

- 1.** Sea la ecuación $(x+2y)u_y + xu_x = 2u$ y los datos: i) $u(2, y) = 2y$, ii) $u(x, -x) = x$. [1.8 pts]
Calcular la solución que cumple el dato para el que hay solución única. ¿Cuántas soluciones cumplen el otro?

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y + 1$ lineal, $y = Cx^2 + x^2 \int \frac{2}{x} = Cx^2 - x$, $\frac{y+x}{x^2} = C$ ($y = -x$ la característica más simple).

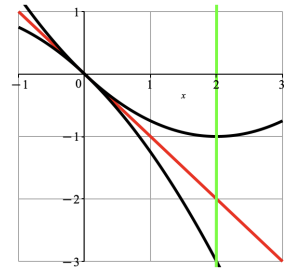
Mejor: $\begin{cases} \xi = yx^{-2} + x^{-1} \\ \eta = x \end{cases}$, $\begin{cases} u_y = x^{-2}u_\xi \\ u_x = -(2yx^{-3} + x^{-2})u_\xi + u_\eta \end{cases}$, $u_\eta = \frac{2u}{\eta}$, $u = p(\xi)\eta^2 = p(\frac{y+x}{x^2})x^2$.
Mucho más largo con $\eta = y$.

Las T respectivas son: i) $T(y) = 0 \cdot (2+2y) - 1 \cdot 2 = -2 \neq 0$ para todo $y \Rightarrow$ **unicidad**.

ii) $T(x) = 1 \cdot (x-2x) - (-1)1 \cdot x \equiv 0$. **Es una característica** (tangente en cada punto y además se sabía) y, por tanto, tendrá infinitas o ninguna solución.

Imponemos i): $u(2, y) = p(\frac{y+2}{4})4 = 2y$, $y = 4v - 2$, $p(v) = 2v - 1$, $u(x, y) = 2y + 2x - x^2$.

Para el ii): $u(x, -x) = p(0)x^2 = x$, lo que es imposible. **No hay solución** con ese dato.



- 2.** Sea $\begin{cases} u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx} - u = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = f'(x) \end{cases}$ a) Resolver el problema con la transformada de Fourier. b) Hallar su solución general a partir de la forma canónica. [1.8 pts]

a) $\begin{cases} \hat{u}_{tt} + 2ik\hat{u}_t - (1+k^2)\hat{u} = 0, \mu = -ik \pm \sqrt{-k^2 + 1 + k^2} = -ik \pm 1, \hat{u}(k, t) = p(k)e^{-ikt+t} + q(k)e^{-ikt-t} \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k), \hat{u}_t(k, 0) = -ik\hat{f}(k) \end{cases} \xrightarrow{ci}$
 $\begin{cases} p+q = \hat{f} \\ -ik(p+q) + p-q = -ik\hat{f} \end{cases} \Rightarrow p(k) = q(k) = \frac{1}{2}\hat{f}(k)$. $\hat{u}(k, t) = \frac{1}{2}\hat{f}(k)e^{-ikt}[e^t + e^{-t}]$, $u(x, t) = \text{ch } t f(x+t)$.

b) $B^2 - 4AC = 0$ parabólica, $\begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_t = u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{tt} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xt} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \end{cases} \rightarrow u_{\eta\eta} - u = 0$ forma canónica

EDO lineal de 2º orden en η con $\mu = \pm 1 \rightarrow u = p(\xi)e^\eta + q(\xi)e^{-\eta}$, $u(x, t) = p(x+t)e^t + q(x+t)e^{-t}$ solución general

Comprobamos la particular por aquí: $\begin{cases} p+q = f, p'+q' = f' \\ p'+q'+p-q = f' \end{cases} \Rightarrow p(x) = q(x) = \frac{1}{2}f(x)$, $u(x, t) = \frac{1}{2}f(x+t)(e^t - e^{-t})$.

- 3.** Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = e^{-x}, u(0, t) = t \end{cases}$ Hallar con D'Alembert: a) $u(1, 2)$, b) $u(1, t) \forall t \in [0, 1]$. [La v para el cambio es clara]. [1.8 pts]

$w = u - t \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w_t(x, 0) = e^{-x} - 1 \equiv g(x), w(x, 0) = w(0, t) = 0 \end{cases}$. Entonces será:

$u(x, t) = t + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*(s) ds$ con g^* extensión impar de $e^{-x} - 1$.

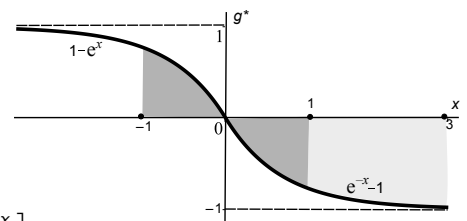
a) $u(1, 2) = 2 + \frac{1}{2} \int_{-1}^3 g^*(s) ds = 2 + \frac{1}{2} \int_{-1}^3 (e^{-s} - 1) ds = 1 + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-3}}{2}$.

[No se ha necesitado la expresión de g^* en $x \leq 0$, que es $-(e^{+x} - 1) = 1 - e^x$].

b) En $t \in [0, 1]$ es $1-t \geq 0$ y la integral no incluye valores negativos:

$u(1, t) = t + \frac{1}{2} \int_{1-t}^{1+t} (e^{-s} - 1) ds = t - t + \frac{1}{2} [e^{t-1} - e^{-t-1}] = e^{-1} \text{sh } t$.

En $[1, \infty)$ sería $u = t + \frac{1}{2} \int_{t-1}^{1+t} g = t - 1 + e^{-t} \text{sh } 1$ (el dibujo en $[1, 2]$ a la derecha).



- 4.** Sea $xy'' - 2y' + xy = 0$. Hallar, usando la regla de recurrencia, 3 términos no nulos del desarrollo en torno a $x=0$ de la solución y_1 . ¿Dónde converge esta serie? ¿Están y_1 e y_2 acotadas en $x=0$? [1.8 pts]

$\alpha = -\frac{2}{x} \Rightarrow x=0$ singular. $x^2y'' - 2xy' + x^2y = 0$, $\alpha^* = -2$, $b^* = x^2$ analíticas (s.reg.). $r(r-1) - 2r = 0$, $r = 3, 0$.

Como α^* y b^* 'convergen' $\forall x$ el teorema de Frobenius asegura que también lo hacen las series solución.

$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3}$. $y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + dy_1 \ln x$ ambas acotadas [aunque sea $d \neq 0$, pues $x^3 \ln |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$].

$\sum_0 [(k+3)(k+2)c_k x^{k+2} - 2(k+3)c_k x^{k+2} + c_k x^{k+4}] = \sum_0 [(k+3)kc_k x^{k+2} + c_k x^{k+4}] = 0 \rightarrow c_k = -\frac{c_{k-2}}{(k+3)k}$.

$x^2: 0 \cdot c_0 = 0, \forall c_0$; $x^3: 4c_1 = 0 = c_3 = \dots$; $x^4: 10c_2 + c_0 = 0, c_2 = -\frac{1}{10}c_0$; $c_4 = -\frac{1}{7.4}c_2 = \frac{1}{280}c_0, \dots$

$y_1 = x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{280}x^7 - \dots$. [Tiene solución elemental: $y = c_1(\sin x - x \cos x) + c_2(\cos x + x \sin x)$].

5. Sea $\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + \lambda y = 2x^3 \\ y'(1) = 4y(3) - 3y'(3) = 0 \end{cases}$ a) Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=2$ son o no autovalores del problema homogéneo, escribiendo su autofunción $\{y_h\}$ en caso de serlo.
b) Para ambos valores de λ precisar cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo. [2.3 ptos]

Ecuación de Euler con $\mu^2 - 3\mu + \lambda = 0$. Forma autoadjunta: $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{\lambda}{x^2}y = 2x$, $e^{-2\ln x}$, $\left[\frac{y'}{x^2}\right]' + \frac{\lambda}{x^4}y = \frac{2}{x}$.

a) Si $\lambda=0$, $y=c_1+c_2x^3$. Imponiendo datos: $\begin{cases} y'(1)=3c_2=0 \\ 4y(3)-3y'(3)=4c_1+27c_2=0 \end{cases} \rightarrow c_1=c_2=0$. **No es autovalor.**

Si $\lambda=2$, $y=c_1x+c_2x^2$. $\begin{cases} y'(1)=c_1+2c_2=0 \\ 4y(3)-3y'(3)=9c_1+18c_2=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=-2c_2$. **Es autovalor**, con $y_h = \{x^2 - 2x\}$.

b) Para $\lambda=0$ el problema no homogéneo tendrá solución única por tener el homogéneo sólo la trivial $y \equiv 0$.

Para $\lambda=2$ el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna dependiendo de si se anula o no la integral:

$$\int_1^3 (x^2 - 2x) \frac{2}{x} dx = \int_1^3 (2x - 4) dx = [x^2]_1^3 - 8 = 0. \text{ Tiene infinitas.}$$

Más largo imponiendo los datos a la solución general de la no homogénea: $y_p = Ax^3 \rightarrow y = c_1x + c_2x^2 + x^3 \rightarrow$

$$\begin{cases} y'(1)=c_1+2c_2+3=0 \\ 4y(3)-3y'(3)=9c_1+18c_2+27=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=-2c_2-3. \text{ Las infinitas son } y = c_2(x^2 - 2x) + x^3 - 3x.$$

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t - 3t^2 u_{xx} = e^{-4t^3} \cos 2x, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \sin^2 x, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$. [2.3 ptos]

Por ser una EDP nueva empezamos separando variables en la homogénea $XT' = 3t^2 X''T$, $\frac{T'}{3t^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

$\rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$, $X_n = \{\cos nx\}$, $n=0, 1, \dots$ autofunciones del homogéneo (entre ellas $\{1\}$). [Y además $T' = -3t^2 \lambda T$].

Llevamos entonces a la EDP y al dato inicial la serie $u(x, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos nx$ obteniendo:

$$T'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + 3n^2 t^2 T_n] \cos nx = e^{-4t^3} \cos 2x, T_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos nx = 1 - \cos 2x \text{ (segundos miembros ya desarrollados).}$$

Como el resto son problemas para EDOs homogéneas continuas y con dato inicial 0 sólo hay que resolver:

$$\begin{cases} T'_0 = 0 \\ T_0(0) = 1 \end{cases} \rightarrow T_0 = 1, \quad \begin{cases} T'_2 + 12t^2 T_2 = e^{-4t^3} \\ T_2(0) = -1 \end{cases} \rightarrow T_2 = Ce^{-4t^3} + e^{-4t^3} \int e^{4t^3} e^{-4t^3} dt = (C+t)e^{-4t^3} \xrightarrow{di} C = -1.$$

Por tanto, $u(x, t) = 1 + (t-1)e^{-4t^3} \cos 2x$.

7. Resolver el problema en el semicírculo $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \pi\theta, u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$. [2.3 ptos]

Conocemos las EDO que da $u = R\Theta \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases}$, $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}$, $\Theta_n = \{\sin \frac{2n-1}{2}\theta\}$, $n=1, 2, \dots$

Y también $r^2 R'' + rR' - \lambda_n R = 0$, $\mu = \pm \sqrt{\lambda_n}$, que para los λ_n de arriba da: $R = c_1 r^{n-\frac{1}{2}} + c_2 r^{-n+\frac{1}{2}}$.



Y además las soluciones han de estar acotadas en el origen: $R_n = \{r^{n-\frac{1}{2}}\} \rightarrow u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{n-\frac{1}{2}} \sin \frac{2n-1}{2}\theta$.

Imponemos el último dato de contorno para hallar los c_n : $u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2} c_n 1^{n-\frac{3}{2}} \sin \frac{2n-1}{2}\theta = \pi\theta \rightarrow$

$$c_n = \frac{2}{2n-1} 2 \int_0^\pi \theta \sin \frac{(2n-1)\theta}{2} d\theta = \frac{8}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\theta}{2} \Big|_0^\pi + \frac{8}{(2n-1)^2} \int_0^\pi \cos \frac{(2n-1)\theta}{2} d\theta = \frac{16}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

La solución única de este problema mixto será entonces:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} r^{n-\frac{1}{2}} \sin \frac{2n-1}{2}\theta.$$