

Soluciones de problemas de Cálculo entregados el 18 de febrero de 2025

1. Sean $\vec{p} = (2, 0, -2)$, $\vec{q} = (-1, 1, 0)$. a) Hallar $\vec{p} \cdot \vec{q}$, $\vec{p} \times \vec{q}$ y $\vec{p} \cdot (\vec{p} \times \vec{q})$. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz para $\vec{p}$ y $\vec{q}$. Calcular la distancia de $\vec{p}$ a $\vec{q}$ y el ángulo que forman ambos vectores.
 b) Escribir una expresión paramétrica y la expresión cartesiana del plano que contiene los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.
 c) Dar dos expresiones paramétricas del segmento que une $\vec{p}$ y $\vec{q}$ que lo describan en sentidos opuestos y hallar el punto en que ese segmento corta el plano $x=0$.
 d) Si $F(x, y, z) = \sin(y-x) - z^2$, i) hallar un $\vec{u}$ unitario que sea perpendicular a $\vec{p}$ y tal que $D_{\vec{u}}F(0, 0, 0) = 0$, ii) escribir la ecuación del plano tangente a $F=0$ en el punto $(0, 0, 0)$.

a) $\vec{p} \cdot \vec{q} = -2$, $\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, 2)$, $\vec{p} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0$. $\|\vec{p} + \vec{q}\| = \|(1, 1, -2)\| = \sqrt{6} \leq 3\sqrt{2} = \|\vec{p}\| + \|\vec{q}\|$ ($\sqrt{3} < 3$).
 $|\vec{p} \cdot \vec{q}| = 2 \leq 4 = \|\vec{p}\| \|\vec{q}\|$. $d(\vec{p}, \vec{q}) = \|\vec{q} - \vec{p}\| = \|(-3, 1, 2)\| = \sqrt{14}$, $\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{p}\| \|\vec{q}\|} = -\frac{1}{2} = \cos \phi \rightarrow$ forman un ángulo $\frac{2\pi}{3}$.

b) Plano que contiene a $\vec{p}$ y $\vec{q}$: $\vec{x} = t(2, 0, -2) + s(-1, 1, 0)$, $\begin{cases} x = 2t - s \\ y = s \\ z = -2t \end{cases} \rightarrow \boxed{z = -x - y}$.

O como $\vec{p} \times \vec{q}$ es perpendicular a este plano: $(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0$ ✓

c) Podemos escoger $\vec{c}(t) = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p})$ o $\vec{c}_*(t) = \vec{q} + t(\vec{p} - \vec{q})$, ambos con $t \in [0, 1]$.

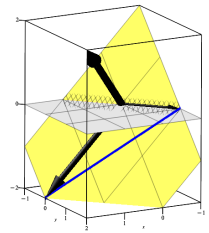
Es decir: $\vec{c}(t) = (2-3t, t, 2t-2)$, $\vec{c}_*(t) = (-1, 1, 0) + t(3, -1, -2) = (3t-1, 1-t, -2t)$.

A partir de cualquiera de los dos se obtiene el punto $(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

d) $\nabla F(0, 0, 0) = (-\cos(y-x), \cos(y-x), -2z)_{(0,0,0)} = (-1, 1, 0) = \vec{q}$. $\vec{u}$ será $\perp$ a $\vec{p}$ y $\vec{q}$. Lo es el hallado $\vec{p} \times \vec{q}$.

Un unitario válido es $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ [o también $-\vec{u}$]. O directamente $\vec{p} \cdot (a, b, c) = 2a - 2c = 0 \rightarrow (\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}})$.

El punto cumple $F=0$ y usando el ∇F : $(-1, 1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \rightarrow \boxed{y=x}$ plano tangente (vertical).



2. Sea $f(x, y) = \frac{xy - x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f(0, 0) = 0$. a) Calcular ∇f en $(0, -1)$ trabajando en cartesianas y en polares.

b) Precisar si es continua, si existen f_x y f_y y si es diferenciable en $(0, 0)$.

c) Dibujar $f=0$. Encontrar, si existe, un $\vec{u}$ unitario tal que la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(0, -1)$ sea: i) 0, ii) 2.

d) Si $\vec{c}(t) = (2t, -e^t)$ y $h(t) = f(\vec{c}(t))$ hallar $h'(0)$ con la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$. e) Calcular $\Delta f(1, 1)$ (mejor en polares).

a) $f_x = \frac{y-2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y-x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3-2xy^2-x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_y = \dots = \frac{x^2(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. $\nabla f(0, -1) = (-1, 0)$.

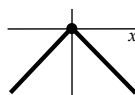
En polares: $f(r, \theta) = r \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$, $f_r = c s - c^2$, $\frac{1}{r} f_\theta = c^2 - s^2 + 2cs = (c^2 - s^2 + 2cs)$.

$\nabla f = f_r(c, s) + \frac{1}{r} f_\theta(-s, c) = (s^3 - 2cs^2 - c^3, (c+s)c^2) \xrightarrow{\theta = -\pi/2} (-1, 0)$.

[O $\theta = 3\pi/2$, basta mirar el punto. Es falso, en general, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$].

b) $|f(r, \theta) - 0| \leq 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow f$ continua en $(0, 0)$.

$f(x, 0) = -\frac{x^2}{|x|} = -|x| \Rightarrow f_x(0, 0)$ no existe.



$f(0, y) = 0 \forall y \Rightarrow f_y(0, 0) = 0$.

Por no existir f_x , f no es diferenciable en $(0, 0)$.

c) Con el dibujo es obvio que $D_{\vec{u}}f = 0$ si $\vec{u} = (0, \pm 1)$ (en esa dirección f es constante).

O es claro que esos $\vec{u}$ son perpendiculares al ∇f calculado en el punto y son unitarios.

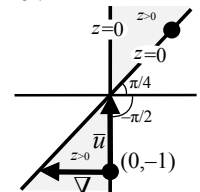
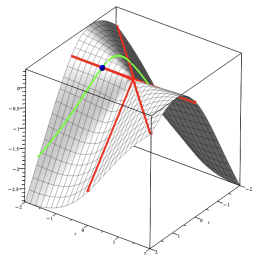
$D_{\vec{u}}f = 2$ es imposible por ser el valor máximo de las derivadas direccionales $\|\nabla f\| = 1$.

d) $h = f \circ \vec{c}$, $\vec{c}(0) = (0, -1)$, $\vec{c}'(t) = (2, -e^t) \xrightarrow{t=0} (2, -1)$, $h'(1) = \nabla f(0, -1) \cdot \vec{c}'(1) = (-1, 0) \cdot (2, -1) = -2$.

[o $h' = f_x x' + f_y y'$, evaluadas donde deben] [derivando $h(t) = -\frac{2te^t + 4t^2}{\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}$ se llegaría a ese valor]

e) $\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} = \frac{1}{r} [cs - c^2 + 2c^2 - 2s^2 - 4sc] = \frac{1}{r} [c^2 - 3sc - 2s^2] \Big|_{(\sqrt{2}, \pi/4)} = -\frac{4/2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Con cálculos más largos se llega en cartesianas a: $f_{xx} + f_{yy} = \dots = \frac{x^2 - 3xy - 2y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \Big|_{(1,1)} = -\frac{4}{2^{3/2}} = -\sqrt{2}$.



3. Sean $\bar{f}(x, y, z) = (xz, x^2, y+z)$ y $\bar{c}(t) = (t, 4-t^2, t^2-4)$, $t \in [-2, 2]$.

a] Calcular $\text{div } \bar{f}$, $\text{rot } \bar{f}$, $\text{div}(\text{rot } \bar{f})$, $\nabla(\bar{f} \cdot \bar{f})$, $\Delta(\bar{f} \cdot \bar{f})$, la matriz $D\bar{f}$ y el determinante jacobiano $J = |D\bar{f}|$.

b] Encontrar la recta tangente a la curva descrita por $\bar{c}(t)$ en el punto $\bar{c}(1)$ (e intentar dibujar aproximadamente ambas en el espacio, a mano o con el Maple) y hallar el punto de corte de esa recta con el plano $x=0$.

c] Si $\bar{r}(t) = (\bar{f} \circ \bar{c})(t)$, calcular $\bar{r}'(1)$: i) componiendo y derivando, ii) con la regla de la cadena de $\mathbf{R}^n$.

a] $\text{div } \bar{f} = z+0+1 = \boxed{z+1}$. $\text{rot } \bar{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz & x^2 & y+z \end{vmatrix} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k} = \boxed{(1, x, 2x)}$. $\text{div}(\text{rot } \bar{f}) = \boxed{0}$ (siempre y obvio).

$\nabla(\bar{f} \cdot \bar{f}) = \begin{vmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{vmatrix} (2xz^2 + 4x^3, 2y+2z, 2x^2z+2y+2z) = \boxed{(2xz^2+4x^3, 2y+2z, 2x^2z+2y+2z)}$. $\Delta(\bar{f} \cdot \bar{f}) = \boxed{4+14x^2+2z^2}$. $D\bar{f} = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $J = \boxed{2x^2}$.

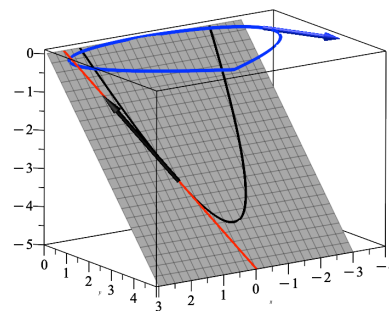
b] $\bar{c}(1) = (1, 3, -3)$, $\bar{c}'(t) = (1, -2t, 2t)$, $\bar{c}'(1) = (1, -2, 2)$.

Recta tangente: $\bar{x} = (1, 3, -3) + t(1, -2, 2) = \boxed{(1+t, 3-2t, 2t-3)}$.

[O intersección de los planos $y=5-2x$ y $z=-y$].

Esta recta corta $x=0$ en el punto $\boxed{(0, 5, -5)}$ [para $t=-1$].

La curva es una parábola sobre el plano $z=-y$ que parte de $(-2, 0, 0)$, pasa por $(0, 4, -4)$ y llega hasta $(2, 0, 0)$. La recta tangente une $(0, 5, -5)$ y $(5/2, 0, 0)$.



c] i) $\bar{r}(t) = (\bar{f} \circ \bar{c})(t) = (t^3-4t, t^2, 0) \Rightarrow \bar{r}'(1) = (3t^2-4, 2t, 0)_{t=1} = \boxed{(-1, 2, 0)}$.

[en azul $\bar{r}(t)$ y su $\bar{r}'(1)$]

ii) Con la forma matricial de la regla de la cadena:

$$\bar{r}'(1) = D\bar{f}(\bar{c}(1)) \bar{c}'(1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Sean $F(x, y, z) = z^2 - 2yz - y^2 + x^2$, la superficie S definida por la expresión $F=6$ y el punto $\bar{p} = (2, -1, 1)$.

a] Calcular, a partir del ∇F , la ecuación del plano tangente y de la recta normal a S en el punto $\bar{p}$ y hallar el punto en el que la recta vuelve a cortar la superficie. b] Dibujar los cortes de S con $y=0$, $y=-1$ y $z=0$.

c] Ver que el teorema de la función implícita asegura que $F=6$ define una función $z(x, y)$ de C^1 cerca de $\bar{p}$ y obtener z_x y z_y derivando implícitamente.

d] Volver a calcular en $\bar{p}$ el plano tangente: i) utilizando c], ii) despejando z de $F=6$ y derivando.

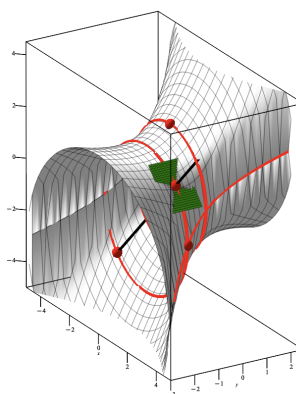
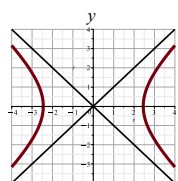
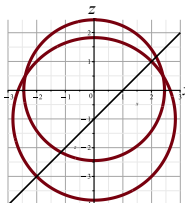
a] $\nabla F = 2(x, y-z, z-y) \xrightarrow{(2, -1, 1)} 4(1, 0, 1)$. Plano: $(x-2) + (z-1) = 0$, $\boxed{z=3-2x}$.

Recta normal: $\bar{x} = (2, -1, 1) + t(1, 0, 1) = \boxed{(2+t, -1, 1+t)}$, que corta S si

$t^2 + 2t + 1 + 2t + 2 - 1 + t^2 + 4t + 4 = 6$, $2t(t+4) = 0 \rightarrow \boxed{(-2, -1, -3)}$ (si $t=-4$).

b] $x^2 + z^2 = 6$, $x^2 + z^2 + 2z = 7$ son circunferencias de respectivos centros $(0, 0)$ y $(0, -1)$ y radios $\sqrt{6}$ y $2\sqrt{2}$. Y $x^2 - y^2 = 6$ es una hipérbola que pasa por $(\pm\sqrt{6}, 0)$ y tiene asíntotas $y = \pm x$.

[Todos los cortes con $y=C$ son circunferencias y S es el hiperboloide inclinado de la derecha].



c] Como $F_z = 0 \Leftrightarrow z=y$, define $F=6$ una $z(x, y) \in C^1$ cerca de todo (x, y, z) con $y \neq z$ ($\bar{p}$ lo cumple).

En esos puntos será: $2zz_x - 2yz_x + 2x = 0 \rightarrow \boxed{z_x = \frac{x}{y-z}}$. $2zz_y - 2yz_y - 2z - 2y = 0 \rightarrow \boxed{z_y = \frac{z+y}{z-y}}$.

d] i) En $(2, -1, 1)$ las parciales pasan a ser $z_x = \frac{2}{-2}$, $z_y = \frac{0}{2}$, y el plano: $z = 1 - 1(x-2) + 0(y+1) = 3-2x$.

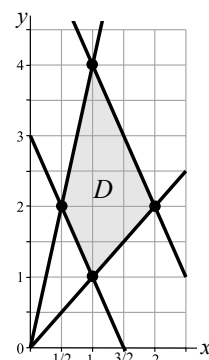
ii) $z = y + \sqrt{6-x^2+2y^2} \rightarrow z_x = \frac{-x}{\sqrt{6-x^2+2y^2}}$, $z_y = 1 + \frac{2y}{\sqrt{6-x^2+2y^2}}$, que en $(2, -1)$ valen los -1 y 0 de arriba.
 $1 = -1 + 2$, el $-$ da otro punto

[Sobre $z=y$ el TFI indica que habrá problemas para definir una única $z(x, y)$ de C^1 . De hecho en ese plano es donde se juntan las dos expresiones de z : $z = y \pm \sqrt{\dots}$. Y en esos puntos los planos tangentes son verticales y las z no son C^1].

5. a) Hallar con integrales dobles $\left[\iint_D 1\right]$ el área de la región D acotada por $2x+y=3$, $2x+y=6$, $y=x$, $y=4x$:
 i) directamente (con los dos órdenes de integración), ii) haciendo el cambio de variable $u=2x+y$, $v=\frac{y}{x}$.
 b) Si $\vec{f}(x, y) = (x, 1)$ y $\vec{c}$ es el segmento que une $(2, 2)$ y $(1, 4)$, parametrizar el segmento y calcular $\int_{\vec{c}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
 ¿Cuál es el valor de la integral de línea de $\vec{f}$ sobre la ∂D completa en sentido antihorario?

a) i) $\iint_D 1 \, dx \, dy = \int_{1/2}^1 \int_{3-2x}^{4x} 1 \, dy \, dx + \int_1^2 \int_x^{6-2x} 1 \, dy \, dx = \int_{1/2}^1 (6x-3) \, dx + \int_1^2 (6-3x) \, dx$
 $\bullet$ [No olvidemos que $\int_a^b K = K(b-a)$]. $\stackrel{\bullet}{=} \left[3x^2\right]_{1/2}^1 - \frac{3}{2} + 6 - \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9}{4}$.

O bien $\iint_D 1 = \int_1^2 \int_{(3-y)/2}^y 1 \, dx \, dy + \int_2^4 \int_{y/4}^{3-y/2} 1 \, dx \, dy = \int_1^2 \left(\frac{3y}{2} - \frac{3}{2}\right) dy + \int_2^4 \left(3 - \frac{3y}{4}\right) dy$
 $= \left[\frac{3y^2}{4}\right]_1^2 - \frac{3}{2} + 6 - \left[\frac{3y^2}{8}\right]_2^4 = \frac{9}{4}$.



ii) Despejamos x e y : $y=xv \rightarrow u=(2+v)x$, $x=\frac{u}{2+v}$, $y=\frac{uv}{2+v}$.

El jacobiano es: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/(2+v) & -u/(2+v)^2 \\ v/(2+v) & 2u/(2+v)^2 \end{vmatrix} = \frac{u}{(2+v)^2}$ (hay inversa local si $u \neq 0$ según TFI).

$D^* = [3, 6] \times [1, 4]$ pasa a ser D con el cambio (y es inyectivo ahí, $u, v=K$ dan rectas distintas).

Por tanto: $\iint_D 1 \, dx \, dy = \iint_{D^*} J \, du \, dv = \int_3^6 \int_1^4 u \frac{1}{(2+v)^2} \, du \, dv = \left[\frac{u^2}{2}\right]_3^6 \left[-\frac{1}{2+v}\right]_1^4 = \frac{27}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right] = \frac{9}{4}$.

b) Se puede parametrizar el segmento con $\vec{c}(x) = (x, 6-2x)$, $x \in [2, 1]$, $\vec{c}'(x) = (1, -2)$, $\vec{f}(\vec{c}(x)) = (x, 1)$. Entonces:

$$\int_{\vec{c}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_2^1 (x, 1) \cdot (1, -2) \, dx = \int_1^2 (2-x) \, dx = 2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

O como $\vec{f}$ es campo conservativo (pues es $g_x=0=f_y$ y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$), podríamos hallar su potencial:

$$\begin{aligned} U_x &= x, \quad U = x^2/2 + p(y) \rightarrow U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y, \\ U_y &= 1, \quad U = y + q(x) \end{aligned} \rightarrow \int_{\vec{c}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(1, 4) - U(2, 2) = \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 = \frac{1}{2}.$$

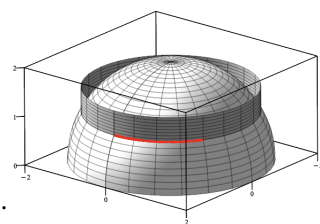
Y, por ser conservativo, la integral a lo largo de cualquier camino cerrado, por ejemplo ∂D , debe ser $\boxed{0}$.

6. a) Dibujar el sólido V dado por las condiciones $x^2+y^2 \leq 3$, $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$ y calcular $\iiint_V z$ trabajando al menos en dos de los sistemas de coordenadas: i) cilíndricas, ii) esféricas, iii) cartesianas.

b) Si $f(x, y, z) = 3z + 4xy$ y $\vec{c}(t) = (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, 1)$, $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$, dibujar $\vec{c}$ y calcular $\int_{\vec{c}} f \, ds$ e $\int_{\vec{c}} \nabla f \cdot d\vec{s}$.

a) Cilindro $x^2+y^2=3$ y superficie esférica $x^2+y^2+z^2=4$ se cortan si $z^2=1 \rightarrow z=1$.

V es el sólido de revolución del segundo dibujo respecto al eje z .



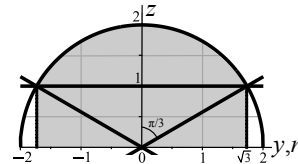
i) En cilíndricas: $\iiint_V z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r z \, dz \, dr \, d\theta = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4r - r^3) \, dr = \frac{15\pi}{4}$.

ii) En esféricas hay dos regiones dependiendo de ϕ . Hasta $\frac{\pi}{3}$ [$c=1/2$], ρ va de 0 a 2.

Y es $r=\sqrt{3} \Leftrightarrow \rho \sin \phi = \sqrt{3}$. Además $z=\rho \cos \phi$ y el jacobiano $J=\rho^2 \sin \phi$.

$$\begin{aligned} \iiint_V z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^2 \rho^3 \sin \phi \cos \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}/\sin \phi} \rho^3 \sin \phi \cos \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} [\rho^4]_0^2 [\sin^2 \phi]_0^{\pi/3} + \frac{9\pi}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos \phi \, d\phi}{\sin^3 \phi} = 3\pi - \frac{9\pi}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \phi} \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = 3\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}. \end{aligned}$$

primitivas inmediatas



iii) Peor cartesianas: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} (4-x^2-y^2) \, dy \, dx = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}} (9-2x^2) \sqrt{3-x^2} \, dx$
 $\stackrel{x=\sqrt{3} \sin t}{=} 2 \int_0^{\pi/2} (9-6 \sin^2 t) \cos^2 t \, dt = \dots$

b) [$\vec{c}$ describe el tramo de la circunferencia intersección del cilindro y la esfera que une $(\sqrt{3}, 0, 1)$ y $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1)$].

$$f(\vec{c}(t)) = 3 + 12 \sin t \cos t, \quad \vec{c}'(t) = (-\sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t, 0), \quad \|\vec{c}'(t)\| = \sqrt{3} \rightarrow$$

$$\oint_{\vec{c}} f \, ds = \int_0^{\pi/3} (3 + 12 \sin t \cos t) \sqrt{3} \, dt = \sqrt{3} \pi + [6\sqrt{3} \sin^2 t]_0^{\pi/3} = \sqrt{3} \left(\pi + \frac{9}{2} \right).$$

Y la integral de un gradiente es trivial: $\int_{\vec{c}} \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1) - f(\sqrt{3}, 0, 1) = \boxed{3\sqrt{3}}$.

7. Sean $\vec{F}(x, y, z) = (e^{x-z}, 1, -e^{x-z})$ y $\vec{c}(t) = (\cos t, 2 \sin t, -\cos t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. **a]** Hallar $\text{div } \vec{F}$ y $\text{rot } \vec{F}$.
b] Dibujar el sólido V limitado por los planos $x=1$, $y=-2$, $y=2$, $z=0$ y $x+z=0$, y calcular $\iiint_V \text{div } \vec{F}$.
c] Calcular la integral de línea de $\vec{F}$ sobre $\vec{c}$ desde $(0, -2, 0)$ hasta $(0, 2, 0)$ de tres formas diferentes:
 i) directamente usando la $\vec{c}$, ii) siguiendo un camino más sencillo, iii) hallando una función potencial U .
d] Aproximar con ordenador la longitud L de la curva dada por $\vec{c}$. o probar sin él que $\sqrt{2}\pi < L < 2\pi$.

a] $\text{div } \vec{F} = e^{x-z} + 0 + e^{x-z} = 2e^{x-z}$. $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^{x-z} & 1 & -e^{x-z} \end{vmatrix} = (0, e^{x-z} - e^{x-z}, 0) = \vec{0}$.

b] $\iiint_V \text{div } \vec{F} = 2 \int_{-2}^2 \int_0^1 \int_{-x}^0 e^{x-z} dz dx dy = 8 \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx = 4[e^{2x} - e^x]_0^1 = 4(e-1)^2$.
 lo de dentro no depende de y

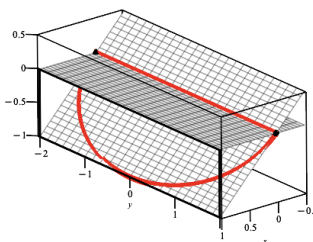
c] i) $\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{2c}, 1, -e^{2c}) \cdot (-s, 2c, s) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2c - 2s e^{2c}) dt = 4s \Big|_0^{\pi/2} = 4$.

ii) En línea recta: $\vec{c}_*(y) = (0, y, 0)$, $y \in [-2, 2] \rightarrow \int_{\vec{c}_*} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-2}^2 (1, 1, -1) \cdot (0, 1, 0) dy = \int_{-2}^2 dy = 4$.

iii) $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ y $\vec{F} \in C^1(\mathbf{R}^3) \Rightarrow \exists U$. $U_x = e^{x-z} \rightarrow U = e^{x-z} + p(y, z)$
 $U_y = 1 \rightarrow U = y + q(x, z)$, $U = y + e^{x-z} \Rightarrow$
 $U_z = -e^{x-z} \rightarrow U = e^{x-z} + r(x, y)$
 $\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(0, 2, 0) - U(0, -2, 0) = 4$.

d] $\|\vec{c}'\| = \|(-s, 2c, s)\| = \sqrt{2s^2 + 4c^2} = \sqrt{2 + 2\cos^2 t}$. $L = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 + 2\cos^2 t} dt \approx 5.4026$ (con Maple).

O como $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + 2\cos^2 t} \leq \sqrt{4} = 2$, es clara la acotación propuesta.



8. Comprobar para $\vec{g}(x, y) = (xy, x^2)$ y el D acotado por la parábola $x=y^2-1$ y la recta $x+y=1$ los teoremas:
a] de Green y **b]** de la divergencia.

Las curvas se cortan en los puntos $(0, 1)$ y $(3, -2)$.

a] $g_x - f_y = x$. Para no hacer dos integrales integramos primero en x :

$$\iint_D x = \int_{-2}^1 \int_{y^2-1}^{1-y} x dx dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (3y^2 - 2y - y^4) dy = \frac{1}{2} [y^3 - y^2 - \frac{1}{5}y^5]_{-2}^1 = \frac{27}{10}.$$

Los dos tramos de la ∂D los podemos parametrizar, por ejemplo:

La recta: $\vec{c}_1 = (1-y, y)$, $y \in [-2, 1]$. La parábola: $\vec{c}_2 = (y^2-1, y)$, $y \in [1, -2]$.

Los vectores tangentes: $\vec{c}'_1 = (-1, 1)$, $\vec{c}'_2 = (2y, 1)$. Y las integrales:

Sobre la recta: $\int_{\vec{c}_1} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_{-2}^1 (y-y^2, 1-2y+y^2) \cdot (-1, 1) dy = \int_{-2}^1 (2y^2 - 3y + 1) dy = \frac{27}{2}$.

La otra: $\int_{\vec{c}_2} \vec{g} \cdot d\vec{s} = - \int_{-2}^1 (y^3 - y, y^4 - 2y^2 + 1) \cdot (2y, 1) dy = -\frac{54}{5}$. Por tanto, $\oint_{\partial D} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \frac{135-108}{10} = \frac{27}{10}$ como debía.

b] Integramos $\text{div } \vec{g} = y$ en este caso con los dos órdenes, pues al ser y impar la integral con $-1 \leq x \leq 0$ es nula.

$$\iint_D y = 0 + \int_0^3 \int_{-\sqrt{1+x}}^{1-x} y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (x^2 - 3x) dx = \frac{1}{2} [9 - \frac{27}{2}] = -\frac{9}{4}.$$

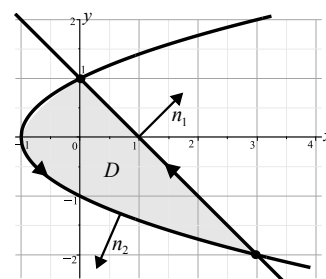
$$\iint_D y = \int_{-2}^1 \int_{y^2-1}^{1-y} y dx dy = \int_{-2}^1 (2y - y^2 - y^3) dy = [y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4]_{-2}^1 = -\frac{9}{4}.$$

La normal unitaria exterior al segmento es claramente $\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Para la parábola, un vector perpendicular al tangente $(2y, 1)$ que apunta hacia el exterior es $(-1, 2y)$, y el unitario exterior será $\vec{n}_2 = \frac{(-1, 2y)}{\sqrt{1+4y^2}}$.

Las normas que aparecen en las integrales de los campos son precisamente $\|\vec{c}'_1\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{c}'_2\| = \sqrt{1+4y^2}$.

$$\oint_{\partial D} \vec{g} \cdot \vec{n} ds = \int_{\vec{c}_1} + \int_{\vec{c}_2} = \int_{-2}^1 (y-y^2, 1-2y+y^2) \cdot (1, 1) dy + \int_{-2}^1 (y^3 - y, y^4 - 2y^2 + 1) \cdot (-1, 2y) dy$$

$$= \int_{-2}^1 (1-y) dy + \int_{-2}^1 (2y^4 - 5y^3 + 3y) dy = \frac{9}{2} - \frac{27}{4} = -\frac{9}{4}.$$



problemas de extremos para un fin de semana:

1. Sea $F(x, y) = y^3 + 2xy + x^4$ (la del problema 2 del control).
- Hallar y clasificar los puntos críticos de F . (Dar con calculadora su valor aproximado de un extremo).
 - ¿Hay extremos absolutos en $\mathbf{R}^2$? Hallar sus valores extremos en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, -1)$.
 - Encontrar los extremos locales sobre $y = 2x + 3$ sin utilizar y utilizando multiplicadores de Lagrange.

2. Sea $f(x, y, z) = x^2 + yz$.
- Hallar su punto crítico y escribir su matriz hessiana. Aunque sea $H_2 = 0$, probar, dando valores en un par de rectas, que ese punto es una silla.
 - Hallar los valores extremos de f en la región D dada por $x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 8$ (con multiplicadores de Lagrange).

1. a) $F_x = 2y + 4x^3 = 0$, $y = -2x^3 \downarrow \rightarrow (0, 0)$, $(-\frac{6^{2/5}}{6}, \frac{6^{4/5}}{3})$.
 $F_y = 3y^2 + 2x$, $2x(6x^5 + 1) = 0 \rightarrow \bar{a} \approx (-0.70, 0.68)$

$H = \begin{vmatrix} 12x^2 & 2 \\ 2 & 6y \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 6x^2 & 1 \\ 1 & 3y \end{vmatrix} < 0$, silla en $(0, 0)$.
 $6x^2, 18x^2y - 1 > 0$, mínimo en $\bar{a}$.

El valor en ese mínimo (local) es ≈ -0.40 .

b) $f(0, y) = y^3 \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} \pm\infty \Rightarrow$ no hay extremos absolutos.

En el compacto A si debe la continua F tenerlos y se darán en el borde, pues el mínimo está fuera.

En los lados: $F(x, 0) = x^4$, $F(1, y) = y^3 + 2y + 1$, $F(x, -x) = x^4 - x^3 - 2x^2$.

El primero tiene claro valor mínimo 0 y máximo 1 (en sus extremos).

Como la derivada $3y^2 + 2 > 0$, los extremos del segundo también están en los extremos del intervalo: $F(-1, 1) = -2$ y $F(1, 0) = 1$ de antes.

El único un poco largo es el 3º: $F'(x) = x(4x^2 - 3x - 4) = 0 \rightarrow x = 0, \frac{3 \pm \sqrt{73}}{8}$. 0 es máximo local y los otros valores están claramente fuera del intervalo $[0, 1]$, así que de nuevo sus máximo y mínimo (0 y -2) se dan en el borde.

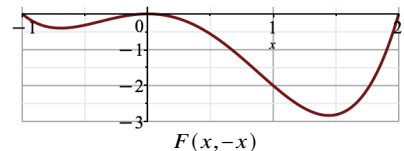
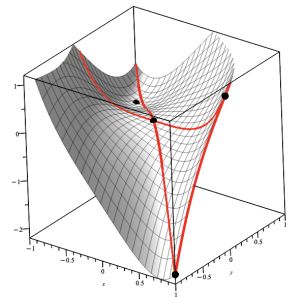
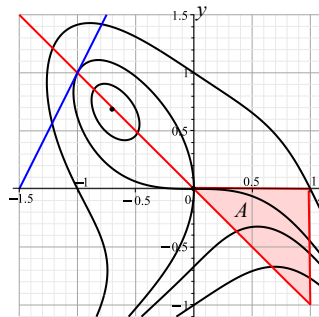
Resumiendo, el valor máximo en el triángulo será 1 y el mínimo -2.

c) $h(x) \equiv F(x, 2x+3) = x^4 + 8x^3 + 40x^2 + 60x + 27$, $h'(x) = 4(x^3 + 6x^2 + 20x + 15) = 4(x+1)(x^2 + 5x + 15)$.

Por tanto, esta función tiene un claro mínimo en $x = -1$ (el valor es $F(-1, 1) = 0$) y no tiene máximo ($F \rightarrow \infty$).

Con Lagrange, $g(x, y) = y - 2x - 3$: $\begin{matrix} 2y + 4x^3 = -2\lambda & 4x^3 + 4x + 6y^2 + 2y = 0 \\ 3y^2 + 2x = \lambda & y = 2x + 3 \end{matrix} \rightarrow 4x^3 + 24x^2 + 80x + 60 = 0$, la de antes.

[Esa era la recta del control tangente en $(-1, 1)$ a la curva de nivel, y debía aparecer al buscar extremos con Lagrange].



2. a) $\begin{matrix} f_x = 2x = 0 \\ f_y = z = 0 \\ f_z = y = 0 \end{matrix} \rightarrow (0, 0, 0)$ punto de matriz hessiana $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $H_2 = 0$ que no decide nuestro teorema.

Pero es obvio que $f(0, 0, 0) = 0$ y que toma valores positivos y negativos cerca del punto. Por ejemplo:

$f(x, 0, 0) = x^2$ positivos [o $f(0, z, z) = z^2$] y $f(0, z, -z) = -z^2$ negativos.

b) La silla del interior no puede dar extremos. Estarán en el borde $x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$. Mediante multiplicadores:

$\begin{cases} 2x = 2\lambda x, x(\lambda - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ o } \lambda = 1. \\ z = 2\lambda y \rightarrow z(1 - 16\lambda^2) = 0 \rightarrow z = 0 \text{ o } \lambda = \pm 1/4. \\ y = 8\lambda z \\ x^2 + y^2 + 4z^2 = 8 \end{cases}$ Si es $\lambda = 1$ será $z = y = 0$ y hay dos posibles $x = \pm 2\sqrt{2}$.
 Si $\lambda = \pm 1/4$ se obtiene $y = \pm 2z$ y de arriba sale $x = 0$.
 Yendo al elipsoide: $8z^2 = 8$, $z = \pm 1 \rightarrow y = \pm 2$.

Comparamos los valores de f en los 6 puntos obtenidos:

$f(\pm 2\sqrt{2}, 0, 0) = \boxed{8}$ valor máximo. $f(0, \pm 2, \pm 1) = \boxed{2}$. $f(0, \pm 2, \mp 1) = \boxed{-2}$ valor mínimo.

problemas de integrales de superficie para el puente:

1. Sea S la parte de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \geq \sqrt{3}$. a) Parametrizar S utilizando esféricas, cartesianas y cilíndricas. b) Calcular $\iint_S z \, dS$ y el área de la superficie S . c) Si $\vec{f}(x, y, z) = (z, x, z^2)$ hallar $\iint_S \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{S}$ e $\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$. d) Comprobar el teorema de la divergencia para $\vec{f}$ en el V acotado por S y $z = 1$.

2. Comprobar el teorema de Stokes para $\vec{F}(x, y, z) = (-2, x, yz)$ sobre la superficie S descrita en el ejemplo 4 de la página 62 de los apuntes: porción de $z = x + y^2$ sobre el triángulo D con lados en $x = 0$, $x = y$ e $y = 1$.

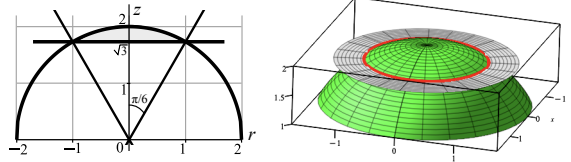
- 1a. $\mathbf{r}(\phi, \theta) = 2(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

O bien $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2})$, con $(x, y) \in B$ círculo unidad.

O $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{4-r^2})$, con $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Son: $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = 4 \sin \phi (s_\phi c_\theta, s_\phi s_\theta, c_\phi)$, $\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| = 4 \sin \phi$.

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1 \right), \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}. \quad \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \left(\frac{r^2 c}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2 s}{\sqrt{4-r^2}}, r \right), \|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta\| = \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}} \quad (\text{éste no en apuntes}).$$



- b) Las integrales de campos escalares no dependen de la parametrización:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} 8 \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi [4 \sin^2 \phi]_0^{\pi/6} = 2\pi. \quad \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2 \, dy \, dx \rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \, dr \, d\theta = 2\pi.$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} 4 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 8\pi [-\cos \phi]_0^{\pi/6} = 4\pi(2 - \sqrt{3}) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}} \, dr \, d\theta = 4\pi [-(4-r^2)^{1/2}]_0^1.$$

- c) Con las tres parametrizaciones el pvf apunta hacia arriba. Deben coincidir:

$$\iint_S \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_B (0, 1, 1) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, dy \, dx = \iint_B \left(1 + \frac{\text{impar } y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right) \, dy \, dx = \text{área de } B = \pi.$$

$$\text{O bien} \quad = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/6} (\sin^2 \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \phi) \, d\phi \, d\theta = 4\pi [\sin^2 \phi]_0^{\pi/6} = \pi.$$

$$\text{O usando Stokes: } \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}), t \in [-\pi, \pi] \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 t - \sqrt{3} \sin t) \, dt = \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) \, dt = \pi.$$

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_B (4-x^2-y^2 + x + \frac{\text{impar } xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}) \, dy \, dx = \int_0^{2\pi} (4r-r^3) \, dr = \frac{7\pi}{2}.$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} (\sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \sin^3 \phi \sin \theta \cos \theta + 2 \cos^3 \phi \sin \phi) \, d\phi \, d\theta = -8\pi \cos^4 \phi \Big|_0^{\pi/6} = \frac{7\pi}{2}.$$

- d) Falta la integral sobre la base y la integral triple. T se parametriza $(x, y, \sqrt{3})$, $(x, y) \in B$ y es $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$.

$$\iint_T \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_B (\sqrt{3}, x, 3) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy = -3 \iint_B 1 = -3\pi. \quad \text{Luego } \iint_{\partial V} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{div } \vec{f} = 2z, \quad \iiint_V 2z = \iint_B \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 2z \, dz \, dy \, dx = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) \, dy \, dx = \frac{8}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} \, dx \stackrel{x=\sin t}{=} \dots = \frac{\pi}{2}.$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r-r^3) \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ej 4. Sea S la porción de la superficie $z = x + y^2$ sobre el triángulo D dado por $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq x \leq y$. Hallemos su área y la $\iint_S (z-x) \, dS$.

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x + y^2) \rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-1, -2y, 1)$$

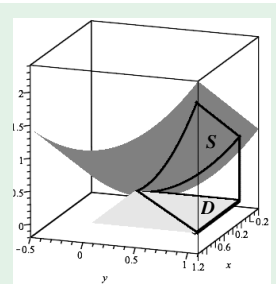
$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{4y^2 + 2} \quad [= ((f_x)^2 + (f_y)^2 + 1)^{1/2}] \rightarrow$$

$$A = \iint_D \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2 + 2} \, dx \, dy = \int_0^1 y \sqrt{4y^2 + 2} \, dy$$

$$= \frac{1}{12} (4y^2 + 2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{6} - \frac{1}{6} \sqrt{2} \approx 0.99.$$

pag 62

La presencia de la raíz muchas veces, no sólo conduce a integrales complicadas e no calculables



2. $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -2 & x & yz \end{vmatrix} = (z, 0, 1)$. El producto vectorial fundamental $(-1, -2y, 1)$ apunta hacia arriba.

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_B (x + y^2, 0, 1) \cdot (-1, -2y, 1) = \int_0^1 \int_0^y (1 - y^2 - x) \, dx \, dy = \int_0^1 (y - \frac{1}{2}y^2 - y^3) \, dy = \left[\frac{1}{12} \right].$$

Los tres tramos de la ∂S orientados en el sentido que pide Stokes se pueden parametrizar:

$$\vec{c}_1 = (t, t, t + t^2), t \in [0, 1], \quad \vec{c}_2 = (t, 1, t + 1), t \in [1, 0], \quad \vec{c}_3 = (0, t, t^2), t \in [1, 0].$$

$$\text{Conducen a las integrales: } \int_0^1 (2t^4 + 3t^3 + t^2 + t - 2) \, dt - \int_0^1 (t - 1) \, dt - \int_0^1 2t^4 \, dt = -\frac{1}{60} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \left[\frac{1}{12} \right].$$

$$\text{O simplificando antes: } \int_0^1 (3t^3 + t^2 - 1) \, dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{12}.$$

otro problema de integrales de superficie basado en el control 2:

3. Sean $\vec{g}(x,y,z) = (x, 0, y)$ y el sólido V limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2 - 3$ y $z = -2x$ (los del control 2) y sea T su tapa plana y S su base curvada. a] Comprobar para $\vec{g}$ el teorema de Gauss en V y el de Stokes en S . b] Calcular, efectuando una integral de superficie, el área de la T elíptica. (Se puede comprobar utilizando πab).

- Convenían las polares centradas en $(-1, 0)$: $x = r \cos \theta - 1$, $y = r \sin \theta$ y eran $\int_{-2}^2 (4-y^2)^{3/2} dy = \int_{-3}^1 (3-2x-x^2)^{3/2} dx = 6\pi$.
- La elipse descrita por $\vec{c}(t) = (2 \cos t - 1, 2 \sin t, 2 - 4 \cos t)$, $t \in [-\pi, \pi]$ daba el corte del paraboloide con el plano.

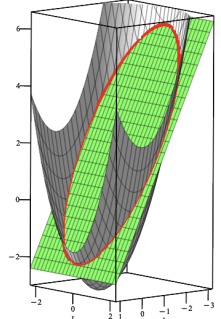
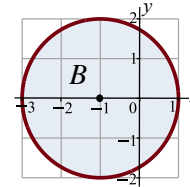
3. Era $\text{div } \vec{g} = 1$, $\text{rot } \vec{g} = (1, 0, 0)$ y V estaba sobre $x^2 + 2x + y^2 = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4$.

En el control calculamos con esas polares y en cartesianas:

$$\iiint_V \text{div } \vec{g} = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) dr = \frac{4}{3} \int_{-3}^1 (3 - 2x - x^2)^{3/2} = \frac{4}{3} \int_{-2}^2 (4 - y^2)^{3/2} = \boxed{8\pi}.$$

Y la integral de línea sobre ∂S dada por $\vec{c}(t)$:

$$\int_{\vec{c}} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_{-\pi}^{\pi} (8s^2 - 4sc + 2s) dt = 8 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = \boxed{8\pi}.$$



Para Gauss necesitamos la integral sobre T y S . Empezamos en cartesianas y luego el cambio:

$$T: (x, y, -2x), \text{ pvf} = (2, 0, 1), \iint_T \vec{g} \cdot d\vec{S} = \iint_B (x, 0, y) \cdot (2, 0, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 r(rs + 2rc - 2) = -8\pi.$$

$$S: (x, y, x^2 + y^2 - 3) \rightarrow \text{pvf} = (-2x, -2y, 1) \text{ (hacia el interior, tomamos el vector opuesto): } 16\pi - 8\pi = \boxed{8\pi}.$$

$$\iint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \iint_B (x, 0, y) \cdot (2x, 2y, -1) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 (4r^3 c^2 + r) dr d\theta = 8 \int_0^{\pi} (2c^2 + 1) d\theta = 16\pi.$$

$$\text{Sólo en cartesianas } dx dy \text{ comprobamos la de } T: \int_{-2}^2 \int_{-1-\sqrt{4-y^2}}^{-1+\sqrt{4-y^2}} (2x+y) dx dy = \dots = \frac{4}{3} \int_{-2}^2 (4-y^2)^{3/2} dy = 8\pi.$$

Para Stokes integramos el rotacional (observando que el pvf apunta para arriba como debe, según se orientó ∂D).

$$\iint_S \text{rot } \vec{g} \cdot d\vec{S} = -\iint_B 2x = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 (2r - 4r^2 c) = \boxed{8\pi}. \text{ Cartesianas: } -\iint_B 2x = -\int_{-3}^1 4x \sqrt{3-2x-x^2} dx = 8\pi.$$

$$\text{Para el área de } T \text{ hallamos } \|\text{pvf}\| = \sqrt{5} \rightarrow A = \iint_T dS = \iint_B \sqrt{5} dx dy = \boxed{4\pi\sqrt{5}}.$$

Los semiejes de la elipse los puede dar la distancia de su centro $(-1, 0, 2)$ a $(1, 0, -2)$ y $(-1, 2, 2)$ $[\sqrt{20} \text{ y } 2]$.