2)^{-1/2}]$$

8. Escribir, utilizando coordenadas esféricas, la función de Green G para la ecuación de Laplace en la esfera unidad y deducir la expresión, en términos de G, F y f , de la solución del problema

$$(P) \begin{cases} \Delta u = F, & r < 1 \\ u = f & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Hallar el valor de la solución de (P) en el origen en caso de que:

$$\text{i) } F=1, f=1 \quad , \quad \text{ii) } F=z, f=z^3$$

9. Sea $(E) u_t - u_{xx} - 2u_x + au = 0$. Simplificarla con un cambio de variable adecuado. Hallar la solución de (E) que satisface la condición inicial $u(x,0) = e^{-x^2}$ y analizar su comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$.

10. Sea
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 1, u \text{ acotada} \end{cases}$$

Escribir en términos de la función error ϕ su solución $u(x, t)$ utilizando:

- la fórmula para la semirecta obtenida en los apuntes,
- la fórmula de la varilla infinita, tras cambio y extensión adecuados,
- transformadas de Laplace en la variable t [$L[1 - \phi(x/2\sqrt{t})] = \frac{1}{s} \exp(-x\sqrt{s})$]

Hallar con un error menor que 0.001 el valor de $u(0.5, 1)$, $u(1, 1)$, $u(6, 1)$, $u(1, 4)$, $u(2, 4)$ y $u(12, 4)$.

11. i) Hallar $I(a, x) = \int_0^\infty e^{-ak^2} \cos kx dk$ probando que $\frac{dI}{dx} = -\frac{x}{2a} I$ e $I(a, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$; usar

lo anterior para calcular: $\mathfrak{S}^{-1}(e^{-ak^2})$, $\mathfrak{S}^{-1}(ke^{-ak^2})$, $\mathfrak{S}^{-1}(e^{-ax^2})$, $\mathfrak{S}(e^{-ax^2})$.

ii) Probar el resto de afirmaciones de los teoremas 2, 2' y 4 de 9.2.

iii) Calcular $\mathfrak{S}[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$ y $\mathfrak{S}^{-1}\left(\frac{\text{sen} ak}{k}\right)$.

12. Resolver mediante transformadas de Fourier:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2/2} \end{cases} \quad \begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

13. Resolver:
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = g(t), u \text{ acotada} \end{cases}$$

14. Utilizando transformadas de Fourier resolver el problema puro de valores iniciales para la cuerda vibrante y el problema 4 de problemas 6.

15. Sea (P)
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & u(0, t) = \text{sent} \end{cases}$$

- Hallar y describir $u(x, t)$ para cada $t > 0$ fijo (ayuda: $v = \text{sent} \cos x$ satisface la condición de contorno y la ecuación).
- Hallar \hat{u}_s , transformada seno de la solución u hallada en i). Hallar \hat{u}_s resolviendo directamente (P) por transformadas seno.

16. a) Resolver
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$
 i. con transformadas de Fourier .
ii. haciendo $u = we^{-t}$

Si $f(x) = \text{sen} \pi x$, $x \in [0, 1]$ y 0 en el resto de \mathbf{R} , dibujar $u(x, 3)$.

b) Resolver
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, & 0 < x < 1, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \text{sen} \pi x, & u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

17. Hallar la solución de
$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

i) a partir de su forma canónica, ii) con transformadas de Fourier.

18. Resolver:
$$\begin{cases} t^2 u_t - u_x = g(x) \\ u(x, 1) = 0 \end{cases}$$
 por las características y utilizando la \mathfrak{S} .

19. Sea (E) $u_t + (\cos t)u_x = u$, $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$.

i) Hallar la solución con $u(x, 0) = f(x)$ por Fourier y las características.

ii) Si $f(x) = \begin{cases} \cos^2 x, & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$ describir $u(x, t)$ para $t \geq 0$.

iii) Estudiar si existe más de una solución de (E) satisfaciendo $u(0, t) = 0$.

20. Dado
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta(x), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u \text{ acotada} \end{cases}$$
,

hallar $u(0, t)$ sin que aparezcan integrales en el resultado.