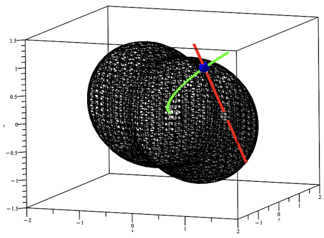
Soluciones del examen de Cálculo (grupo C) (19 de mayo de 2025)

1. Sea $F(x,y,z)=x^2+2xy+y^4+z^2$. **a]** Calcular en el punto $\bar{p}=(1,-1,1)$ la recta R normal a la superficie S dada por $F=1$ y el punto en el que R corta el plano $z=0$.
b] Encontrar dos $\bar{u}$ unitarios (no múltiplos uno del otro) para el que sea la derivada $D_{\bar{u}}F(\bar{p})=0$.
c] Si $h(t)=F\big(t^3,-t,t^2\big)$, calcular, mediante la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$, el valor de $h'(1)$. [2 ptos]



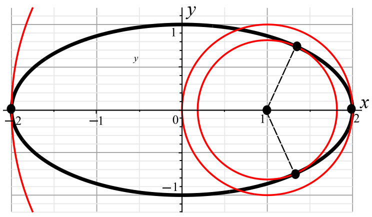
$\nabla F=\big(2x+2y,\,2x+4y^3,\,2z\big)\xrightarrow{\bar{p}}\boxed{(0,-2,2)}$. **a]** Como ∇F es normal a S la R será:

$\bar{x}=(1,-1,2)+\underset{\text{ó } t(0,-1,1)}{t(0,-2,2)}=\boxed{(1,-1-2t,\,1+2t)}$, que si $t=-\frac{1}{2}$ nos da $\boxed{(1,0,0)}$.

b] Al ser $F\in C^1$, es $D_{(a,b,c)}f(\bar{p})=2c-2b=0$ si $c=b$. $\|(a,b,b)\|=\sqrt{a^2+2b^2}$.
Dos de los infinitos vectores unitarios por ejemplo son $\bar{u}=(1,0,0)$, $\bar{u}=\big(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\big)$.

c] Si $\bar{c}(t)=\big(t^3,-t,t^2\big)$ será $h'(1)=\underset{\text{ó } h'=3t^2F_x-F_y+2tF_z=\cdots}{\nabla F(\overset{=\bar{p}}{\bar{c}(1)})\cdot\bar{c}'(1)=(0,-2,2)\cdot(3,-1,2)}=\boxed{6}$ [fácil de comprobar, pues $h(t)=t^6$].

2. Hallar, minimizando la distancia al cuadrado y con multiplicadores de Lagrange, los puntos de $x^2+4y^2=4$ más cercanos al punto $(1,0)$. Parametrizar la curva de alguna forma y volver a hallar los puntos. [2 ptos]



Minimizamos $D=(x-1)^2+y^2$ sobre la elipse. Con multiplicadores:

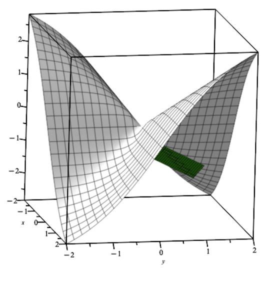
$$\begin{cases}2x-2=2\lambda x\,,\ x(1-\lambda)=1 & x=\frac{4}{3},\ y=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\,,\ D\big(\frac{4}{3},\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\big)=\frac{2}{3}\ \textbf{(más próximos)}\\ 2y=8\lambda y,\ y(1-4\lambda)=0\,,\ y=0\,,\ \lambda=\frac{1}{4} & \\ x^2+4y^2=4 & x=\pm2\,,\ D(-2,0)=9\ \text{(más lejano)}\,,\ D(2,0)=1\ \text{(máximo local)}\end{cases}$$

Parametrizando la elipse $(2\cos t,\operatorname{sen}t)$, $t\in[0,2\pi]$, debemos minimizar:

$h(t)=(2c-1)^2+s^2$, $h'(t)=2s(2-3c)=0\ \rightarrow\ s=0$ o $c=\frac{2}{3}$ $\big(s^2=1-\frac{4}{9}\big)$, que da los mismos cuatro puntos.

O como $y^2=1-\frac{1}{4}x^2$, estudiamos $p(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+2$ con $x\in[-2,2]$, $p'(x)=\frac{3x}{2}-2\ \rightarrow\ x=\frac{4}{3}$ y los extremos.

3. Sea $\begin{cases}f(x,y)=\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ f(0,0)=0\end{cases}$. **a]** Precisar en $(0,0)$ si f es continua, si existen f_x , f_y y si f es diferenciable. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica en $(-1,1)$. [2.2 ptos]
b] Calcular la integral $\iint_D f$, con D dado por $x^2+y^2\le2$, $x\ge0$, $y\ge1$.



a] $|f(r,\theta)|=r|\operatorname{sen}2\theta|\le r\underset{r\to0}{\longrightarrow}0\ \Rightarrow$ continua. $f(x,0)=f(0,y)=0\ \Rightarrow\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

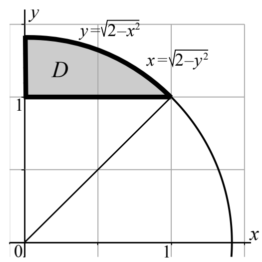
$\frac{f(\bar{x})-0-\bar{0}\cdot\bar{x}}{\|\bar{x}\|}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=\operatorname{sen}2\theta$ depende de θ , no tiene límite y así f **no es diferenciable**.

O por no haber más derivadas direccionales. Por ejemplo, $f(x,x)=\sqrt{2}|x|$ no derivable.

$f_x=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_y\,\frac{2x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ (cambiando papeles). $\nabla f(-1,1)=\big(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$.

O en polares $f_r=2cs$, $\frac{f_\theta}{r}=2c^2-2s^2$, $\bar{e}_r=(c,s)$, $\bar{e}_\theta=(-s,c)$, $r=\sqrt{2}$, $-c=s=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ...

El plano tangente es: $z=-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)-\frac{\sqrt{2}}{2}(y-1)\ \rightarrow\ \boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)}$.



b] Más corto $\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-y^2}}f\,dx\,dy=2\int_1^{\sqrt{2}}\Big[y\sqrt{x^2+y^2}\,\Big]_0^{\sqrt{2-y^2}}dy=2\int_1^{\sqrt{2}}\big[\sqrt{2}y-y^2\big]dy=\boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{3}}$.

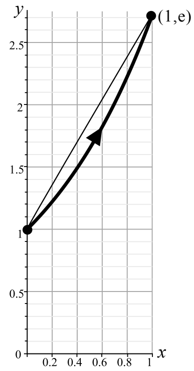
O bien $\int_0^1\int_1^{\sqrt{2-x^2}}f\,dy\,dx=2\int_0^1\Big[x\sqrt{x^2+y^2}\,\Big]_1^{\sqrt{2-x^2}}dx=2\int_0^1\big[\sqrt{2}x-x\sqrt{x^2+1}\,\big]dx=\boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{3}}$.

En polares $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{1/\operatorname{sen}\theta}^{\sqrt{2}}2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr\,d\theta=\frac{2}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\Big[2^{3/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\Big]d\theta=\boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{3}}$.

O incluso, quizás lo más fácil, integral sobre un sector menos integral sobre un triángulo:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}}2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr\,d\theta-\int_0^1\int_0^y f\,dx\,dy=\frac{2\sqrt{2}}{3}\big[\operatorname{sen}^2\theta\big]_{\pi/4}^{\pi/2}-2\int_0^1y^2\big[\sqrt{2}-1\big]dy=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}\,.$$

4. Sea C el tramo de la curva $y=\mathrm{e}^x$ con $0\le x\le 1$. **a]** Parametrizar la curva C y probar que su longitud es $>\frac{3}{2}$.
b] Si $\bar{\mathrm{g}}(x,y)=(2x+y,x)$ calcular el valor de su integral de línea desde $(0,1)$ hasta $(1,\mathrm{e})$ a lo largo de C. [1.8 ptos]



a] Parametrizando $\bar{c}(x)=\big(x,\mathrm{e}^x\big)$, $x\in[0,1]$. $\|\bar{c}'\|=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$, $L=\int_0^1 \underbrace{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}_{\ge \mathrm{e}^x}dx \ge \mathrm{e}^x\big]_0^1=\mathrm{e}-1\ge\frac{3}{2}$.
o $\bar{c}_*(y)=(\ln y,y)$, $y\in[1,\mathrm{e}] \to L=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+y^{-2}}\,dy$

O longitud de C mayor que la del segmento que une los puntos: $\sqrt{(\mathrm{e}-1)^2+1}>\mathrm{e}-1$.

Con más trabajo, una cota mejor: $1+\mathrm{e}^{2x}=2+2x+2x^2+\cdots \longrightarrow L>\int_0^1\sqrt{2+2x}\,dx=\frac{8-2\sqrt{2}}{3}>\frac{5}{3}>\frac{3}{2}$.

$\big[$ L es calculable, pero es largo y, no es fácil acotar el resultado sin ordenador:

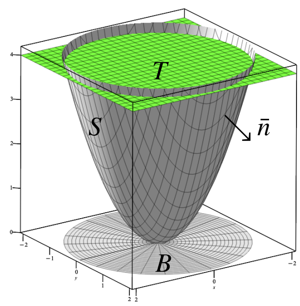
$$s=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}} \longrightarrow \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}\frac{s^2ds}{s^2-1}=\cdots=\sqrt{1+\mathrm{e}^2}-\sqrt{2}-1+\ln\big(\sqrt{1+\mathrm{e}^2}-1\big)+\ln\big(\sqrt{2}+1\big)\approx 2.0035\big].$$

b] Con la $\bar{c}$ e integrando por partes: $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}=\int_0^1 \underbrace{\big(2x+\mathrm{e}^x,x\big)\cdot\big(1,\mathrm{e}^x\big)}_{2x+(x+1)\mathrm{e}^x}dx=\big[x^2+x\mathrm{e}^x\big]_0^1=\boxed{1+\mathrm{e}}$.

O por ser conservativo $\big(g_x=1=f_y$ y de $C^1\big)$, de potencial $U=x^2+xy$, será $U(1,\mathrm{e})-U(0,0)$.

O yendo por el segmento que une los puntos $\bar{r}(x)=\big(x,1+(\mathrm{e}-1)x\big)$, $x\in[0,1] \longrightarrow \int_0^1\big(1+2\mathrm{e}x\big)\,dx$.

5. Sean S la parte del paraboloide $z=x^2+y^2$ con $z\le 4$, V el sólido limitado por S y el plano $z=4$ y el campo $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=(y,2x,z)$. **a]** Calcular la integral triple $\iiint_V \mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}$. **b]** Parametrizar S y calcular integral $\iint_S \bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}$.
c] Comprobar que $\bar{\mathrm{f}}$ cumple el teorema de Gauss sobre V. [2 ptos]



a] $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}=1$, $\iiint_V 1=\iint_B\big(4-x^2-y^2\big)dx\,dy=\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^2 r\big(4-r^2\big)dr\,d\theta=2\pi\big[2r^2-\frac{1}{4}r^4\big]_0^2=\boxed{8\pi}$.

Aún más corto es este orden: $\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^4\!\!\int_0^{\sqrt{z}} r\,dr\,dz\,d\theta=\pi\int_0^4 z\,dz=8\pi$.

b] $\bar{r}(x,y)=\big(x,y,x^2+y^2\big)$, $(x,y)\in B$ círculo centrado con $r=2$. $\bar{r}_x\times\bar{r}_y=(-2x,-2y,1)\uparrow$

Integral sobre S: $\iint_S\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=\iint_B \underbrace{\big(y,2x,x^2+y^2\big)\cdot\overbrace{(2x,2y,-1)}^{\bar{n}\text{ exterior}}}_{6xy-x^2-y^2}=\underset{\uparrow 6xy \text{ impar y polares}}{-}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^2 r^3\,dr=-8\pi$.

O polares directamente $\bar{r}^*(r,\theta)=\big(r\cos\theta,r\,\mathrm{sen}\,\theta,r^2\big)$, $\bar{r}^*_r\times\bar{r}^*_\theta=\big(-2r^2c,-2r^2s,r\big)\longrightarrow$
$$\iint_S\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=\int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int_0^2\big(rs,2rc,r^2\big)\cdot\big(2r^2c,2r^2s,-r\big)\,dr\,d\theta=-2\pi\int_0^2 r^3dr=-8\pi.$$

c] Para completar la frontera de V debemos considerar además la integral sobre la tapa T fácil de hacer:
$\bar{r}_*=(x,y,4)$ en B, $(0,0,1)\uparrow$ exterior. $\iint_T\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=\iint_B 4=4(\text{área de }B)=4\pi 2^2=16\pi$.

Por tanto, $\iint_{\partial V}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{S}=16\pi-8\pi=\boxed{8\pi}$, como asegura el teorema de Gauss.