Soluciones de los problemas 1, 2, 3 y 4 de MétodosII-C (entregados el 14-2-25).

1. Sea [E] $yu_y - xu_x = -u + x^2y^2$. **a]** Hallar su solución general, tomando i) $\eta = x$ y ii) $\eta = y$, y la que cumple $u(x,-1) = x$, dibujando las características y probando que es única.
b] Escribir, si las hay, 2 soluciones distintas de [E] que satisfagan $u(x,0) = x$.
c] Precisar en qué puntos del plano puede dar problemas de unicidad el dato $u(x, 2x-2) = 0$.

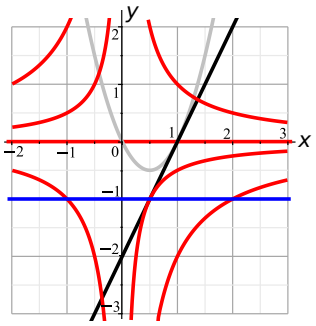
a] $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \overset{\text{lineal}}{\longrightarrow} y = \frac{C}{x}$ (siempre peor vista como separable), $xy = C$ características.

i) $\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = x \end{cases}$, $\begin{cases} u_y = xu_\xi \\ u_x = yu_\xi + u_\eta \end{cases} \to \eta u_\eta = u - \xi^2$, $u = p(\xi)\eta + \xi^2$, $\boxed{u(x,y) = p(xy)x + x^2y^2}$.
$e^{\int d\eta/\eta} = \eta$, u_p a ojo

ii) $\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = y \end{cases}$, $\begin{cases} u_y = yu_\xi + u_\eta \\ u_x = xu_\xi \end{cases} \to \eta u_\eta = -u + \xi^2$, $u = \frac{q(\xi)}{\eta} + \xi^2$, $\boxed{u(x,y) = \frac{q(xy)}{y} + x^2y^2}$.

$u(x,-1) = x^2 + xp(-x) = x$, $p(-x) = 1 - x$, $p(v) = 1 + v$, $\boxed{u(x,y) = x + x^2y + x^2y^2}$.

O bien $u(x,-1) = x^2 - q(-x) = x$, $q(-x) = x^2 - x$, $q(v) = v + v^2$ ↗



Es única porque la recta $y = -1$ no es tangente a ninguna característica.
O porque $T(x) = 1\cdot(-1) - 0\cdot(-x) = -1 \neq 0$ para todo x. O porque en el proceso de cálculo ha quedado $p(v)$ determinada $\forall v$ de forma única.

b] $u(x,0) = 0 + xp(0) = x$ se cumple $\forall p \in C^1$ con $p(0) = 1$, y posee infinitas soluciones (peor usando la q).
Por ejemplo, $p(v) \equiv 1$, $p(v) = v + 1$ dan lugar a las dos soluciones $\boxed{u_1 = x + x^2y^2}$, $\boxed{u_2 = x + x^2y + x^2y^2}$.

[$T(x) = 1\cdot 0 - 0\cdot(-x) \equiv 0$ corrobora que $y = 0$ era una característica, lo que era evidente.
Esto no implica, en principio, que haya infinitas soluciones, pues podría no haber ninguna].

c] Para $(x, 2x-2)$ es $T(x) = 1\cdot(2x-2) + 2\cdot x = 4x - 2$. Es tangente a características para $x = \frac{1}{2}$ [a $xy = -\frac{1}{2}$].
Puede haber problemas de unicidad en el punto del plano $\boxed{(1/2, -1)}$.

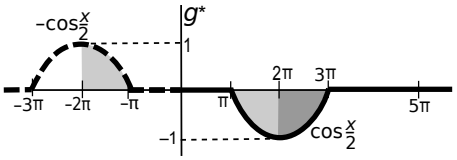
[Los hay: $u(x,2x-2) = p(2x^2-2x)x + 4x^2(x-1)^2$ sólo determina $p(v)$ para $v \geq -\frac{1}{2}$, valor mínimo de $2x^2-2x$ (en gris su gráfica). Si $v < -\frac{1}{2}$ quedan libres los valores de la $p \in C^1$, y hay infinitas soluciones cerca del punto en la zona $y < -\frac{1}{2x}$].

2. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \geq 0,\ t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \begin{cases} \cos\frac{x}{2},\ x \in [\pi, 3\pi] \\ 0,\ \text{resto de } [0,\infty) \end{cases} \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

a] Dibujar la extensión g^* y dar su expresión.
b] Hallar el valor de $u(7\pi,5\pi)$, $u(5\pi,5\pi)$, $u(3\pi,5\pi)$ y $u(\pi,5\pi)$.
c] Calcular $u(x,5\pi)$ para $x \geq 8\pi$ y para $6\pi \leq x \leq 8\pi$.
d] Dibujar aproximadamente $u(x,5\pi)$ [con algún cálculo más o usando las ondas viajeras $\pm\frac{1}{2}\int_0^x g^*$].

a] La extensión impar de g es $g^*(x) = \begin{cases} -\cos\frac{x}{2} & \text{si } x \in [-3\pi,-\pi] \\ \cos\frac{x}{2} & \text{si } x \in [\pi,3\pi] \\ 0 & \text{en el resto de } \mathbf{R} \end{cases}$

La gráfica de $\cos\frac{x}{2}$ es simplemente la del $\cos x$ expandida ↔



Entonces $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g^*(s)\,ds$ será la solución del problema.

b] $u(7\pi,5\pi) = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{12\pi} g^* = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{3\pi} \cos\frac{s}{2}\,ds = \left[\operatorname{sen}\frac{s}{2}\right]_{2\pi}^{3\pi} = \boxed{-1}$. $u(5\pi,5\pi) = \frac{1}{2}\int_0^{10\pi} g^* = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \cos\frac{s}{2}\,ds = \boxed{-2}$.

$u(3\pi,5\pi) = \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{8\pi} g^* = -\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{-\pi} g^* + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} g^* \underset{g^* \text{ impar}}{=} \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{3\pi} \cos\frac{s}{2}\,ds = \boxed{-1}$, como el primer valor.

$u(\pi,5\pi) = \frac{1}{2}\int_{-4\pi}^{6\pi} g^* = \boxed{0}$, pues se cancelan las integrales.

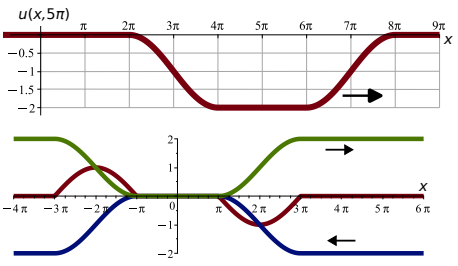
c] Para $x \geq 8\pi$ es $u(x,5\pi) = \frac{1}{2}\int_{x-5\pi}^{x+5\pi} g^* = \boxed{0}$, pues el integrando es 0 en todo el intervalo $[x-5\pi \geq 3\pi]$

Si $6\pi \leq x \leq 8\pi$, $u(x,5\pi) = \frac{1}{2}\int_{x-5\pi}^{3\pi} \cos\frac{s}{2}\,ds = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - 1 = \boxed{\cos\frac{x}{2} - 1}$, pues es $\pi \leq x - 5\pi \leq 3\pi$, $x + 5\pi > 3\pi$.
$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a\cos b - \cos a \operatorname{sen} b$ ↑

d] Hallando los valores en otros intervalos se comprueba que la forma de la solución para $t = 5\pi$ es la del dibujo de la derecha; esa es la onda que seguirá viajando a velocidad 1 hacia la derecha indefinidamente.

Otro modo de dar el dibujo (y la forma de la cuerda para otros valores de t) es dibujar las ondas viajeras $G(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g^*$ y $-G$, trasladarlas y sumarlas.

Se pueden dibujar estas ondas sin siquiera hacer integrales, mirando las áreas positivas y negativas que se van añadiendo y utilizando el hecho de que la primitiva de una función impar es par. Trasladando la azul G a la izquierda 5π y $-G$ (verde) a la derecha es clara la suma y dónde es nula. La G, primitiva de función continua, ha de ser C^1, como la solución.



3. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}+u_t+2u_x=0 \\ u(x,0)=2f(x),\, u_t(x,0)=-f(x) \end{cases}$. **a]** Resolverlo para una f general utilizando la $\mathcal{F}$. **b]** Resolverlo si $f(x)=\mathrm{e}^x$ a partir de la forma canónica, comprobar la solución y que la proporciona la expresión hallada en **a]**.

c] En caso de ser $f(x)=\begin{cases} x(1-x),\, x\in[0,1] \\ 0,\text{ resto de } \mathbf{R} \end{cases}$, i) dibujar aproximadamente $u(x,1)$, ii) calcular $u(2,t)\ \forall t\geq 0$.

a] $\begin{cases} \hat u_{tt}+u_t+4k^2\hat u-2\mathrm{i}k\hat u=0 \\ \hat u(k,0)=2\hat f k,\, \hat u_t(k,0)=-\hat f(k) \end{cases}$, $\mu^2+\mu+4k^2-2\mathrm{i}k=0$, $\mu=\frac{-1\pm(1+4\mathrm{i}k)}{2}=2\mathrm{i}k,-2\mathrm{i}k-1$, $\hat u=p(k)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kt}+q(k)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kt-t}$

$\xrightarrow{c.i.}\ \begin{matrix} p(k)+q(k)=2\hat f(k),\, p=2\hat f-q \\ 2\mathrm{i}kp(k)-(2\mathrm{i}k+1)q(k)=-\hat f(k) \end{matrix} \to\ p(k)=\frac{\hat g(k)}{3\mathrm{i}k}$, $q(k)=\hat f(k)=p(k)$, $\hat u(k,t)=\hat f(k)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kt}+\mathrm{e}^{-t}\hat f(k)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kt}$.

(•) $\boxed{u(x,t)=f(x-2t)+f(x+2t)\,\mathrm{e}^{-t}}$.

b] Los términos de orden 2 son los de las ondas y ya sabemos que es hiperbólica y sus características:

$\begin{cases} \xi=x+2t \\ \eta=x-2t \end{cases}$, $\begin{cases} u_x=u_\xi+u_\eta \\ u_t=2u_\xi-2u_\eta \end{cases}$, $\begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=4u_{\xi\xi}-8u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta} \end{cases} \to -16u_{\xi\eta}+4u_\xi=0 \xrightarrow{u_\xi=v} v_\eta=\frac{v}{4},\ v=p^*(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta/4} \to$

$u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta/4}+q(\eta)$, $\boxed{u(x,t)=p(x+2t)\,\mathrm{e}^{(x-2t)/4}+q(x-2t)}$ (solución general).

$\begin{cases} u(x,0)=p(x)\mathrm{e}^{x/4}+q(x)=2\mathrm{e}^x,\ q'=2\mathrm{e}^x-\left[p'+\frac{p}{4}\right]\mathrm{e}^{x/4}\ \searrow \\ u_t(x,0)=\left[2p'(x)-\frac12 p(x)\right]\mathrm{e}^{x/4}-2q'(x)=-\mathrm{e}^x,\ 4p'\mathrm{e}^{x/4}=3\mathrm{e}^x,\ p'=\frac34\mathrm{e}^{3x/4},\ p(x)=\mathrm{e}^{3x/4}\ \nearrow \end{cases}$ $q(x)=\mathrm{e}^x \to \boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{x+t}+\mathrm{e}^{x-2t}}$.

[La solución debía ser única por que los datos se dan sobre recta no característica].

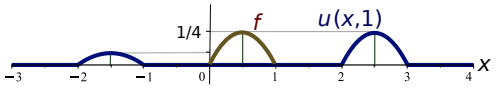
Comprobando: $u_{tt}-4u_{xx}+u_t+2u_x=\mathrm{e}^{x+t}(1-4+1+2)+\mathrm{e}^{x-2t}(4-4-2+2)=0$, $u(x,0)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$, $u_t(x,0)=\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x$.

En particular, para $f(x)=\mathrm{e}^x$ nos devuelve (•) la solución de arriba $u=\mathrm{e}^{x-2t}+\mathrm{e}^{x+2t}\mathrm{e}^{-t}=\boxed{\mathrm{e}^{x-2t}+\mathrm{e}^{x+t}}$.

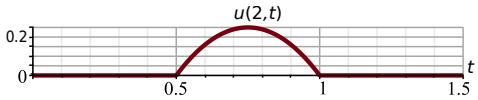
Con algo de vista se podría dar la solución (•) para f cualquiera hallada en **a]**:

$\begin{cases} p(x)\mathrm{e}^{x/4}+q(x)=2f(x),\ q'=2f'-\left[p'+\frac{p}{4}\right]\mathrm{e}^{x/4}\ \searrow \\ \left[2p'(x)-\frac12 p(x)\right]\mathrm{e}^{x/4}-2q'(x)=-f(x),\ 4p'\mathrm{e}^{x/4}=4f'-f,\ p'=\left[f'-\frac{f}{4}\right]\mathrm{e}^{-x/4}=\left[f\,\mathrm{e}^{-x/4}\right]',\ p(x)=f(x)\,\mathrm{e}^{-x/4}\ \nearrow \end{cases}$ $q(x)=f(x)\ \uparrow$

c] i) $u(x,1)=f(x-2)+f(x+2)\mathrm{e}^{-1}$. Es la f inicial 2 a la derecha y 2 a la izquierda, pero ésta de altura máxima $\frac{1}{4\mathrm{e}}\approx 0.09$.



ii) $u(2,t)=f(2-2t)+f(2+2t)\mathrm{e}^{-t}$. Es $f(2+2t)=0$ si $t\geq 0$ y será $f(2-2t)=0$ si $t\in\left[0,\frac12\right]$ o si $t\geq 1$. Es no nula sólo si $\frac12<t<1$ y en ese intervalo será $u(2,t)=2(1-t)(2t-1)$.



4. a] Para $\begin{cases} t\,u_t+u_x=f(x) \\ u(x,1)=0 \end{cases}$. i) Resolverlo con la $\mathcal{F}$, deducir la solución para $f(x)=\mathrm{e}^x$ y comprobarla. ii) Resolver a partir de las caracteristicas y probar la unicidad.

b] Ahora $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u \text{ acotada} \end{cases}$. Hallar su solución con la $\mathcal{F}$ en términos de una integral real. Escribir la solución sin integrales en caso de que sea $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

a] i) $\begin{cases} t\hat u_t-\mathrm{i}k\hat u=\hat f(k) \\ \hat u(k,1)=0 \end{cases} \to \hat u(k,t)=\underset{\uparrow \text{es } t>0,\ u_p \text{ a ojo}}{p(k)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\ln t}-\frac{1}{\mathrm{i}k}\hat f(k) \xrightarrow{c.i.} p(k)=\frac{1}{\mathrm{i}k}\hat f(k)$, $\hat u(k,t)=\hat f(k)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\ln t}-1}{\mathrm{i}k\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}$.

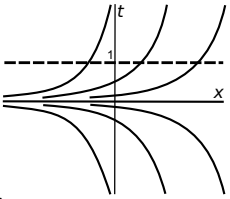
El cociente es la transformada de la función $h(x)=\begin{cases} 1,\text{ si } t\in[0,\ln t] \\ 0,\text{ resto de } \mathbf{R} \end{cases}$, con lo que será $u=\sqrt{2\pi}f(x)*h(x)$:

$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-s)h(s)\,ds=\int_0^{\ln t}f(x-s)\,ds\ \overset{x-s=v}{=}-\int_x^{x-\ln t}f(v)\,dv$, $\boxed{u(x,t)=\int_{x-\ln t}^{x}f(v)\,dv}$.

Cuando $f(x)=\mathrm{e}^x$ la solución pasa a ser $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^x\left(1-\frac1t\right)}$. $\frac1t\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\left(1-\frac1t\right)=\mathrm{e}^x$ y $u(x,1)=0$.

ii) $\frac{dt}{dx}=t$, $t=C\mathrm{e}^x$. $\boxed{t\,\mathrm{e}^{-x}=C}$ características. Mejor: $\begin{cases} \xi=t\,\mathrm{e}^{-x} \\ \eta=x \end{cases} \to \begin{cases} u_t=\mathrm{e}^{-x}u_\xi \\ u_x=-t\,\mathrm{e}^{-x}u_\xi+u_\eta \end{cases}$

$\to u_\eta=f(\eta)$. $u(\xi,\eta)=p(\xi)+\int_0^\eta f(s)\,ds$, $\boxed{u(x,t)=p\left(t\,\mathrm{e}^{-x}\right)+\int_0^x f(s)\,ds}$.



Del dato inicial: $u(x,1)=p\left(\mathrm{e}^{-x}\right)+\int_0^x f=0 \to p(v)=-\int_0^{-\ln v}$, $\boxed{u(x,t)=\int_{x-\ln t}^{x}f(s)\,ds}$.

Solución única por no ser nunca la recta tangente a las características (o por ser $T=1$).

b] $\begin{cases} \hat u_t=-\left(1+k^2\right)\hat u \\ \hat u(k,0)=\hat f(k) \end{cases} \to \hat u(k,t)=p(k)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-k^2t} \xrightarrow{c.i.} p(k)=\hat f(k)$, $\hat u(k,t)=\mathrm{e}^{-t}\hat f(k)\,\mathrm{e}^{-k^2t}$ (muy similar al calor).

Haciendo la convolución de las inversas: $\boxed{u(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,\mathrm{e}^{-(x-s)^2/4t}ds}$.

Sustituyendo $f(s)$ y completando cuadrados se llegaría integrando a la solución elemental (•), pero mejor:

$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-x^2/4}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-k^2}$, $\hat u=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-k^2(1+t)}$. Como $\mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-ak^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4a}$ es $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-x^2/(4+4t)}}$.

(•) $-\frac{s^2}{4}-\frac{s^2-2xs+x^2}{4t}=-\frac14\left[\frac{s\sqrt{t+1}}{\sqrt t}-\frac{x}{\sqrt t\sqrt{t+1}}\right]^2-\frac{x^2}{4(t+1)}$, cambio $v=[\cdot]\ldots$

Soluciones de los problemas 5, 6, 7 y 8 de MII-C (entregados el 2-4-25).

5. Sea (e) $x(x-1)y''+2y'-2y=0$. **a]** Hallar una solución no nula que se anule en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia. ¿Son analíticas todas sus soluciones en $x=0$? [Mejor calcular otra y_2 a partir de la y_1 hallada].
b] Probar que hay soluciones de (e) acotadas en $x=1$. ¿Tiene (e) soluciones polinómicas?
c] Determinar si hay soluciones de la ecuación (e) que tiendan a 0 cuando $x\to\infty$.

a] $x=0$ es singular regular con $r(r-1)-2\cdot r+0=0$, $r=3,0$. Sólo se anula en $x=0$:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+3}\ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+3)(k+2)c_kx^{k+3}-(k+3)(k+2)c_kx^{k+2}+2(k+3)c_kx^{k+2}-2c_kx^{k+3}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+4)(k+1)c_kx^{k+3}-(k+3)kc_kx^{k+2}\right]=0\ \to\ x^2\colon 0c_0=0,\ \forall c_0.\ \ x^3\colon 4c_1=4c_0,\ c_1=c_0.$$

$$x^{k+2}\colon (k+3)kc_{k-1}-(k+3)kc_k=0,\ c_k=c_{k-1}\to c_3=c_4=\cdots=c_0,\ \boxed{y_1=x^3\left[1+x+x^2+\cdots\right]=\frac{x^3}{1-x}}.$$

La $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$ será también analítica caso de ser $d=0$ (calculando se ve que lo es) y no lo será si $d\neq0$.

Pero mejor hallamos $e^{\int[2/(x(1-x))]}=e^{\int[2/x+2/(1-x)]}=\frac{x^2}{(1-x)^2}\to y_2=y_1\int\frac{x^2/(1-x)^2}{y_1^2}=\frac{x^3}{1-x}\int\frac{1}{x^4}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-x}$. $\boxed{y_2=\frac{1}{1-x}}$

es analítica y todas lo serán en $x=0$. Y con la solución elemental las respuestas a **b]** y **c]** son fáciles:

Es claro que la y_2 hallada tiende a 0 en el infinito y no cuesta ver que la solución $y_2-y_1=\frac{1-x^3}{1-x}=\boxed{1+x+x^2}$ es un polinomio P (y obviamente acotado en $x=1$). Pero se pueden responder analizando ambos puntos:

b] Haciendo $s=x-1$ la ecuación se convierte en $\boxed{s(1+s)y''+2y'-2y=0}$, con $s=0$ regular, de $r=0,-1$.

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\ \to\ \text{es obviamente acotada en } s=0\text{, y calculando obtendermos } 1+s+\tfrac{1}{3}s^2\ (\text{es } P/3):$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_ks^k+k(k-1)c_ks^{k-1}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}2kc_ks^{k-1}-\sum_{k=0}^{\infty}2c_ks^k=0\ \to\ \ s^0\colon\ 2c_1-2c_0=0\to c_1=c_0;$$

$$s^1\colon\ 6c_2-2c_1=0\ \to\ c_2=\tfrac{1}{3}c_0;\ \ s^2\colon\ 12c_3-0c_2=0\to c_3=0=c_4=c_5=\cdots.$$

c] $x=\frac{1}{s}\to\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s}\right)\left[s^4\ddot{y}+2s^3\dot{y}\right]+2\left[-s^2\dot{y}\right]-2y=s^2(1-s)\ddot{y}+s(2s-4)\dot{y}-2y=0$. $s=0$ singular regular, $r=1,-2$.
La y_1 tenderá a 0 al tender $s\to0^+$ (es decir si $x\to\infty$).

6. Sea $\begin{cases}y''+4y'+\lambda y=0\\ y(0)=y'(1/2)=0\end{cases}$. **a]** Probar que $\lambda_0=4$ es autovalor y dar la $\{y_0\}$ asociada. Probar gráficamente que hay infinitos $\lambda_n>4$ y escribir las $\{y_n\}$. [Ayuda: no existen $\lambda<4$].
b] Con ayuda de ordenador dar un valor aproximado de λ_1. O bien: **b*]** Probar sin ordenador que $\lambda_1<95$.
c] Hallar el primer término del desarrollo de $f(x)=e^{-2x}$ en serie de sus autofunciones (el coeficiente de y_0).
d] Precisar para qué valor de a tiene infinitas soluciones $y''+4y'+4y=8x-a$ con esos datos de contorno.

a] $\mu^2+4\mu+\lambda=0$, $\mu=-2\pm\sqrt{4-\lambda}$. Si $\lambda=4$ es $\mu=-2$ doble y si $\lambda>4$ son $\mu=-2\pm w\mathrm{i}$, con $w=\sqrt{\lambda-4}$.

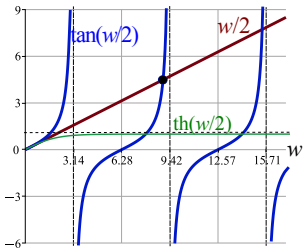
$\lambda=4\colon\ y=[c_1+c_2x]\,e^{-2x}$, $y'=[c_2-2c_1-2c_2x]\,e^{-2x}\to\ \left.\begin{matrix}c_1=0\\ -2e^{-1}c_1=0\end{matrix}\right\}\to\lambda_0=4$ autovalor, $\boxed{y_0=\{xe^{-2x}\}}$.

$\lambda>4\colon\ y=\left[c_1\cos(wx)+c_2\,\mathrm{sen}(wx)\right]e^{-2x}$, $y(0)=c_1=0$. Y del otro dato:

$y'(1/2)=c_2e^{-1}\left[w\cos\frac{w}{2}-2\,\mathrm{sen}\frac{w}{2}\right]=0$. c_2 cualquiera si $\frac{w_n}{2}=\tan\frac{w_n}{2}$.

Son los infinitos $\lambda_n=4+w_n^2$, con $y_n=\{e^{-2x}\,\mathrm{sen}(w_nx)\}$, $n=1,2,\ldots$

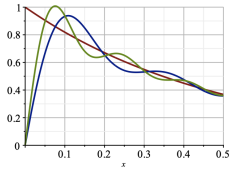
[Para $\lambda<4$ se obtiene que habría autovalores si fuese $\mathrm{th}\frac{p}{2}=\frac{p}{2}$ y eso nunca ocurre].



b] El primer corte entre la tangente y la recta es en $w_1\approx8.987\to\lambda_1\approx84.763$.

b*] Gráficamente: $w_1<3\pi<3(3.15)=9.45<\frac{19}{2}\ \to\ 4+w_1^2<4+\frac{361}{4}<95$.

c] Para $e^{-2x}=c_0\,xe^{-2x}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-2x}\,\mathrm{sen}(w_nx)$ es $c_0=\frac{\langle e^{-2x},y_0\rangle}{\langle y_0,y_0\rangle}=\frac{\int_0^{1/2}x\,dx}{\int_0^{1/2}x^2\,dx}=\frac{1/8}{1/24}=\boxed{3}$, pues el peso es $r(x)=e^{4x}$, ya que nuestra EDO pasa a ser $\left[e^{4x}y'\right]'+\lambda e^{4x}y=0$ en forma autoadjunta.



[Calculando y simplificando los c_n no pedidos se llega a la expresión $c_n=\frac{4}{w_n[1+\cos(w_n/2)]}$, y con los valores aproximados hasta w_5 se obtiene este dibujo sumando 4 y 6 términos].

d] En forma autoadjunta: $\left[e^{4x}y'\right]'+\lambda e^{4x}y=e^{4x}(8x-a)$. El homogéneo tiene infinitas soluciones $\{xe^{-2x}\}$.

Debe ser: $0=\int_0^{1/2}e^{2x}\left(8x^2-ax\right)dx=\left(4x^2-\frac{ax}{2}\right)e^{2x}\Big]_0^{1/2}-\int_0^{1/2}\left(8x-\frac{a}{2}\right)e^{2x}dx=\cdots=e-2-\frac{a}{4}\ \to\ \boxed{a=4e-8}$.

Directamente es largo. La solución general de la no homogénea acaba siendo: $y=[c_1+c_2x]\,e^{2x}+2x-2-\frac{a}{4}$.
De $y(0)=0$ se obtiene $c_1=2+\frac{a}{4}$ y del otro sale $c_1=e$. Sólo es posible para el a de antes, quedando c_2 libre.

7. **a]** Calcular 6 términos no nulos de la serie de Fourier de $f(x)=\begin{cases}\pi/2\,,\ 0\le x\le\pi/2\\ 0\,,\ \pi/2<x\le\pi\end{cases}$ en $\{\cos nx\}$. Dibujar la f junto a la suma de esos términos [con ordenador]. ¿Cuál debe ser la suma de la serie si: i) $x=0$, ii) $x=\frac{\pi}{2}$?

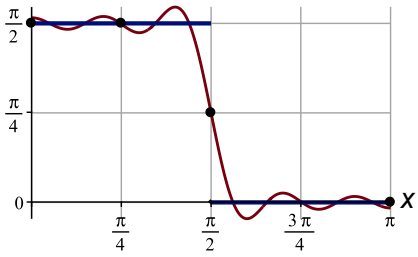
b] Resolver $\begin{cases}u_t-u_{xx}+u=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0\\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{cases}$ para: i) $f(x)=\cos x$, ii) la $f(x)$ del **a]**.

a] Si $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ es $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ para $n=0,1,2\ldots$

En concreto, $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\pi/2\,dx=\frac{\pi}{2}$. $a_n=\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}$, $n>1$.

Sólo sobreviven la constante y los cosenos impares:

$$\boxed{f(x)=\tfrac{\pi}{4}+\cos x-\tfrac{1}{3}\cos 3x+\tfrac{1}{5}\cos 5x-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}7x+\tfrac{1}{9}\cos 9x-\cdots}\ .$$



i) Como la extensión par de f es continua en 0 la suma debe ser su valor en el punto $f(0)=\boxed{\pi/2}$. [Comprobable: es $\pi/4$ más el $\arctan 1$].

ii) En $\frac{\pi}{2}$ (es discontinua) convergerá hacia $\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}^-\right)+f\left(\frac{\pi}{2}^+\right)\right]=\boxed{\frac{\pi}{4}}$. [Esto es obvio en la serie].

b] $u=XT$, $\frac{T'}{T}+1=\frac{X''}{X}=-\lambda\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'(\pi)=0\end{cases}$, $\lambda_n=n^2$, $n=0,1,2,\ldots$ $X_n=\{\cos nx\}$. (Entre ellos $X_0=\{1\}$).

Y además $T'=-(\lambda+1)T$, $T_n=\left\{e^{-(n^2+1)t}\right\}$.

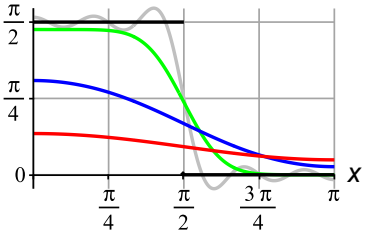
Por tanto $u(x,t)=\frac{a_0}{2}e^{-t}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{-(n^2+1)t}\cos nx$ y sólo falta cumplirse $u(x,0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=f(x)$.

Para i) (no se necesita hacer ninguna integral) es claramente $a_1=1$ y resto $a_n=0\to\boxed{u(x,t)=e^{-2t}\cos x}$.

Para ii) los a_n son los calculados en **a]**, y así es:

$$\boxed{u(x,t)=\tfrac{\pi}{4}e^{-t}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}e^{-(4m^2-4m+2)t}\cos(2m-1)x}$$

$$=\tfrac{\pi}{4}e^{-t}+e^{-2t}\cos x-\tfrac{1}{3}e^{-10t}\cos 3x+\tfrac{1}{5}e^{-26t}\cos 5x+\cdots$$



A la derecha solución dibujada para $t=0\,,0.05\,,0.4\,,1$ con 6 términos de la serie. Tiende a 0 cuando $t\to\infty$ por el término $+u$ a pesar de sus extremos aislados.

8. Resolver este problema no homogéneo para una cuerda con rozamiento y comprobar su solución: $\begin{cases}u_{tt}+2u_t-2u_{xx}=e^{-t}\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=7\operatorname{sen}5x\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$.

Separando variables en la ecuación homogénea: $u=XT\to X(T''+2T')=2X''T$, $\frac{X''}{X}=\frac{T''+2T'}{2T}=-\lambda$.

$\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\to X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$, $n=1,2,\ldots$ [y además $T_n''+2T_n'+2\lambda T_n=0$ que aquí no se usa].

Se lleva pues a la EDP: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx$, obteniendo $\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''+2T_n'+2n^2T_n\right]\operatorname{sen}nx=e^{-t}\operatorname{sen}x$. (ya desarrollada)

Además: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=0$, $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\operatorname{sen}nx=7\operatorname{sen}5x\Rightarrow T_n(0)=T_n'(0)=0$, menos $T_5'(0)=7$.

Todas las EDOs son homogéneas con coeficientes continuos y datos iniciales nulos (y podemos asegurar que su solución es $T_n\equiv 0$ sin calcular nada, pues 0 es solución y sabemos que hay solución única) menos dos:

$$\begin{cases}T_1''+2T_1'+2T_1=e^{-t}\\ T_3(0)=T_3'(0)=0\end{cases},\ T_1=(c_1\cos t+c_2\operatorname{sen}t)e^{-t}+e^{-t}\ \left[\mu=-1\pm i\,,\ T_{1p}=Ae^{-t}\to A=1\right]\xrightarrow{d.i.}u_1=\left[1-\cos t\right]e^{-t}.$$

$$\begin{cases}T_5''+2T_5'+50T_5=0\\ T_5(0)=0\,,\ T_5'(0)=7\end{cases},\ T_5=(c_1\cos 7t+c_2\operatorname{sen}7t)e^{-t}\ \left[\mu=-1\pm 7i\right]\xrightarrow{d.i.}u_5=e^{-t}\operatorname{sen}7t\,.$$

La solución será entonces: $\boxed{u(x,t)=\left[1-\cos t\right]e^{-t}\operatorname{sen}x+e^{-t}\operatorname{sen}7t\operatorname{sen}5x}$.

$u(0,t)=u(\pi,t)=0$ por cumplirlo $\operatorname{sen}x$ y $\operatorname{sen}5x$. $u(x,0)=0$ por anularse el $[\cdot]$ y $\operatorname{sen}7t$.

$$u_t=\left[\operatorname{sen}t+\cos t-1\right]e^{-t}\operatorname{sen}x+\left[7\cos 7t-\operatorname{sen}7t\right]e^{-t}\operatorname{sen}5x\xrightarrow{t=0}7\operatorname{sen}5x\,.$$

$$u_{tt}=\left[1-2\operatorname{sen}t\right]e^{-t}\operatorname{sen}x+\left[-14\cos 7t-48\operatorname{sen}7t\right]e^{-t}\operatorname{sen}5x\,.$$

$$u_{xx}=-\left[1-\cos t\right]e^{-t}\operatorname{sen}x-25\,e^{-t}\operatorname{sen}7t\operatorname{sen}5x\,.$$

$$u_{tt}+2u_t-2u_{xx}=\left[(1-2+2)+(2-2)\cos t+(-2+2)\operatorname{sen}t\right]e^{-t}\operatorname{sen}x$$
$$+\left[(-14+14)\cos 7t+(-48-2+50)\operatorname{sen}7t\right]e^{-t}\operatorname{sen}5x=e^{-t}\operatorname{sen}x\,.$$

[Si se ha encontrado una solución de la EDP que además cumple los datos de cortorno: $v=e^{-t}\operatorname{sen}x$, hacer $w=u-v$ llevaría el problema a uno homogéneo, a cambio de complicar los datos iniciales].