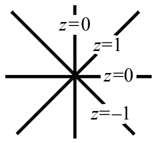
Soluciones del control t12 de Cálculo C (24 de febrero de 2025)

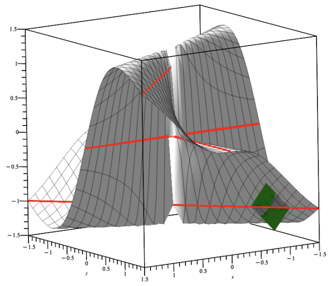
1. Sea $f(x,y)=\frac{4x^3y}{(y^2+x^2)^2}$, $f(0,0)=0$. **a]** Precisar si es continua, si existen f_x, f_y y si es diferenciable en $(0,0)$.
b] Calcular, trabajando en cartesianas y en polares, $\nabla f(-1,1)$.
c] Escribir la ecuación del plano tangente en el punto $(-1,1)$.
[.6+.6+.3 =1.5 ptos]

a] $f(x,mx)=\frac{4m}{(m^2+1)^2}$, distinto sobre cada recta $\Rightarrow$ **discontinua**.

$f(x,0)=0\ \forall x \Rightarrow \boxed{f_x(0,0)=0}$. $f(0,y)=0\ \forall y \Rightarrow \boxed{f_y(0,0)=0}$.

Por no ser f continua, f **no es diferenciable** en $(0,0)$.





b] $\nabla f=\left(\frac{12x^2y}{(y^2+x^2)^2}-\frac{16x^4y}{(y^2+x^2)^3},\frac{4x^3}{(y^2+x^2)^2}-\frac{16x^3y^2}{(y^2+x^2)^3}\right)=\frac{4x^2(3y^2-x^2)}{(y^2+x^2)^3}(y,-x)\xrightarrow{(-1,1)}\boxed{(1,1)}$.

En polares es $f(r,\theta)=4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$ (otra prueba de la discontinuidad).

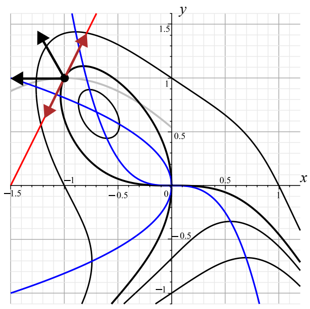
$$\nabla f=\frac{1}{r}f_\theta\,\bar e_\theta=\frac{4(c^4-3c^2s^2)}{r}(-s,c)\underset{r=\sqrt2,\ \theta=3\pi/4,\ s=-c=1/\sqrt2\ \uparrow}{=}\frac{-2}{\sqrt2}\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=(1,1).$$

c] El plano tangente será entonces: $z=-1+1(x+1)+1(y-1)$, $\boxed{z=x+y-1}$.

2. Sean $F(x,y)=y^3+2xy+x^4$, la curva C dada por $F=0$ y el punto $\bar p=(-1,1)\in C$. **a]** Calcular dos $\bar u$ unitarios tales que $D_{\bar u}F(\bar p)$ sea: i) 0, ii) 2. **b]** Hallar ΔF y el desarrollo de Taylor de orden 2 de F en torno a $(-1,1)$.
Elegir entre **c]** y **d]**: **c]** Si $\bar c(t)=(t-1,\cos t)$ y $h(t)=F(\bar c(t))$, calcular $h'(0)$ con la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$.
d] Probar que el teorema de la función implícita asegura que $F=0$ define cerca de $\bar p$ una $y(x)$ de C^1 y hallar $y'(-1)$ derivando implícitamente. Hallar la recta tangente a C en el punto $\bar p$. [.7+.4+.4 1.5 ptos]

$\nabla F=(2y+4x^3,3y^2+2x)$. $\nabla F(-1,1)=(-2,1)$. $D_{(a,b)}F(\bar p)=b-2a$.

dibujo con Maple →



a] Será $D_{\bar u}=0$ en dirección perpendicular: $\boxed{\bar u=\left(\pm\frac{1}{\sqrt5},\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)}$.

Con $D_{\bar u}=2$ hay uno obvio: $\boxed{\bar u=(-1,0)}$, pero el otro exige cálculos:

$\begin{cases} b=2a+2 \searrow \\ a^2+b^2=1 \quad 5a^2+8a+3=0,\ a=-1^{\uparrow} \text{ o } a=-3/5 \nearrow \end{cases}$ $\boxed{\bar u=\left(-\frac35,\frac45\right)}$.

b] $\Delta F=F_{xx}+F_{yy}=\boxed{12x^2+6y}$. $F_{xy}=2$, $F(-1,1)=0$. Taylor:

$F(x,y)=-2(x+1)+(y-1)+6(x+1)^2+2(x+1)(y-1)+3(y-1)^2+\cdots$ [O escribiendo $[(y-1)+1]^3$, $[(x+1)-1]^4$, ...].

[Deben aparecer los $\cdots$ o escribir $\approx$. Y no se deben desarrollar los paréntesis, pues aproximamos cerca de $(-1,1)$].

c] $\bar c(0)=(-1,1)$, $\bar c'(t)=(1,-\mathrm{sen}\,t)\xrightarrow{t=0}(1,0)$, $h'(0)=\nabla F(\bar c(0))\cdot\bar c'(0)=\boxed{-2}$.

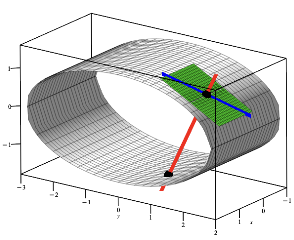
d] $F(-1,1)=0$, $F_y(-1,1)=1\neq0$, $F\in C^\infty \Rightarrow$ existe $y(x)$. $3y^2y'+2xy'+2y+4x^3=0$, $y'(-1)=-\frac{2y+4x^3}{3y^2+2x}\Big|_{\bar p}=\boxed{2}$.

La recta tangente: $y=1+2(x+1)=2x+3$. [O utilizando que es perpendicular a $\nabla F(-1,1)$].

3. Sean el campo $\bar g(x,y,z)=(xy^2,yz^2,z^3)$, el punto $\bar a=(1,2,1)$ y la recta R dada por $\bar x=(1+t,2-2t,1+t)$.
a] Calcular $\mathrm{div}\,\bar g$, $\nabla(\mathrm{div}\,\bar g)$, $\mathrm{rot}\,\bar g$ y el determinante jacobiano $|D\bar g|$. **b]** Dibujar la superficie S dada por $\mathrm{div}\,\bar g=8$, hallar en $\bar a$ el plano tangente y la recta normal a S, y encontrar el punto en que esta recta vuelve a cortar a S.
c] Comprobar que la recta normal y la recta R se cortan perpendicularmente en $\bar a$. $\sqrt2\approx1.41$ [.6+.9+.3 =1.8 ptos]

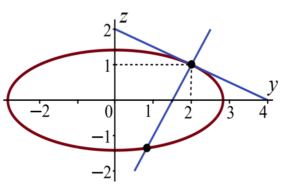
a] $\mathrm{div}\,\bar g=y^2+4z^2$. $\mathrm{rot}\,\bar g=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ xy^2&yz^2&z^3\end{vmatrix}=(-2yz,0,-2xy)$. $|D\bar g|=\begin{vmatrix}y^2&2xy&0\\0&z^2&2yz\\0&0&3z^2\end{vmatrix}=3y^2z^4$.

$\nabla(\mathrm{div}\,\bar g)=(0,2y,8z)$.



dibujo de S, recta normal recta R y plano tangente.

b] La gráfica de $y^2+4z^2=8$ es la elipse de semiejes $\sqrt2$ y $2\sqrt2$, trasladada horizontalmente a largo del eje x.



Como el gradiente es $4(0,1,2)$ el plano tangente es

$(0,1,2)\cdot(x-1,y-2,z-1)=0 \longrightarrow \boxed{y+2z=4}$.

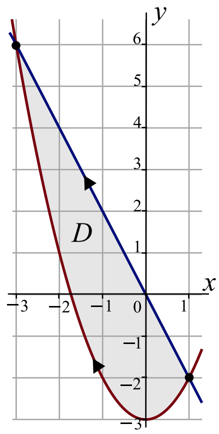
Y la recta normal será: $\bar n(s)=(1,2,1)+s(0,1,2)=\boxed{(1,2+s,1+2s)}$, que volverá a cortar S si:

$4+4s+s^2+4+16s+16s^2=8$, $s(17s+20)=0$. Sustituyendo $s=-\frac{20}{17}$: $\boxed{\left(1,\frac{14}{17},-\frac{23}{17}\right)}$ punto de corte.

c] Basta observar que $\bar a\in R$ y que esta recta está contenida en el plano tangente: $(2-2t)+2(1+t)=4$, o comprobar que el producto escalar de sus vectores directores es nulo: $(1,-2,1)\cdot(0,1,2)=0$.

Soluciones del control t45 de Cálculo C (28 de abril de 2025)

1. Si $f(x,y)=x$: **a**$_1$**]** Calcular $\iint_D f\,dx\,dy$, con D región acotada por la recta $y=-2x$ y la parábola $y=x^2-3$.
a$_2$**]** Calcular la integral $\int_C f\,ds$, siendo C la parte de la parábola con $-3\le x\le 1$. [1.4 ptos]
b] Hallar el valor de la integral de línea de $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=\left(y\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x\right)$ entre los puntos $(1,-2)$ y $(-3,6)$ a lo largo de:
i) el segmento que une esos puntos, ii) el tramo de la parábola de **a**$_2$]. [1 pto]



a$_1$**]** Recta y parábola se cortan en los puntos $(1,-2)$ y $(-3,6)$. Conviene el orden $dy\,dx$:

$$\int_{-3}^{1}\int_{x^2-3}^{-2x} x\,dy\,dx=\int_{-3}^{1}\left(3x-2x^2-x^3\right)dx=\left[\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4\right]_{-3}^{1}$$
$$=\tfrac{3}{2}-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{27}{2}-18+\tfrac{81}{4}=-12+20-18-\tfrac{2}{3}=\boxed{-\tfrac{32}{3}}\,.$$

a$_2$**]** La parametrización de la parábola más fácil (y no nos importa el sentido) es:

$\bar{\mathrm{c}}(x)=\left(x,x^2-3\right)$, $x\in[-3,1]$. $\bar{\mathrm{c}}'(x)=(1,2x)$. $\|\bar{\mathrm{c}}'(x)\|=\sqrt{1+4x^2}$.

Por tanto: $\displaystyle\int_C f\,ds=\int_{-3}^{1}x\left(1+4x^2\right)^{1/2}dx=\tfrac{1}{12}\left[\left(1+4x^2\right)^{3/2}\right]_{-3}^{1}=\boxed{\tfrac{5\sqrt{5}-37\sqrt{37}}{12}}$.

b] Lo más fácil es observar que el campo es conservativo $g_x=\mathrm{e}^x=f_y$.

Y el potencial salta casi a la vista: $U(x,y)=y\mathrm{e}^x$. $\begin{array}{l}U_x=y\mathrm{e}^x\to U=y\mathrm{e}^x+\cdots\\ U_y=\mathrm{e}^x\ \to U=y\mathrm{e}^x+\cdots\end{array}$

Por tanto, en ambos casos i) y ii) la integral tendrá el mismo valor: $U(-3,6)-U(1,-2)=\boxed{6\mathrm{e}^{-3}+2\mathrm{e}}$.

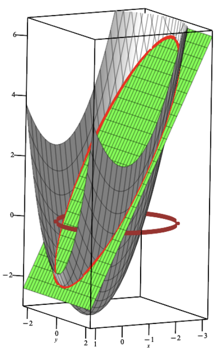
Se podría también haber calculado la más sencilla i):

$$\bar{\mathrm{r}}(x)=(x,-2x)\,,\ x\in[1,-3]\to\int_{\bar{\mathrm{r}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{1}^{-3}\left(-2x\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x\right)\cdot(1,-2)\,dx=2\int_{-3}^{1}(x+1)\mathrm{e}^x dx=2x\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{1}=2\mathrm{e}+6\mathrm{e}^{-3}.$$

Lo peor es seguir la parábola: $\displaystyle\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{1}^{-3}\left((x^2-3)\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x\right)\cdot(1,2x)\,dx=\int_{-3}^{1}(3-2x-x^2)\mathrm{e}^x dx=(3-x^2)\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{1}=2\mathrm{e}+6\mathrm{e}^{-3}.$

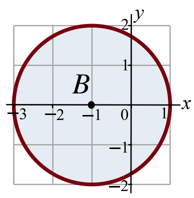
2. Sea $\bar{\mathrm{g}}(x,y,z)=(x,0,y)$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$, $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}$ e $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}$, si $\bar{\mathrm{c}}(t)=\left(2\cos t-1,2\,\mathrm{sen}\,t,2-4\cos t\right)$, $t\in[-\pi,\pi]$. [1 pto]
b] Calcular, haciendo algún dibujo, la integral triple $\iiint_V\operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}\,dx\,dy\,dz$, siendo V el sólido limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2-3$ y el plano $z=-2x$. [1.4 ptos]

Ayudas:
- Conviene identificar y dibujar la proyección de V sobre $z=0$ y también sobre $y=0$ (mirar gráfica de **1.**).
- La forma más corta de calcular la integral es utilizar polares centradas en $(-1,0)$: $x=r\cos\theta-1$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$.
- En cartesianas aparece una de estas integrales cuyo valor se da: $\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^{3/2}dy=\int_{-3}^{1}\left(3-2x-x^2\right)^{3/2}dx=6\pi$.
- La elipse descrita por $\bar{\mathrm{c}}$ es precisamente el corte del paraboloide con el plano.



a] $\operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}=1$, $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}=(1,0,0)$ (no deriva, pues, de un potencial).

$$\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}=\int_{-\pi}^{\pi}(2c-1,0,2s)\cdot(-2s,2c,4s)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\big(\underbrace{8s^2}_{p}-\underbrace{4sc+2s}_{i}\big)dt=8\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\boxed{8\pi}\,.$$

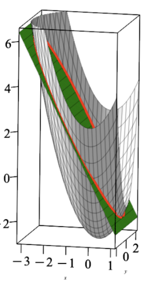


b] Paraboloide y plano se cortan si $x^2+2x+y^2=3\ \Leftrightarrow\ (x+1)^2+y^2=4$, circunferencia de centro $(-1,0)$ y radio 2 de la derecha [x,y de $\bar{\mathrm{c}}$].

Cambiando la y por la z el dibujo de arriba del D del problema **1.** es aquí el corte del sólido V con $y=0$ ($-2x$ es mayor).

El cálculo de $\iiint_V 1$ (su volumen) se puede hacer directamente con integrales dobles:

$$\iiint_V 1=\iint_B\left(3-2x-x^2-y^2\right)dx\,dy\underset{\text{con las polares sugeridas}\uparrow}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \overset{J\downarrow}{r}\,\underbrace{(4-r^2)}_{3-2rc+2-1+2rc-r^2}\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^2\left(4r-r^3\right)dr=2\pi\left[2r^2-\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^2=\boxed{8\pi}\,.$$



En cartesianas es calculable, pero claramente más largo (aunque tenemos pistas). De tres formas:

$$2\int_{-3}^{1}\int_{0}^{\sqrt{3-2x-x^2}}\underbrace{\left(3-2x-x^2-y^2\right)}_{\text{par en }y}dy\,dx=\tfrac{4}{3}\int_{-3}^{1}\left(3-2x-x^2\right)^{3/2}dx=\tfrac{4}{3}6\pi=8\pi\,.$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-1-\sqrt{4-y^2}}^{-1+\sqrt{4-y^2}}\left(3-y^2-2x-x^2\right)dx\,dy=\cdots=\tfrac{4}{3}\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^{3/2}dy=8\pi\,.$$
$$\uparrow y=2\,\mathrm{sen}\,t\ \to\ \tfrac{132}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt$$

Ahora y despejada sobre la D de arriba: $\displaystyle 2\int_{-3}^{1}\int_{x^2-3}^{-2x}\sqrt{z+3-x^2}\,dz\,dx=\tfrac{4}{3}\int_{-3}^{1}\left(3-2x-x^2\right)^{3/2}dx=8\pi\,.$